République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA**

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER** en Mathématiques

Option **: Probabilités et Statistique**

Par :

**Dahmri Iméne**

Titre :

# Calcul d'Itô et l'Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

Membres du Comité de Juré :

| | | |
|---|---|---|
| **Dr. SAOULI Mostapha Abdelouahab** | UKM, OUARGLA | Encadreur |
| **Dr. Benbrahim radhia** | UKM, OUARGLA | Président |
| **Dr. Mansoul brahim** | UKM, OUARGLA | Examinateur |

Juin 2021

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique


**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA**

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIÉRE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**


MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OTENTION DU DIPLÔME :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités Et Statistique**

Par :


Dahmri Iméne


Titre :

# Calcul d'Itô et l'équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **Ben brahim radia** | **UKMO** | **Président** |
| **Dr.** | **Saouli mostapha abdelouahab** | **UKMO** | **Encadreur** |
| **Dr.** | **Mansoul Brahim** | **UKMO** | **Examinateur** |

Juin 2021

## Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail :

À l'âme de ma grand mére "fatna" que Dieu ait pitié d'elle.

À mes trés chérs parents, mon pére "Mekki" et ma mére "Fadjra"

À mon mari "Moussa" et mes deux fils "Mahdi" et "Adam"

À ma tante "oumi" qui est dans la position de ma grand-mére

À ma belle mére "haja" et au mon beau pére "amour"

À ma tante "sabrina" et son mari, le "Dr hima abd elhamid"

À mes fréres "Zineb" "Anoir" "Oussama" "nina" "Fatna" "Hachmi" "amani"

À mes niéces "Chahinaz" et "Nourin"

À mes tantes, oncles et tous leurs enfants

À touts la famille,"Dahmri" et "Hima" que Dieu les protége,grand et petit

À mes amis,

Et à la promotion de mathématique 2021,

À tous ceux que m'ont en couragé à prousuivre mes ètudes

## REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout

puissant de m'avoir donné le force et la volonté

pour terminer ce travail.

J' adresse mes remerciements Monsieur **Dr. Mensoul Brahim** madam **Dr.Ben Brahim Radia** d'avoir accepté la charge de président de jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreur **Dr Saouli mostapha abdelouahab**

pour sa grande disponibilité, ses conseils, ses idées et ses intuitions.

je tiens a mes remerciement "**Ma Mére**" et "**Mon pére**" pour tous leurs sarices, leurs amour, leur tendresse, leur

soutien et leur priéres tant au long de mes études.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

.

# Table des matières

# Introduction

Dans ce mémoire de master, nous intéressons à l'étude des équations difféadditionretielles stochastique rétrogrades (**EDSR** en abrégé) ou en anglais **BSDEs** (backward stochastic differential équations).Les équations différentielles stochastique rétrogrades **(EDSR)** est sont une nouvelle classe d'équations différentielles stochastiques, leur valeur est donnée en temps terminale **T**. Les **EDSR** ont recevé une attention considérable dans la recherche en probabilité car les **EDSR** fournissent une représentation probabiliste pour les solutions de certaine classe d'équations aux dérivées partielles quasilinéaires parabolique de second ordre, et ont une relation avec les solutions de viscosité des **EDP**. La théorie des **EDSR** a trouvé beaucoup d'applications telles que la théorie du controle stochastique, économie, et à des problèmes de mathématiques financières. La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades a connu un formidable dévelloppement à partir des années**1990**. Ces equations sont apparuesen **1973**, dans un article de **J.M.Bismut** dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'equation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôl optimal, et en **1978, Bismut** prolonge sa théorie et montrer l'existence d'une solution unique bornée de l'**EDSR** de **Riccati**. Pour tant le premiére résultat géneral concernant les **EDSR** ne date que le **1990** et est dû à **E.Pardoux** et **S-Peng.**

Maintenant, la question qui se pose est quelle est la signification d'une équation différentielle stochastique rétrograde ? si $\xi$ est une variable aléatiore, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable et $f = f(t, w, y, z)$ est une fonction progressivement mesurable donnée, l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s, y_s, z_s)\, dt - \int_t^1 Z_s dW_s, \qquad t \in [0, 1]$$

avec $W$ est un mouvement Brownien définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, admet-elle une solution finie sur $[0, 1]$ Et si une telle solution existe, est-elle unique ?

Résoudre cette **EDSR** c'est déterminer un couple de processus noté $(y_t, z_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie l'équation et qui $\mathcal{F}-$adapte c'est-à-dire ne dépend que de l'information connue jusqu'à l'instant $t$. On peut dire que les **EDSR** sont des équations différentielles stochastiques ou l'on se donne une condition terminale (c'est pour quoi on dit rétrograde). Dans le cas déterministe, par exemple les équations différentielles ordinaires(**EDO** en abrégé) il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initial par inversion du temps, finalement ou résoudre le même probléme.

Dans le cas aléatoire, les choses sont totalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui reste adapté par rapport une filtration donnée. Par exemple, si on inverse le temps pour se ramener au probléme avec condition initiale et donc à revenir à la théorie des équations differentielles stochastiques "**EDS** en abrégé", on trouve une solution qui anticipe, c'est exactement la où se présente la diffculté.

Dans ce mémoire qui ce compose à trois chapitre :

**Premièr chapitre :** Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définitions, proposition, théoréme...ect.On donne quelques rappels de base concernant le vecteur Gaussien, esperience conditionnelle, martingale, martingale local, semi martingal, temps darrét.

**Deuxième chapitre :** Dans ce chapitre, nous aurons parlé sur la signification des calcul d'Itô et des équations différentielles stochastiques et montrer l'existence et l'unicité de la solution et quelques exemples de ces equations différentielles stochastiques.

**Troisième chapitre :** L'objectif de ce chapitre est de montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une **EDSR**, ce résultat est dû à **E.Pardoux** et **S.Peng** et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades(**EDSR**).

# Chapitre 1

# Quelques outils préliminaires sur l'analyse stochastique

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on donne quelques rappels de base concernant le vecteur Gaussien, esperience conditionnelle, martingale, martingale local, semi martingal.

## 1.1 Quelques notions sur la théorie de mesure

**Définition 1.1.1** ***(Tribu)*** *Soit $X$ un ensemble, On appelle tribu (ou $\sigma-$algebre) sur $X$, un ensemble $A$ de partie de $X$ qui verifie :*

1. $A$ contient $\emptyset$.
2. $\forall B \in A \Rightarrow B^c \in A$.
3. Si $\forall n \in N, B_n \in A$ alors $\cup_{n \in N} B_n \in A$.

1. Le couple $(X, A)$ est appele espace mesurable ou espace propabilisable en fonction du contexte sur les espaces mesurable on definit des mesures sur les espaces probabilisables on s'interesse specifiquement aux probabilites
2. Les parties de $X$ qui appartiennent a la tribu $A$ sont appelées ensemble mesurables dans un contexte probiliste on les appelle évènements.

1. la tribu dite grossiere : $A = \{\emptyset, X\}$
2. la tribu dite discrete $A = P(X)$ ou $P(X)$ represente l'ensemble de toutes les parties de $X$
3. si $X = \{a, b, c, d\}$ alors $A = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, X\}$ est un tribu sur $X$ c'est la plus petite tribu contenant l'ensemble $\{a\}$
4. pour tout $X$, $\{A \in P(X) / A$ ou $A^c$ affini ou denombrable$\}$ est une tribu sur $X$
5. En revanche si $X$ est infini $\{A \in P(X)\ /\ A$ ou $A^c$infini$\}$ n'est pas un tribu sur $X$, bien que ce soit une algebre de Boole de parties de $X$

**Définition 1.1.2** ***(Tribu borelienne)*** *On appelle tribu borelienne de $\mathbb{R}^n$, note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu engendree par les ouverts (pour la topologie usuelle) de $\mathbb{R}^n$. on a*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a, b] : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}).$$

**Définition 1.1.3** ***(Variable aléatiore)*** *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application, on dit que $X$ est une variable aléatiore si :*

$$\forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ X^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathcal{B}\} \stackrel{\triangle}{=} \{X \in \mathcal{B}\} \in F.$$

**Définition 1.1.4** *Soient $X$ une variable aleatoire et $G$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, on dit que $X$ est $G$-mesurable si :*

$$\forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{X \in \mathcal{B}\} \in G.$$

**Définition 1.1.5** ***(Tribu engendre par une variable alèatoire)*** *Soit $X$ une variable aleatoire, on appelle tribu engendree par $X$, note $\sigma(X)$ la plus petite tribu pour l'inclusion qui rend $X$ mesurable.*

**Définition 1.1.6** ***(Indèpendance)*** *Deux variable aleatoire $X$ et $Y$ sont independantes si* *les tribu $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ le sont c'est a dire si :*

$$\begin{cases} \forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \forall c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \\ \mathbb{P}(\{X \in B\} \cap \{y \in c\}) = \mathbb{P}(\{X \in B\}) \mathbb{P}(\{y \in c\}). \end{cases}$$

**Définition 1.1.7** ***(Mesure)*** *fonction mathématique qui associe une grandeur numérique comparable à certains sous-ensembles d'un ensemble donné*

**Définition 1.1.8** ***(Espace mesuré)*** *On appelle espace mesuré Un triple $(X, A, \mu)$ ou $X$ est un ensemble, $A$ une tribu sur $X$ et $\mu$ une mesure sur $A$ le couple $(X, A)$ est alors appele un espace mesurable.*

**Définition 1.1.9** ***(Ensemble négligeable)*** *Dans un espace mesuré, un ensemble négligeable est un ensemble de mesure nulle ou une partie d'un tel ensemble.*

L'ensemples des partis negligeables d'un espace mesure $(X, A, \mu)$ a les propriété suivantes :

1. Tout sous ensemble mesurable d'une partie negligeable à une mesure nulle, conséquence de la monotonie des mesures.
2. Tout sous ensemble d'une partie négligeable est négligeable.
3. Toute union dénombrable (d'ensemble mesurables) de mesure nulle est mesurable et de mesure nulle conséquence de la sous-additivité des mesures.
4. Toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

## 1.2 *Vecteur Gaussien*

On considere $(\Omega, A, P)$ un espace probabilisé.

**Définition 1.2.1** *Une variable aleatoire reele $Z$ est dit gaussienne centre reduite si elle admet pour densité par rapport à la mesure lebegue sur $R$ la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad , \textit{on note } Z \rightsquigarrow (0,1).$$

Une variable aleatoire reel $X$ est dit gaussienne s'il existe $(\mu, \sigma) \in R * R^{+}$ et $Z \rightarrow (0,1)$ tel que $X = \mu + \sigma Z$, la densite de $X$ est alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{, on note } X \rightsquigarrow \left(\mu, \sigma^2\right),$$

quand $\sigma = 0$ on dite que $X$ est une variable gaussienne degeneree.

