Algorithme itératif d'optimisation globale des fonctions β-höldériennes utilisant les courbes α-denses

M. Rahal [1] *et* A. Ziadi [2]

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Numériques, Université de Sétif, Algérie
email : 1. mrahal_dz@yahoo.fr 2. ziadiaek@yahoo.fr

Résumé : Dans ce papier on propose un algorithme itératif pour résoudre le problème d'optimisation globale des fonctions höldériennes à plusieurs variables. On présente une variante d'une méthode déterministe. Il s'agit de la méthode de la transformation réductrice Alienor. Cette transformation permet de ramener une fonction à n variables à une fonction d'une seule variable qui conserverait les minimiseurs globaux au moins de façon approchée. La technique utilisée est basée sur la réduction de la dimension en utilisant des "courbes remplissant l'espace". Ces courbes ont l'avantage d'être de classe C^{∞} et préservent les propriétés de la fonction objectif. La méthode Aliénor s'est révélée être d'une grande efficacité en s'associant à certaines méthodes unidimensionnelles telles que les algorithmes de recouvrement. Le couplage d'Alienor avec ces algorithmes a été appliqué sur des fonctions tests de plusieurs variables ayant un minimum global difficile à trouver par les méthodes classiques. Nous étudions dans notre travail le couplage de la méthode Alienor avec l'algorithme d'Evtushenko dans le cas où la fonction objectif est höldérienne de paramètres h et β et définie sur un pavé P de $\mathbb{R}^n$. Des résultats intéressants concernant l'approximation du minimum et le temps de calcul ont été réalisés.

Mots clés : Optimisation Globale, Fonction höldérienne, Méthode de recouvrement, Méthode de la transformation réductrice, courbes α-denses.

1. Introduction

Considérons le problème de minimisation globale non-convexe suivant :

$$\min_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in P} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (\mathbf{P})$$

que l'on veut résoudre avec une précision exigée $\varepsilon > 0$, avec f une fonction höldérienne de constante $h > 0$ et d'exposant $\frac{1}{\beta}$ $(\beta > 1)$ et définie sur un pavé $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1. Définition et propriétés des fonctions höldériennes

Définition 1.1. Une fonction $f : P \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite höldérienne sur P, s'il existe deux constantes réelles $h > 0$ et $\beta > 1$, telles que

$$\forall\, x, y \in P\ , \qquad |f(x) - f(y)| \leq h \left\| x - y \right\|^{\frac{1}{\beta}} \tag{1.1}$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne.

• Si f est une fonction höldérienne de constante h et d'exposant $\frac{1}{\beta}$ sur P , alors elle est de même pour toute constante $h' > h$ et d'exposant $\frac{1}{\beta'}$ avec $\beta' > \beta$, sur P .
• Bien que les fonctions höldériennes sont continues, elles peuvent être non différentiables. Intuitivement, les fonctions höldériennes telles que β est assez grand sont beaucoup plus irrégulières que celles ou β est assez petit. Ce qui explique le fait que $\beta > 1$.
• Puisque toutes les normes dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes alors toute fonction höldérienne pour une norme est aussi höldérienne pour les autres normes. Par exemple si f vérifie (1.1), alors

$$|f(x) - f(y)| \leq h \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq h \left(\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

d'où

$$|f(x) - f(y)| \leq h \left(\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left\| x - y \right\|_{\infty}^{\frac{1}{\beta}}.$$

2. Principe général des méthodes de recouvrement

Elles sont basées sur la détection des sous-régions ne contenant pas le minimum global et de leur exclusion de la poursuite de la recherche. Donnons d'abord l'idée clé de ces méthodes [7] (on va par la suite spécifier la description). Supposons que la fonction f est évaluée aux points d'un maillage $x_1, x_2, ..., x_k$ suffisamment dense du pavé P garantit la détection, avec une précision donnée, du minimum global. Soit

$$m_k^* = \min \left\{ f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k) \right\}. \tag{2.1}$$

Pour chaque point x_i du maillage on définit un sous-ensemble $A_i \subset P$ tel que

$$A_i = \{ x \in P : \ f(x) \leq m_k^* - \epsilon \}, \tag{2.2}$$

donc si $\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$ recouvre P alors le problème est résolu.
D'où le problème de minimisation est ramené à la construction d'une suite de points $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ vérifiant $P \subset \overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$.

