

# Commande optimale de processus thermiques de grande dimension

Pierre Spiteri<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IRIT-ENSEEIH – 2 rue Camichel – BP 7122 – F-31 071 Toulouse (France)

[Pierre.Spiteri@enseeiht.fr](mailto:Pierre.Spiteri@enseeiht.fr)

**Abstract.** La présente étude est consacrée à la détermination de la loi de commande optimale pour la régulation de processus thermiques de grandes dimensions. Différents algorithmes de résolution du problème de commande optimale, tels que les méthodes de relaxation, de plus profonde descente et du gradient conjugué sont présentés et implémentés. Leurs efficacités sont comparées expérimentalement.

**Keywords:** Commande optimale, principe de Pontryaguin, méthode de relaxation, méthode de plus profonde descente, méthode du gradient conjugué, systèmes dynamiques.

## 1 Introduction

Les nécessités de commande en ligne de processus dynamiques complexes continus et soumis à des perturbations, exigent parfois la résolution extrêmement rapide de systèmes différentiels avec conditions aux deux bouts, ces systèmes étant issus des conditions d'optimalité de Pontryaguin. La résolution efficace de ces systèmes algèbro – différentiels permet ainsi de réagir en temps réel aux perturbations éventuelles agissant sur le processus à contrôler de manière optimale. L'intérêt majeur de cette problématique est donc de réduire de façon sensible les temps de calculs et d'autoriser la conduite en temps réel de processus, de grande dimension, interconnectés entre eux.

Dans le cas de problèmes à horizon fixe et à état final libre, on présente dans cette étude, un algorithme de relaxation pour la conduite en ligne d'un processus thermique dans lequel la commande est soumise à des contraintes de type inégalité. L'algorithme de relaxation considéré se déduit directement des conditions d'optimalité de Pontryaguin. À cause des contraintes sur la commande, ces dernières conditions d'optimalité conduisent à la résolution d'un problème multivoque, ce qui classiquement revient à projeter les valeurs calculées de la commande sur l'ensemble convexe définissant ces contraintes. L'algorithme de relaxation étant de nature itérative, sous certaines conditions, l'application de point fixe associée au problème à résoudre est contractante dans un espace produit de fonctions continues par morceaux, ce qui permet de mettre en évidence un critère de convergence simple. De plus, il convient de préciser que les conditions de convergence sont indépendantes de la longueur de l'horizon dans lequel les équations d'évolution sont définies.

Par ailleurs, les performances de l'algorithme de relaxation sont comparées avec celles de méthodes plus classiques, comme la méthode de plus profonde descente ou celle du gradient conjugué. Les expérimentations numériques montrent clairement que l'algorithme de relaxation est particulièrement intéressant :

- lorsque le coût du contrôle est important,

Pierre Spiteri

- lorsque les contraintes sur la commande sont saturées où dans ce cas particulier les performances de la méthode du gradient conjugué s'effondrent.

Le présent papier se décompose en 6 sections. Au paragraphe 2, le problème de commande optimale considéré est présenté dans une forme la plus générale et les équations d'optimalité sont établies. Le paragraphe 3 est consacré à la présentation de la modélisation du processus thermique à contrôler. Le paragraphe suivant est consacré à la description des méthodes de relaxation, de plus profonde descente et celle du gradient conjugué ; un résultat de convergence pour la méthode de relaxation est présenté. Enfin, le dernier paragraphe présente brièvement le résultat des essais numériques, lorsque les équations d'état sont respectivement de dimension 6 et 24 ; en particulier les vitesses de convergence et les temps de calculs des différents algorithmes de résolution sont comparés entre eux. L'annexe présente la définition et les propriétés des M-matrices, notion largement utilisée dans le présent travail.

