

N° Série:...../2021

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des hydrocarbures, des énergies renouvelables et des
sciences de la terre et l'univers
Département de forage et mécanique des chantiers pétroliers



Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention du diplôme de Master
Option: Mécanique des chantier pétrolier

Présenté Par:
Ghemima Elhoceine – Mekboul Safi -- Hadfi Oualid

-THEME-

Traitement numérique des problèmes de
flexion en comparaison avec les méthodes
analytiques

Soutenu le: 10 / 06 / 2021

Devant le jury:

Président:

M.A.A Univ. Ouargla

Rapporteur:

M.C.B Univ. Ouargla

Examineur:

M.C.B Univ. Ouargla

Année universitaire 2020/2021.



REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier avant tout le bon Dieu tout puissant de nous avoir donné le courage et la force d'élaborer ce travail.

*C'est avec beaucoup de reconnaissance que nous adressons nos sincères remerciements à l'égard de notre promoteur **Bouchemaa Kamel** pour avoir proposé ce thème et d'avoir suivi et dirigé ce travail, nous le remercions infiniment, pour son aide, ses conseils, ses orientations ainsi que ses remarques et ses critiques qui nous ont été d'un apport précieux, nos remerciements s'étendront aussi aux membres du jury qui ont acceptés de critiquer notre travail.*

Nous adressons nos vifs remerciements à tous les enseignants de l'université Kasdi Merbah Ouargla qui ont contribué à notre formation durant notre parcours universitaire.

Enfin à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de fin d'étude.



Merci encore à tous....

Sommaire

Sommaire

	Pages
Remerciements	
Dédicace	
Introduction générale	01
CHAPITRE I : Déformées des poutres en flexion	
I.1. Généralités	02
I.2. Hypothèses	03
I.3. Notations	03
I.4. Etude de la déformée	04
I.4.1. Relation entre de la flèche et la rotation	04
I.4.2. Relation entre la rotation et le rayon de courbure	04
I.4.3. Relation entre le moment et le rayon de courbure	04
I.4.4. Relation entre la flèche et le moment	05
I.4.5. Conditions limitées	06
I.5. Exemples	07
I.5.1. Exemple 1	07
I.5.2. Exemple 2	09
I.6. Résumé	12
I.6.1. Démarche la résolution	12
I.6.2. Formules	13
CHAPITRE II : Equation de rigidité	
II.1. Introduction	15
II.2. Équation de rigidité d'un élément barre en coordonnées locales	15
II.2.1. Équation de rigidité par la méthode de l'énergie	16
II.2.2. Équation de rigidité par la méthode de l'équilibre force de déplacement	18
II.3. Équation de rigidité d'un élément barre en coordonnées globales	19
II.4. Équation de rigidité d'un élément poutre en coordonnées locales	23
CHAPITRE III : Résultats et discussions	
III.1. Introduction	29
III.2. Exemple 1 encastrement	29
III.3. Exemple 2 double appui simple	31
III.4. Exemple 3 force distribuée	33
III.5. Discussions	34
Conclusion générale	35
Résumé	37
Bibliographie	40
Les annexes	42

Introduction Générale

Introduction Générale

Introduction Générale

Il existe un grand nombre de traités sur les poutres, dans lesquels on développe un grand nombre de méthodes particulières pour résoudre des problèmes de poutres (et de structures de poutres). Beaucoup d'entre-elles sont devenues obsolètes en raison du développement actuel des calculateurs et des logiciels. Ce mémoire se limite donc aux fondements de la théorie des poutres et ne prétend pas à l'exhaustivité. Il a seulement pour but d'exposer les notions indispensables à connaître pour comprendre les limites de la modélisation, comprendre les données nécessaires au modèle, et enfin interpréter correctement les résultats d'un calcul.

Les structures discrètes sont des structures composées d'éléments barres ou poutres assemblés entre eux dans l'espace ou dans le plan par des nœuds. Ces types de structures sont rencontrés souvent dans le domaine de la construction mécanique, la charpente métallique, les structures d'aéronautique spatiale, la construction navale et le génie civil.

La rigidité d'un élément poutre ou barre est déterminée numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. La méthode est basée sur l'application de l'épreuve statique numérique à un élément isolé de la structure originale qui alors utilise les équations « force - déplacement » pour prédire la matrice de rigidité de l'élément poutre.

Notre mémoire contient en générale trois chapitres en plus d'une introduction générale, des références bibliographiques et des annexes.

Le premier chapitre est réservé à des généralités sur les structures poutres et leurs méthodes de calcul. Une interprétation mathématique des lois fondamentales de calcul de la déformée d'une poutre a été faite. La décomposition d'une structure très grande dimension en éléments finis implique la réalisation d'une équation de rigidité élémentaire. Le deuxième chapitre est consacré aux procédures analytiques permettant la détermination de la matrice de rigidité d'un élément indépendant. Le troisième chapitre est consacré à des exemples d'application avec discussion des résultats obtenus. Finalement le travail est achevé par une conclusion générale.

Chapitre I:

Déformées des poutres en flexion

I. Généralités :***I.1. But de l'étude :***

Lorsque les structures reçoivent des charges, elles se déforment. Il est nécessaire de limiter leurs déplacements pour des raisons d'exploitation des constructions. En effet, un changement de position trop important peut engendrer, entre autre, des contrepenches, des fissurations dans certains éléments (cloisons), des vibrations sous les charges variables telles que le vent ...

Le présent chapitre a donc pour but de quantifier les déformées des structures.

I.1.2. Rappels mathématiques :

Dans ce chapitre, nous aurons besoins de maîtriser les intégrales. Les fonctions étudiées sont généralement assimilées à des polynômes. L'intégration d'une fonction polynomiale du type x^n est :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$

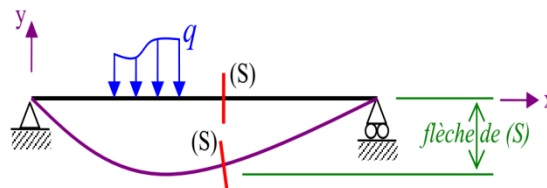
I.1.3. Définitions :***a) Déformée :***

La déformée d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (si l'intensité, le type de chargement ... change, la déformée changera).

Il est très important de ne pas confondre « déformée » et « déformations ». En effet, la déformation est un allongement par unité de longueur, alors qu'une déformée est la combinaison entre une translation [m] et une rotation [rad].

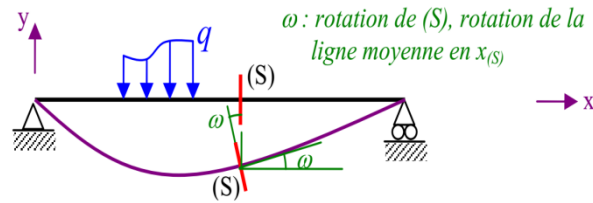
b) Flèche :

Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle « flèche » :

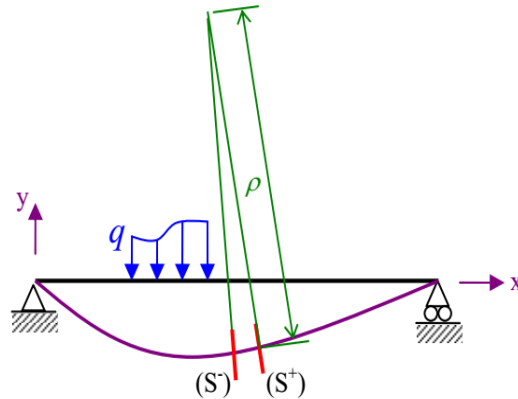


c) Rotation :

Certaines sections subissent une rotation. Cette rotation est naturellement la même que celle de la ligne moyenne :

d) Rayon de courbure

Considérons deux sections (s^+ et s^-) infiniment proches. Une fois la structure déformée, les axes de ces sections se croisent à une distance ρ de la ligne moyenne. Cette distance s'appelle « rayon de courbure ».

1.2. Hypothèses :

De nombreuses hypothèses doivent être posées :

- les structures sont composées de poutres (c.f. théorie des poutres).
- les charges sont appliquées de manière très lente et progressive.
- les déplacements et rotations sont petits.
- la structure reste dans le domaine élastique.
- les appuis et liaisons internes sont parfaits.
- nous négligerons les effets dus à l'effort normal et à l'effort tranchant.
- nous nous limiterons à l'étude des poutres homogènes (1 seul matériau).

1.3. Notations :

Nous poserons:

- la longueur d'un tronçon infiniment petit de la poutre : dx .
- l'équation de la rotation en fonction de l'abscisse de la section : $\omega(x)$.
- l'équation de la flèche : $f(x)$.
- le rayon de courbure : $\rho(x)$.
- la rigidité de la poutre : $EI_{GZ(x)}$ (si celle-ci est variable) et EI_{GZ} (si elle est constante).

I.4. Etude de la déformée :

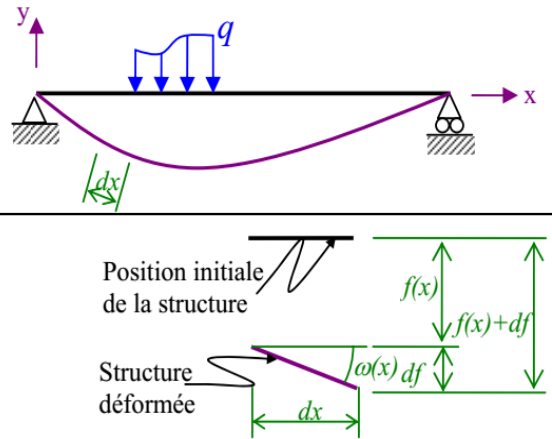
I.4.1. Relation entre la flèche et la rotation :

Prenons un tronçon dx infiniment petit de la poutre :

La variation de la flèche vaut df

La déformée de cet élément peut être assimilée à un segment droit :

Nous démontrons donc que :



$$\tan(\omega(x)) = \frac{df}{dx} \approx \omega(x) \qquad \omega(x) = f'(x)$$

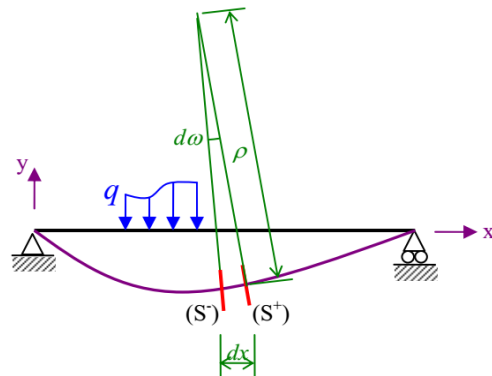
La rotation ω peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment petite.

I.4.2. Relation entre la rotation et le rayon de courbure :

Soient deux sections infiniment proches dont la variation d'abscisse vaut dx .

La variation de la rotation de la section en x à la section en $x + dx$ vaut $d\omega$.

On démontre donc que :



$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} \approx d\omega$$

Donc : $\rho = \frac{dx}{d\omega}$ alors : $\frac{1}{\rho} = \omega'(x)$

la rotation $d\omega$ peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment faible.

I.4.3. Relation entre le moment et le rayon de courbure :

Soit un tronçon dx infiniment petit de la poutre :

Considérons une fibre à l'ordonnée y .

Sous l'action du moment de flexion, cette fibre de longueur initiale dx s'allonge d'une valeur de Δdx .

- Dans le schéma de droite, la valeur de Δdx est négative.