Une variable gaussienne est caracteristique par sa fonction caracteristique, donnee par le théoreme suivante :

**Théorème 1.2.1** *La fonction caractirestique de $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ est donnee par :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad Q(t) = \exp\left(itu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

**Définition 1.2.2** *On dit que le vecteur $X = (X_1, ...X_d)$ est un vecteur gaussien si pour tout d-uplet $(a_1....a_d)$ de reels, la variable aleatoire $a_1X_1 + .....a_dX_d$ est gaussienne ,On definit son vecteur moyenne $\mathbb{E}(X)$ par :*

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), ...., \mathbb{E}(X_d))^t,$$

*est sa matrice de variance-covariance $\mathbb{VAR}(X)$par :*

$$\mathbb{VAR}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^t (X - \mathbb{E}(X))\right).$$

*Notons que $\mathbb{VAR}(X)$ est symetrique et $\forall i, j = 1, ...d$*

$$\mathbb{VAR}(X)_{i,j} = \mathbb{COV}(X_i, X_j).$$

**Théorème 1.2.2** *Soit $X = (X_1, ...X_d)^t$un vecteur gaussien on note $m = \mathbb{E}(X)$ et $\Sigma = \mathbb{VAR}(X)$, on a que $X$ ademt pour fonction caracteristique la fonction :*

$$\forall \mu \in R^d, Q(\mu) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i^t \mu X\right)\right] = \exp\left(iu^t m - \mu^t \Sigma \mu\right),$$

*la loi de $X$ est donc entierement déterminee par $m$ et $\Sigma$ on note $X \to (m, \Sigma)$.*

**Proposition 1.2.1** ***(L'independance)*** *Soit $X =^t (X_1, ....X_d)$ un vecteur gaussien pour tout $(i,j) \in \{1, ....d\}^2$ tel que $i \neq j$, $X_i$ est $X_j$ sont independantes si et seulement si $\mathbb{COV}(X_i, X_j) = 0$*

soient $X_1, ...X_d$ des vecteur aleatoires de $\mathbb{R}^d$ admettant un moment d'ordre2 On note $m$ leur esperance et $\Gamma$ leur matrice de variance-covariance alors,

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - m\right) \overset{loi}{\to} N(0, \Gamma)$$

**Preuve.** On calcule pour tout n la fonction caractirestique de $Z_n = \sqrt{n}\left(\overline{X_n} - m\right)$

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^d, Q_{Z_n} = \mathbb{E}\left[\exp\left(i^t \mu Z_n\right)\right].$$

On a par le le theoreme Centre Limite que ${}^t\mu Z_n \underset{n\to\infty}{\to} N(0,^t \mu\Gamma\mu)$ donc

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^d, Q_{Z_n}(\mu) \underset{n\to\infty}{\to} \exp\left(-\frac{1}{2}^t \mu\Gamma\mu\right).$$

■

## 1.3 *Espérance conditionnelle*

### 1.3.1 *Espérance conditione par un évènement*

Soit $B$ un evenement de probabilite non nulle, on sait défini la probabilité conditionelle $\mathbb{P}(./B)$ ou $\mathbb{P}_B$ pour tout evenement $A$ : $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Si $X$ est une variable aleatoire discréte d'esperance fini, on définit l'esperance de $X$ sachant

$B$ notée $\mathbb{E}(X/B)$ par :

$$\mathbb{E}(X/B) = \sum_{x_i} \mathbb{P}_B(X = x_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{x_i} x_i \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap B)$$

Si $X$ est une variable aléatoire continue, d'esperance finie et de densité $f$, l'ésperance de $X$ sachant $B$ est définie par : $\mathbb{E}(X/B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_{X(B)} x f(x)\, dx$.

De maniere plus génerale si $X$ est une variable aléatoire possédant une espérance, l'esperance de $X$ conditionnée par $B$ est :

$$\mathbb{E}(X/B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X dp = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X.1_B],$$

ou $1_B$ est la fonction indicatrice de $B$ qui est nulle sauf sur $B$ ou elle est constamment egal 1.

La formule des esperance totale si$(B_i)$ est une partition de l'univers formée d'évènements de probabilité non nulle alors :$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{P}(B_i)\, \mathbb{E}[X/B_i]$.

### 1.3.2 *Espérance conditionnée par une variable*

#### Cas discret

Soit $X$ une variable aléatoire réelle dont l'espérance est définie, et $Y$ une variable aléatoire discréte pour tout $y_i$ tel que l'évenement$\{Y = y_i\}$ soit de probabilité non nulle, on peut définir :

$$\mathbb{E}[X/Y = y_i] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_i)} \mathbb{E}\left[X/1_{\{Y=y_i\}}\right]$$

On définit $\mathbb{P} - p.p$ une fonction dite de régression $Q(y) = \mathbb{E}[X/Y = y]$ et une variable aleatoire $Q(y)$ appelée esperance de $X$ conditionnée par $Y$ et notee $\mathbb{E}[X/Y]$.

**Cas absolument continu**

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatiores absoluiment continues de densités conjointes $f_{X,Y}$, et de densite marginales $f_X$ et $f_Y$ on peut définir la densite conditionnelle de $X$ conditionnée par $\{Y = y\}$

$$f_{X/Y}(X/Y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

On appelle espérance conditionnelle de $X$ sachant $\{Y = y\}$ la valeur :

$$\mathbb{E}[X/Y = y] = \int_R x f_{X/Y}(X/Y)\,dx = Q(y).$$

### 1.3.3 Espérance conditionnelle par rapport a une tribu

**Définition 1.3.1** *Soit $X$ est une variable aléatoire définie sur espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est soit $G$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, on appelle l'esperence conditionnelle de la variable aleatoire $X$ sachant $G$ l'unique variable aleatoire et on la note $\mathbb{E}(X/G)$ tel que :*

1. $\mathbb{E}(X/G)$ est$G$-mesurable.
2. $\int_A \mathbb{E}(X/G)d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in G.$

c'est l'unique variable $G$-mesurable telle que :$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\backslash G)Y) = \mathbb{E}(XY)$ pour toute variable $Y$, $G-$mésurable bornée.

## 1.4 *Propriétes de l'espérance conditionnelle*

Soit $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ est un espace de probabilete, et soit $G$ sous tribu de $\Sigma$ soient de plus $X$, $Y$ deux v.a itégrable sur $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ alors :

1. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ ,$\mathbb{E}(aX + bY/G) = a\mathbb{E}(X/G) + b\mathbb{E}(X/G)\ \mathbb{P} - p.s.$
2. $\forall a \in R, \mathbb{E}(X + a/G) = \mathbb{E}(X/G) + c\ \mathbb{P} - p.s.$
3. Si $X \leq Y$ $p.s$ alors $\mathbb{E}(X/G) \leq \mathbb{E}(Y/G)$.

4. Si $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est est convexe est $Q(X)$ intégrable, on a l'inegalite de jeusen :$Q(\mathbb{E}(X/G)) \leq \mathbb{E}\left(Q\left(X\right)/G\right)$ en particulier :

$$\begin{cases} |\mathbb{E}(X/G)| \leq \mathbb{E}\left(|X|/G\right), \\ \left|\mathbb{E}\left(X/G\right)\right|^2 \leq \mathbb{E}\left(X^2/G\right). \end{cases}$$

5. Si $H$ est une sous tribu de $G$ alors $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X/G\right)/H\right) = \mathbb{E}\left(X/H\right).$
6. $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X/G\right)\right) = \mathbb{E}\left(X\right).$
7. Si $G$ est independant avec $\sigma\left(X\right)$ alors $\mathbb{E}\left(X/G\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\ \ \mathbb{P} - p.s.$
8. Si $Y$ est $G$ -mesurable et $X$, $Y$ integrable alors $\mathbb{E}\left(XY/G\right) = Y\mathbb{E}\left(X/G\right).$

## 1.5 Espace de probabilité filtré

**Définition 1.5.1** ***(Processus stochastique)*** *Un processus stochastique est une famille* $X = \{X_t\}_{t \in T}$ *de Variable aléatoire definit sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(X_t)$ *indexé par un ensemble* $\gamma$.

**Remarque 1.5.1** $\gamma = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}_+$*le processus est indexé par le temps* $t$ *est dit continu.*

$\gamma = \mathbb{Z}$ *le processus est dit discret.*

Un processus depend de deux paramétres : $t$ et $\omega \in \Omega$

$$\begin{cases} X_t : [0, T] \times \omega \to \mathbb{R} \\ (t, \omega) \to X_t\left(\omega\right) = X\left(t, \omega\right). \end{cases}$$

Si $t$ est fixé : $X_t\left(\omega\right)$ est une variable aléatoire.

Si $\omega$ est fixé : $X_t\left(\omega\right)$ est une trajectoire.

**Définition 1.5.2** *(Processus mesurable) :*$X$ *est un processus mesurable si : pour tout* $t \in \gamma$ *l'application* $(t, \omega) \to X_t\left(\omega\right)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *est mesurable par rapport aux tribu* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right).$

A présent, nous donnons trois critéres pour comparer deux processus stochastiques

**Définition 1.5.3** *Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique les lois de dimension finie du processus $X$ sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ ou $n \succcurlyeq 1$ et $t_1, t_2, ..., t_n \in T$.*

On dit que deux processus $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ ont même loi s'ils ont les mémes loi de dimension finie.

**Définition 1.5.4** *Soient $X = (X_t)_{t \in T}$,$Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques.*

1. On dit que $Y$ est une modification de $X$ si pour tout $t \geqslant 0$, les variables aléatoires $X_t$ et $Y_t$ sont egales $\mathbb{P}-$p.s : $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.
2. On dit que les processus $X$ et $Y$ sont indistinguables si $\mathbb{P}-$p.s, les trajectoires de $X$ et $Y$ sont les memes c'est a dire : $\mathbb{P}(\forall t \geq 0, (X_t = Y_t)) = 1$, on note $X = Y$.

**Proposition 1.5.1** *Soient $T$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques continue alors :*

$$X \text{ et } Y \text{ indistinguables} \Leftrightarrow X \text{ est un modification de } Y$$

**Proposition 1.5.2** *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut egalement noter que si $X$ est un processus mesurable et adapté alors il posséde une modification progressivement mesurable.*

**Proposition 1.5.3** *Si $X$ est un processus stochastique dant les trajectoires sont continues a droite, (ou continue a gauche) alors $X$ est mesurable et $X$ est progressivement mesurable, s'il est de plus adapté.*

### 1.5.1 *Filtration*

Dans ce partie, les processus sont indexes par $\mathbb{R}_+$.