3. Méthode d'Evtushenko unidimensionnelle pour les fonctions höldériennes

Dans le cas unidimensionnel le problème (**P**) a été résolu dans les travaux réalisés de [4, 5, 6], en utilisant les sous-estimateurs de la fonction objectif. Le calcul des minimiseurs globaux des fonctions minorantes ce fait en déterminant le seul point d'intersection des courbes paraboliques ce qui conduit à résoudre à chaque itération une équation algébrique non-linéaires de degrée β.

Dans ce travail, nous allons présenter une méthode itérative d'optimisation globale pour résoudre le problème (**P**), en s'inspirant de l'algorithme de recouvrement itératif non-uniforme d'Evtushenko [1, 2, 3] pour les fonctions lipschitziennes. Cette méthode a la réputation d'être efficace en dimension 1, elle est plus connue et plus commentée dans la littérature, nous allons montrer qu'elle peut être etendue aux fonctions höldériennes. La mise en oeuvre de l'algorithme et la technique a l'avantage de ne pas utiliser des calculs intermédiaires difficiles, tels la construction des fonctions minorantes ou exiger de la fonction d'être dérivable, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul par rapport aux autres techniques.
Le chema de l'algorithme qu'on utilise est de la forme suivante :

$$x_{k+1} = x_k + r_{ik}$$

où r_{ik} des scalaires dépends de f et les constantes h, β et ϵ.

Théorème 3.1. Soit f une fonction höldérienne de paramètres $h > 0$ et $\beta > 1$, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Supposons que f soit évaluée aux points $x_1, x_2, ..., x_k$. Posons $m_k^* = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \{f(x_i)\}$ et désignons par $(I(x_i, r_{ik}))_{1 \leq i \leq k}$ une famille d'intervalles de centres $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ et de rayons r_{ik}. Si on a $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I(x_i, r_{ik})$ avec $r_{ik} = \left(\frac{f(x_i) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^{\beta}$ alors m_k^* est le minimum global, à ϵ près, *de* f *sur* $[a, b]$.

Preuve. D'après l'inégalité (1.1) on a

$$\forall\ x, y \in [a, b]\ , \qquad f(y) - h\,|x - y|^{\frac{1}{\beta}} \leq\ f(x), \tag{3.1}$$

ce qui fait pour $y \in [a, b]$ fixé, si un certain x vérifie

$$m_k^* - \epsilon \leq\ f(y) - h\,|x - y|^{\frac{1}{\beta}}\ , \tag{3.2}$$

alors $m_k^* - \epsilon \leq f(x)$. On considère les intervalles

$$I(x_i, r_{ik}) = \{x \in \mathbb{R},\ \ |x - x_i| \leq r_{ik}\}\,;$$

de l'inégalité (3.2) on a $|x - y| \leq \left(\frac{f(y) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^{\beta}$,
et pour $y = x_i$, on doit donc avoir les rayons r_{ik} donnés par $r_{ik} = \left(\frac{f(x_i) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^{\beta}$.
On peut montrer facilement que pour tout $i = 1, ..., k$ et pour tout
$x \in I(x_i, r_{ik})$ on a

$$m_k^* - \epsilon \leq f(x).$$

Soit maintenant $M = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0)$, $x_o \in [a, b]$, on a $x_0 \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} I(x_i, r_{ik})$, donc il existe $i_0 \in \{1, 2, ..., k\}$ tel que $x_0 \in I(x_{i_0}, \left(\frac{f(x_{i_0}) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^{\beta})$
par conséquent

$$|x_{i_0} - x_0| \leq \left(\frac{f(x_{i_0}) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^{\beta},$$

donc

$$|x_{i_0} - x_0|^{\frac{1}{\beta}} \leq \frac{f(x_{i_0}) - m_k^* + \varepsilon}{h}. \tag{3.3}$$

Puisque f est (h, β)-höldérienne et d'après (3.3) on a

$$|f(x_{i_0}) - f(x_0)| \leq f(x_{i_0}) - m_k^* + \varepsilon.$$

D'où

$$m_k^* - M \leq \epsilon.$$

On déduit que m_k^* est une solution optimale de $(\mathbf{P})$. ■

Donc si la réunion des intervalles $I(x_i, r_{ik})$ ne couvre pas $[a, b]$, le minimum global peut être atteint dans $[a, b]$-$\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} I(x_i, r_{ik})$. Par conséquent, les intervalles $I(x_i, r_{ik})$ peuvent être omis de l'ensemble faisable $[a, b]$; on cherche la solution dans la partie restante. Le problème $(\mathbf{P})$ aura une solution lorsque la réunion des intervalles couvre complètement $[a, b]$.