## 2 Position du problème et caractérisation de la solution

Soit le système physique dont l'état est décrit par l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, u, t), u(t) \in U_{ad}, t_0 < t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $U_{ad}$  représente l'ensemble de commandes admissibles, ensemble convexe fermé des applications bornées, continues par morceaux sur  $[t_0, T]$ . On désire conduire le système d'un état initial  $y(t_0)$  à un état final  $y(T)$  en minimisant la fonction coût suivante

$$J = S(y(T), T) + \int_{t_0}^T r(y, u, t) dt \quad (2)$$

où  $S(y(T), T)$  représente le coût terminal. Il s'agit donc d'un problème de commande optimale à horizon fixe et à état final libre. Pour respecter des conditions de régularité, on suppose que les applications  $f$  et  $r$  sont deux fois continûment dérivables par rapport à  $y$  et  $u$ . La solution d'un tel problème est classiquement caractérisée en utilisant le principe de Pontryaguin, qui compte tenu des contraintes sur la commande s'écrit ici

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \nabla_p H = f(y, u, t), & y(t_0) = y_0 \\ -\frac{dp}{dt} = \nabla_y H = \nabla_y r(y, u, t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T \cdot p(t), & p(T) = \nabla_y S(y(T), T) \\ \nabla_u H = \frac{\partial r}{\partial u} + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]^T \cdot p(t) + \partial \Psi_{U_{ad}} \ni 0 \end{cases} \quad (3)$$

où  $H$  est l'Hamiltonien défini par

$$H(y(t), p(t), u(t), t) = S(y(T), T) + r(y, u, t) + p^t \cdot f(y, u, t),$$

$p$  est l'état adjoint,  $\Psi_{U_{ad}}$  est la fonction indicatrice du convexe et  $\partial\Psi_{U_{ad}}$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe  $U_{ad}$ . Rappelons que, classiquement, les conditions d'optimalité précédentes expriment le fait que le Hamiltonien  $H(y,p,u,t)$  possède un minimum absolu. Notons qu'en l'absence de coût terminal, i.e. si  $S(y(T),T) = 0$ , alors  $p(T)=0$ . La prise en compte des contraintes sur la commande conduit à la résolution d'un problème multivoque ; ceci provient de la perturbation de la troisième équation par le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe  $U_{ad}$  application multivoque dont nous rappelons ci-dessous la définition ainsi que les principales propriétés.

**Définition 1** : Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $E'$  le dual topologique de  $E$ ; soit  $\phi$  une application non-différentiable ; l'ensemble des  $\xi \in E'$  noté  $\partial\phi(\mu)$  tel que

$$\phi(\mu) - \phi(\sigma) - \langle \xi, \mu - \sigma \rangle \geq 0, \forall \mu \in E, \xi \in \partial\phi(\mu)$$

est le sous-différentiel de  $\phi$  en  $\mu$  et  $\xi$  est le sous-gradient.

**Remarque** : si  $\phi$  est une application différentiable alors  $\partial\phi(\mu)$  se réduit à  $\{\phi'(\mu)\}$ .

Pour fixer les idées, la fonction  $\phi = |\mu|$  n'est pas différentiable à l'origine ; le sous-différentiel de cette application est donc  $\partial\phi(\mu) = \text{sign}(\mu)$ , soit

$$\partial\phi(\mu) = \text{sign}(\mu) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu < 0 \\ [-1, +1] & \text{si } \mu = 0 \\ +1 & \text{si } \mu > 0 \end{cases}$$

On peut énoncer les propriétés suivantes

**Propriété fondamentale n°1** : Un élément  $\mu_0$  vérifie  $\phi(\mu_0) = \min_{\mu \in E} (\phi(\mu))$ , s.s.i.

$$0 \in \partial\phi(\mu_0)$$

**Preuve** :  $\mu_0 \in E$  vérifie  $\phi(\mu_0) \leq \phi(\mu)$ ,  $\forall \mu \in E$ , s.s.i. on a  $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_0) + \langle 0, \mu - \mu_0 \rangle$  ; soit  $0 \in \partial\phi(\mu_0)$ .

**Propriété fondamentale n°2** :  $\partial\phi$  est un opérateur monotone multivoque de  $E$  dans  $E'$

**Preuve** : Soit  $\xi \in \partial\phi(\mu) \Rightarrow \phi(\sigma) \geq \phi(\mu) + \langle \xi, \sigma - \mu \rangle$ ,  $\forall \sigma \in E$

Soit  $\zeta \in \partial\phi(\pi) \Rightarrow \phi(\sigma) \geq \phi(\pi) + \langle \zeta, \sigma - \pi \rangle$ ,  $\forall \sigma \in E$

On considère dans la première inégalité que  $\sigma = \pi$  et que dans la seconde inégalité  $\sigma = \mu$  ; on additionne terme à terme d'où  $\langle \xi - \zeta, \mu - \pi \rangle \geq 0$ , ce qui établit que  $\partial\phi$  est une application monotone.