Nous savons que :

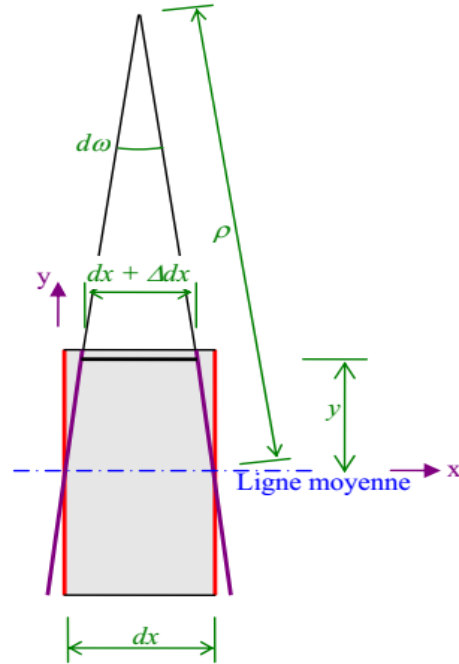
$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \text{ (c.f. contraintes).}$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x(y)}{E} = -\frac{1}{E} \times \frac{M_Z(x)}{I_{GZ}(x)} y$$

Dans le schéma de droite :

$$\tan(d_\omega) = \frac{dx}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{\rho - y}$$

$$\frac{\rho - y}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{dx} \quad \text{alors :} \quad I - \frac{y}{\rho} = I + \frac{\Delta dx}{dx}$$



Donc :
$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

Au final :
$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)} y$$

1.4.4. Relation entre la flèche et le moment :

En combinant les différentes relations démontrées :

$$\omega(x) = f'(x) \qquad \frac{1}{\rho} = \omega'(x) \qquad \frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)} y$$

On montre que :

$$f''(x) = \omega'(x) = \frac{1}{\rho} = -\frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)}$$

En conclusion :

$$f(x) = \iint \frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx^2 \qquad \omega(x) = f'(x) = \int \frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx$$

I.4.5. Condition limites :

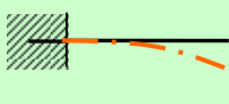
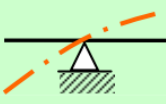
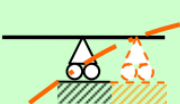
En intégrant deux fois l'expression $\frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)}$, des constantes d'intégration apparaissent.

- le nombre de constantes d'intégration est égal à 2 x le nombre de tronçons.

Afin de déterminer leurs valeurs, il est nécessaire de connaître la flèche ou la rotation en certains points particuliers.

a) Conditions aux appuis :

Nous savons que les appuis bloquent des mouvements :



<i>Appui – liaison externe</i>		
<i>encastrement</i>	<i>articulation</i>	<i>appui simple</i>
		
$\omega = 0$ $f = 0$	$f = 0$	$f = 0$

Nous allons donc appliquer les équations au niveau des appuis et ainsi déterminer certaines constantes d'intégration.

b) Conditions de continuité :

Le reste des constantes d'intégration peut être résolu à l'aide des conditions de continuité.

En effet, lorsque l'équation du moment change, 2 nouvelles constantes d'intégration apparaissent. On regardera ainsi s'il y a continuité de la flèche et de la rotation au droit de ce changement d'équation :

<i>Liaison interne</i>	
<i>encastrement</i>	<i>relâchement</i>
	
$\omega_{relative} = 0$ - continuité de la rotation $f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche	$f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche

- lorsqu'il y a continuité de la flèche en x, on a $f(x^-) = f(x^+)$;

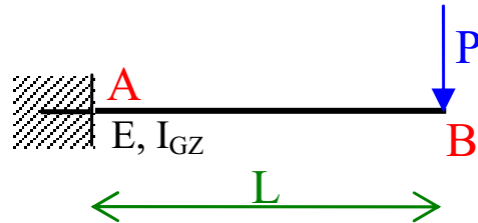
- lorsqu'il y a continuité de la rotation en x, on a $\omega(x^-) = \omega(x^+)$.

I.5. Exemples :

I.5.1. Exemple 1:

Soit la poutre suivante à rigidité constante : P

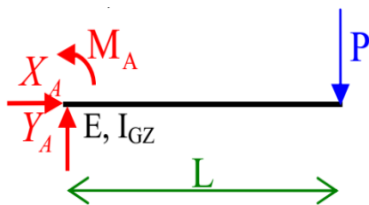
a) Nature (décomposition minimale) :



Structure isostatique

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ L = 3 \end{cases}$$

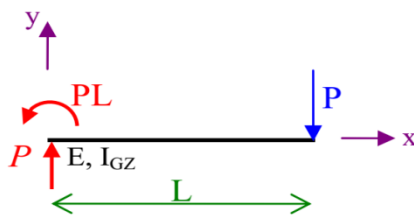
b) Inconnues de liaison :



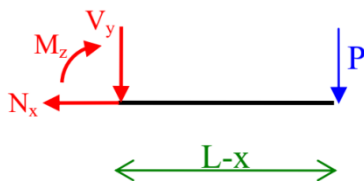
$$\sum F_x = 0 = X_A$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - P$$

$$\sum M_{A/z} = 0 = -PL + M_A$$



c) Sollicitation :



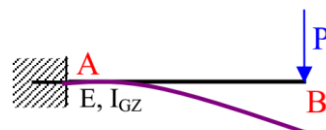
$$N_x(x) = 0$$

$$V_y(x) = -P$$

$$M_z(x) = -PL(-x) = -PL + Px$$

d) Déformée :

d.1) Allure de la déformée :



d.2) Intégrations :

$$M_z(x) = -P L(-x) = -PL + Px$$

$$\omega(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}} dx = \int \frac{(-PL + Px)}{EI_{GZ}} \times dx = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right)$$

$$f(x) = \int \omega(x) dx = \int \left[\frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right) \right] \times dx = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 + Ax + B \right)$$

d.3) Conditions limites :

• Conditions aux appuis (CA) :

- encastrement en $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

d.4) Constantes d'intégrations :

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}\omega(0) = 0 = + \frac{P}{2} \times 0^2 - PL \times 0 + A \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}f(0) = 0 = + \frac{P}{6} \times 0^3 + B \rightarrow B = 0$$

d.5) Equations :

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 \right)$$

d.6) Flèche maximale :

• Rotation nulle :

$$\begin{aligned} \omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right) = 0 &\rightarrow EI_{GZ}\omega(x) = 0 = \frac{P}{2} x^2 - PLx \\ &= Px \left(\frac{1}{2} x - L \right) = 0 \end{aligned}$$

Solutions : $P = 0$

$x = 0$

$x = 2L$

Nous ne pouvons retenir que $x = 0$, ce qui donne $f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$

• Extrémité de tronçon :

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

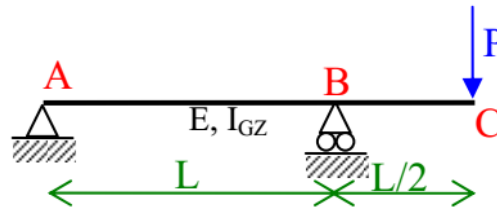
$$f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} L^3 - \frac{PL}{2} L^2 \right) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

On en conclue que pour cette poutre : On en conclue que pour cette poutre

$$f_{max} = f(L) = \frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

I.5.2. Exemple 2 : (double tronçons)

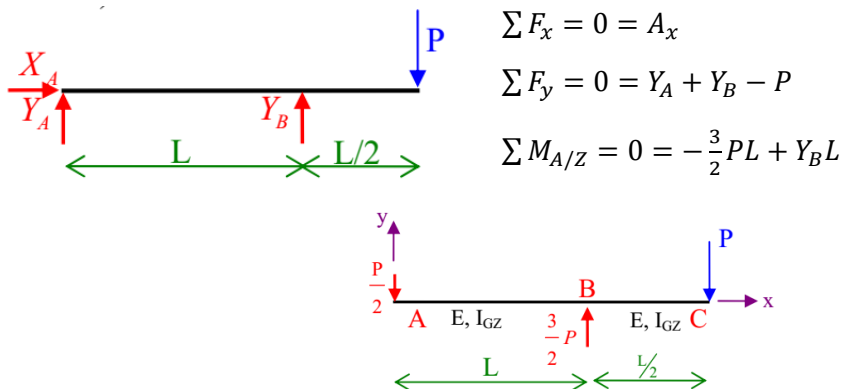
Soit la poutre suivante à rigidité constante :



a) Nature (décomposition minimale) :

$$\text{structure isostatique} \begin{cases} x = 3 \\ L = 3 \end{cases}$$

b) Inconnues de liaison :

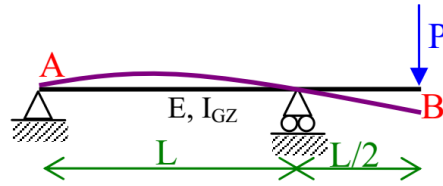


c) Sollicitation :

$0 < x < L$	$L < x < \frac{3}{2}L$
$N_x(x) = 0$ $V_y(x) = \frac{P}{2}$ $M_z(x) = -\frac{P}{2}x$	$N_x(x) = 0$ $V_y(x) = -P$ $M_z(x) = -\frac{3PL}{2} + Px$

d) Déformée :

d.1) Allure de la déformée :



d.2) Intégrations :

$0 < x < L$	$L < x < \frac{3}{2}L$
$M_z(x) = -\frac{P}{2}x$ $\omega(x) = \int \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{2}x\right) dx$ $= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{4}x^2 + A\right)$ $f(x) = \int \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{4}x^2 + A\right) dx$ $= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12}x^3 + Ax + B\right)$	$M_z(x) = -\frac{3PL}{2} + Px$ $\omega(x) = \int \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{EI_{GZ}} + Px\right) dx$ $= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{2}x + \frac{P}{2}x^2 + C\right)$ $f(x) = \int \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{2}x + \frac{P}{2}x^2 + C\right) dx$ $= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{4}x^2 + \frac{P}{6}x^3 + Cx + D\right)$

d.3) Conditions limites :

- Conditions aux appuis (CA) :

$$f(0) = 0$$

$$f(L) = 0$$

- Conditions de continuité (CC) :

Aux limites :

$$f(L^-) = f(L^+)$$

$$\omega(L^-) = \omega(L^+)$$

d.4) Constantes d'intégrations :

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{4}0^3 + A \times 0 + B\right) \rightarrow B = 0$$

$$f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12}L^3 + AL\right) = 0 \rightarrow A = \frac{P}{12}L^2$$

$$\omega(L^-) = \omega(L^+) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{4}L^2 + \frac{P}{12}L^2\right) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{2} + \frac{P}{2}L^2 + C\right) \rightarrow C = \frac{5P}{6}L^2$$

$$f(L^-) = f(L^+) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12}L^3 + \frac{P}{12}L^2L\right) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{4}L^2 + \frac{P}{6}L^3 + \frac{5P}{6}L^2L + D\right) \rightarrow D = -\frac{P}{4}L^3$$

d.5) Equations :

$0 < x < L$	$L < x < \frac{3}{2}L$
$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{P}{12}x^2 \right)$ $f(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{P}{12}L^2x \right)$	$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{2}x + \frac{P}{2}x^2 + \frac{5P}{6}L^2 \right)$ $f(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{4}x^2 + \frac{P}{6}x^3 + \frac{5P}{6}L^2x - \frac{P}{4}L^3 \right)$

d.6) Flèche maximale :

- Rotation nulle :