**Définition 1.5.5** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilite, une filtration sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$indexee par $[0,\infty]$, de sous-tribus de $\mathcal{F}$ on a alors, pour tous $0 \leq s \leq t$*

$$\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t \leq \mathcal{F}_\infty \leq \mathcal{F}.$$

*On définit : $\mathcal{F}_\infty = \sigma \{U_t \mathcal{F}_t\}$ ainsi que pour tout $t$,*

$$\mathcal{F}_{t^+} = n_{\varepsilon \succ 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

**Définition 1.5.6** *On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est continue a droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ pour tout $t$.*
*On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est continue a droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensemble $\mathbb{P}$ négligeables de $\mathcal{F}$.*

**Définition 1.5.7** ***(Espace de probabilite filtre)*** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilite et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur $\Omega$ on appelle $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$ espace de probabilite filtre discret.*

**Définition 1.5.8** ***(Processus adapté)*** *Soit $(X_t)$ un processus et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on dit que $X = (X_t)_{t\succeq 0}$ est adapté a la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $\forall t \geq 0$, $X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

**Remarque 1.5.2** *$(\mathcal{F}_n^x)_{n\in N}$ est une filtration appelee filtration canonique du processus aléatoires $(X_n)_{n\in N}$.*

**Définition 1.5.9** ***(Processus progressivement mesurable)*** *Un processus $X$ est progressivement mesurable par rapport a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$ l'application $(s, \omega) \rightarrow X_S(\omega)$ de $[0, t] * \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport a $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

**Définition 1.5.10** ***(Processus continu)*** *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$, un processus stochastique, le processus $X$ est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fontion $t \rightarrow X_t(\omega)$ est continue (i.e les trajectoires sont continues).*

## 1.6 *Temps d'arrêt*

Soit $\left(\Omega, A, (\mathcal{F}_n)_{n\in N}, \mathbb{P}\right)$ est un espace probabilise filtré on pose :

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(U_{n\geq 0}\mathcal{F}_n\right).$$

**Définition 1.6.1** ***(Temps d'arrêt)*** *Un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt est une variable aléatoire $\Omega \to [0, +\infty]$, (resp dans $\mathcal{N} \cup \{\infty\}$ si $T = N$) telle que $\forall t \in T\ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

**Proposition 1.6.1** *Pour $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = [0, T]$, on a $\tau$ est un temps d'arrêt si et seulement si $\forall t \in T, \{\tau \prec t\} \in \mathcal{F}_t$.*

**Preuve.** il suffit d'ecrite et d'utiliser la continuité a droit de la filtration

$$\begin{cases} \{\tau \prec t\} = \cup_{n\geq 1}\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}, \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \{\tau \leq t\} = \cap_{n\geq 1}\left\{T \leq t + \frac{1}{n}\right\}. \end{cases}$$

■

**Proposition 1.6.2** *Soit $S$ et $T$ deux temps d'arret alors $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des temps d'arrets. En particulier, pour $K \in \mathbb{N}$, $T \wedge K$ est un temps d'arret bornée*

**Preuve.** Pour $t \geq 0$

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

et

$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

puisue $S$, $T$ sont de $(\mathcal{F}_t)$ −temps d'arrét et la tribu $\mathcal{F}_t$ est stable par interection et réunion.

■

**Définition 1.6.2** *Si $T$ est un temps d'arret on appelle tribu des evenements anterieurs a $T$*

*la tribu suivant :*

$$\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in N, A \cup \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Elle vérifie que si $T = n$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_N$.

**Proposition 1.6.3** *Soit $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt alors :*

$$S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T.$$

**Preuve.** Soit $A \in \mathcal{F}_s$ alors on a :

$$A \cup \{T = n\} = \cap_{k=0}^{n} \{A \cup \{S = K\} \cup \{T = n\}\} \text{ et } A \cup \{S = K\} \in \mathcal{F}_K \subset \mathcal{F}_n.$$

D'ou par passage ǎ la reunion $A \cup \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. ■

## 1.7 *Martingales*

**Définition 1.7.1** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilise et $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une filtration definie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suit $(M_t, t \geq 0)$ est variables aleatoire reelles est une $\mathcal{F}_t$-martingale si les condition suivantes sont verifiee :*

1. $\{M_t, t \geq 0\}$ est un $\mathcal{F}_t$ adapte, $\forall t \geq 0$.
2. $\mathbb{E}(|M_t|) \leq \infty$.
3. $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$.

**Proposition 1.7.1** *Toute martingale $M$ verifies $E(M_t) = E(M_0)$ pour tout $t \in [0, T]$.*

**Preuve.** On a $E(M_t) = E(E(M_t/\mathcal{F}_0)) = E(M_0)$ pour tout $t \in [0, T]$. ■

**Définition 1.7.2** ***(Sur-martingale)*** *Une suite $\{X_t, t \geq 0\}$ de variable aleatoires reelles est une sur martingale si :*

1. $X_t$ est un $\mathcal{F}_t$ mesurable, $\forall t \geq 0$.
2. $\mathbb{E}(|X_t|) \leq \infty$
3. $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$.

**Définition 1.7.3** ***(Sous-martingale)*** *Une suite $\{X_t, t \geq 0\}$ de variable aleatoires reelles est une sous martingale si :*

1. $X_t$ est un $\mathcal{F}_t$ mesurable, $\forall t \geq 0$.
2. $\mathbb{E}(|X_t|) \leq \infty$.
3. $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

**Remarque 1.7.1** *$X$ est une sous martingale lorsque $-X$ est une surmartingale ; $X$ est une martingale si $X$ est a la fois une surmartingale est une sous-martingale.*

**Théorème 1.7.1** ***(Inégalités maximales)*** *Soit $X$ est une martingale (ou une sous-martingale positive) continue a droite..Alors*

1. $\forall p \geq 1, \forall a \succ 0, a\mathbb{P}(\sup_t |X_t| \geq a) \leq \sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p]$ ;
2. $\forall p \succ 1, \mathbb{E}[\sup_t |X_t|^p] \leq q^p \sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p]$ ou $q = p(p-1)^{-1}$.

**Théorème 1.7.2** *Théoreme d'arrét Si $X$ est une martingale et si $\sigma$ et $\tau$ sont deux temps d'arret bornes tel que $\sigma \leq \tau$, alors*

$$\mathbb{E}(X_\tau \backslash \mathcal{F}_\sigma) = X_\tau \mathbb{P}.p.s.$$

On a aussi qu'un processus $X$ adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arret borné $\tau$, $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ pour le derniére résultat nous supposons que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ vérifie les conditions habituelles.

**Théorème 1.7.3** *Soit $X$ une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$martingale.$X$ posséde une modification cadlag i.e dont les trajectoires sont continues a droite et possédent des limites a gauche.*

### 1.7.1 *Martingale locale*

**Définition 1.7.4** *Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est appelle une martingale locale, si $(X_t)_{t\in T}$ est un processus adapté a trajectoires continue tel qu'il existe une suite croissante $(U_n)_{n\succeq 0}$ de temps d'arrêt tendant vers $\infty$ et pour tout $n$, le processus arrêt $X^{U_n}$ est une martingale uniformement integrable.*

**Théorème 1.7.4** *Soit $X$ une martingale locale continue .Il existe un unique processus croissante et continue, $\langle X, Y\rangle$ nul en $0$, tel que $X^2 - \langle X, X\rangle$ soit une martingale locale.*

**Proposition 1.7.2** *Soit $X$ une martingale locale continue. Il ya équivalence entre :*

1. $X_0 \in \mathbb{L}^2$ et $\mathbb{E}\left|\langle X, X\rangle_\infty\right| \prec \infty$;
2. $X$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$.

**Théorème 1.7.5** ***(Inégalities Burkholder-Davis-Gundy)*** *Soit $p \succ 0$ un réel. Il existe deux constantes $c_p$ et $C_p$ telles que, pour toute martingale locale continue $X$, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

*En particulier, si $T \succ 0$*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

### 1.7.2 *Semi martingale*

**Définition 1.7.5** *Une processus $(X_t)_{t\in T}$ est une semi martingale si $X$ est adapte et ademettant la décomposition de la forme $X = X_0 + M + A$ ou $M$ est une martingale locale et nule en $0$ et $A$ un processus adapte est nul en $0$.*

# Chapitre 2

# Calcul d'Itô et l'equation différentielle stochastique

Dans ce chapitre, nous aurons présenté quelques propriétés des mouvemen Brownien, calcul stochastique et etudier aussi existence et unicité solution pour l'équations différentielle stochastique.

## 2.1 Mouvement Brownien et ses propriétés

### 2.1.1 Processus Gaussien et mouvement Brownien

**Définition 2.1.1** ***(Processus Gaussien)*** *Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est un prossus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e*

$$\forall n \geq 1; \forall t_1 \prec t_2 \prec \ldots \prec t_n \in T, \ \ (X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \ \text{est un vecteur gaussien.}$$

**Définition 2.1.2** *On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est a accroissements independants si : $\forall n \geq 1; \forall t_1 \prec t_2 \prec \ldots \prec t_n \in T$ alors $X_{t_1}$, $X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*

**Définition 2.1.3** ***(Mouvement Brownien)*** *Le processus$(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien (standard) si :*

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ ( le mouvement Brounien est issue de l'origine).
2. $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne centré et de variance $(t-s)$ i.e $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
3. $\forall n$, $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables aléatoire $\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_0, W_0\right)$ sont independantes.
4. Les trajectoires sont continues

**Remarque 2.1.1** *On dit que $W$ est un mouvement Brownien issue a $x$ si $W_0 = x$.*

*Pour tout $t \succ 0$, la variable aleatoire $W_t$ suit la loi gaussienne centrée de variance $t$ donc de densité*

$$f_W(x) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}.$$

*On dit que $W$ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ mouvement Brownien si $W$ est un processus continu, adapté a la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, verifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall 0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}\left(e^{iu(W_t - W_s)}\middle| \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-\frac{u^2(t-s)}{2}\right\}.$$

**Proposition 2.1.1** ***(Propriétés mouvement Brownien)*** *Soit $W$ un MB standard, alors*

1. pour tout $s \succ 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\succeq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u, u \leq s\}$.
2. $-W$ est aussi un MB.
3. pour tout $c \succ 0$ $\{cW_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ est un MB.
4. le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{\frac{1}{t}}$ est un MB.

**Définition 2.1.4** *Une fonction $f$ a valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}_+$ est localement hölderienne d'ordre $a$ si : pour tout $a \geq 0$, il existe une constante $c$ tel que :*

$$\forall x, y \in [0, a]^2, |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^a.$$

**Théorème 2.1.1** ***(Propriétés des trajectoires)*** *Si $W$ est un MB, alors presque surement, on a :*

1. $t \rightarrow W_t(w)$ n'est a variation finie sur aucun intervalle.

2. $t \rightarrow W_t(w)$ est localement hölderienne d'ordre a pour tout $a \prec \frac{1}{2}$.

3. $t \rightarrow W_t(w)$ n'est dérivable en aucun points ni localement hölderienne d'ordre $a \geqslant \frac{1}{2}$.

**Preuve.** (Voir [4]). ∎

**Proposition 2.1.2** *Si $W$ est un MB, alors $\{W_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ est $\left\{\exp\left(\frac{\sigma W_t - \sigma^2 t}{2}\right)\right\}_{t \geq 0}$ sont des martingales.*

**Preuve.** (Voir [4]). ∎

### 2.1.2 Propriété de Markov

**Définition 2.1.5** ***(Processus de Markov)*** *Un processus est de Markov si son comportement dans le futur ne dépend du passé qua travers le présent.*

**Définition 2.1.6** *Soit $X$ un processus et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration canonique. On dit que le processus est Markov si, pour tout $s$ et la fonction bornée $\mathcal{F}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, pour tous $t_1 \prec t_2 \prec ... \prec t_n$*

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{F}\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ...., X_{s+t_n}\right) \backslash \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\mathcal{F}\left(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ...., X_{s+t_n}\right) \backslash X_s\right)$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction f borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) \backslash \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) \backslash X_s\right), \qquad \forall t \succ s.$$

Le processus et dit de Markov fort si la propriéte précedente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finie $T$, $S$ avec $T \succ S$.

La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisé sous la forme (un peu plus fort que la propriété de Markov), pour tout $s$, les processus$(W_t, t \geq 0)$ définit par $W_t \overset{def}{=} B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

**Théorème 2.1.2** *Pour $f$ application borélienne bornée* ,$\mathbb{E}\left(f\left(B_u\right)\diagdown\mathcal{F}_t\right)=\mathbb{E}\left(f\left(B_u\right)\diagdown\sigma\left(B_t\right)\right)$ *pour* $u\succ t$.