**Conséquence** : il en résulte que chercher à minimiser  $\phi$  sur un ensemble convexe  $U \subset E$  se ramène à résoudre une équation multivoque  $0 \in \mathbf{A}(\mu)$ , (avec  $\mathbf{A} = \partial(\phi + \Psi_U)$ ), où  $\Psi_U$  est la fonction indicatrice du convexe  $U$ , dont on rappelle ci-dessous la définition

**Définition 2** : Soit  $U$  un convexe fermé,  $E$  un e.v.n.,  $U \subset E$  ; la fonction indicatrice  $\Psi_U$  du convexe est alors définie par

$$\Psi_U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in U \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Propriété** : sous-différentiel de  $\Psi_U$

$\partial\Psi_U(\mu) = \{\xi \in E' \mid \langle \xi, \mu - \sigma \rangle \geq 0, \forall \mu \in U\} \Rightarrow \text{Dom}(\partial\Psi_U) = \text{Dom}(\Psi_U) = U$

$\partial\Psi_U(\mu) = \{0\}$ ,  $\forall \mu \in U$  et si  $\mu \in \partial U$  (frontière de  $U$ )  $\partial\Psi_U(\mu)$  coïncide avec le cône des normales à  $U$  au point  $\mu$

Pierre Spiteri

**Exemple** :  $U = \{ u \mid u_{\text{Max}} \geq u \geq u_{\text{min}} \}$ ; alors

$$\partial\Psi_U(v) = \begin{cases} ]-\infty, 0] & \text{si } v = u_{\text{min}} \\ 0 & \text{si } u_{\text{Max}} \geq v \geq u_{\text{min}} \\ [0, +\infty[ & \text{si } v = u_{\text{Max}} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

application qui est bien monotone.

**Remarque** : ces rappels étant effectués, la formulation (3) des équations d'optimalité traduit la projection de la commande sur le convexe  $U_{\text{ad}}$  définissant les contraintes ; précisons que nous cherchons à minimiser  $\partial(H + \Psi_{U_{\text{ad}}})$ , et que, compte tenu de la continuité de  $H$ , cela conduit finalement à la résolution de l'équation (3). Par ailleurs, en l'absence de contraintes, il est clair que  $\partial\Psi_{U_{\text{ad}}} = 0$ , et les équations d'optimalité se réduisent aux formules classiques

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \nabla_p H = f(y, u, t), & y(t_0) = y_0 \\ -\frac{dp}{dt} = \nabla_y H = \nabla_y r(y, u, t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T \cdot p(t), & p(T) = \nabla_y S(y(T), T) \\ \nabla_u H = \frac{\partial r}{\partial u} + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]^T \cdot p(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

### 3 Régulation d'un processus thermique

Le problème étudié consiste à amener l'état d'un barreau situé dans une cheminée à une température voisine d'une consigne  $z_d \in \mathbb{R}^n$  en un temps fini  $T$ . Dans la suite  $x \in \mathbb{R}^n$  représente la température de la cheminée en  $n$  points,  $u \in \mathbb{R}^n$  est l'intensité des courants envoyés dans chacun des  $n$  enroulements de chauffage ; pour des raisons d'homogénéité de notation,  $z \in \mathbb{R}^n$  représente la température du barreau en  $n$  points. Le problème revient donc à déterminer la commande  $u$  telle qu'au bout du temps  $T$  la température du barreau soit uniformément égale à  $z_d$ . La modélisation mathématique du problème a été obtenue par linéarisation de l'équation de la chaleur autour d'un point de fonctionnement et identification de paramètre (voir [7]). Soit  $y = (z_1, x_1, \dots, z_n, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$  le vecteur décrivant l'état du système, défini par l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu + f(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $y_0$  est l'état initial donné du système,  $f(t)$  est un terme source donné,  $A$  et  $B$  deux matrices, telles que  $A$  est l'opposée d'une  $M$ -matrice, ce qui garantit la stabilité des solutions  $y(t)$  puisque  $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$ . On renvoie à l'annexe pour un bref rappel de la notion de  $M$ -matrice (voir [11]). L'observation du système est constituée par une partie du vecteur  $y$  à savoir le vecteur  $z$  ; on pose  $z = C y$ , où  $C$  est la matrice