$0 < x < L$	$L < x < \frac{3}{2}L$
$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{P}{12}x^2 \right) = 0$ $\rightarrow x = \pm \frac{L}{\sqrt{3}}$ <p>seule solution à retenir : $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$</p> $f\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12} \frac{L^3}{\sqrt{3}} + \frac{P}{12} L^2 \frac{L}{\sqrt{3}} \right)$ $= \frac{PL^3}{18\sqrt{3}EI_{GZ}}$	$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{2}x + \frac{P}{2}x^2 + \frac{5P}{6}L^2 \right)$ $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{7}{12}P^2L^2$ $x = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} \right) L \quad x = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}} \right) L$ <p>aucune solution à retenir !</p>

- Extrémité de tronçon :

$0 < x < L$	$L < x < \frac{3}{2}L$
$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12}0^3 + \frac{P}{12}L^20 \right) = 0$ $f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{P}{12}L^3 + \frac{P}{12}L^2L \right) = 0$	$f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{4}L^2 + \frac{P}{6}L^3 \right) = 0$ $f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(-\frac{3PL}{4} \frac{3L^2}{2} + \frac{P}{6} \frac{3L^3}{2} \right) = -\frac{PL^3}{8EI_{GZ}}$

Au final, la flèche maximale vaut :

$$|f_{max}| = \text{Max} = \left[\left| -\frac{PL^3}{8EI_{GZ}} \right| ; 0 ; \frac{PL^3}{18\sqrt{3}EI_{GZ}} \right]$$

$$f_{max} = -\frac{PL^3}{8EI_{GZ}}$$

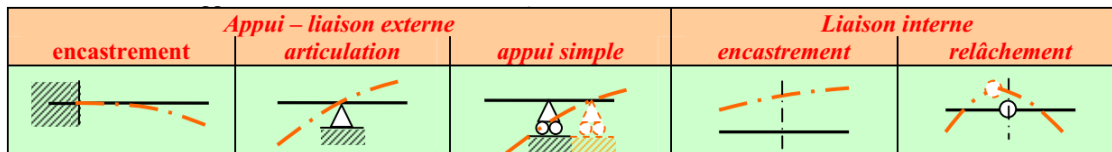
I.6. Résumé :***I.6.1. Démarche de résolution :***1) Nature de la structure ;2) Inconnues de liaison ;3) Sollicitations ;

La déformée s'étudie à l' « état limite de service ». Il est donc nécessaire de connaître les équations du moment aux combinaisons ELS.

4) Etude de la déformée ;

4.1) Allure de la déformée ;

- la déformée se dessine sur la structure avec ses appuis.
- le tracé a pour but de déterminer plus facilement les conditions limites et de continuité.
- Il faut donc impérativement respecter les relations et valeurs des flèches et rotations particulières sur appuis et à l'intersection de 2 tronçons :



4.2) Intégrations ;

* On n'oubliera pas les constantes d'intégrations : 2 nouvelles (différentes) à chaque tronçon.

4.3) Conditions limites ;

* On regardera l'allure de la déformée pour connaître :

- la valeur des flèches et rotations particulières sur appuis (CA : conditions aux appuis) ;
- ainsi que la continuité au droit des changements d'équations (CC : conditions de continuité) ;
- on peut aussi facultativement ajouter des conditions de symétrie (CS – dans le cas où la structure est symétrique – symétriquement chargée).

4.4) Constantes d'intégrations ;

- Les constantes d'intégrations se déterminent en remplaçant les conditions limites dans les équations de flèche et de rotation.
- attention aux conclusions trop hâtives : il faut remplacer dans l'équation x par sa valeur avant de dire qu'une constante est nulle !

4.5) Equations ;

- on récapitulera ici les équations trouvées (sans oublier le $1/EI_{GZ}$).

4.6) Vérification ;

- comme les règlements limitent généralement la flèche, il faudra trouver la valeur maximale de cette flèche et contrôler qu'elle reste inférieure à la valeur réglementaire. Dans le cas contraire, il faudra redimensionner cette poutre.

la flèche maximale se trouve :

- où la dérivée est nulle (rotation nulle \rightarrow extremum de la flèche) ;
- en extrémité de tronçon Attention : elle n'est que très rarement maximale sous la charge ou au milieu de la poutre !

I.6.2. Formules :

$$f(x) = \iint \frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx^2$$

$$\omega(x) = f'(x) = \int \frac{M_Z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx$$

Chapitre II: Équations de rigidité

II.1. Introduction :

La décomposition d'une structure très grande en éléments finis donne nécessité d'élaborer une loi qui traduise la relation force-déplacement de chaque élément en une équation appelée « équation de rigidité » .

Dans ce chapitre en va cité les principaux étapes de construire l'équation de rigidité. On a exposé la méthode des éléments finis appliquée aux problèmes d'élasticité plane en utilisant le principe de minimisation de l'énergie potentielle total, le principe des travaux virtuel et la méthode de l'équilibre force-déplacement. Notre attention est limitée en particulier à l'élément barre et poutre dû à leurs popularités dans les problèmes pratique de calcul structures discrètes.

II.2. Équation de rigidité d'un élément barre en coordonnées locales :

Soit un élément barre, dirigé suivant l'axe x c'est à dire, l'axe confondu avec celui de la barre », représenté dans la Fig. II.1.

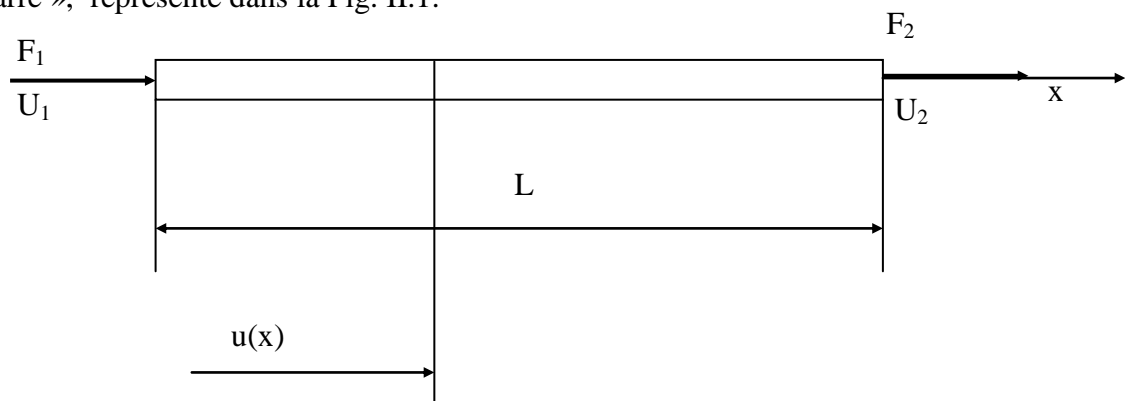


Fig. II.1 : *Élément barre en coordonnées locales*

Aux deux extrémités (1) et (2) de la barre agissent, respectivement, deux forces F_1 et F_2 aux quelles correspondent les deux déplacements respectifs. Le nombre total de degrés de liberté de cet élément est donc égale à deux.

Pour relier les deux forces F_1 et F_2 aux deux déplacements, il est nécessaire d'établir un système d'équation sous une forme matricielle. Ceci peut se faire en utilisant soit la méthode de l'équilibre contrainte déformation soit par la méthode de l'énergie de déformation.

La méthode de l'énergie de déformation est plus générale et plus efficace, spécialement pour les types sophistiqués d'éléments finis, par contre la méthode de l'équilibre contrainte- déformation est plus simple et physiquement plus claire. Mais elle peut être appliquée seulement pour des éléments finis simple.

II.2.1. Équation de rigidité par la méthode de l'énergie :

Pour le cas de contrainte ou de déformation unie axiale, la déformation est définie par :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

Δx : Longueur infinitésimale.

Pour pouvoir utiliser, ultérieurement, cette équation, il faut faire appel à la notion de fonction de déplacement et à celle de fonction de forme.

Dans le cas uni axial, le déplacement axiale $u(x)$ à une distance x du point nodal (1) peut être considéré comme une variation linéaire de x :

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (6.1)$$

Où a_1 et a_2 sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{Pour } x = 0 \Rightarrow a_1 = u_1 \\ \text{Pour } x = l \Rightarrow a_2 = \frac{u_2 - u_1}{l} \end{cases} \quad (6.2)$$

Où u_1 et u_2 sont les déplacements aux nœuds (1) et (2) respectivement.

En utilisant les valeurs de a_1 et a_2 dans l'équation (6), la forme finale de la fonction de déplacement devient:

$$u(x) = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 \quad (6.3-1)$$

$f_1(x)$ et $f_2(x)$ décrivent la distribution ou la forme « ou encore le model » du déplacement associé au nombre de degrés de liberté, respectivement. Elles sont

désignées par fonctions de forme :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - \frac{x}{l} \\ f_2(x) &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (6.3-2)$$

La déformation axiale peut être obtenue par substitution des équations (6.3) dans (6), et on aura :

$$\varepsilon(x) = f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2 \quad (6.4)$$

D'après les équations (6.3-2) et (6.4) on peut voir clairement que la déformation est constante.

L'expression de la force est : (Hooke)

$$S = \sigma A = E\varepsilon A \quad (6.5)$$

L'expression de l'énergie de déformation sera donc :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} E \int_0^l \varepsilon^2 A dx \\ U &= \int_0^l \frac{S^2}{2EA} dx = \frac{EA}{2} \int_0^l (f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2)^2 dx \end{aligned} \quad (6.6)$$

L'application du théorème de « Castigliano » donne

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1} = \left[EA \int_0^l f_1' f_1' dx \right] u_1 + \left[EA \int_0^l f_1' f_2' dx \right] u_2$$

$$F_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2} = \left[EA \int_0^l f_2' f_1' dx \right] u_1 + \left[EA \int_0^l f_2' f_2' dx \right] u_2$$

Ou en forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.6-1)$$

Ou symboliquement :

$$\{F\} = [K]\{u\} \quad (6.6-2)$$

Les coefficients K_{ij} de la matrice de rigidité sont donnés par :

$$K_{ij} = EA \int_0^l f'_i(x) f'_j(x) dx \quad \left(\overline{i, j} = 1, 2 \right) \quad (6.7)$$

On trouve finalement les équations de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Le terme $\frac{EA}{L}$ représente la rigidité axiale de la barre.

II.2.2 Équation de rigidité par la méthode de l'équilibre force-déplacement :

On suppose d'abord que seule l'extrémité (1) se déplace, le nœud (2) étant fixé (Fig. 8). Par conséquent, la force et le déplacement au nœud (1) sont exprimés par la

loi classique de « Hooke » $F_{11} = \frac{EA}{L} u_1$ où u_1 est le déplacement à l'extrémité (1).



Fig. II.2 : Force F_1 appliquée à l'extrémité (1) . L'extrémité (2) est fixée

L'équilibre des forces agissant sur la barre implique :

$$F_{11} + F_{21} = 0 \quad \Rightarrow F_{21} = -F_{11} = -\frac{EA}{L} u_1$$

Si la situation est maintenant inversée en fixant le nœud (1) dans sa position initiale et en permettant au nœud (2) de se déplacer sous l'action d'une force F_2 (Fig.9).