**Preuve.** (Voir [4] page 28). ■

### 2.1.3 Brownien géométrique

**Définition 2.1.7** *Soit $W$ un mouvement Brownien, $b$ et $\sigma$ deux constantes le processus*

$$X_t=X_0\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right\}$$

*est appellé Brownien géomtrique.*

**Remarque 2.1.2** *Ce processus est aussi appellé processus "log normal".*

En effet, dans ce cas

$$\ln X_t=\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right\}+\ln X_0$$

et la variable qui est a droit suit une loi normal on a immédiatement.

**Proposition 2.1.3** *Le processus $X_te^{-bt}$ est une martingale. En ecrivant*

$$X_t=X_s\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma\left(W_t-W_s\right)\right\}.$$

On établit que $X$ est Markovien, le caractére Markovien de $X$ et les propriétés du MB permettent de calculer less espérance conditionnelles :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_t\middle|\mathcal{F}_s\right)&=X_s\mathbb{E}\left(\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma\left(W_t-W_s\right)\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right)\\&=X_s\exp\left(b\left(t-s\right)\right)\mathbb{E}\left(\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\sigma\left(W_t-W_s\right)\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_t\middle|\mathcal{F}_s\right) &= X_s \exp\left(b\left(t-s\right)\right)\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t-s\right)+\sigma W_{t-s}\right\}\\ &= X_s e^{b(t-s)}\\ &= \mathbb{E}\left(X_t\middle|\sigma\left(X_s\right)\right).\end{aligned}$$

Ou nous avons utilisé la propriéte de martingale de l'exponentielle du MB et nous avons utilisé que $X_{t-s}$ independant de $X_t$ et de méme loi que $X_{t-s}$.

De la mème facon, en notant $G$ une v.a de loi $\mathcal{N}\left(0,1\right)$

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)\middle|X_s\right) = \mathbb{E}\left(f\left(x\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t-s\right)+\sigma\left(W_t-W_s\right)\right\}\right)\right)_{x=X_s}$$

$$= \mathbb{E}\left(f\left(x\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t-s\right)+\sigma G\sqrt{t-s}\right\}\right)\right)_{x=X_s}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(X_s\exp\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t-s\right)+\sigma y\sqrt{t-s}\right\}\right)q\left(1,0,y\right)dy.$$

Ce processus est appéllé le modéle Black et scholes.Il est utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier. le rendement de l'arctif entre deux dates est mesuré par la diffirence des logarithmes des cours et est donné par la variable gaussienne

$$\left\{b-\frac{1}{2}\sigma^2\right\}\left(t-s\right)+\sigma\left(W_t-W_s\right).$$

### 2.1.4 Brownien multidimensionnel

**Définition 2.1.8** ***(Mouvement Brownien multidimensionnel)*** *On appelle MB standard a valeur dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $W=\left(W^{(1)},...,W^{(d)}\right)$ ou les $W^{(i)}$ sont des MB réels indépendants.*

1. C'est un processus à accroissements indépendants.

2. Pour chaque $(a, b)$, le processus $aB_t^{(1)} + bB_t^{(2)}$ est un processus gaussien.

3. Si $W$ est un Brownien d-dimensionnel, on a $\mathbb{E}\left(W_t^T W_s\right) = d \cdot (s \wedge t)$.

4. Le processus $d-$dimensionnel $W$ est un mouvement Brownien si et seulement si les processus $W^{(i)}$ et $W^{(i)}W^{(j)} - \delta_{i,j}$ sont des martingales avec $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

5. Si $W_1$ et $W_2$ sont deux mouvement Brownien a valeurs réeles indépendantes, le produit $W_1 W_2$ est une martingale.

**Définition 2.1.9** *On dira que le mouvements Browniens a valeurs reélles $W_1$ et $W_2$ sont corréles de cofficient de corrélation $\rho$ si $W_1(t)\, W_2(t) - \rho t$ est une martingale.*

Pour décorrele les MB en introduisant le processus $B_3$ défini par :

$$W_3(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(W_2(t) - \rho W_1(t)\right)$$

ce processus est une martingale, en écrivent

$$(W_3(t))^2 - t = \frac{1}{1-\rho^2} \left[(W_2(t))^2 + \rho^2 (W_1(t))^2 - 2\rho W_1(t)\, W_2(t) - t\left(1-\rho^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \left[(W_2(t))^2 - t + \rho^2 \left[(W_1(t))^2 - t\right]\right] - 2\rho \left[W_2(t)\, W_1(t) + 2t\rho^2\right].$$

On montre que $(W_3(t))^2 - t$ est indépendend de $W_3$ est un MB. On peut montrer que $W_3$ est indépendant de $W_1$, le produit $W_1 W_3$ est une martingale. Dans ce cas, il existe un Brownien $W^{(3)}$, indépendant de $W^{(2)}$ tel que

$$W^{(1)} = \rho W^{(2)} + \sqrt{1 - \rho^2 W^{(3)}}$$

et pour tout $(a, b)$ le processus $W_t \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}} \left(aW^{(1)} + bW^{(2)}\right)$ est un Mouvement Brownien.

### 2.1.5 Variation totale et quadratique

**Définition 2.1.10** *La variation infinitésimale d'ordre* $p$ *d'un processus* $X_t$ *défini sur* $[0,T]$ *associée à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ *est définie par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p.$$

*Si* $V_T^p(\Pi_n)$ *a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence* $\mathbb{L}^p$*) lorsque*

$$\Pi_n := \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i\leq n} \left| l_{i+1}^n - l_i^n \right| \to 0.$$

*La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre* $p$ *de* $X_P$ *sur* $[0,T]$*. En particulier,*

- Si $p = 1$, la limite s'appelle la variation totale de $X_t$ sur $[0,T]$.
- Si $p = 2$, la limite s'appelle la variation quadratique de $X_t$ sur $[0,T]$ et est notée$\langle X \rangle_T$.

**Proposition 2.1.4** *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien sont a variation non bornées.*

**Théorème 2.1.3** *Soit* $n$ *fixé et* $t_j = \frac{j}{2^n} t$ *pour* $j$ *variant en* $0$ *a* $2^n$*. Alors*

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left[W(t_j) - W(t_{j-1})\right]^2 \to t, \qquad n \to \infty,\ \mathbb{P} - p.s.$$

**Preuve.** Soit $Z_t^n = \sum_{j=1}^{2n} \left[W(t_j) - W(t_{j-1})\right]^2$ ,On $\mathbb{E}(Z_t^n) = t$, on doit montrer que $\mathbb{E}\left((Z_t^n - t)^2\right) \to 0$ ,soit $Var(Z_t^n) \to 0$ ce qui se déduit de

$$\mathbb{VAR}(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} Var\left[W(t_j) - W(t_{j-1})\right]^2 = \sum_{j=1}^{2^n} 2\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{n+1}\frac{t^2}{2^{2n}},$$

Nous avons utilisé que $W$ est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la variance de $W^2$ est $2\sigma^4$. ∎

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(Z_t^n-t\right)^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{2^n}\prec\infty,$$

D'ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Z_t^n-t\right)^2\prec\infty,$$

et le terme générale converge $p.s$ vers 0.

**Proposition 2.1.5** *Soit $\sigma$ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ caractérisée par $0=t_0\leq t_1....\leq t_n=t$, Soit $V_t$ la variation de la trajectoire du mouvement Brownien sur $[0,t]$ définit par*

$$V_t\left(w\right)=\sup_{\sigma}\sum_i\left(B_{t_{i+1}}\left(w\right)-B_{t_i}\left(w\right)\right),$$

*Alors $V_t\left(w\right)=\infty$, $\mathbb{P}-p.s.$*

## 2.2 Calcul d'itô

On se donne une espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et un mouvement Brownien $W$ sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t=\sigma\left(W_s,s\leq t\right)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien

**Définition 2.2.1** *(Processus d'itô) On appelle processus d'itô un processus $X$ à valeurs réelles telque :*

$$\mathbb{P}-p.s,\ \forall 0\leq t\leq T,\ X_t=x+\int_0^t b_sds+\int_0^t\sigma_sdW_s.$$

ou $x$ est $\mathcal{F}_0-$mesurable,$b$ et $\sigma$ sont deux processus progressivement vérifiant les conditions $\mathbb{P}-p.s$ :

$$\int_0^T\left|b_s\right|ds\prec\infty \text{ et } \int_0^T\left|\sigma_s\right|^2ds\prec\infty.$$

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t=b_tdt+\sigma_tdW_t,\\ X_0=x,\end{cases}$$

le coefficient $b$ est le drift ou la dérive,$\sigma$ est le coefficient de diffusion.

**Remarque 2.2.1** *La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

**Théorème 2.2.1** ***(Les formules d'Itô)***

1. Premiére formule d'Itô : Soient $X$ un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ a dérivées bornée, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

2. Deuxiéme formule d'Itô : Soient $(t, x) \to f(t, x)$ une fonction réelle deux fois differentiable en $x$ et une fois différentiable en $t$ et $X$ un processus d'Itô :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_S + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, dX_S + \frac{1}{2}\int_0^t f"_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_S.$$

**Notation 2.2.1** *Si $X$ et $Y$ sont deux processus d'Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

*et*

$$Y_t = X'_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dW_s,$$

*on pose $\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds$ et $dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$ on à alors la proposition suivant :*

**Proposition 2.2.1** ***(Intégration par parties)*** *Si $X$ et $Y$ sont deux processus d'Itô alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_s.$$

Dans le cas d'un mouvement Brownien $d-$dimensionnelle et d'un processus d'Itô $n-$dimensionnel on a :

**Théorème 2.2.2** *Soit $X$ un processus d'Itô a valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour $i = 1, .., n$*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{k=1}^{\delta} \int_0^t \sigma_s^{i,k} dW_s^k,$$

*si $f$ est deux fois différentiable en $x$ et une fois en $t$ on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s)\, ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X_s)\, dX_s^i$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \partial_{x_i, x_j}^2 f(s, X_s)\, d\left\langle X^i, X^i \right\rangle_s,$$

*avec*

$$dX_s^i = b_s^i dt + \sum_{k=1}^{d} \sigma_s^{i,k} dw_s^k \quad et \ d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s = \sum_{k=1}^{d} \sigma_s^{i,k} \sigma_s^{j,k} ds.$$

*Le résultat est plus simple a retenir sous forme vectorielle.pour cela, on note $X$ le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $X^i$, $b$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de corrdonnées $b^i$ et $W$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnée $W^j$.on introduit alors la matrice de taille $n \times d$, $\sigma = (\sigma^{i,j})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq d.}$ avec ces notations on a :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

ou $\sigma_s dW_s$ est un produit matrice-vecteur collonne la formule d'Itô s'ecrit sous la forme,notant $x.y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^*$ la transposée de $\sigma$.

$$f(t.X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s)\, ds + \int_0^t \bigtriangledown f(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t trace\left(D^2 f(s, X_s)\, \sigma_s \sigma_s^*\right) ds,$$

soit encore

$$\begin{aligned} f(t.X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \left(\partial_s f(s,X_s)\,ds + \bigtriangledown f(s,X_s)\right) ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t trace\left(D^2 f(s,X_s)\,\sigma_s\sigma_s^*\right) ds + \int_0^t Df(s,X_s)\,\sigma_s dw_s, \end{aligned}$$

## 2.3 Equation Différentielle Stochastique

**Notation 2.3.1** *On notera $\mathcal{S}^2$ l'espace de Banach consrtitué $X$ ,progressivement mesurable, tels que $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right] \prec \infty$ menu de la norme $\|X\| := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{\frac{1}{2}}$, et $\mathcal{S}_c^2$ le sous espace de $\mathcal{S}^2$ forme des processus continus. Notez que deux processus indistinguables sont identifiés et par abus d'ériture l'espace quotient est noté de la meme facon.*

**Définition 2.3.1** ***(Equation différentielles stochastiques)*** *Une equation différentielle stochastique* ***(EDS)*** *est une equation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

*ou sous forme intégrale :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s,$$

où

- Soient $n,d \in N$, $x \in \mathbb{R}^n$(conditioninitiale), et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel.
- les fonctions $b : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T]*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont mesurables et bornées.