La représentation donnée suggére une méthode constructive pour résoudre le problème $(\mathbf{P})$. En résumé, la méthode consiste à procéder ainsi : supposons que pour une certaine suite de points $\{x_k\}$ le record m_k^* est déterminé par la relation (2.1). La suite des points x_i et les rayons r_{ik} de l'intervalle sont stockés dans une mémoire. Si au nouveau point x_{k+1} on a $f(x_{k+1}) < m_k^*$, on pose $m_{k+1}^* = f(x_{k+1})$ et on remplace le terme r_{ik} par r_{ik+1}. Si les intervalles I_{ik+1} recouvrent l'intervalle $[a, b]$, alors le calcul sera stoppé ; sinon, on prend un nouveau point x_{k+2} et on continue. L'ensemble $[a, b]$ est recouvert par des intervalles de différents rayons (non-uniformité).

Considérons un point x_i auquel $m_i^* = f(x_i)$, $1 \leq i \leq k$, on a évidemment $f(x_i) = m_i^* \geq m_k^*$ d'où,

$$r_{ik} = \left(\frac{f(x_i) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^\beta \geq (\frac{\epsilon}{h})^\beta.$$

Donc le plus petit rayon est au point x_i auquel $m_i^* = f(x_i)$ i.e., $(\frac{\epsilon}{h})^\beta$. On prend donc $x_1 = a + (\frac{\epsilon}{h})^\beta$, parce que à l'initialisation $f(x_1) = m_1^*$. Avec cette valeur de x_1, on gagne du temps et on est sûr de ne pas avoir ignorer le minimum global au voisinage de ce point. En effet, si

$$x^* = \arg\min_{x \in [a,b]} f(x) \in [a, a + (\frac{\epsilon}{h})^\beta]$$

alors :

$$|f(x_1) - f(x^*)| \leq h \left|x_1 - x^*\right|^{\frac{1}{\beta}} \leq \varepsilon.$$

En général, pour $i \geq 1$, la suite $\{x_{i+1}\}$ est définie par :

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{f(x_i) - m_k^* + \varepsilon}{h}\right)^\beta + (\frac{\epsilon}{h})^\beta.$$

Ce choix nous permet de ne pas rater le minimum global de f, car les intervalles I_i se rencontrent. On arrête quand k vérifie $[a, b] \subset \overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} I(x_i, r_{ik})$.

Si $x_k < b$ et $x_k + r_{kk} \geq b$, alors le dernier point de la suite est x_k.

Si $x_k + r_{kk} < b$ et $x_k + r_{kk} + (\frac{\epsilon}{h})^\beta \geq b$ le dernier point de la suite sera $x_{k+1} = b$.

Algorithme d'Evtushenko

1. Initialisation

Poser $k = 1$, $x_1 = a + (\frac{\epsilon}{h})^\beta$, $x_\epsilon = x_1$, $f_\epsilon = f(x_\epsilon)$.

2. Etapes, $k = 2, 3, ...$

Poser $x_{k+1} = x_k + (\frac{\epsilon}{h})^\beta + (\frac{f(x_k) - f_\epsilon + \varepsilon}{h})^\beta$

Si $x_{k+1} > b - (\frac{\epsilon}{h})^\beta$, alors arrêter.

Sinon, déterminer $f(x_{k+1})$.
Si $f(x_{k+1}) < f_\epsilon$, alors poser $x_\epsilon = x_{k+1}$, $f_\epsilon = f(x_{k+1})$.
Poser $k = k + 1$ et aller à 2.

4. La méthode de la transformation réductrice

Peu de travaux ont été faits pour l'optimisation globale des fonctions höldériennes à plusieurs variables. Le principe fondamental de la méthode de la transformation réductrice [12] consiste à effectuer une transformation qui permet de ramener le problème multidimensionnel à un problème unidimensionnel afin d'appliquer les méthodes d'optimisation plus efficaces adaptées au cas d'une seule variable. L'idée de base consiste à densifier l'ensemble faisable par une courbe paramétrée (α-dense) continue et assez régulière. La fonction multivariable est transformée en une fonction d'une seule variable. Ainsi notre problème est ramené à un problème plus facile à résoudre car il y a une seule direction à explorer.