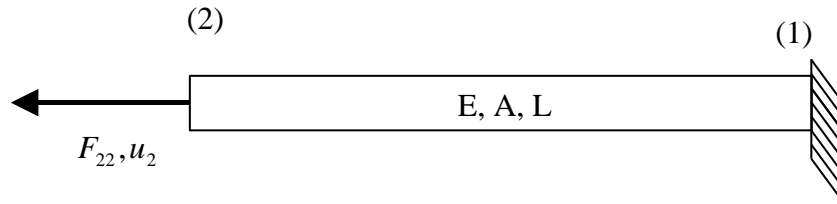


Fig. II. 3 : Force F_2 appliquée à l'extrémité (2) . L'extrémité (1) est fixée

De la même façon on a :

$$F_{12} + F_{22} = 0 \quad \Rightarrow F_{22} = -F_{12} = \frac{EA}{L} u_2$$

Pour obtenir la relation entre les forces, F_2 et les déplacements nodaux pour le cas où les deux extrémités se déplacent, on utiliserait le principe de superposition en combinant les systèmes de forces

$$\text{Somme des forces agissant au nœud (1) : } F_1 = F_{11} + F_{12} = \frac{EA}{L} (u_1 - u_2)$$

$$\text{Somme des forces agissant au nœud (2) : } F_2 = F_{21} + F_{22} = \frac{EA}{L} (u_2 - u_1)$$

On remarque que ces deux équations peuvent facilement être écrites sous la forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

et c'est le même résultat obtenu précédemment dans l'équation (6.8)

II.3. Équation de rigidité d'un élément barre en coordonnées globales :

Un élément barre confondu avec un axe \bar{x} est montré dans la Figure.11. L'axe \bar{x} est un axe de coordonnées locales et les axes (x, y) sont les axes de coordonnées globales ou de référence. L'axe \bar{x} est orienté d'un angle quelconque, compté dans le sens anti-horaire à partir de l'axe x . Les paramètres relatifs au système de coordonnées \bar{x} sont affectés de « » (une barre) afin de les différencier de ceux exprimés dans le système de coordonnées globales (x, y) .

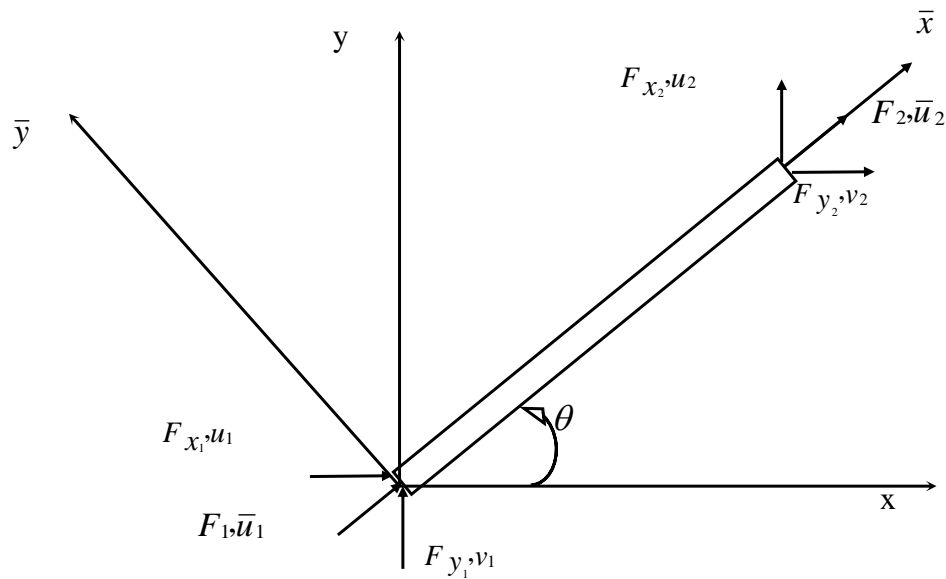


Fig. II.4 : Élément barre dans le système de coordonnées globales

Dans le système de coordonnées globales, chaque point nodale a une force horizontale F_x et une force vertical, un déplacement axial x et un déplacement vertical v , ainsi chaque élément a un totale de quatre degrés de liberté.

D'après la figure (10) nous avons aux points nodaux (1)et (2), les expressions suivantes :

$$\bar{u}_1 = u_1 \cos\theta + v_1 \sin\theta \quad (7-a)$$

$$\bar{u}_2 = u_2 \cos\theta + v_2 \sin\theta \quad (7-b)$$

On peut écrire les deux expressions précédentes sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

avec :

$$\cos\theta = \lambda$$

$$\sin\theta = \mu$$

En utilisant la même définition de l'énergie de d déformation utilisée au paragraphe précédent et que l'on peut énoncer de la façon suivante : *L'énergie de déformation ou le travail est égal à la demie somme des produits des forces nodales par les déplacements nodaux correspondant.*

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \left(\bar{F}_{x1} \bar{u}_1 + \bar{F}_{x2} \bar{u}_2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{x2} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7.2)
 \end{aligned}$$

Les équations (6.8) peuvent être réduites, pour un élément barre en coordonnées locales, à :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

$$U = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Tout calcul fait, concernant le produit des trois matrices de cette dernière équation, on obtient :

$$U = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Les équations de rigidité peuvent être obtenues par l'utilisation du théorème de « Castigliano » :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_1} \\ \frac{\partial U}{\partial v_1} \\ \frac{\partial U}{\partial u_2} \\ \frac{\partial U}{\partial v_2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Cette équation de rigidité peut posséder une forme facile à mémoriser. Nous pouvons, simplement retenir la matrice de rigidité sous forme :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{bmatrix} \quad (7.6-1)$$

où

$$[K_0] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \lambda\mu & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (7.6-2)$$

Il est commode de retourner au système local pour évaluer les forces dans l'élément. Les calculs aboutissent à :

$$\bar{F}_{x1} = S_1 = F_{x1} \cos\theta + F_{y1} \sin\theta$$

$$\bar{F}_{x2} = S_2 = F_{x2} \cos\theta + F_{y2} \sin\theta$$

D'après l'équation (7.5)

$$F_{x1} = \frac{EA}{L} [(u_1 - u_2)\lambda^2 + (v_1 - v_2)\lambda\mu]$$

$$F_{y1} = \frac{EA}{L} [(u_1 - u_2)\lambda\mu + (v_1 - v_2)\mu^2]$$

$$F_{x2} = \frac{EA}{L} [(u_2 - u_1)\lambda^2 + (v_2 - v_1)\lambda\mu]$$

$$F_{y2} = \frac{EA}{L} [(u_2 - u_1)\lambda\mu + (v_2 - v_1)\mu^2]$$

Si on remplace les valeurs de ces forces dans les équations exprimant les forces axiales il résulte :

$$S_1 = \frac{EA}{L} [(u_1 - u_2)\lambda + (v_1 - v_2)\mu]$$

$$S_2 = \frac{EA}{L} [(u_2 - u_1)\lambda + (v_2 - v_1)\mu]$$

Qu'on peut les écrits sous la forme :

$$S_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \end{Bmatrix}$$

$$S_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow S_1 = -S_2$$

Ces deux dernières formules peuvent être généraliser comme suit :

$$S_{ij} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} \begin{bmatrix} \lambda_{ij} & \mu_{ij} \\ \mu_{ij} & \lambda_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$$

II.4 Équation de rigidité d'un élément poutre en coordonnées locales :

Un élément poutre est représenté dans la figure(11).L'axe longitudinal de la poutre est confondu avec l'axe de coordonnées x . L'élément est considéré avoir deux degrés de liberté en chaque extrémité, une déformation transversale v et un angle de rotation de la section θ ou (encore $\frac{\partial v}{\partial x}$).Un moment de flexion M et une force d cisaillement F , correspondant respectivement aux de degrés de liberté θ et v , agissant en chaque nœud.

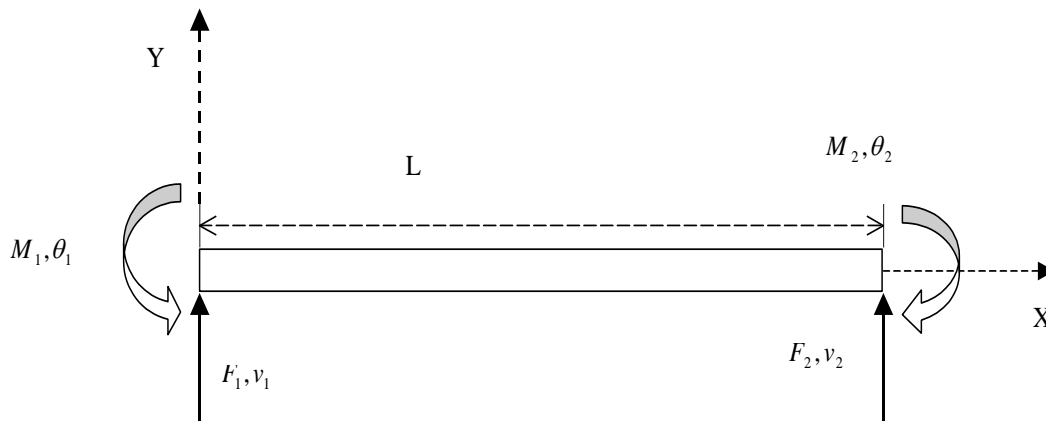


Fig. II.5 : Élément poutre de section droite uniforme

Le comportement de cette poutre est décrit par une fonction polynomiale du troisième degré, qui est la fonction de déplacement caractéristique à cet élément :

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (8)$$

Où les constantes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des constantes déterminées par les conditions de déplacements aux nœuds peuvent être donc écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\text{pour } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 \\ \theta = \theta_1 \end{cases}$$

$$\text{pour } x = L \Rightarrow \begin{cases} v = v_2 \\ \theta = \theta_2 \end{cases}$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

a forme inverse de l'équation (8-1) donne les expressions des constantes a_i :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

Ou symboliquement :

$$\{a\} = [T]\{\delta^e\} \quad (8.2-1)$$

Après substitution des coefficients a_i de l'équation (8.2) dans l'équation (8), et après réarrangement on obtient la forme finale de la fonction de déplacement :

$$v(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)\theta_1 + f_3(x)v_2 + f_4(x)\theta_2 \quad (8.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_2(x) &= x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right) \\ f_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_4(x) &= -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Après avoir déterminer ces fonctions de forme, on passe à l'application du théorème de « Castigliano » :

$$\text{La force généralisée (force ou moment) } F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i^e} \quad (8.5)$$

δ_i^e : déplacement nodal généralisé

Pour un élément poutre a une section droite uniforme, l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (8.6)$$

En combinant l'équation (8.5) et l'équation (8.6) on obtient :

$$F_i = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial \delta_i^e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \quad (8.7)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$v(x) = K_{i1} v_1 + K_{i2} \theta_1 + K_{i3} v_2 + K_{i4} \theta_2 \quad (8.7-1)$$

avec :

$$K_{ij} = EI \int_0^L f_i''(x) f_j''(x) dx$$

$f_i''(x)$ et $f_j''(x)$ sont les dérivées secondes des fonctions de forme exprimées dans les équations (8.4).