**Définition 2.3.2** ***(Solution de EDS)*** *Une solution de l'EDS (2.1), est un processus continue $X$ tel que :*

1. $X$ est progressivement mesurable.

2. On a :$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{|b(s,X_s)| + \|\sigma(s,X_s)\|^2\right\} ds\right] \prec +\infty$ où $\|\sigma\|^2 = trace(\sigma\sigma^*)$.
3. $\mathbb{P}-p.s$ on a :$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s,\ 0 \leq t \leq T$.

### 2.3.1 Existence et unicité de solution

Soient $b$ et $\sigma$ deux fonction boréliennes. On suppose qu'il existe une constante $\lambda \succ 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

– Condition de Lipshitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \lambda |x-y|,$$

– Croissance linéaire :

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq \lambda(1+|x|),$$

et de plus, la condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et est de carré intégrable i.e $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] \prec \infty$.

**Théorème 2.3.1** *Sous l'hypothese précedents, il existe une unique solution de l'EDS (2.1) a trajectoire continues pour tout $t$. Cette solution appartient a $\mathcal{S}^2$ et donc a $\mathcal{S}_c^2$.*

**Preuve.** La preuve consiste à utiliser la méthode itérative de Picard comme dans le cas déterministe de point fixe est également possible. Pour $X \in \mathcal{S}_c^2$, posons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\phi(X)_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s.$$

Le processus $\phi(X)_t$ est bien défini et continue si $X \in \mathcal{S}_c^2$.Si $X$ et $Y$ sont deux éléments de $\mathcal{S}_c^2$, comme $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a pour tout $0 \leq t \leq \mu \leq T$,

$$|\phi(X)_t - \phi(Y)_t|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq\mu}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq\mu}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\,dW_s\right|^2,$$

utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique, il vient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \mu}\left|\phi\left(X\right)_t-\phi\left(Y\right)_t\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|ds\right)^2\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u\left\|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right\|^2ds\right]$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration suivante :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \mu}\left|\phi\left(X\right)_t-\phi\left(Y\right)_t\right|^2\right]\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|^2ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u\left\|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right\|^2ds\right].$$

Comme les fonction $b$ et $\sigma$ sont Lipschitz en espace, on obtient, pour tout $\mu\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \mu}\left|\phi\left(X\right)_t-\phi\left(Y\right)_t\right|^2\right]\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u\sup_{0\leq t\leq r}\left|X_t-Y_t\right|^2dr\right]. \tag{2.2}$$

De plus, notant 0 le processus null, on a, comme $(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$,

$$\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\leq 3Z^2+3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(r,0\right)dr\right|^2+3\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma\left(r,0\right)dW_r\right|^2,$$

d'ou l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de $b$ et $\sigma$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \mu}\left|\phi\left(0\right)_t\right|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[Z^2\right]+K^2T^2+4K^2T\right). \tag{2.3}$$

Les estimations (2.2) et (2.3) montrent alors que le processus $\phi\left(X\right)$ apprtient á $\mathcal{S}_c^2$ dés que $X$ apprtient $\mathcal{S}_c^2$.

On définit alors par récurrence une suite de processus de $S_c^2$ en posant :

$$X_0=0,\ \text{et},\ X^{n+1}=\phi\left(X^n\right),\ \text{pour } n\geq 0$$

On obtient trés facilement à l'aide de la formule (2.2) pour tout $n\geq 0$, notant $C$ á la place de $2K^2\left(T+4\right)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right],$$

soit encore, notant $D$ la majorant de l'inégalité (2.3)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq D\frac{C^nT^n}{n!},$$

il résulte de cette derniére inégalité que,

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}\prec\infty.$$

Ainsi, la série$\sum\limits_{n}\sup\limits_{t}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc, $\mathbb{P}-p.s$, $X^n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus $X$ continue. De plus $X\in S_c^2$ puisque la convergence a lieu dans $\mathcal{S}^2$-voir l'inégalité précédente.On vérifie trés facilement que $X$ est solution de l'EDS (2.1) en passante á la limite dans la définition $X^{n+1}=\phi\left(X^n\right).$

Si $X$ et $Y$ sont deux solution de l'EDS (2.1) dans $\mathcal{S}_c^2$ alors $X=\varphi\left(X\right)$ et $Y=\varphi\left(Y\right).$ L'inégalité (2.2) donne alors, pour tout $\mu\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\mu}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]\leq 2K^2\left(T+4\right)\int_0^{\mu}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq r}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]dr,$$

et le lemme Gronwall montre que $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right]=0$, ce qui prouve que $X$ et $Y$ sont indistinguables.

Pour montre l'unicité des solution de (2.1), nous devons montrer que tout solution appartient à $\mathcal{S}_c^2$, c'est à dire, comme toute solution est continue par définition, appartient à $S^2$, pour ce la, considérons le temps d'arrête $\tau_n=\inf\left\{t\in[0,T],\left|X_t\right|\succ n\right\}$ avec la convention $\inf\left\{\emptyset\right\}=+\infty$, si $\mu\in[0,t]$, on a

$$\left|X_{\mu\wedge\tau_n}\right|^2\leq 3\left(\left|Z^2\right|+\sup_{0\leq\mu\leq t}\left|\int_0^{\mu\wedge\tau_n}b\left(r,X_r\right)dr\right|^2+\sup_{0\leq\mu\leq t}\left|\int_0^{\mu\wedge\tau_n}\sigma\left(r,X_r\right)dW_r\right|^2\right).$$

Il vient alors,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq\mu\leq t\wedge\tau_n}\left|X_\mu\right|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[Z\right]^2+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n}\left|b\left(r,X_r\right)\right|dr\right)^2\right]+4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\left\|\sigma\left(r,X_r\right)\right\|^2dr\right]\right),$$

et utilisant la croissance linéaire de $b$ et $\sigma$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq\mu\leq t\wedge\tau_n}|X_\mu|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[Z\right]^2+2K^2T^2+8K^2T+\left(2K^2T+8K^2\right)\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq\mu\leq t\wedge\tau_n}|X_\mu|^2\right]\right).$$

On obtient, en appliquant le lemme de Gronwall, à la fonction

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq\mu\leq t\wedge\tau_n}|X_\mu|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[|Z|^2\right]+2K^2T^2+8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T+8K^2\right)T\right\},$$

et le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq\mu\leq T}|X_\mu|^2\right]\prec 3\left(\mathbb{E}\left[|Z|^2\right]+2K^2T^2+8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T+2K^2\right)T\right\}.$$

Ceci implique l'unicité des solutions de l'EDS (2.1). ■

**Processus Ornstein-Uhlenbeck**

Equation $a(t,x)=-ax$, $(a\succ 0)$ et $\sigma(x)=\sigma$. Il s'agit de l'équation de Langevin :

$$dX_t=-aX_tdt+\sigma dW_t, \tag{2.4}$$

c'est à dire avec $a(t,x)=-ax$, $(a\succ 0)$, et $\sigma(x)=\sigma$, la solution donnée par

$$X_t=X_0e^{-at}+\sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s. \tag{2.5}$$

Sans le terme $\sigma dW_t$, l'équation $dX_t=-aX_tdt$ se résout immédiatement en $X_t=Ce^{-at}$. Pour tenir compte du terme $\sigma dW_t$,on fait "Varier la constante $C$"

$$\begin{aligned}dX_t&=dC\cdot e^{-at}-aCe^{-at}dt\\&=-aX_tdt+\sigma dB_t\end{aligned}$$

On a $dC=\sigma e^{at}dW_t$, alors $C=X_0+\int_0^t\sigma e^{as}dW_s$, avec la definition de $X_t$ , l'expression

(2.5) est obtenue. On peut observer directement que (2.5) est satisfaite en dirivant $X_t = X_0 e^{-at} + \sigma e^{-as} \int_0^t e^{as} dW_s$ avec la formule d'itô

$$dX_t = X_0\left(-ae^{-at}\right) + \sigma\left(-ae^{-at}\right)\left(\int_0^t e^{as} dW_s\right) dt + \sigma e^{-at}\left(e^{at} dW_t\right)$$

$$= -a\left(X_0 e^{-at} + e^{-at}\int_0^t e^{as} dW_s\right) dt + \sigma dW_t$$

Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce cas se généralise au cadre vectoriel.

Equation $a(t,x) = a_t x$ et $\sigma(x) = \sigma_t x$. On suppose les processus$(a_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ vérifient la condition d'intégrabilité $\int_0^T |a_t|\, dt \prec +\infty$, $\int_0^T |\sigma_t|\, dt \prec +\infty$ (par exemple en étant bornés). **L'EDS**

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left(a_t dt + \sigma_t dW_t\right), \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.6}$$

admet pour solution

$$X_t = x \exp\left(\int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right), \tag{2.7}$$

pour le voir,on suppose $X$ positivement bornée sur $[0,T]$ (minorée par $\frac{1}{n}$ et majorée par n) ; sinon, on introduit le temps d'arrêt $\tau_1 = \inf\left(t : X_t \leq \frac{1}{n} \text{ ou } X_t \succ n\right)$ et on arrêt les processus à ces dates.

On applique la formule d'itô à $X_{t\wedge\tau_1}$ et a la fonction ln (qui est $C^2$ sur $\left[\frac{1}{n}, n\right]$. De l'équation (2.6), ou déduit $d\langle X,X\rangle_t = X_t^2 \sigma_t^2 dt$. Le processus $Y_t = \ln\left(X_{t\wedge\tau_n}\right)$ vérifie alors

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{d\langle X,X\rangle_t}{X_t^2} = \left(a_t dt + \sigma_t dW_t\right) - \frac{\sigma^2 t}{2} dt$$

$$= \left(a_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) dt + \sigma_t dW_t,$$

ce qui prouve l'expression (2.7).

### 2.3.2 Modèle de Black-Sholes

Le probléme traité par Block et Sholes (1973) est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call au put) sur une action ne distribuant pas dividendes. La méthode utilisé, qui repose sur idées analogues à celles déja présentées dans le cadre des modéles discrets, conduit a des formules eplicites couramment utilisées par les particiens, malgré le caractére simplificateur du modéle.

On suppose avoire un marché financier ou il y a :

1. Un actif sans risque dont le prix $S_0$ vérifie

$$dS_0(t) = S_0(t)\, rdt,$$

   ou $r$ est une constante.

2. Un actif risque dont le prix $S(t)$ vérifie

$$dS(t) = S(t)\left(bdt + \sigma dW_t\right),$$

   ou $W$ est un mouvement Brownien,et $b, \sigma$ des constantes.