### Commande optimale de processus thermiques de grande dimension

d'observation. Par exemple, si  $n = 3$  (four à 3 tranches), la matrice d'observation  $C$  est définie par

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le critère  $J(u)$  à minimiser est la combinaison linéaire de deux critères  $J_1$  et  $J_2$ , soit

$$J(u) = \alpha J_1(u) + \beta J_2(u),$$

le dosage entre les deux composantes du critère étant effectué par les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour  $J_1$  et  $J_2$ , on retiendra les expressions suivantes

$$J_1(u) = \int_0^T \|z - z_d\|_2^2 dt, \text{ définissant un critère de précision}$$

et

$$J_2(u) = \int_0^T \|u - u_d\|_2^2 dt, \text{ correspondant à la minimisation de la consommation}$$

d'énergie, le terme  $u_d$  correspondant à la commande conduisant asymptotiquement à la température prescrite  $z_d$  et donnée par  $u_d = -(CA^{-1}B)^{-1} z_d$ .

Le problème se résume donc à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u \in U_{ad} \text{ t.q. } J(u) = \underset{v \in U_{ad}}{\text{Min}} J(v) \\ \text{sous la contrainte} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu + f(t), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

l'ensemble  $U_{ad}$  étant défini par  $U_{ad} = \{ u \mid u_{\max} \geq u \geq u_{\min} \}$ .

Dans le cas général où les contraintes sont prises en compte, les équations d'optimalité s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu + f(t), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{dp}{dt} = A^t p + C^t C y - C^t z_d \\ p(T) = 0 \end{array} \right. \\ \frac{\alpha}{\beta} B^t p + u - u_d + \partial \Psi_{U_{ad}} \ni 0 \end{array} \right.$$

où  $\partial \Psi_{U_{ad}}$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe  $U_{ad}$ ; dans le cas sans contrainte elles se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu + f(t), \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \\ -\frac{dp}{dt} = A^t p + C^t C y - C^t z_d, \quad t \in [0, T] \\ p(T) = 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} B^t p + u - u_d = 0, \quad t \in [0, T] \end{array} \right.$$

## 4 Algorithmes de résolution

### 4.1 Algorithme de relaxation

La caractérisation précédente des solutions fournit directement un algorithme de résolution du problème de commande optimale du processus thermique. Soit  $u^{(0)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , donnée une approximation initiale de la commande. On effectue alors

(a) la détermination de l'état  $y^{(r+1)}(t)$  par intégration numérique de l'équation d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy^{(r+1)}(t)}{dt} = Ay^{(r+1)}(t) + Bu^{(r)}(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \\ y^{(r+1)}(0) = y_0 \end{array} \right.$$

(b) la détermination de l'état adjoint  $p^{(r+1)}(t)$  par intégration numérique dans le sens rétrograde de l'équation d'état adjoint, avec  $p^{(r+1)}(T) = 0$ , en l'absence de coût terminal dans ce problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dp^{(r+1)}(t)}{dt} = A^t p^{(r+1)}(t) + C^t C y^{(r+1)}(t) - C^t z_d, \quad t \in [0, T] \\ p^{(r+1)}(T) = 0 \end{array} \right.$$

(c) la détermination de la commande  $u^{(r+1)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$

$$u^{(r+1)}(t) = \underset{U_{ad}}{\text{Pr } o j} \left( u_d - \frac{\alpha}{\beta} B^t p^{(r+1)}(t) \right), \quad t \in [0, T].$$

Le processus de calcul (a), (b) et (c) est recommencé jusqu'à convergence. On indique ci dessous un résultat de convergence (voir [7] pour la preuve)

**Proposition 3** : Si la matrice  $A$  est l'opposée d'une  $M$  – matrice et si le rapport

$\frac{\beta}{\alpha} > k_O$ , alors la méthode de relaxation décrite par (a), (b) et (c) est convergente.

**Remarque** : la convergence de la méthode de relaxation est assurée dès que le poids de la commande est plus important que celui de la précision sur l'observation dans le critère  $J(u)$  à minimiser.