Après toutes les procédures de dérivation et substitution on aboutit à l'équation de rigidité en coordonnées locales

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

ou symboliquement :

$$\{F\} = [K]\{q\} \quad (8.8-1)$$

Une autre procédure pour l'obtention de la matrice de rigidité utilisée pour des éléments finis de grand nombre de degrés de liberté, et qui est toujours applicable aux cas de l'élément poutre présenté dans les étapes suivantes :

En se basant sur l'équation (3-19) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2a_3 + 6a_4 x \quad (8.9)$$

En substituant cette dernière équation dans l'équation (8.6), on obtient :

$$U = 2EI(a_3^2 L + 3a_3 a_4 L^2 + 3a_4^2 L^3)$$

$$U = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI/L & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Sous forme symbolique on aura :

$$U = \{a\}^T \left[\overline{K} \right] \{a\} \quad (8.10)$$

Les éléments de la matrice $\left[\overline{K} \right]$ sont obtenus par l'utilisation de l'équation

$$\overline{K}_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial a_i \partial a_j} \quad (\overline{i, j} = 1, 4) \quad (8.11)$$

en substituant l'équation (8.2) dans l'équation (8.10) on obtient

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [T]^T \left[\overline{K} \right] [T] \{q\} \quad (8.12)$$

Et par définition, l'énergie de déformation est égale à la moitié somme des forces nodales par leurs déplacements correspondants, on peut écrire :

$$U = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

en substituant les équations de rigidité (8.8-1) pour les forces nodales, nous avons :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \{F\} \quad (8.14)$$

Par comparaisant des équations (8.12)et (8.14) de l'expression de l'énergie on peut conclure que :

$$[K] = \frac{1}{2} [T]^T \left[\bar{K} \right] [T] \quad (8.15)$$

C'est la même matrice de rigidité obtenue dans l'équation (8.8), en utilisant les fonctions de forme

Chapitre III:

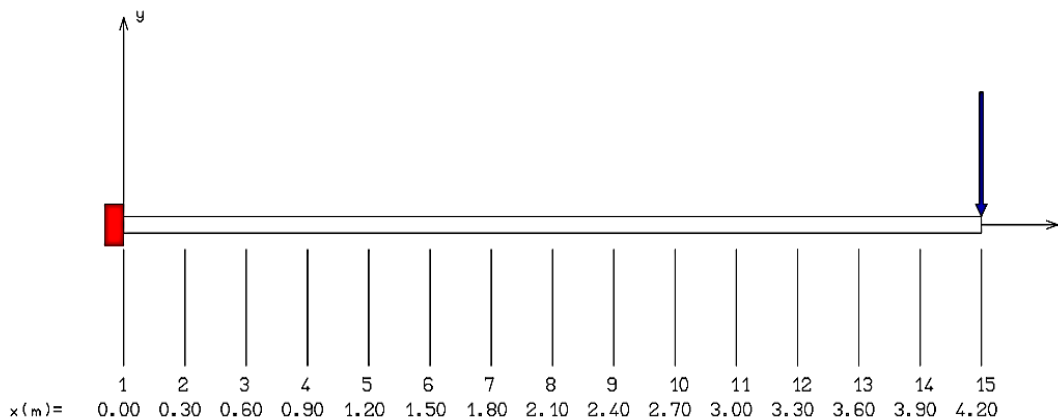
Résultats et discussions

III.1. Introduction:

Pour étudier ou calculer la flexion des arbres de transmission il existe certain méthodes telle que :

- méthode théorique expliquée dans le premier chapitre
- méthode des éléments finies expliquée dans le deuxième chapitre

On va étudier dans ce chapitre les modèles de différent flexion utilisant les deux méthodes et en comparaisant leur résultats

III.2. Exemple 1:

$$L = 4.2 \text{ m} ; I = 5.15 \text{ cm}^4 ; E = 210000 \text{ Mpa} ; F = -1000 \text{ N}$$

Données du problème**Matériau:**

Nom du matériau = Acier

Module d'Young = 210000 Mpa Masse volumique = 8000 kg/m³ Limite élastique = 250 Pa

Section:

Rond plein : $D = 32.00 \text{ (mm)}$

Aire = 8.04 cm^2

Moment quadratique : $I_z = 5.15 \text{ cm}^4$

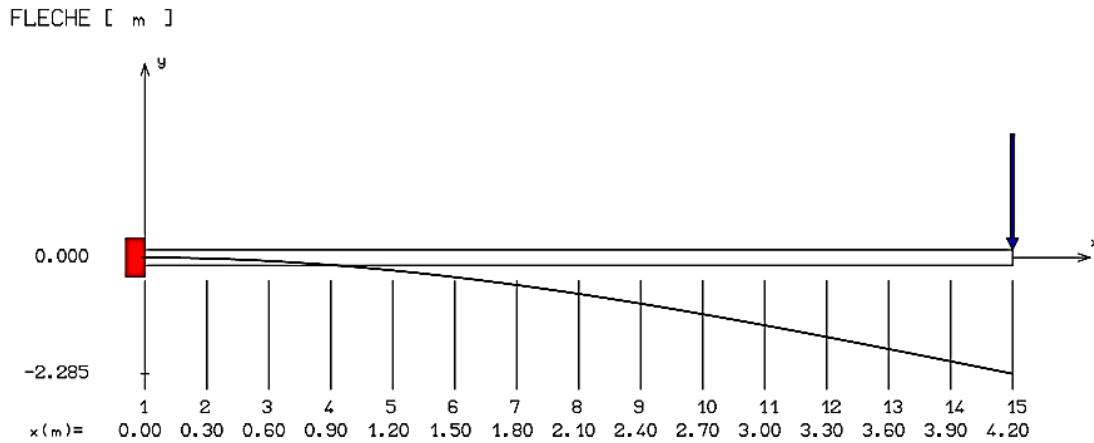
Fibre supérieure : $v_y = 16.00 \text{ mm}$ $W_{el.z} = 3.22 \text{ cm}^3$

Fibre inférieure : $v_y = 16.00 \text{ mm}$ $W_{el.z} = 3.22 \text{ cm}^3$

Cas de charge(s):

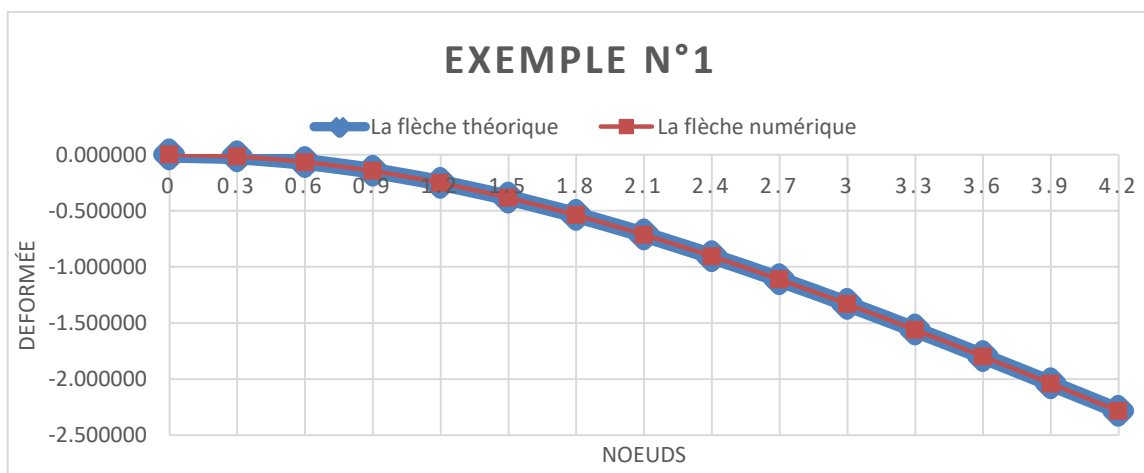
Charge nodale : $N_{\text{œud}} = 15$ $F_y = -1000.00 \text{ N}$ $M_z = 0.00 \text{ N.m}$

Résultats: Déplacements nodaux

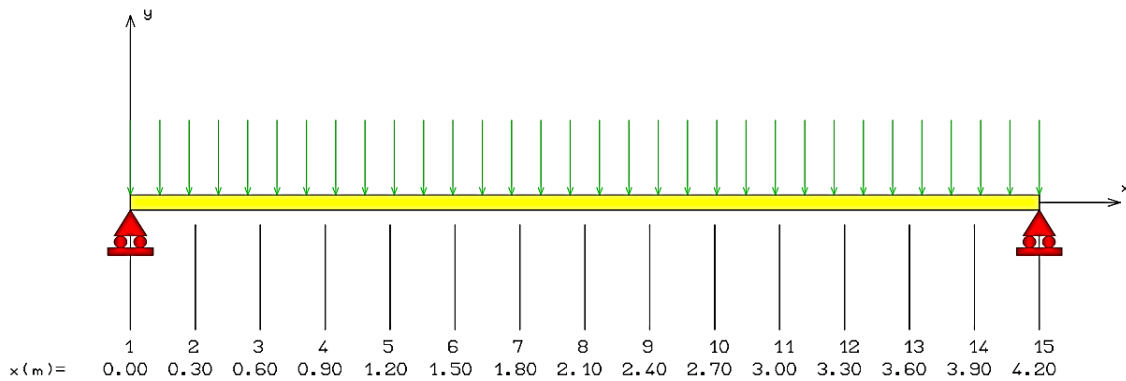


La comparaison:

X	La fleche		Rapport de correspondance
	Calcul théorique	Calcul numérique	
0	0.000000	0.000000	/
0.3	-0.017060	-0.017069	0.999452
0.6	-0.066574	-0.066611	0.999448
0.9	-0.146047	-0.146127	0.999454
1.2	-0.252982	-0.25312	0.999455
1.5	-0.384882	-0.385093	0.999452
1.8	-0.539251	-0.539546	0.999453
2.1	-0.713592	-0.713982	0.999454
2.4	-0.905409	-0.905904	0.999454
2.7	-1.112205	-1.112813	0.999454
3	-1.331484	-1.332212	0.999454
3.3	-1.560749	-1.561602	0.999454
3.6	-1.797503	-1.798486	0.999454
3.9	-2.039251	-2.040366	0.999454
4.2	-2.283495	-2.284744	0.999453



III.3.Exemple 2:



La charge concentrer $q = -1000 \text{ N}$; $L = 4.2 \text{ m}$; $I = 5.15 \text{ cm}^4$; $E 210000 \text{ Mpa}$

Données du problème

Matériau:

Nom du matériau = Acier

Module d'Young = 210000 Mpa Masse volumique = 8000 kg/m³ Limite élastique = 250 MPa

Section:

Rond plein : $D = 32.00 \text{ (mm)}$

Aire = 8.04 cm²

Moment quadratique : $I_z = 5.15 \text{ cm}^4$

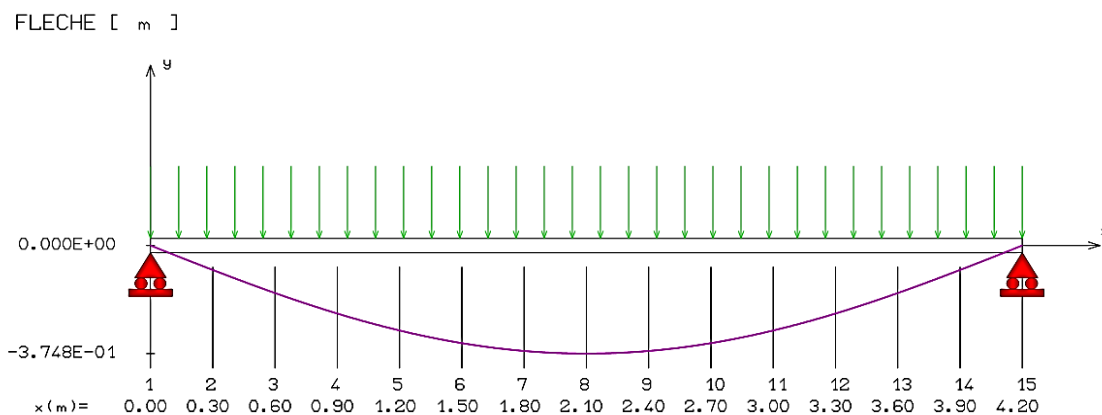
Fibre supérieure : $v_y = 16.00 \text{ mm}$ $W_{el.z} = 3.22 \text{ cm}^3$