Dans cette section, nous allons présenter la méthode Alienor, élaborée par Y. Cherruault et coll. [9, 10]. L'idée consiste à approcher une fonction de plusieurs variables par une fonction d'une seule variable, il devenait alors assez simple de déterminer les minima globaux car il suffisait de les chercher en suivant l'évolution d'une certaine courbe.
Soient n variables $x_1, ..., x_n$, la méthode donc consiste à exprimer ces variables à l'aide d'une seule en densifiant l'espace $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une simple courbe. Nous allons mettre en évidence ce que nous appellerons la transformation réductrice :

$$x_i = \varphi_i(t),\ t > 0,\ i = 1, ..., n.$$

On désigne par μ la mesure de Lebesgue, A un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ (en général $A = [0, T]$, avec $T > 0$) et α un nombre réel, strictement positif et supposé très petit par rapport aux dimensions du pavé $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, ($\alpha << \min_{1\le i\le n}(b_i - a_i)$). Où $n \geq 2$ est un entier.

Définition 4.1. On dit qu'une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi : A \to P = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$$

est α-dense dans P ou bien qu'elle densifie P avec une densité α si pour chaque $x \in P$, il existe $t \in A$ tel que

$$d(x, \varphi(t)) \leq \alpha,$$

où d est la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

On construit alors une courbe paramétrée $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$,
α-dense dans l'ensemble faisable $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ pour tout $t \in [0, T]$.
De cette façon, la fonction $f(x_1, ..., x_n)$ devient :

$$f^*(t) = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)),$$

et le problème initial de minimisation (**P**) est alors approximé par le problème de minimisation unidimensionnel

$$\min_{t\in[0,T]} f^*(t) \qquad (\mathbf{P}^*)$$

où T est la borne supérieure du domaine de définition de la fonction φ qui permet de α-densifier P.
Mais deux questions essentielles se posent, existe-t-il une méthode générale permettant de générer ces courbes α-denses ? et peut-on trouver des classes de transformation minimisant le temps de calcul du minimum global ?.
Des réponses positives ont été données par A. Ziadi et Y. Cherruault [11] et les ont améliorée par l'obtention de nouveaux résultats qui permettent de construire de grandes classes de courbes α-denses. Cette dernière voie s'est révélée être la plus intéressante car les courbes obtenues possèdent des représentations paramétriques plus simples. Une étude complète et détaillée est donnée dans [9, 10, 11].

4.1. Une nouvelle transformation réductrice

La caractérisation et la génération des courbes α-denses dans un pavé de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ est un sujet fondamental. D'autre part, l'un des objectif les plus importants est l'application des courbes α-denses à l'optimisation globale. Mais, tout cela dépend essentiellement de la longueur de la courbe qui densifie l'ensemble feasable.
En se basant sur un résultat donné dans [10]. On définit d'une manière constructive une courbe α-dense dans un pavé quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.1. Soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ des fonctions continues surjectives, respectivement définies de A dans $[a_i, b_i]$ pour $i = 1, 2, ..., n$, et soient aussi $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$et α des nombres strictement positifs tels que pour tout
$i = 1, 2, ..., n-1$, il existe une partition finie de Acomposée d'intervalles $(I_{i,j})_{1 \leq j \leq m_i}$ et vérifiant :
(a) $\mu(I_{i,j}) = t_i, \quad \forall j = 1, 2, ..., m_i$.
(b) $\varphi_i(\overline{I}_{i,j}) = [a_i, b_i], \quad \forall j = 1, 2, ..., m_i$
(c) $\mu(\varphi_{i+1}(I_{i,j})) \leq \alpha, \quad \forall j = 1, 2, ..., m_i$.
Alors la courbe paramétrée définie par la fonction $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ est $\sqrt{n-1}\alpha$-dense dans $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

On peut voir la preuve dans Ziadi [10].

Théorème 4.2. On considère dans $\mathbb{R}^n$ le pavé $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ et α un nombre strictement positif tel que le nombre $\frac{b_i - a_i}{\alpha}$ soit un entier pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Posons $T = \frac{\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)}{\alpha^n}$ et soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$des fonctions, respectivement définies de $[0, T]$ dans $[a_i, b_i]$ par :

$$\begin{aligned}
\varphi_i(t) &= a_i + \frac{\sigma_i(t)}{t_i}(b_i - a_i) \qquad \textit{pour } i = 1, 2, ..., n \text{ ;} \\
\textit{avec} \qquad & t_0 = 1, \quad t_i = \frac{b_i - a_i}{\alpha} t_{i-1} \\
\sigma_i(t) &= (-1)^{\beta_i(t)} [t - (\beta_i(t) + \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\beta_i(t)}\right)) t_i] \\
\beta_i(t) &= Ent(\frac{t}{t_i}) \quad \text{où } \textit{Ent est l'application " partie entière"}
\end{aligned}$$

Alors la fonction définie par $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ pour $t \in [0, T]$ représente une courbe paramétrée $\sqrt{n-1}\alpha$-dense dans $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Preuve.