On étudie un actif contingent de payoff $h(S_T)$. Les cas d'un call Européen correspond à $h(x) = (x-k)^+$. Le prix d'un call de maturité $T$ et de prix d'exercice $K$ est une fonction $C(t, S(t))$.

On se constitue un portefeuille composé d'un call et de $W_t$ parts de l'actif risqué. La valeur de ce porteffeuille est $V_t = C(t, S_t) + W_t S_t$. On soppose que

$$dV_t = dC_t + W_t dS_t$$

(Cette condition est une condition d'autofinancement et ne doit être en aucun cas confondus avec une formule d'Itô).

En utilisant la formule d'Itô, on a

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial x}S_t b + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + W_t b S_t dt + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\sigma S_t + W_t \sigma S_t\right)dW_t.$$

Le portefeuille est sans risque si

$$\frac{\partial C}{\partial x}\sigma S_t + W_t \sigma S_t = 0,$$

soit $W_t = -\frac{\partial C}{\partial x}$ et de rendement $r$ si $dV_t = rV_t dt$, soit $dC_t + W_t dS_t = r\left(C_t + W_t S_t\right)dt$ d'où, en remplacant $W$ par sa valeur

$$rS_t\frac{\partial C}{\partial x}\left(t, S_t\right) + \frac{\partial C}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\left(t, S_t\right) - rC\left(b, S_t\right) = 0$$

avec $C\left(T, S_T\right) = h\left(S_T\right)$. Soit, en notant que $S_t$ est un v.a qui admet une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ (et qui prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}^+$ )

$$rx\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \sigma^2 x^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}(t,x) - rC(t,x) = 0, \forall x \geq 0, \forall t \geq 0 \qquad \text{avec } C(T,x) = h(x).$$

L'equation aux dérivées partielles peut être résolue des méthode classique d'EDP.

**Exemple 2.3.1** *Soit $S_t$ un processus continu adapté défini par l'équation différentielle stochastique suivant :*

$$\begin{cases} dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ S_0 = s, \qquad avec\ s > 0. \end{cases}$$

*On a*

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t,$$

*d'où*

$$\int_0^t \frac{dS_s}{S_s} = bt + \sigma W_t. \tag{2.8}$$

*Pour résouder cette équation, on définiée le processus $Z_t = \ln\left(S_t\right)$, et appliquons la formule* *d'Itô au processus* $Z_t$

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{1}{S_t} dS_t - \left(\frac{1}{2S_t^2}\right) d\langle S_t, S_t\rangle_t, \\
&= \frac{1}{S_t}\left(bS_t dt + \sigma S_t dW_t\right) - \left(\frac{1}{2S_t^2}\right)\left(\sigma^2 S_t^2\right) dt, \\
&= bdt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt, \\
&= \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t.
\end{aligned}
$$

*Alors, de 2.8 on conclut :*

$$
\begin{aligned}
Z_t &= Z_0 + \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t, \\
\ln S_t &= \ln S_0 + \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.
\end{aligned}
$$

*Pour* $S_t = \exp\left(Z_t\right)$ *,on trouve la solution suivante :*

$$
S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).
$$

# Chapitre 3

# Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrdes

L'objectif de ce chapitre est de présenter briévement le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux en 1990 avec le générateur $f$ non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

## 3.1 Vocabulaire et notations

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré et variable aléatoire $\xi$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. On voudrait résoudre l'equation différentielle suivant :

$$-\frac{dY_t}{dt} = f\left(Y_t\right), \qquad t \in [0.T], \qquad \text{avec } Y_t = \xi,$$

en imposant que, pour tout instant t, $Y_t$ ne dépende pas du futur aprés t c'est à dire que le processus $Y$ soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Le candidat natural est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si $\xi$ n'est pas déterministe. La meilleure approximation-disons dans $L^2$-adapté est la martingale $Y_t = \mathbb{E}\left(\xi | \mathcal{F}_t\right)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théoréme de représentation des martingales browiennes permet de construire un processus $Z$ de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi|\, \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad i.e.\ \ dY_t = Z_t dW_t, \qquad \text{avec } Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une sconde inconnue qui est le processus $Z$ dont le rôle est de rendre le processus $Y$ adapté.

Par conséquent, comme une second variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à $f$ de dépendre du processus $Z$ ; l'equation devient donc :

$$-dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dW_t, \qquad \text{avec}, Y_T = \xi.$$

**Notations :** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $W$ un MB d-dimensionnel sur cet espace. On notera $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de MB $W$.On travaillera avec deux espaces de processus :

– On note $\mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel formé des processus $Y$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\left\|Y\right\|_{\int^2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_T\right|^2\right] \prec \infty,$$

et $\mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours indentifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

– Et ensuit $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k*d}\right)$ celui formé par les processus $Z$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k*d}$, tels que :

$$\left\|Z\right\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt\right] \prec \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k*d}$, $\left\|Z\right\|^2 = trace\left(zz^*\right).\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k*d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2\left(R^{k*d}\right)$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k*d}$ seront souvent omis ; les espace $S^2, S_c^2$ et $\mathcal{M}^2$ sont des espace de banach pour les normes définies précédement. Nous désignerons $B^2$ l'espace de Banach $S_c^2 \times \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}^{k*d}\right)$.

Dans le suivant, nous nous donnons une application aléatoire $f$ définie $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k*d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tels que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k*d}$,le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable.

On considére également une variable aléatoire $\xi$, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrogrde (EDSR en abrégé) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y_t,Z_t)\,dt - Z_t dW_t, & 0\leq t\leq T \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

ou, de facon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dW_r \qquad 0\leq t\leq T.$$

La fonction $f$ s'appele le génerateur de l'EDSR et $\xi$ la condition terminale.Sans plus tarder,précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR (3.1).

**Définition 3.1.1** *Une solution de l'EDSR (*3.1) *est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. $Y$ et $Z$ sont progressivement mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k*d}$;
2. $\mathbb{P}-p.s$ $\int_0^T\left\{|f(r,Y_r,Z_r)|+\|Z_r\|^2\right\}dr \prec \infty$;
3. $\mathbb{P}-p.s$, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\,dr - \int_t^T Z_r dW_r \qquad 0\leq t\leq T.$$

**Remarque 3.1.1** *Les intégrales de l'équation (3.1) étand bien définies, $Y$ est une semi-martingale continue, ensuite comme le processus $Y$ est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier $Y_0$ est une quantité déterministe.*

**Proposition 3.1.1** *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, positif, appartenant à $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et une constante positive $\lambda$ tel que*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k*d}, |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

*Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR(3.1) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$ alors $Y$ appartient à $\mathcal{S}_c^2$.*

**Lemme 3.1.1** *Soient $Y \in \mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k*d}\right)$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dW_s, t \in [0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

**Preuve.** Les inégalités **BDG** donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dw_r\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|\left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

et par suit, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r.Z_r dW_r\right|\right] \leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right]\right).$$

On cette derniére quantité est finie par hypothése ; d'ou le résultat. ■

## 3.2 Adaptation d'solution dans le cas lipschitz

### 3.2.1 Le résultat de E. Pardoux 1990

Nous allons montrer le résultat de **E.Pardoux** qui sera généralisé plus tard, où il est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR.** L'équation du processus adjoint en contrôle stochastique optimal est une version linéaire de l'équation suivante :

$$X(t) + \int_t^1 f(s, X(s), Y(s))\, ds + \int_t^1 [g(s, X(s)) + Y(s)]\, dW_s = X \tag{3.2}$$

- $\{W(t), t \in [0,1]\}$ est un processus de Wiener $k-$dimensionnel sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
- $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,1]\}$ est une filtration naturelle ($\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t)$),
- $X$ est un vecteur aléatoire $d-$dimensionnel $\mathcal{F}_t$-mesurable donné, et $f : \Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k} \to \mathbb{R}^d$.

On suppose que $f$ est lipschitziene par rapport de $x$ et $y$. Nous regardons pour une paire $\{X(t), Y(t)\}_{t\in[0,1]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k}$ dont nous arons boesoin pour être $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1]}$ adapté. Note qu'il est la liberté de choisée le processus $\{Y(t)\}$ ce qui permettra de trouver une solution adaptée.

Dans le cas $Y = 0$ et $X$ est déterministe, l'équation ci-dessus aurait une solution unique $\mathcal{F}_t$-adaptée, avec $\mathcal{F}^t = \sigma(W(s) - W(t); t \leq s \leq 1)$.

On note aussi que il existe une relation entre $X(t)$, $Y(t)$ et $W(t)$, la relation est
$Y(t) = \frac{d}{dt}\langle X, W\rangle_t - g(t, X(t))$ $p.s.$ On a

$$X(t) = X - \int_t^1 f(s, X(s), Y(s))\, ds - \int_t^1 [g(s, X(s)) + Y(s)]\, dW_s$$

$$X - X(t) = \int_t^1 f(s, X(s), Y(s))\, ds + \int_t^1 [g(s, X(s)) + Y(s)]\, dW_s$$

$$dX(t) = f(s, X(t), Y(t))\, dt + [g(t, X(t)) + Y(t)]\, dW_t$$

et

$$dX(t).dW_t = [g(t, X(t)) + Y(t)]\,dt$$
$$\frac{d}{dt}\left\langle X(t)_{,W_t}\right\rangle = g(t, X(t)) + Y(t)$$

donc

$$Y(t) = \frac{d}{dt}\langle X, W\rangle_t - g(t, X(t))$$

avec $\langle X, W_t\rangle_t$ la variation quadratique de $X$ et $W$.

Montre principal resultat sera une existence et unicité de resultat pour une paire $\{X(t), Y(t);\ t \in [0,1]\}$ adapté resoudre $(3.2)$. Nous attendons à ce que notre resultat se révélera utile dans le controle optimal stochostique, nous allons aussi envisager l'équation plus genérale

$$X(t) + \int_t^1 f(s, X(s), Y(s))\,ds + \int_t^1 g(s, X(s) + Y(s))\,dW_s = X \tag{3.3}$$

où $g : \Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k} \to \mathbb{R}^{d\times k}$

### 3.2.2 *La version simplifier de l'équation (3.2) :*

**Lemme 3.2.1** *Donné $X \in \mathbb{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^d\right)$, $f \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)$ et $g \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$, il existe une paire unique $(X,Y) \in \mathcal{M}^2\left(0,1,\mathbb{R}^d\right) \times \mathcal{M}^2\left(0,1,\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ tel que*

$$X(t) + \int_t^1 f(s)\,ds + \int_t^1 [g(s) + Y(s)]\,dW_s = X, \qquad 0 \le t \le 1. \tag{3.4}$$

**Preuve.** $X(t) \triangleq \mathbb{E}\left(X - \int_t^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right)$, $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle engendre par $W_t$, $\forall t \in [0,1]$.