Fibre inférieure : $v_y = 16.00 \text{ mm}$ $W_{el.z} = 3.22 \text{ cm}^3$

Cas de charge(s):

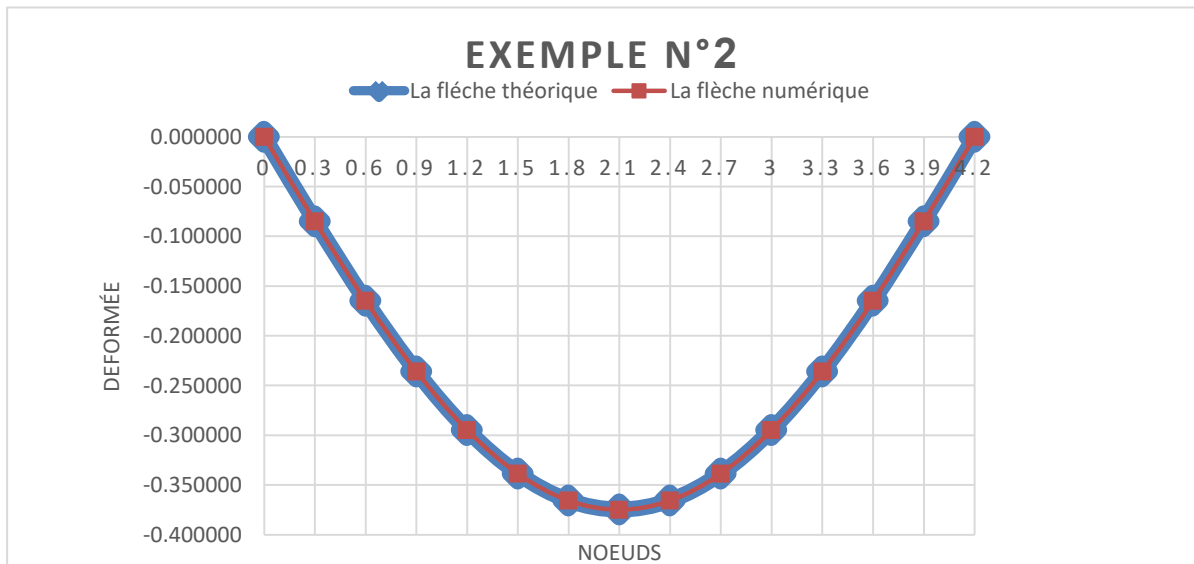
Charge linéairement répartie : Nœuds = 1 -> 15 $pyo = -1000.00$ $pye = -1000.00 \text{ N/m}$

Résultats: Déplacements nodaux

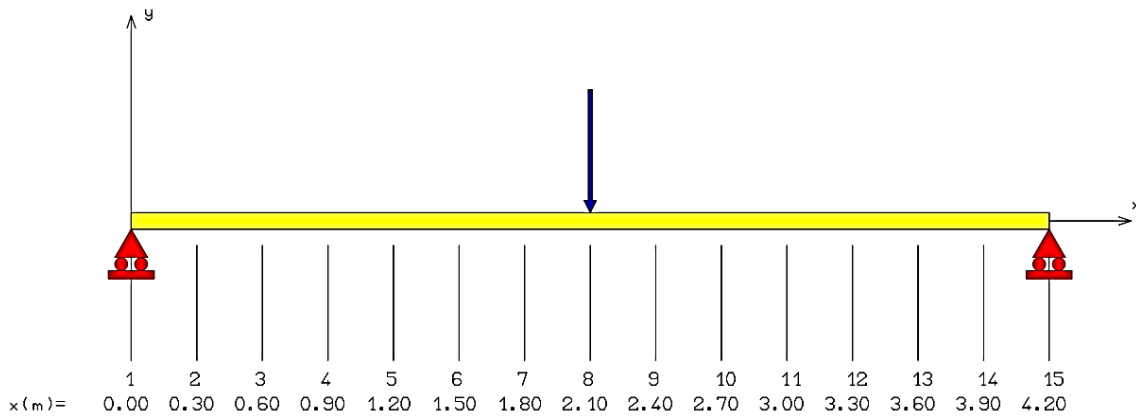


La comparaison:

X	La fleche		Rapport de correspondance
	Calcul théorique	Calcul numérique	
0	0.000000	0.000000	/
0.3	-0.084788	-0.084835	0.999452
0.6	-0.164771	-0.164861	0.999455
0.9	-0.235829	-0.235958	0.999452
1.2	-0.294591	-0.294752	0.999453
1.5	-0.338436	-0.338621	0.999454
1.8	-0.365492	-0.365692	0.999454
2.1	-0.374636	-0.374841	0.999453
2.4	-0.365492	-0.365692	0.999454
2.7	-0.338436	-0.338621	0.999454
3	-0.294591	-0.294752	0.999453
3.3	-0.235829	-0.235958	0.999452
3.6	-0.164771	-0.164861	0.999455
3.9	-0.084788	-0.084835	0.999452
4.2	0.000000	0.000000	/



III.4Exemple3:



Données du problème

Matériau:

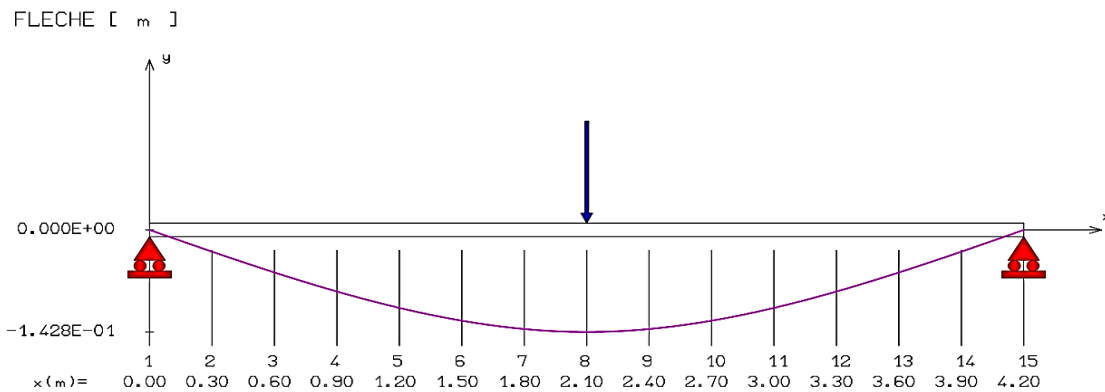
Nom du matériau = Acier

Module d'Young = 210000 Mpa Masse volumique = 8000 kg/m³ Limite élastique = 250 MPa

Cas de charge(s):

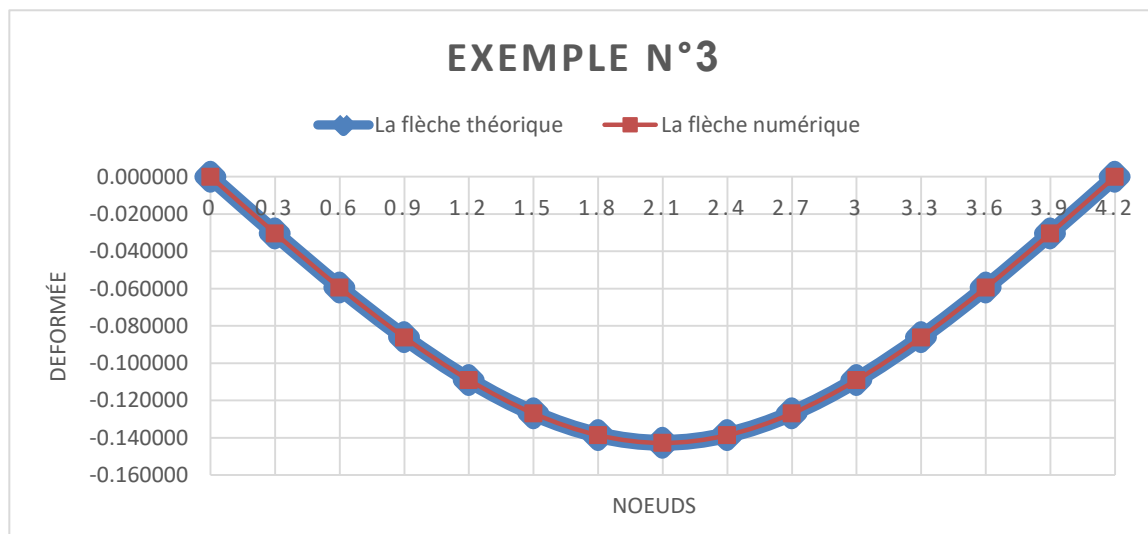
Charge nodale : Nœud = 8 $F_y = -1000.00$ N $M_z = 0.00$ N.m

Résultats :Déplacements nodaux



La comparaison:

X	La fleche		Rapport de correspondance
	Calcul théorique	Calcul numérique	
0	0.000000	0.000000	/
0.3	-0.030374	-0.030391	0.999456
0.6	-0.059501	-0.059533	0.999457
0.9	-0.086130	-0.086177	0.999459
1.2	-0.109015	-0.109075	0.999452
1.5	-0.126907	-0.126976	0.999457
1.8	-0.138558	-0.138633	0.999456
2.1	-0.142718	-0.142796	0.999457
2.4	-0.138558	-0.138633	0.999456
2.7	-0.126907	-0.126976	0.999457
3	-0.109015	-0.109075	0.999452
3.3	-0.086130	-0.086177	0.999459
3.6	-0.059501	-0.059533	0.999457
3.9	-0.030374	-0.030391	0.999456
4.2	0.000000	0.000000	/

**III.5. Discussions:**

- on observe que il ya un identification entre les deux méthodes
- on les points de appui simple et l'encastrement , il n ya pas de déflexion grâce a l'existence de force de réaction
- dans les axes installés entre les deux extrémités , la flèche maximal est l'endroit où la force est.
- les axes installés à une extrémités, la flèche maximal se trouve à l'autre côté.

Conclusion général

Conclusion général

Conclusion général:

-Cette étude comporte la comparaison entre deux méthodes analytique et numérique des problèmes de flexion .

-Cette comparaison nous a permis de conclure que :
les resultats des deux méthodes sont identique

A l'issue de ce travail, on peut noter que les objectifs que nous avons fixé au départ ont été atteints et de bon résultats sont obtenus.

On peut affirmer que d'après les exemples considérés, la méthode des éléments finis présent une bonne efficacité dans le calcul des structures avec une précision très acceptable.

Résumé

Résumé

Résumé :

L'objectif principal de ce travail est de développer une technique de calcul de structures sous forme de poutres composées de plusieurs éléments par la méthode des éléments finis, afin d'analyser ces types de structures dans un temps d'exécution réduit.

Dans notre travail, la méthode des éléments finis leur intérêt et leur application dans le domaine de calculs des structures est introduite. Puis les différentes méthodes analytiques de calcul de la déformée d'une poutre sont présentées.