(a) Posons $m_i = \frac{\prod_{k=i+1}^{n}(b_k-a_k)}{\alpha^{n-i}}$ pour $i = 1, 2, ..., n-1$.
Les hypothèses impliquent que pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$, le nombre m_i est un entier et $t_n = m_i t_i = T$. Considérons les intervalles

$$\begin{array}{lll} & I_{i,j} & = [(j-1)t_i,\ jt_i[\qquad \text{pour } j = 1, 2, ..., m_i - 1 \\ \text{et} & I_{i,m_i} & = [(m_i-1)t_i,\ m_i t_i]. \end{array}$$

Il est facile de voir que pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$, la famille $(I_{i,j})_{1\leq j\leq m_i}$ forme une partition de l'intervalle $[0, T]$ et $\mu(I_{i,j}) = t_i, \quad \forall j = 1, 2, ..., m_i$.
En outre, on peut montrer que :
(b) pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$,

$$\varphi_i(\overline{I}_{i,j}) = [a_i, b_i], \quad \forall j = 1, 2, ..., m_i,$$

(c) pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$,

$$\mu(\varphi_{i+1}(I_{i,j})) \leq \alpha, \quad \forall j = 1, 2, ..., m_i.$$

Il en résulte que toutes les hypothèses du Théorème 3 sont satisfaites.
Donc la courbe paramétrée définie par $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$,
pour $t \in [0, T]$, est $\sqrt{n-1}\alpha$-dense dans $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. ■

Proposition 4.1. La fonction $f^*(t) = f(\varphi(t))$ pour $t \in [0, T]$ est une fonction höldérienne de constante h^* et d'exposant $\frac{1}{\beta}$, où h^* est donnée par l'expression suivante :

$$h^* = h\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{b_i - a_i}{t_i})^2\right)^{\frac{1}{2\beta}}.$$

4.2. La méthode mixte Alienor-Evtushenko

Nous étudions dans cette section, ce couplage dans le cas où la fonction objectif est höldérienne de paramètres h et β, et définie sur un pavé P.

Première étape. En se basant sur le Théorème 4.2, on définit l'application

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) : [0, T] \to \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i],$$

qui représente une courbe α-dense dans P, avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{\epsilon}{2h}\right)^{\beta}$, le paramètre α est choisi de telle façon que le minimum global soit estimé avec la précision ϵ.

Deuxième étape. On applique, maintenant l'algorithme d'Evtushenko à la fonction d'une seule variable $f^*(t) = f(\varphi(t))$ pour $t \in [0, T]$.
Bien évidemment $f^*(t)$ est (h^*, β)-höldérienne.

1. Initialisation Poser $k = 1$, $t_1 = (\frac{\epsilon}{h^*})^{\beta}$, $t_\epsilon = t_1$, $f^*_\epsilon = f^*(t_\epsilon)$.
2. Etapes, $k = 2, 3, ...$
Poser $t_{k+1} = t_k + (\frac{\epsilon}{h^*})^{\beta} + (\frac{f^*(t_k) - f^*_\epsilon + \varepsilon}{h^*})^{\beta}$
Si $t_{k+1} > T - (\frac{\epsilon}{h^*})^{\beta}$, alors arrêter.
Sinon, déterminer $f^*(t_{k+1})$.
Si $f^*(t_{k+1}) < f^*_\epsilon$, alors poser $t_\epsilon = t_{k+1}$, $f^*_\epsilon = f^*(t_{k+1})$, .
Poser $k = k + 1$ et aller à 2.

Théorème 4.3. La méthode mixte Alienor-Evtushenko appliquée au problème (**P**) converge en un nombre fini de points vers le minimum global avec une précision inférieure ou égale à ϵ.