À titre indicatif de comparaison de performances, nous donnons la formulation des algorithmes de plus profonde descente et de gradient conjugué.

#### 4.2 Algorithme de plus profonde descente

Comme précédemment soit  $u^{(0)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , donnée une approximation initiale de la commande. On effectue alors

(a') la détermination de l'état  $y^{(r+1)}(t)$  par intégration numérique de l'équation d'état

$$\begin{cases} \frac{dy^{(r+1)}(t)}{dt} = Ay^{(r+1)}(t) + Bu^{(r)}(t) + f(t), & t \in [0, T] \\ y^{(r+1)}(0) = y_0 \end{cases}$$

(b') la détermination de l'état adjoint  $p^{(r+1)}(t)$  par intégration numérique dans le sens rétrograde de l'équation d'état adjoint

$$\begin{cases} -\frac{dp^{(r+1)}(t)}{dt} = A^t p^{(r+1)}(t) + C^t C y^{(r+1)}(t) - C^t z_d, & t \in [0, T] \\ p^{(r+1)}(T) = 0 \end{cases}$$

(c') la détermination de la commande par la méthode de plus profonde descente

$$u^{(r+1)}(t) = \underset{U_{ad}}{\text{Pr Oj}} (u^{(r)}(t) - \theta_r G^{(r)}), \quad t \in [0, T]$$

où

$$G^{(r)} = u^{(r)} + \frac{\alpha}{\beta} B^t p^{(r+1)}(t) - u_d, \quad t \in [0, T]$$

et

$$\theta_r = \frac{\|G^{(r)}\|^2}{\frac{\alpha}{\beta} \langle B^t \hat{p}^{(r+1)}, G^{(r)} \rangle + \|G^{(r)}\|^2}$$

le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant défini par  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_0^T \langle \cdot, \cdot \rangle_{R^n} dt$ , où

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^n}$  est le produit scalaire standard dans  $R^n$ , l'intégrale étant évaluée par voie numérique.

#### 4.3 Algorithme du gradient conjugué

Soit  $u^{(0)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , donnée une approximation initiale de la commande. La méthode du gradient conjugué se décompose en deux parties : une partie dévolue à l'initialisation de l'algorithme et une partie itérative constituée d'un corps de boucle.

##### Initialisation de l'algorithme

calcul de  $q^{(0)}(t) = \nabla J(u^{(0)}(t)) = \text{grad } J(u^{(0)}(t))$ ,  $t \in [0, T]$  par résolution des équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{dy^{(0)}(t)}{dt} = Ay^{(0)}(t) + Bu^{(0)}(t) + f(t), & t \in [0, T] \\ y^{(0)}(0) = y_0 \end{cases}$$

Pierre Spiteri

$$\begin{cases} -\frac{dp^{(0)}(t)}{dt} = A^t p^{(0)}(t) + C^t C y^{(0)}(t) - C^t z_d, t \in [0, T] \\ p^{(0)}(T) = 0 \end{cases}$$

puis

$$q^{(0)} = G^{(0)} = u^{(0)} + \frac{\alpha}{\beta} B^t p^{(0)}(t) - u_d, t \in [0, T]$$

ainsi que

$$\begin{cases} \frac{d\hat{y}^{(0)}(t)}{dt} = A\hat{y}^{(0)}(t) + Bq^{(0)}(t), t \in [0, T] \\ \hat{y}^{(0)}(0) = 0 \\ -\frac{d\hat{p}^{(0)}(t)}{dt} = A^t \hat{p}^{(0)}(t) + C^t C \hat{y}^{(0)}(t), t \in [0, T] \\ \hat{p}^{(0)}(T) = 0 \end{cases}$$

$$A q^{(0)} = q^{(0)} + \frac{\alpha}{\beta} B^t \hat{p}^{(0)}(t), t \in [0, T]$$

et

$$\theta_0 = \frac{\langle G^{(0)}, q^{(0)} \rangle}{\langle Aq^{(0)}, q^{(0)} \rangle}$$

### Corps de boucle

(a'') détermination de l'état  $y^{(r+1)}(t)$  par intégration numérique de l'équation d'état

$$\begin{cases} \frac{dy^{(r+1)}(t)}{dt} = Ay^{(r+1)}(t) + Bu^{(r)}(t) + f(t), t \in [0, T] \\ y^{(r+1)}(0) = y_0 \end{cases}$$