La décomposition d'une structure très grande en éléments finis donne nécessité d'élaborer une loi qui traduise la relation force-déplacement de chaque élément en une équation appelée « équation de rigidité ». Nous avons cité les principaux étapes de construire l'équation de rigidité. On a exposé la méthode des éléments finis appliquée aux problèmes d'élasticité plane en utilisant le principe de minimisation de l'énergie potentielle total, le principe des travaux virtuel et la méthode de l'équilibre force-déplacement. Notre attention est limitée en particulier à l'élément barre et l'élément poutre dus à leurs popularités dans les problèmes pratique de calcul des structures mécanique.

Les calculs des poutres en flexion sont très importants dans la pratique. Presque tous les éléments de construction modélisables par des poutres ont un moment de flexion.

Des exemples de vérification ont été faits. Les déplacements calculés analytiquement en chaque nœud de la poutre sont comparés à ceux calculés numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. Le traitement numérique de ces exemples d'applications est effectué et par le logiciel RDM6.

Mots-clés: RDM, flexion, poutres , éléments finis.

الخلاصة:

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تطوير تقنية لحساب الهياكل في شكل عوارض تتكون من عدة عناصر بطريقة العناصر المحدودة ، من أجل تحليل هذه الأنواع من الهياكل في وقت تنفيذ مخفض.

في عملنا ، يتم تقديم طريقة العناصر المحدودة التي تهمهم وتطبيقهم في مجال الحسابات الهيكلية. ثم يتم عرض الطرق التحليلية المختلفة لحساب تشوه العارضة..

إن تحلل بنية كبيرة جداً إلى عناصر محدودة يجعل من الضروري تطوير قانون يترجم العلاقة بين القوة والإزاحة لكل عنصر إلى معادلة تسمى "معادلة الصلابة". لقد ذكرنا الخطوات الرئيسية في بناء معادلة الصلابة. تم تقديم طريقة العناصر المحدودة المطبقة على مشاكل مرونة الأسطح باستخدام مبدأ تقليل إجمالي الطاقة الكامنة ومبدأ العمل الافتراضي وطريقة توازن القوة والإزاحة. يقتصر اهتمامنا بشكل خاص على عنصر القضيب و عنصر العارضة نظراً لشعبيتهما في المشكلات العملية في تصميم الهياكل الميكانيكية.

تعتبر حسابات العوارض في الانحناء مهمة جداً في الممارسة. تقريباً جميع العناصر الهيكلية التي يمكن نمذجة العوارض لها لحظة الانحناء.

تم إجراء أمثلة للتحقق. تتم مقارنة الإزاحات المحسوبة تحليلياً في كل عقدة في العارضة مع تلك المحسوبة عددياً باستخدام طريقة العناصر المحدودة. يتم تنفيذ المعالجة الرقمية لأمثلة التطبيق هذه بواسطة برنامج RDM6.

الكلمات الدلالية:مقاومة المواد، الانحناء ، العوارض ، العناصر المحدودة.

Abstract:

The main objective of this work is to develop a technique for calculating structures in the form of beams composed of several elements by the finite element method, in order to analyze these types of structures in a reduced execution time.

In our work, the finite element method their interest and their application in the field of structural calculations is introduced. Then the different analytical methods for calculating the deformation of a beam are presented.

The decomposition of a very large structure into finite elements makes it necessary to develop a law which translates the force-displacement relationship of each element into an equation called the "stiffness equation". We have cited the main steps in constructing the stiffness equation. We discussed the finite element method applied to plane elasticity problems, using the principle of minimization of total potential energy, the principle of virtual work and the force-displacement equilibrium method. Our attention is limited in particular to the bar element and the beam element due to their popularity in practical problems in the design of mechanical structures.

Calculations of beams in bending are very important in practice. Almost all structural elements that can be modeled by beams have a bending moment.

Examples of verification have been made. Displacements computed analytically in each node of the beam are compared with those computed numerically by using the finite element method. The digital processing of these application examples is performed by the RDM6 software.

key words: RDM, bending, beams, finite element.

Bibliographie

Bibliographie

Bibliographie

- **Chapitre I:** IUT Béthune – Génie Civil – Mécanique des structures Cours – S. Kesteloot MS2 – partie 3 : Déformées des poutres isostatiques
- J. L. Fanchon, Guide des sciences et technologies industrielles. Afnor Nathan, Paris 2001.
- Chevalier, Guide de calcul en mécanique. Hachette Livre 1993.
- N.BOURAHLA , Résistance des matériaux de base. Edition GECOTEC
- Delaplace, F. Gatuingt, F. Ragueneau , Mécanique des structures : Résistance des matériaux , Dunod, Paris, 2008.
- Alexandre Ern , aide-mémoire éléments finis , Dunod, Paris, 2005.
- Calcul des structures par éléments finis , Antoine Legay Cnam-Paris ,2014-2015

Annexe

Annexe

Exemple 1:

La résulta numérique :

| Flexion d'une poutre droite |

Utilisateur : Institut National Polytechnique - HO CHI MINH VILLE

Nom du projet :

Date : 30 mai 2021

| Données du problème |

| Matériau |

Nom du matériau = Acier

Module d'Young = 210000 Mpa Masse volumique = 8000 kg/m³ Limite élastique = 250 MPa

| Noeuds [m] |

Noeud 1 : x = 0.000

Noeud 6 : x = 1.500

Noeud 11 : x = 3.000

Noeud 2 : x = 0.300

Noeud 7 : x = 1.800

Noeud 12 : x = 3.300

Noeud 3 : x = 0.600

Noeud 8 : x = 2.100

Noeud 13 : x = 3.600

Noeud 4 : x = 0.900

Noeud 9 : x = 2.400

Noeud 14 : x = 3.900

Noeud 5 : x = 1.200

Noeud 10 : x = 2.700

Noeud 15 : x = 4.200

| Section(s) droite(s) |

Noeuds 1 --> 15

Rond plein : D = 32.00 (mm)

Aire = 8.04 cm²

Moment quadratique : I_z = 5.15 cm⁴

Fibre supérieure : v_y = 16.00 mm Wel.z = 3.22 cm³

Fibre inférieure : v_y = 16.00 mm Wel.z = 3.22 cm³

Poids de la structure = 270.23 N (g = 10.00 m/s²)

| Liaison(s) nodale(s) |

Noeud 1 : Encastrement

| Cas de charge(s) |

Annexe

Charge nodale : Noeud = 15 $F_y = -1000.00$ N $M_z = 0.00$ N.m

| Résultats |

| Déplacements nodaux [m , rad] |

Noeud	Flèche	Pente	Noeud	Flèche	Pente	Noeud	Flèche	Pente
1	0.000000	0.000000	6	-0.385093	-0.478764	11	-1.332212	-0.749369
2	-0.017069	-0.112405	7	-0.539546	-0.549538	12	-1.561602	-0.778511
3	-0.066611	-0.216484	8	-0.713982	-0.611985	13	-1.798486	-0.799327
4	-0.146127	-0.312237	9	-0.905904	-0.666106	14	-2.040366	-0.811817
5	-0.253120	-0.399664	10	-1.112813	-0.711901	15	-2.284744	-0.815980

Dy maximal = 0.00000E+00 m à x = 0.000 m Dy minimal = -2.28474E+00 m à x = 4.200 m

| Efforts intérieurs [N N.m Pa] |

Ty = Effort tranchant Mfz = Moment fléchissant Sxx = Contrainte normale

Noeud	Ty	Mfz	Sxx	Noeud	Ty	Mfz	Sxx
{1}	-1000.00	-4200.00	-1.306E+09	{8}	-1000.00	-2100.00	-6.528E+08
{2}	-1000.00	-3900.00	-1.212E+09	{9}	-1000.00	-1800.00	-5.595E+08
{2}	-1000.00	-3900.00	-1.212E+09	{9}	-1000.00	-1800.00	-5.595E+08
{3}	-1000.00	-3600.00	-1.119E+09	{10}	-1000.00	-1500.00	-4.663E+08
{3}	-1000.00	-3600.00	-1.119E+09	{10}	-1000.00	-1500.00	-4.663E+08
{4}	-1000.00	-3300.00	-1.025E+09	{11}	-1000.00	-1200.00	-3.730E+08
{4}	-1000.00	-3300.00	-1.025E+09	{11}	-1000.00	-1200.00	-3.730E+08
{5}	-1000.00	-3000.00	-9.325E+08	{12}	-1000.00	-900.00	-2.798E+08
{5}	-1000.00	-3000.00	-9.325E+08	{12}	-1000.00	-900.00	-2.798E+08
{6}	-1000.00	-2700.00	-8.393E+08	{13}	-1000.00	-600.00	-1.865E+08
{6}	-1000.00	-2700.00	-8.393E+08	{13}	-1000.00	-600.00	-1.865E+08
{7}	-1000.00	-2400.00	-7.460E+08	{14}	-1000.00	-300.00	-9.325E+07
{7}	-1000.00	-2400.00	-7.460E+08	{14}	-1000.00	-300.00	-9.325E+07
{8}	-1000.00	-2100.00	-6.528E+08	{15}	-1000.00	0.00	9.475E-06

Moment flechissant maximal = 0.00 N.m à 4.200 m

Moment flechissant minimal = -4200.00 N.m à 0.000 m

Contrainte normale maximale = 1.306E+09 Pa à 0.000 m

Contrainte normale minimale = -1.306E+09 Pa à 0.000 m

| Action(s) de liaison [N N.m] |

Annexe

Noeud 1 $F_y = 1000.00$ $M_z = 4200.00$

| Informations sur le calcul |

Pivot minimal = $1.75074333457636E+0003$

Exemple 2:

La résulta numérique :

| Flexion d'une poutre droite |

Utilisateur : Institut National Polytechnique - HO CHI MINH VILLE

Nom du projet :

Date : 30 mai 2021

| Données du problème |

| Matériau |

Nom du matériau = Acier

Module d'Young = 210000 Mpa Masse volumique = 8000 kg/m³ Limite élastique = 250 MPa

| Noeuds [m] |

| Section(s) droite(s) |

Noeuds 1 --> 15

Noeud 1 : x = 0.000	Noeud 6 : x = 1.500	Noeud 11 : x = 3.000
Noeud 2 : x = 0.300	Noeud 7 : x = 1.800	Noeud 12 : x = 3.300
Noeud 3 : x = 0.600	Noeud 8 : x = 2.100	Noeud 13 : x = 3.600
Noeud 4 : x = 0.900	Noeud 9 : x = 2.400	Noeud 14 : x = 3.900
Noeud 5 : x = 1.200	Noeud 10 : x = 2.700	Noeud 15 : x = 4.200

Rond plein : D = 32.00 (mm)

Aire = 8.04 cm²

Moment quadratique : $I_z = 5.15$ cm⁴

Fibre supérieure : $v_y = 16.00$ mm $W_{el.z} = 3.22$ cm³

Fibre inférieure : $v_y = 16.00$ mm $W_{el.z} = 3.22$ cm³

Poids de la structure = 270.23 N ($g = 10.00$ m/s²)

Annexe

| Liaison(s) nodale(s) |

Noeud 1 : Flèche = 0 Noeud 15 : Flèche = 0

| Cas de charge(s) |

Charge linéairement répartie : Noeuds = 1 -> 15 pyo = -1000.00 pye = -1000.00 N/m

| Résultats |

| Déplacements nodaux [m , rad] |

Noeud	Flèche	Pente	Noeud	Flèche	Pente	Noeud	Flèche	Pente
1	0.000000	-0.2855936	-0.338621	-0.11906611	-0.294752	0.172355		
2	-0.084835	-0.2772677	-0.365692	-0.06078212	-0.235958	0.218150		
3	-0.164861	-0.253953	8	-0.374841	0.000000	13	-0.164861	0.253953
4	-0.235958	-0.2181509	-0.365692	0.060782	14	-0.084835	0.277267	
5	-0.294752	-0.17235510	-0.338621	0.11906615	0.000000	0.285593		