Preuve. La suite générée par l'algorithme d'Evtushenko est évidemment finie puisque la distance entre deux points successifs de la suite est supérieure ou égale à $(\frac{\epsilon}{h})^{\beta}$.
Notons par m et m' respectivement les minima globaux de f et f^*. D'autre part, désignons par f_ϵ^* le minimum global du problème (**P**) obtenu par Alienor-Evtushenko. Montrons que

$$f_\epsilon^* - m \leq \epsilon.$$

Puisque f est continue sur P, il existe un point $y \in P$ tel que $m = f(y)$. Par ailleurs, il existe $t_0 \in [0, T]$ tel que

$$\|y - \varphi(t_0)\| \leq (\frac{\epsilon}{2h})^{\beta}, \text{ donc,} \qquad |f(y) - f(\varphi(t_0))| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Il en résulte que $f(\varphi(t_0)) - m \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Et puisque $m \leq m' \leq f(\varphi(t_0))$, on en déduit

$$m' - m \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1}$$

D'autre part, soit $(t_k)_{1\leq k\leq N}$ la suite de points d'évaluation de la fonction f^* générée par l'algorithme d'Evtushenko. Il existe $t^* \in [0, T]$
tel que $f^*(t^*) = m'$.
Si le point t^* est compris entre 0 et t_1, ou entre t_N et T, alors l'inégalité $f_\epsilon^* - m' < \frac{\epsilon}{2}$ est évidente. Considérons le cas où $t_k \leq t^* \leq t_{k+1}$, pour un certain $k \in \{1, ..., N-1\}$. On a

$$t_{k+1} = t_k + \left(\frac{f^*(t_k) - f_\epsilon^* + \varepsilon}{h^*}\right)^{\beta}.$$

1) Si $t_k \leq t^* \leq t_k + \left(\frac{f^*(t_k) - f_\epsilon^*}{h^*} + \frac{\varepsilon}{2h^*}\right)^{\beta}$, puisque la fonction f^* est h^*-höldérienne, alors

$$|f^*(t^*) - f^*(t_k)| \leq h^* |t^* - t_k|^{\frac{1}{\beta}} \leq h^* \left(\frac{f^*(t_k) - f_\epsilon^*}{h^*} + \frac{\varepsilon}{2h^*}\right),$$

par conséquent,

$$f_\epsilon^* - f^*(t^*) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

d'où, on obtient

$$f_\epsilon^* - m' \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

2) Si maintenant $t_k + \left(\frac{f^*(t_k) - f_\epsilon^*}{h^*} + \frac{\varepsilon}{2h^*}\right)^{\beta} \leq t^* \leq t_{k+1}$, alors

$$|f^*(t^*) - f^*(t_{k+1})| \leq h^* |t^* - t_{k+1}|^{\frac{1}{\beta}} \leq h^* \left(\left(\frac{\varepsilon}{2h^*}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent

$$f^*(t_{k+1}) - f^*(t^*) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où, on obtient

$$f_\epsilon^* - m' < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Finalement, on déduit de (4.1) et (4.2) que

$$f_\epsilon^* - m < \epsilon.$$

4.3. Le temps de calcul du minimum global

Il n'est pas toujours facile d'estimer le temps de calcul nécessaire à l'obtention d'un minimum global. Pour la recherche d'un minimiseur global de la fonction approximée $f^*(t)$, on peut procéder à une discrétisation de pas Δt de l'intervalle $[0, T]$, sur lequel se trouve un minimiseur [13]. On construit ainsi l'ensemble :

$$M = \{f^*(i\Delta t),\, i = 1, ..., N, \text{ avec } N\Delta t = T\}$$

Nous allons voir comment choisir α et le pas Δt pour obtenir une précision désirée $\epsilon > 0$.

Soit l la constante de Lipschitz de la fonction $\varphi(t)$ qui représente la courbe α-dense dans P.
Il est évident que la fonction $f^*(t) = f(\varphi(t))$ est höldérienne de paramétres $hl^{\frac{1}{\beta}}$ et β sur $[0, T]$.