(b'') détermination de l'état adjoint  $p^{(r+1)}(t)$  par intégration numérique dans le sens rétrograde de l'équation d'état adjoint

$$\begin{cases} -\frac{dp^{(r+1)}(t)}{dt} = A^t p^{(r+1)}(t) + C^t C y^{(r+1)}(t) - C^t z_d, t \in [0, T] \\ p^{(r+1)}(T) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$G^{(r)} = u^{(r)} + \frac{\alpha}{\beta} B^t p^{(r+1)}(t) - u_d, t \in [0, T]$$

et

$$\beta_r = -\frac{\|G^{(r)}\|^2}{\|G^{(r-1)}\|^2} \quad q^{(r)} = G^{(r)} - \beta_r q^{(r-1)}$$

(c'') détermination de  $\hat{y}^{(r+1)}$  et  $\hat{p}^{(r+1)}$  par intégration de



## Commande optimale de processus thermiques de grande dimension

$$\begin{cases} \frac{d\hat{y}^{(r+1)}(t)}{dt} = A\hat{y}^{(r+1)}(t) + Bq^{(r)}(t), \quad t \in [0, T] \\ \hat{y}^{(r+1)}(0) = 0 \\ -\frac{d\hat{p}^{(r+1)}(t)}{dt} = A^t \hat{p}^{(r+1)}(t) + C^t C \hat{y}^{(r+1)}(t), \quad t \in [0, T] \\ \hat{p}^{(r+1)}(T) = 0 \end{cases}$$

et

$$Aq^{(r)} = q^{(r)} + \frac{\alpha}{\beta} B^t \hat{p}^{(r+1)}(t), \quad t \in [0, T]$$

Soit

$$\theta_r = \frac{\langle G^{(r)}, q^{(r)} \rangle}{\langle Aq^{(r)}, q^{(r)} \rangle}$$

(d'') Détermination de la commande par la méthode du gradient conjugué

$$u^{(r+1)}(t) = \underset{U_{ad}}{\text{Proj}} (u^{(r)}(t) - \theta_r q^{(r)}), \quad t \in [0, T],$$

le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant défini comme au paragraphe 4.2.

**Remarque** : l'implantation des algorithmes précédents, nécessite la résolution d'une équation différentielle ordinaire. Parmi les méthodes d'intégration de ce type d'équation, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'Euler – modifiée, d'ordre 2, qui se formule comme suit pour la résolution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(y, t), \quad t_0 < t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases};$$

on discrétise le temps en les points  $t_m = t_0 + m \cdot \delta t$ , où  $\delta t$  est le pas de temps et on approxime  $y(t_m)$  par la suite récurrente  $y_m$  calculée comme suit

$$\begin{cases} K0 = \delta t \cdot f(y_m, t_m) \\ K1 = \delta t \cdot f(y_m + K0, t_m + \delta t) \\ y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2} (K0 + K1) \end{cases}$$

Ce procédé est particulièrement commode dans le cas de notre application puisqu'il ne nécessite pas d'utilisation de valeurs en des points intermédiaires compris dans l'intervalle  $[t_m, t_{m+1}]$ .

## 5 Expérimentations numériques

Les expérimentations numériques ont porté sur la régulation de deux processus thermiques de grande dimension, à savoir

- un four à  $n = 3$  zones de chauffage, baptisé Horace
- un four à  $n = 12$  zones de chauffage, baptisé Hercule.

On trouvera dans [7] les valeurs des coefficients des matrices A, B et C, ainsi que celles des valeurs des paramètres intervenant dans l'identification. On indique simplement que, dans chaque cas, A est une matrice carrée de dimension 2n, et il a été vérifié que c'était bien une M – matrice, ce qui permet d'appliquer le résultat théorique énoncé au paragraphe 4 ; de plus les matrices B et C sont des matrices rectangulaires de dimensions respectives (2nxn) et (nx2n).