Dy maximal = 0.00000E+00 m à x = 0.000 m Dy minimal = -3.74841E-01 m à x = 2.100 m

| Efforts intérieurs [N N.m Pa] |

Ty = Effort tranchant Mfz = Moment fléchissant Sxx = Contrainte normale

Noeud	Ty	Mfz	Sxx	Noeud	Ty	Mfz	Sxx
{1}	- 2100.00	0.00	9.387E - 08	{8}	0.00	2205.00	6.854E + 08
{2}	- 1800.00	585.00	1.818E + 08	{9}	300.00	2160.00	6.714E + 08
{2}	- 1800.00	585.00	1.818E + 08	{9}	300.00	2160.00	6.714E + 08
{3}	- 1500.00	1080.00	3.357E + 08	{10}	600.00	2025.00	6.295E + 08
{3}	- 1500.00	1080.00	3.357E + 08	{10}	600.00	2025.00	6.295E + 08
{4}	- 1200.00	1485.00	4.616E + 0	{11}	900.00	1800.00	5.595E + 08
{4}	- 1200.00	1485.00	4.616E + 08	{11}	900.00	1800.00	5.595E + 08
{5}	- 900.00	1800.00	5.595E + 08	{12}	1200.00	1485.00	4.616E + 08
{5}	- 900.00	1800.00	5.595E + 08	{12}	1200.00	1485.00	4.616E + 08
{6}	- 600.00	2025.00	6.295E + 08	{13}	1500.00	1080.00	3.357E + 08
{6}	- 600.00	2025.00	6.295E + 08	{13}	1500.00	1080.00	3.357E + 08
{7}	- 300.00	2160.00	6.714E + 08	{14}	1800.00	585.00	1.818E + 08
{7}	- 300.00	2160.00	6.714E + 08	{14}	1800.00	585.00	1.818E + 08
{8}	0.00	2205.00	6.854E + 08	{15}	2100.00	- 0.00	- 3.038E - 06

Annexe

Moment flechissant maximal = 2205.00 N.m à 2.100 m

Moment flechissant minimal = -0.00 N.m à 4.200 m

Contrainte normale maximale = 6.854E+08 Pa à 2.100 m

Contrainte normale minimale = -6.854E+08 Pa à 2.100 m

| Action(s) de liaison [N N.m] |

Noeud 1 $F_y = 2100.00$

Noeud 15 $F_y = 2100.00$

| Informations sur le calcul |

Pivot minimal = 7.72077810546528E+0003

Exemple 3:

La résulta numérique :

| Flexion d'une poutre droite |

Utilisateur : Institut National Polytechnique - HO CHI MINH VILLE

Nom du projet :

Date : 31 mai 2021

| Données du problème |

| Matériau |

Nom du matériau = Acier

Module d'Young = 210000 Mpa Masse volumique = 8000 kg/m³ Limite élastique = 250 MPa

| Noeuds [m] |

Noeud 1 : x = 0.000

Noeud 6 : x = 1.500

Noeud 11 : x = 3.000

Noeud 2 : x = 0.300

Noeud 7 : x = 1.800

Noeud 12 : x = 3.300

Noeud 3 : x = 0.600

Noeud 8 : x = 2.100

Noeud 13 : x = 3.600

Noeud 4 : x = 0.900

Noeud 9 : x = 2.400

Noeud 14 : x = 3.900

Noeud 5 : x = 1.200

Noeud 10 : x = 2.700

Noeud 15 : x = 4.200

| Section(s) droite(s) |

Noeuds 1 --> 15

Annexe

Rond plein : $D = 32.00$ (mm) ; Aire = 8.04 cm² ; Moment quadratique : $I_z = 5.15$ cm⁴

Fibre supérieure : $v_y = 16.00$ mm Wel.z = 3.22 cm³

Fibre inférieure : $v_y = 16.00$ mm Wel.z = 3.22 cm³

Poids de la structure = 270.23 N ($g = 10.00$ m/s²)

| Liaison(s) nodale(s) |

Noeud 1 : Flèche = 0 ; Noeud 15 : Flèche = 0

| Cas de charge(s) |

Charge nodale : Noeud = 8 $F_y = -1000.00$ N $M_z = 0.00$ N.m

| Résultats |

| Déplacements nodaux [m , rad] |

Noeud	Flèche	Pente	Noeud	Flèche	Pente	Noeud	Flèche	Pente
1	0.000000	-0.101997	6	-0.126976	-0.049958	11	-0.109075	0.068692
2	-0.030391	-0.099916	7	-0.138633	-0.027061	12	-0.086177	0.083263
3	-0.059533	-0.093671	8	-0.142796	0.000000	13	-0.059533	0.093671
4	-0.086177	-0.083263	9	-0.138633	0.027061	14	-0.030391	0.099916
5	-0.109075	-0.068692	10	-0.126976	0.049958	15	0.000000	0.101997

Dy maximal = $0.000000E+00$ m à $x = 0.000$ m

Dy minimal = $-1.42796E-01$ m à $x = 2.100$ m

| Efforts intérieurs [N N.m Pa] |

Ty = Effort tranchant Mfz = Moment fléchissant Sxx = Contrainte normale

Noeud	Ty	Mfz	Sxx	Noeud	Ty	Mfz	Sxx
{1}	-500.00	0.00	$3.930E-07$	{8}	500.00	1050.00	$3.264E+08$
{2}	-500.00	150.00	$4.663E+07$	{9}	500.00	900.00	$2.798E+08$
{2}	-500.00	150.00	$4.663E+07$	{9}	500.00	900.00	$2.798E+08$
{3}	-500.00	300.00	$9.325E+07$	{10}	500.00	750.00	$2.331E+08$
{3}	-500.00	300.00	$9.325E+07$	{10}	500.00	750.00	$2.331E+08$
{4}	-500.00	450.00	$1.399E+08$	{11}	500.00	600.00	$1.865E+08$
{4}	-500.00	450.00	$1.399E+08$	{11}	500.00	600.00	$1.865E+08$
{5}	-500.00	600.00	$1.865E+08$	{12}	500.00	450.00	$1.399E+08$

Annexe

{5}	- 500.00	600.00	1.865E + 08	{12}	500.00	450.00	1.399E + 08
{6}	- 500.00	750.00	2.331E + 08	{13}	500.00	300.00	9.325E + 07
{6}	- 500.00	750.00	2.331E + 08	{13}	500.00	300.00	9.325E + 07
{7}	- 500.00	900.00	2.798E + 08	{14}	500.00	150.00	4.663E + 07
{7}	- 500.00	900.00	2.798E + 08	{14}	500.00	150.00	4.663E + 07
{8}	- 500.00	1050.00	3.264E + 08	{15}	500.00	0.00	5.823E - 07

Moment flechissant maximal = 1050.00 N.m à 2.100 m

Moment flechissant minimal = -0.00 N.m à 4.200 m

Contrainte normale maximale = 3.264E+08 Pa à 2.100 m

Contrainte normale minimale = -3.264E+08 Pa à 2.100 m

| Action(s) de liaison [N N.m] |

Noeud 1 $F_y = 500.00$; Noeud 15 $F_y = 500.00$

| Informations sur le calcul |

Pivot minimal = 7.72077810546528E+0003

Annexe

Tableaux d'équation:

Poutre	Pente maxi	Flèche	Équation
	$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$	$f_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$	$y' = -\frac{F \cdot x}{2EI}(2L - x)$ $y = -\frac{F \cdot x^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_B = -\frac{Fa^2}{2EI}$	$f_B = -\frac{Fa^2(3L - a)}{6EI}$	$x \leq a : y' = -\frac{Fx}{2EI}(2a - x)$ $y = -\frac{Fx^2}{6EI}(3a - x)$ $x > a : y' = -\frac{Fa^2}{2EI}$ $y = -\frac{Fa^2}{6EI}(3x - a)$
	$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI}$	$f_B = -\frac{qL^4}{8EI}$	$y' = -\frac{qx}{6EI} \quad (L^2 = 3Lx + x^2)$ $y = -\frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$	$f_B = \frac{-qa^3(4L - a)}{24EI}$	$x \leq a : y' = -\frac{qx}{6EI} (x^2 - 3ax + 3a^2)$ $y = -\frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4ax + 6a^2)$ $x > a : y' = -\frac{qa^2}{6EI}; y = -\frac{qa^3}{24EI} (4x - a)$
	$\theta_B = -\frac{Ma}{EI}$	$f_B = \frac{-Ma(2L - a)}{2EI}$	$x \leq a : y' = -\frac{Mx}{EI}; y = -\frac{Mx^2}{2EI}$ $x > a : y' = -\frac{Ma}{EI}; y = -\frac{Ma}{2EI} (2x - a)$
	$\theta_B = -\frac{q_0L^3}{24EI}$	$f_B = -\frac{q_0L^4}{30EI}$	$y' = -\frac{q_0x}{24LEI} (4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$ $y = -\frac{q_0x^2}{120EIL} (10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

Annexe

Poutre	Pente maxi	Flèche maxi	Équations
	$\theta_A = -\frac{FL^3}{16EI}$ $\theta_B = \theta_A$	$f_c = -\frac{FL^3}{48EI}$	$0 \leq x < \frac{L}{2}$ $y' = -\frac{F}{16EI} (L^2 - 4x^2)$ $y = -\frac{F \cdot x}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$
	$\theta_A = -\frac{F \cdot a \cdot b (L + b)}{6EIL}$ $\theta_B = \frac{F \cdot a \cdot b (L + a)}{6EIL}$	si $a > b$ $x_f = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ $f = \frac{F \cdot b (L^2 - b^2)^{3/2}}{9 \sqrt{3} EIL}$	$0 \leq x < a$ $y' = -\frac{F \cdot b}{6EIL} (L^2 - b^2 - 3x^2)$ $y = -\frac{F \cdot b \cdot x}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$
	$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta_B = \theta_A$	$f = -\frac{5qL^4}{384EI}$ pour $x = \frac{L}{2}$	$y' = -\frac{q}{24EI} (4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$ $y = -\frac{q \cdot x}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_A = -\frac{qa^2(2L - a)^2}{24EIL}$ $\theta_B = -\frac{qa^2(2L - b)^2}{24EIL}$		$x \leq a:$ $y' = \frac{-q}{24EIL} (4Lx^3 - 12aLx^2 + 6a^2x^2 + 4a^2L^2 - 4a^3L + a^4)$ $y = \frac{-q \cdot x}{24EIL} (Lx^3 - 4aLx^2 + 2a^2x^2 + 4a^2L^2 - 4a^3L + a^4)$
	$\theta_A = \frac{-M(6aL - 3a^2 - 2L^2)}{6EIL}$ $\theta_B = \frac{M(3a^2 - L^2)}{6EIL}$		$x \leq a:$ $y' = \frac{-M}{6EIL} (6aL - 3x^2 - 3a^2 - 2L^2)$ $y = \frac{-M \cdot x}{6EIL} (6aL - x^2 - 3a^2 - 2L^2)$
	$\theta_A = -\frac{7q_0L^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{q_0L^3}{45EI}$	pour $x_1 = 0,5193L$ $f = \frac{0,00652 q_0L^4}{EI}$	$y' = \frac{-q_0}{360EI} (15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)$ $y = \frac{-q_0x}{360EI} (3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$