En utilisant théoréme de representation martingale Brownien, alors il existe un processus $\bar{Y} \in \mathcal{M}^2\left(0,1,\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ t.q

$$\mathbb{E}\left(X - \int_t^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right) = x(0) + \int_0^t \bar{Y}(s)\,dW_s,$$

avec $\mathbb{E}\left(X - \int_t^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right)$ est une martingale

$$\forall t \geq s \; \mathbb{E}\left( X(t) | \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X - \int_t^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right) \middle| \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(X - \int_t^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_s\right) = X(s).$$

Finallement il suffit de prendre $Y(t) = \bar{Y}(t) - g(t)$ $0 \leq t \leq 1$

$$\mathbb{E}\left(X - \int_0^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right) = X(0) + \int_0^t (Y(s) + g(s))\,dW_s,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X - \int_0^1 f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}\left(X - \int_t^1 f(s)\,ds - \int_0^t f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= X(t) - \mathbb{E}\left(X - \int_0^t f(s)\,ds \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= X(t) - \int_0^t f(s)\,ds,\end{aligned}$$

en deduire que

$$X(t) - \int_0^t f(s)\,ds = X(0) + \int_0^t (Y(s) + g(s))\,dW_s \text{ pour } 0 \leq t \leq 1.$$

En va remplace $t = 1$ et $0 = t$ on obtient

$$X(1) - \int_t^1 f(s)\,ds = X(t) + \int_t^1 [Y(s) + g(s)]\,dW_s,$$

donc

$$X = X(t) + \int_t^1 f(s)\,ds + \int_t^1 [Y(s) + g(s)]\,dW_s.$$

Nous considérons maintenant l'équation

$$X(t) + \int_t^1 f(s, Y(s))\,ds + \int_t^1 [g(s) + Y(s)]\,dW(s) = X \tag{3.5}$$

Avec la propriéte

$$f(\cdot,0)\in\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right), \tag{3.6}$$

$$\text{et il existe } c\succ 0 \text{ telque } |f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq c\,|y_1-y_2|. \tag{3.7}$$

On noter que (3.6) et (3.7) impliquerait que $f(\cdot,y(\cdot))\in\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)$ lorsque $y\in\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$.

■

**Proposition 3.2.1** *Soit* $X\in\mathbb{L}^2\left(\Omega,\mathcal{F}_1,P;\mathbb{R}^d\right), g\in\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ *et* $f:\Omega\times(0,1)\times\mathbb{R}^{d\times k}\to\mathbb{R}^d$ *une application satisfente à l'exigence ci dessus en particulier (3.6) et (3.7) que il existe une unique solution* $(x,y)\in\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\times\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ *satisfate* (3.5)

**Preuve. Unicite :** On suppose $(X_1,Y_1)$ et $(X_2,Y_2)$ deux solutions. En suite on veut applique la formule d'Itô pour $|X_1(t)-X_2(t)|^2$ de $s=t$ à $s=1$, alors

$$\begin{aligned}|X_1(1)-X_2(1)|^2&=|X_1(t)-X_2(t)|^2+2\int_t^1|X_1(s)-X_2(s)|\,d(X_1(s)-X_2(s))\\&+\int_t^1 d\langle X_1-X_2,X_1-X_2\rangle,\end{aligned}$$

ceci équivalent à

$$\begin{aligned}|X_1(t)-X_2(t)|^2&=|X_1(1)-X_2(1)|^2-2\int_t^1|X_1(s)-X_2(s)|\,d(X_1(s)-X_2(s))\\&-\int_t^1 d\langle X_1-X_2,X_1-X_2\rangle_s,\end{aligned} \tag{3.8}$$

puisque on a

$$\begin{aligned}X_1(t)-X_2(t)&=\int_t^1(-f(s,Y_1(s))+f(s,Y_2(s)))\,ds-\int_t^1(g(s)+Y_1(s))\,dW_s\\&+\int_t^1(g(s)+Y_2(s))\,dW_s\\&=\int_t^1(f(s,Y_2(s))-f(s,Y_1(s)))\,ds+\int_t^1(Y_2(s)-Y_1(s))\,dW_s.\end{aligned}$$

Donc

$$d(X_1 - X_2)(t) = -(f(t, Y_2(t) - f(t, Y_1(t))\,dt - (Y_2(t) - Y_1(t))\,dW_t, \tag{3.9}$$
$$= [f(t, Y_1(t) - f(t, Y_2(t)]\,dt + [Y_1(t) - Y_2(t)]\,dW_t,$$

d'aprés (3.8) et (3.9) en trouve

$$\begin{aligned} |X_1(t) - X_2(t)|^2 = &-2\int_t^1 (X_1(t) - X_2(t))(f(s, Y_1(s) - f(s, Y_2(s))\,ds \\ &- 2\int_t^1 (X_1(s) - X_2(s))(Y_1(s) - Y_2(s))\,dW_s \\ &- \int_t^1 |Y_1(s) - Y_2(s)|^2\,ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |X_1(t) - X_2(t)|^2 + \int_t^1 |Y_1(s) - Y_2(s)|^2\,ds = &-2\int_t^1 (X_1(s) - X_2(s))(f(s, Y_1(s) - f(s, Y_2(s))\,ds \\ &- 2\int_t^1 (X_1(s) - X_2(s))(Y_1(s) - Y_2(s))\,dW_s. \end{aligned}$$

Par passage à espérance on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|X_1(t) - X_2(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^1 |Y_1(s) - Y_2(s)|^2\,ds \\ &= -2\mathbb{E}\int_t^1 (X_1(s) - X_2(s))(f(s, Y_1(s) - f(s, Y_2(s))\,ds \\ &\leq -2\mathbb{E}\int_t^1 c\sqrt{2}\,|X_1(s) - X_2(s)|\,\frac{1}{c\sqrt{2}}\,(f(s, Y_1(s) - f(s, Y_2(s)))ds \\ &\leq \mathbb{E}\left(\int_t^1 4c^2\,|X_1(s) - X_2(s)|^2\,ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^1 \frac{1}{2c^2}\,|(f(s, Y_1(s)) - f(s, Y_2(s)))|^2\,ds\right) \\ &= 2c^2\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_1(s) - X_2(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_1(s) - Y_2(s)|^2\,ds\right), \end{aligned}$$

par conséquence on trouver

$$\mathbb{E}|X_1(t) - X_2(t)|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 |Y_1(s) - Y_2(s)|^2\,ds \leq 2c^2\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_1(s) - X_2(s)|^2\,ds\right),$$

en déduire que

$$\mathbb{E}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|^2 \leq 2c^2\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds\right).$$

Alors par utilisation de la lemme de Gronwall on a que

$$\mathbb{E}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|^2 \leq 0\exp\left(2c^2\right)(1-t),$$

alors

$$X_1(t)=X_1(t),\ \mathbb{P}-p.s.$$

**Existence :** Avec l'aide de **Lemme (3.2.1)**, on définit une suite approximative avec type de Picard itérative. Soit $Y_0(t)=0$ et $\{X_n(t), Y_n(t); 0\leq t\leq 1\}_{n\geq 1}$, une suite dans $\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\times \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ définie par :

$$X_n(t)+\int_t^1 f\left(s,Y_{n-1}(s)\right)ds+\int_t^1 \left[g(s)+Y_n(s)\right]dW_s = X. \tag{3.10}$$

Par définition on a

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t)-X_n(t) &= \int_t^1 f\left(s,Y_{n-1}(s)\right)ds-\int_t^1 f\left(s,Y_n(s)\right)ds+\int_t^1 \left[g(s)+Y_n(s)\right]dW_s \\ &\quad -\int_t^1 \left[g(s)+Y_{n+1}(s)\right]dW_s \\ &= -\int_t^1 f\left(s,Y_n(s)\right)-f\left(s,Y_{n-1}(s)\right)ds-\int_t^1 \left[Y_{n+1}(s)-Y_n(s)\right]dW_s, \end{aligned}$$

maintenant on va appliquée la formule d'itô pour $\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2$

$$\begin{aligned} \left|X_{n+1}(1)-X_n(1)\right|^2 &= \left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2+2\int_t^1 \left(X_{n+1}(s)-X_n(s)\right)d\left(X_{n+1}(s)-X_n(s)\right) \\ &\quad +\int_t^1 d\left\langle X_{n+1}(s)-X_n(s), X_{n+1}(s)-X_n(s)\right\rangle_s \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 &= -2\int_t^1 [X_{n+1}(s) - X_n(s)]\, d\left(X_{n+1}(s) - X_n(s)\right) \\
&- \int_t^1 d\left\langle X_{n+1} - X_n, X_{n+1} - X_n\right\rangle_s \\
&= 2\int_t^1 [X_{n+1}(s) - X_n(s)]\left[f(s, Y_n(s)) - f(s, Y_{n-1}(s))\right] ds \\
&+ 2\int_t^1 [X_{n+1}(s) - X_n(s)]\left[Y_{n+1}(s) - Y_n(s)\right] dW_s \\
&- \int_t^1 |Y_{n+1}(s) - Y_n(s)|^2\, ds.
\end{aligned}$$

Par passage à l'espérance mathématique, l'utilisation de la propriété de martingale pour l'integrale stochastique et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 + \mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_{n+1}(s) - Y_n(s)|^2\, ds\right) \\
&= 2\mathbb{E}\int_t^1 \left(X_{n+1}(s) - X_n(s)\right)\left(f(s, Y_n(s)) - f(s, Y_{n-1}(s))\right) ds \\
&\leq \left(\sqrt{2}c\right)^2 \mathbb{E}\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2\, ds + \frac{1}{\left(\sqrt{2}c\right)^2}\int_t^1 |f(s, Y_n(s)) - f(s, Y_{n-1}(s))|^2\, ds \\
&\leq 2c\mathbb{E}\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2\, ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_n(s) - Y_{n-1}(s)|^2\, ds\right),
\end{aligned}$$

pour $k = 2c$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 + \mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_{n+1}(s) - Y_n(s)|^2\, ds\right) \\
&\leq k\mathbb{E}\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2\, ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 |Y_n(s) - Y_{n-1}(s)|^2\, ds, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

on note $U_n(t) = \mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds\right)$, $V_n(t) = \mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_n(s) - Y_{n-1}(s)|^2 ds\right)$ $\forall n \geq 1$ et $X_0(t) = 0$, $X_0(t) = 0$. L'inegalité (3.11) implique que

$$\mathbb{E}|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 - k\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2 ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_{n+1}(s) - Y_n(s)|^2 ds\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 |Y_n(s) - Y_{n-1}(s)|^2 ds,$$

on va multipliée par $e^{kt} \geq 0$, on obtient

$$e^{kt}\mathbb{E}|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 - ke^{kt}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2 ds\right) + e^{kt}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_{n+1}(s) - Y_n(s)|^2 ds\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}e^{kt}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_n(s) - Y_{n-1}(s)|^2 ds\right),$$

comme $U_{n+1}(t) = \mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2 ds\right)$, il est claire de trouve

$$U_{n+1}(1) - U_{n+1}(t) = U_{n+1}(1) - \mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2 ds\right)$$

c'est à dire $\int_t^1 dU_{n+1}(s) = V_{n+1}(1) - \mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2 ds\right)$, donc

$$dU_{n+1}(t) = -\mathbb{E}|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 dt,$$

alors

$$-e^{kt}\frac{dU_{n+1}(t)}{dt} - ke^{kt}U_{n+1}(t) + e^{kt}V_{n+1}(t) \leq \frac{1}{2}e^{kt}V_n(t),$$

ceci equivalent à

$$-\frac{d}{dt}\left(U_{n+1}(t)e^{kt}\right) + e^{kt}V_{n+1}(t) \leq \frac{1}{2}e^{ks}V_n(t), \tag{3.12}$$

intégrant de $t$ à 1 on obtient

$$-\int_t^1 \frac{d}{ds}\left(U_{n+1}(s)\,e^{ks}\right)ds+\int_t^1 e^{ks}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_t^1 e^{ks}V_n(s)\,ds,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$U_{n+1}(t)\,e^{kt}-e^{k}U_{n+1}(1)+\int_t^1 e^{ks}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_t^1 e^{ks}V_n(s)\,ds,$$

et comme $U_{n+1}(1)=\mathbb{E}\left(\int_1^1\left|X_{n+1}(s)-X_n(s)\right|^2 ds\right)=0$, alors on a

$$U_{n+1}(t)+\int_t^1 \frac{e^{ks}}{e^{kt}}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_t^1 \frac{e^{ks}}{e^{kt}}V_n(s)\,ds$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$U_{n+1}(t)+\int_t^1 e^{k(s-t)}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_t^1 e^{k(s-t)}V_n(s)\,ds,$$

en particulier pour $t=0$

$$U_{n+1}(0)+\int_0^1 e^{ks}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_0^1 e^{ks}V_n(s)\,ds,$$

utilisant le fait que $U_{n+1}(0)=\mathbb{E}\left(\int_0^1\left|X_{n+1}(s)-X_n(s)\right|^2 ds\right)$, donc