On a constaté expérimentalement que pour une valeur du rapport  $\frac{\beta}{\alpha} > k_0$ , correspondant à un coût élevé du contrôle par rapport à la précision sur l'observation  $z = Cy$ , la convergence des méthodes présentées précédemment est bonne quelle que soit la donnée initiale ; on a pu donner une estimation de  $k_0$  pour chacun des processus thermiques. Ainsi  $k_0 \approx 2$  pour le processus Horace et  $k_0 \approx 4$  pour le processus Hercule.

Cependant, si le rapport  $\frac{\beta}{\alpha} \leq k_0$ , les méthodes itératives précédentes convergent également. Les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans les tables 1, 2, 3 et 4 et nous conduisent à formuler les commentaires suivants

- dans le cadre théorique envisagé ici, c'est à dire lorsque le coût du contrôle est plus élevé que le coût de la précision, la méthode de relaxation est plus performante que les deux autres méthodes. Par contre lorsque le rapport  $\frac{\beta}{\alpha} \leq k_0$ , la méthode du gradient conjugué s'avère efficace ; il faut cependant préciser que si cette dernière méthode s'applique bien dans le cas sans contraintes, elle est nettement moins performante lorsque celles-ci sont saturées. Par contre la méthode de relaxation est moins sensible dans ce cas,
- pour tous les essais numériques effectués, la méthode des directions conjuguées donne de meilleurs résultats que ceux obtenus avec la méthode de plus profonde descente ; néanmoins, ces deux algorithmes ont des performances sensiblement équivalentes,
- la méthode de relaxation est simple à programmer et nécessite peu de place mémoire ; c'est une méthode particulièrement robuste. Ce type de méthode est plus efficace lorsque les interactions entre les diverses composantes sont faibles, ce qui ne semble pas être le cas des méthodes de descente ou de direction conjuguées.

**Remarque** : on peut envisager une extension de cette étude au cas de problèmes de commande optimale plus généraux, tels que l'étude de systèmes singulièrement perturbés, correspondant à des problèmes à plusieurs échelles de temps, ainsi qu'à des problèmes multi – critères (voir [8]).

**Table 1.** Temps de calcul en secondes pour la regulation du four Horace.

| Rapport $\frac{\beta}{\alpha}$    | 0,25 | 0,25 <sup>1</sup> | 1    | 2    | 4    | 10   |
|-----------------------------------|------|-------------------|------|------|------|------|
| <b>Algorithme</b>                 |      |                   |      |      |      |      |
| Méthode de relaxation             | 317  | 171,8             | 64,5 | 45,5 | 39,3 | 33   |
| Méthode de plus profonde descente | 114  | 163,6             | 88,7 | 76,3 | 63,8 | 63,8 |
| Méthode de gradient conjugué      | 77,5 | 1 828             | 64,8 | 64,8 | 64,8 | 52,2 |

<sup>1</sup> Cas de contraintes saturées

Commande optimale de processus thermiques de grande dimension

**Table 2.** Nombre d'itérations pour la convergence pour la regulation du four Horace.

| Rapport $\frac{\beta}{\alpha}$    | 0,25 | 0,25 <sup>2</sup> | 1  | 2 | 4 | 10 |
|-----------------------------------|------|-------------------|----|---|---|----|
| <b>Algorithme</b>                 |      |                   |    |   |   |    |
| Méthode de relaxation             | 50   | 27                | 10 | 7 | 6 | 5  |
| Méthode de plus profonde descente | 10   | 13                | 7  | 6 | 5 | 5  |
| Méthode de gradient conjugué      | 6    | 59                | 5  | 5 | 5 | 4  |

**Table 3.** Temps de calcul en secondes pour la regulation du four Hercule.

| Rapport $\frac{\beta}{\alpha}$    | 3    | 4    | 10  |
|-----------------------------------|------|------|-----|
| <b>Algorithme</b>                 |      |      |     |
| Méthode de relaxation             | 1009 | 854  | 545 |
| Méthode de plus profonde descente | 1077 | 1077 | 924 |
| Méthode de gradient conjugué      | 931  | 931  | 776 |

**Table 4.** Nombre d'itérations pour la convergence pour la regulation du four Hercule.

| Rapport $\frac{\beta}{\alpha}$    | 3  | 4  | 10 |
|-----------------------------------|----|----|----|
| <b>Algorithme</b>                 |    |    |    |
| Méthode de relaxation             | 13 | 11 | 7  |
| Méthode de plus profonde descente | 7  | 7  | 6  |
| Méthode de gradient conjugué      | 6  | 6  | 5  |

## 6 Annexe : notion de M – matrice

On rappelle ci-dessous des définitions et résultats classiques (voir [11]).