Notons par m (resp. m^*) le minimum global de f (resp. f^*) et par f^*_ϵ le minimum global obtenue par la méthode Alienor, on doit donc avoir

$$f^*_\epsilon - m \leq \epsilon.$$

La continuité de f sur P implique l'existence d'un point $x_0 \in P$ tel que $m = f(x_0)$. De plus, l'α-densité de φ entraîne l'existence de $t_0 \in [0, T]$ tel que :

$$\|x_0 - \varphi(t_0)\| \leq \alpha \text{ et } \|f(x_0) - f(\varphi(t_0))\| \leq h\alpha^{\frac{1}{\beta}}.$$

Mais

$$m \leq m^* \leq f(\varphi(t_0)),$$

et par conséquent

$$0 \leq m^* - m \leq h\alpha^{\frac{1}{\beta}}.$$

D'autre part, la continuité de f^* entraine :

$$f^*_\epsilon - m^* \leq hl^{\frac{1}{\beta}}\frac{\Delta t}{2};$$

ce qui implique

$$f^*_\epsilon - m \leq h\alpha^{\frac{1}{\beta}} + hl^{\frac{1}{\beta}}\frac{\Delta t}{2}.$$

Pour obtenir la précision $\epsilon > 0$ désirée, il suffit de choisir :

$$\alpha = \left(\frac{\epsilon}{2h}\right)^\beta, \quad \Delta t = \frac{\epsilon}{hl^{\frac{1}{\beta}}}$$

Le temps de calcul dans cette méthode est donné par

$$\mathbb{T} = \frac{Thl^{\frac{1}{\beta}}}{\epsilon}\mathbb{T}_0.$$

Où $\mathbb{T}_0$ est le temps moyen de calcul de $f^*(t)$ pour t fixé.

5. Tests numériques

Les fonctions tests données ci-dessous ayant la particularité de posséder plusieurs minima locaux.

Exemples de fonctions höldériennes (avec $\varepsilon = 0.1$).

1) $f_1(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$, pour cette fonction on a $h = \sqrt{2}$, $\beta = 2,\ x_{opt} = -0.98521$

2) [5] $f_2(x) = \sum\limits_{k=1}^{5} k\left|\sin((3k+1)x+k)\right| |x-k|^{\frac{1}{5}},\ x \in [0,10]$, on a $h = 77,\ \beta = 5,\ x_{opt} = 1.29865$

3) $f_3(x,y) = |x+y-0.25|^{\frac{2}{3}} - 3\cos\frac{x}{2},\ (x,y) \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$, $h = 2,42$, $\beta = \frac{3}{2},\ x^*_{opt} = (-0.00598, 0.39887)$

4) $f_4(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{1}{k}\left|\cos((\frac{3}{k}+1)x+\frac{1}{k})\right| |x-y|^{\frac{1}{3}},\ (x,y) \in [0,10]^2,\ h = 14,77$, $\beta = 3,\ x^*_{opt} = (0.000898, 0.0011)$

5) [14] $f(x,y) = -\cos x \cos y \exp(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\pi}),\ (x,y) \in [-20,20]^2$, $h = 45,265,\ \beta = \frac{1}{2}, f^*_{opt} = -0.96354$.

6. Résolution des systèmes d'équations algébriques non-linéaires

Considérons le système d'équations algébriques non linéaires :

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n) = 0, \quad 1 \le i \le m \le n \tag{\textbf{S}}$$

avec f_i des fonctions höldériennes de paramètres $h_i > 0$ et $\beta_i > 1$,
et définies sur le pavé $P = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i,b_i]$. Nous allons voir l'application de l'algorithme itératif d'optimisation qu'on a vu précédemment sur le système (**S**). D'abord, introduisons sur P, la fonction $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par

$$H(x) = (f_1(x),...,f_m(x))\,.$$

Les solutions approximatives de l'équation :

$$H(x) = 0, \quad x \in P,$$

serons données par les points de l'ensemble suivant

$$P_\epsilon = \{x \in P,\ \|H(x)\| \le \epsilon\}\,,$$

où ϵ est la précision. Pour résoudre (**S**) il suffit de trouver au moins $x^* \in P_\epsilon$.
Le système (**S**) est équivalent au problème d'optimisation globale

$$\min_{x\in\ P} f\ (x)$$

où $f\ (x) = \|H(x)\|$.

Proposition 6.1. Si f_i sont des fonctions höldériennes sur P de paramètres $h_i > 0$ et $\beta_i > 1$, pour $1 \le i \le m$, alors la fonction $f(x)$ est höldérienne sur P de paramètres $h = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} h_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\beta = \max\limits_i \beta_i$.

Proposition 6.2. $x^* \in P$ est une solution du système (**S**) si et seulement si : $0 = f_* = \|H(x^*)\| = \min\{\|H(x)\|, x \in P\}$.

Exemple. Soit le système d'équations algébriques

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 1 \\ |\sin(x+1)|\,|x-2|^{\frac{1}{3}} = 1 \end{cases}$$

On pose : $f_1(x) = \sqrt{1-x^2} - 1$ et $f_2(x) = |\sin(x+1)|\,|x-2|^{\frac{1}{3}} - 1$

Ces deux fonctions sont höldériennes sur $[-1,1]$ successivement de constantes
$h = \sqrt{2},\ \beta = 2$ et $h^{'} = 2,\ \beta^{'} = 3$
Ce système est équivalent au problème d'optimisation globale suivant :

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x),$$

avec $f\ (x) = \|H(x)\|$ et $H(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

En appliquant l'algorithme d'Evtushenko, on trouve pour $\epsilon = 0.1$, la solution du système $x = -0.118963$.

7. Conclusion

La généralisation des méthodes de recouvrement est très difficile à réaliser au cas de plusieurs variables. Cette généralisation est encore plus compliquée si la classe traitée est formée de fonctions höldériennes. Ceci est dû au comportement de ce type de fonctions qui varient plus vite que les fonctions lipschitziennes et au fait que ces fonctions font intervenir deux paramètres h et β. On a présenté un algorithme de recouvrement itératif pour résoudre le problème d'optimisation globale de fonctions höldériennes à une seule variable. La généralisation de la méthode itérative d'Evtushenko au cas multidimensionnel peut être étendue facilement, mais sa mise en oeuvre sur machine est très compliquée. Concernant la méthode de la transformation réductrice, nous avons apporté des nouvelles idées pour pouvoir appliquer cette approche aux problèmes d'optimisation des fonctions höldériennes. L'algorithme obtenue à partir du couplage de la nouvelle variante d'Alienor avec l'algorithme d'Evtushenko est assez simple et relativement efficace et la convergence de la méthode mixte est prouvée. Aussi nous avons appliqué l'algorithme itératif à la résolution des systèmes d'équations algébriques non linéaires.

Références

[1] Yu. G. Evtushenko, *Algorithm for finding the global extremum of a function(case of a non-uniforme mesh)*, USSR Comput. Mathem. and Phys., 11, No. 6, 1390-1403. (1971).

[2] Yu. G. Evtushenko, V. U. Malkova, and A. A. Stanevichys, *Parallelization of the Global Extremum Searching Process*, Automation and Remote Control, Vol. 68, No. 5, pp. 787-798. (2007).

[3] R. Horst and P. M. Pardalos, *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (1995).

[4] E. Gourdin, B. Jaumard, and R. Ellaia , *Global Optimization of Hölder function*, J. of Global Optimization, Vol. 8, pp. 323-348. (1996).

[5] D. Lera and Ya. D. Sergeyev, *Global Minimization Algorithms for Hölder functions*, BIT, Vol 42, No. 1, pp. 119-133. (2002).

[6] M. Rahal and A. Ziadi, *A new extension of Piyavskii's method to Hölder functions of several variables*, Applied mathematics and Computation. Vol. 197, pp. 478-488. (2008).

[7] M. Rahal, *Extension de certaines méthodes de recouvrement en optimisation globale.* Thèse de Doctorat en sciences, Université Ferhat Abbas, Sétif, (2009).

[8] H. Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer, New york, (1994).

[9] A. Ziadi, Y. Cherruault, and G. Mora, *The existance of α-dense Curves with minimal length in a metric space,* Kybernetes, Vol. 29, No. 2, pp. 219-230. (2000).

[10] A. Ziadi, and Y. Cherruault, *Generation of α-dense Curves in a cube of* $\mathbb{R}^n$, Kybernetes, Vol. 27, No. 4, pp. 416-425. (1998).

[11] A. Ziadi, and Y. Cherruault, *Generation of α-dense Curves and Applications to Global Optimization,* Kybernetes, Vol. 29, No.1, pp. 71-82. (2000).

[12] A. Ziadi, Y. Cherruault and G. Mora, *Global Optimization, a New Variant of the Alienor Method*, Comp. Math. Appl., Vol. 41, pp. 63-71. (2001).

[13] G. Mora and Y. Cherruault, *The theoretic calculation time associated with α-dense Curves*, Kybernetes, 27(8-9), pp. 919–39. (1998).

[14] S. K. Mishra, *Some new test functions for global optimization and performance of repulsive particle swarm method*, Munich Personal RePEc Archive, Paper No. 2718, (2006).