**Définition 4 :** A est une M – matrice si A est inversible,  $A^{-1} \geq 0$  et  $a_{i,j} \leq 0$  dès que  $i \neq j$ .

**Théorème 5 :** Soit A une matrice t.q.  $a_{i,j} \leq 0$  dès que  $i \neq j$ . A est une M – matrice ssi

- (1) les éléments diagonaux  $a_{i,i}$  sont strictement positifs
- (2) la matrice de Jacobi  $J = I - D^{-1} A$ , D diagonale de A, est t.q.  $\rho(J) < 1$  (rayon spectral de J)

**Théorème 6 :** Soit A une M – matrice et  $\Delta$  une matrice diagonale non négative. Alors  $(A+\Delta)$  est une M – matrice et  $(A+\Delta)^{-1} \leq A^{-1}$

<sup>2</sup> Cas de contraintes saturées

Pierre Spiteri

**Définition 7 :** Une matrice  $A$  est diagonale fortement dominante si  $|a_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \forall i \in \{1, \dots, \dim(A)\}$  ( $A$  est diagonale dominante) et s'il existe au moins un indice  $k$  t.q.  $|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$ .

**Définition 8 :** Soit  $A$  une matrice réelle ou complexe.  $A$  est réductible, s'il existe une matrice de permutation  $P$ , de même dimension, telle que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix},$$

où les matrices  $B_{i,i}$ , pour  $i=1,2$ , sont carrées. Si une matrice n'est pas réductible, elle est irréductible.

**Lemme 9 :** Une C.N.S. pour qu'une matrice  $A$  soit irréductible est que pour tout couple d'indices  $(i,j), i \neq j$ , il existe au moins un ensemble d'indices  $i_1, i_2, \dots, i_k (i_k = j)$ , avec  $k \geq 1$ , tels que les éléments  $a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \dots, a_{i_{k-1},j}$  soient tous différents de zéro.

**Définition 10 :** Une matrice  $A$  est diagonale dominante irréductible si  $A$  est irréductible et diagonale fortement dominante.

**Théorème 11 :** Une matrice strictement diagonale dominante ou diagonale dominante irréductible est inversible.

**Théorème 12 :** Soit  $A$  une matrice strictement ou irréductible diagonale dominante t.q.  $a_{i,j} \leq 0$  dès que  $i \neq j$  et  $a_{i,i} > 0$ . Alors  $A$  est une  $M$  – matrice.

**Théorème 13 :** Si  $A$  est une  $M$  – matrice alors la partie réelle de ses valeurs propres est positive.

## Références

1. Athans, M., Falb, M.L. : Optimal Control. Mc Graw Hill (1966)
2. Bernhard, P. : Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques. Dunod (1976)
3. Ciarlet, P.G. : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson (1982)
4. Faure, P. : Analyse numérique et notes d'optimisation. Ellipses (1988)
5. Feldbaum, A. : Principes théoriques des systèmes asservis optimaux. Edition MIR de Moscou (1973)
6. Gien, D., Lang, B., Miellou, J.C., Raffort, L., Spiteri, P., : Commande optimale de systèmes complexes, RAIRO, 18 (2), 209-224 (1984)
7. Lang, B., Miellou, J.C., Spiteri, P., : Asynchronous relaxation algorithms for optimal control problem, Mathematics and Computers in simulations, 28, 227-242 (1986)
8. Lang, B., Spiteri, P., : Decomposition and coordination using asynchronous iterations in optimal control, Encyclopedia of Systems and Control, Ed. Singh, 3475-3481 (1987)
9. Lascaux, P., Theodor, R. : Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Masson (1987)
10. Naslin, P. : Théorie de la commande et conduite optimale. Dunod (1969)
11. Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C. : Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press (1970)
12. Pontryaguin, L., Boltianski, V., Gamkrelidze, R., Michtchenk, E. : Théorie Mathématiques des processus optimaux. Edition MIR de Moscou (1974)
13. Zoubov, V. : Théorie de la commande. Edition MIR de Moscou (1978)