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1\left|X_{n+1}(s)-X_n(s)\right|^2 ds\right)+\int_0^1 e^{ks}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_0^1 e^{ks}V_n(s)\,ds, \tag{3.13}$$

ceci implique que

$$\int_0^1 e^{ks}V_{n+1}(s)\,ds\leq\frac{1}{2}\int_0^1 e^{ks}V_n(s)\,ds,$$

par recurrence on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{ks}V_{n+1}(s)\,ds&\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_0^1 e^{ks}V_1(s)\,ds,\\&\leq\frac{1}{2^n}\sup_{0\leq t\leq 1}V_1(t)\int_0^1 e^{ks}ds.\end{aligned}$$

On utilisant le fait que si $s \prec 1$ alors ona $ks \prec k$ et $e^{ks} \leq e^{k}$ "par la croissance d'exponetielle", on obtient

$$\int_0^1 e^{ks} V_{n+1}(s)\, ds \leq 2^{-n} \sup_{0\leq t\leq 1} V_1(t)\, e^{k} \int_0^1 ds \leq 2^{-n}.\bar{c}.e^{k},$$

avec $\bar{c} = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} V_1(t)$ , ou bien

$$\int_0^1 e^{ks} V_{n+1}(s)\, ds \leq \frac{1}{2^n} e^{k} \int_0^1 V_1(s)\, ds \leq \frac{1}{2^n} e^{k} \bar{c},$$

avec $\bar{c} = \int_0^1 V_1(s)\, ds$. D'autre part on a d'aprés (3.13)

$$U_{n+1}(0) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 |X_{n+1}(s) - X_n(s)|^2\, ds\right) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{ks} V_n(s)\, ds,$$

car $e^{ks} \succ 0$ et $V_{n+1}(s) \succ 0$, alors

$$\begin{aligned} U_{n+1}(0) &\leq \frac{e^k}{2} \int_0^1 V_n(s)\, ds \text{ car } 0 \leq s \leq 1 \\ &= \frac{1}{2^n} e^{k} \bar{c} = 2^{-n} \bar{c} e^{k} \end{aligned}$$

d'aprés (3.12) et$\frac{d}{dt} V_{n+1}(t) \leq 0$ on déduire que $U_{n+1}(0) \leq k U_{n+1}(0) + \frac{1}{2} V_n(0)$ . On a d'aprés (3.12)

$$-e^{kt} dU_{n+1}(t) - k e^{kt} U_{n+1}(t) + e^{kt} V_{n+1}(t) \leq \frac{1}{2} e^{kt} V_n(t),$$

pour $t = 0$ en obtient

$$-dU_{n+1}(0) - k U_{n+1}(0) + V_{n+1}(0) \leq \frac{1}{2} V_n(0),$$

et comme $dU_{n+1}(t) = -\mathbb{E}\left|x_{n+1}(t) - x_n(t)\right|^2 dt \leq 0$, donc

$$V_{n+1}(0) \leq k U_{n+1}(0) + \frac{1}{2} V_n(0),$$

et comme

$$U_{n+1}(0) \leq 2^{-n} \bar{c} e^{k},$$

alors

$$V_{n+1}(0) \leq 2^{-n}\bar{k} + \frac{1}{2}V_n(0) \text{ avec } \bar{k} = ke^k\bar{c}.$$

Immédaitement

$$V_{n+1}(0) \leq 2^{-n}\left(\bar{k} + 2^{n-1}V_n(0)\right),$$

comme $\bar{k} \leq n\bar{k} \wedge \frac{1}{2^{1-n}}$

$$V_{n+1}(0) \leq 2^{-n}\left[n\bar{k} + 2^{n-1}V_n(0)\right].$$

■

### 3.2.3 Equation (*3.2*)

Maintenant en peut étudier l'équation

$$x(t) + \int_t^1 f(s, x(s), y(s))\, ds + \int_t^1 [g(s, x(s)) + y(s)]\, dW_s = X, \tag{3.14}$$

– avec

$$\begin{cases} g : \Omega \times (0,1) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times k}, \\ f : \Omega \times (0,1) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k} \to \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{3.15}$$

– et avec la propriétés que :

$$\begin{cases} f(\cdot, 0, 0) \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^d\right), \\ g(\cdot, 0, 0) \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^{d\times k}\right), \end{cases} \tag{3.16}$$

– et il existe $c \succ 0$ tel que :

$$\begin{cases} |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq c(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \\ |g(t, x_1) - g(t, x_2)| \leq c|x_1 - x_2|. \end{cases} \tag{3.17}$$

On note que (3.15),(3.16) et (3.17) implique que $f(\cdot, X(\cdot), Y(\cdot)) \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^d\right)$ et $g(\cdot, X(\cdot), Y(\cdot)) \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^{d\times k}\right)$ n'import quand $X \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^d\right)$, $Y \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^{d\times k}\right)$.

**Théorème 3.2.1** *Etant donné $X \in \mathbb{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^d\right)$, $f$ et $g$ satisfait (3.15),(3.16) et (3.17), il existe un paire unique $(X, Y) \in \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^d\right) \times \mathcal{M}^2\left(0, 1; \mathbb{R}^{d\times k}\right)$ résoudre équation*(3.14).

**Preuve. Unicité** : Supposons $(X_1, Y_2)$ et $(X_2, Y_2)$ deux solutions dans $\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right) \times \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$, on a, alors

$$\begin{aligned}
X_1(t) - X_2(t) &= X - \int_t^1 f\left(s, X_1(s), Y_1(s)\right) ds - \int_t^1 \left[g\left(s, X_1(s)\right) + Y_1(s)\right] dWs \\
&- X + \int_t^1 f\left(s, X_2(s), Y_2(s)\right) ds + \int_t^1 \left[g\left(s, X_2(s)\right) + Y_2(s)\right] dWs, \\
&= \int_t^1 \left[f\left(s, X_2(s), Y_2(s)\right) - f\left(s, X_1(s), Y_1(s)\right)\right] ds \\
&+ \int_t^1 \left[g\left(s, X_2(s)\right) - g\left(s, X_1(s)\right)\right] dWs + \int_t^1 \left[Y_2(s) - Y_1(s)\right] dW_s,
\end{aligned}$$

donc en déduire que

$$\begin{aligned}
d\left(X_1(t) - X_2(t)\right) &= \left[f\left(t, X_1(t), Y_1(t)\right) - f\left(t, X_2(t), Y_2(t)\right)\right] dt \\
&- \left[g\left(t, X_1(t)\right) - g\left(t, X_2(t)\right)\right] dW_t - \left[Y_1(t) - Y_2(t)\right] dW_t.
\end{aligned}$$

Puis on va applique la formule d'itô pour $\left|X_1(t) - X_2(t)\right|^2$

$$\begin{aligned}
\left|X_1(t) - X_2(t)\right|^2 &= \left|X_1(1) - X_2(1)\right|^2 - 2\int_t^1 \left(X_1(t) - X_2(t)\right) d\left(X_1(t) - X_2(t)\right) \\
&- \int_t^1 d\left\langle X_1 - X_2, X_1 - X_2\right\rangle_s, \\
&= -2\int_t^1 \left[X_1(s) - X_2(s)\right]\left[f\left(s, X_1(s), Y_1(s)\right) - f\left(s, X_2(s), Y_2(s)\right)\right] ds \\
&+ 2\int_t^1 \left|X_1(s) - X_2(s)\right|\left[g\left(s, X_1(s)\right) - g\left(s, X_2(s)\right)\right] dW_s \\
&+ \int_t^1 \left[Y_1(s) - Y_2(s)\right] dW_s - \int_t^1 \left(g\left(s, X_1(s)\right) - g\left(s, X_2(s)\right)\right)^2 ds \\
&- \int_t^1 \left|Y_1(s) - Y_2(s)\right|^2 ds - 2\int_t^1 \left(Y_1(s) - Y_2(s)\right)\left(g\left(s, X_1(s)\right) - g\left(s, X_2(s)\right)\right) ds.
\end{aligned}$$

Maintenent par passage à espérence mathématique et l'utilisation le fait que l'integrale stochastique est un martingale de moyenne zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|^2 \leq & -2\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left(X_1(s)-X_2(s)\right)\left(f\left(s,X_1(s),Y_1(s)\right)-f\left(s,X_2(s),Y_2(s)\right)\right)\right)ds \\
& -\mathbb{E}\int_t^1 \left|g\left(s,X_1(s)\right)-g\left(s,X_2(s)\right)\right|^2 ds \\
& -\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2\right)ds \\
& -2\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left(Y_1(s)-Y_2(s)\right)\left(g\left(s,X_1(s)\right)-g\left(s,X_2(s)\right)\right)\right)ds,
\end{aligned}$$

ceci implique l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^1 \left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2 ds \\
& \leq -2\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left(X_1(s)-X_2(s)\right)\left(f\left(s,X_1(s),Y_1(s)\right)-f\left(s,X_2(s),Y_2(s)\right)\right)\right)ds \\
& -2\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left(Y_1(s)-Y_2(s)\right)\left(g\left(s,X_1(s)\right)-g\left(s,X_2(s)\right)\right)\right)ds-\mathbb{E}\int_t^1 \left|g\left(s,X_1(s)\right)-g\left(s,X_2(s)\right)\right|^2 ds,
\end{aligned}$$

On va appliquée inégalite de Young $2ab \leq a^2+b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|^2+\mathbb{E}\int_t^1 \left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2 ds \\
& \leq c^2\left(\sqrt{4}\right)^2\mathbb{E}\int_t^1 \left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds+\frac{1}{\left(c\sqrt{4}\right)^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left|f\left(s,X_1(s),Y_1(s)\right)-f\left(s,X_2(s),Y_2(s)\right)\right|^2 ds \\
& +c^2\left(\sqrt{2}\right)^2\mathbb{E}\int_t^1 \left|g\left(s,x_1(s)\right)-g\left(s,x_2(s)\right)\right|^2 ds+\frac{1}{c^2\left(\sqrt{2}\right)^2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|y_1(s)-y_2(s)\right|^2\right)ds \\
& -c^2\mathbb{E}\int_t^1 \left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds, \\
& \leq \left(3c^2+2c^4\right)\mathbb{E}\int_t^1 \left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds+\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left(\left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2+\left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2\right)ds\right) \\
& +\frac{1}{2c^2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2 ds\right), \\
& \leq \left(2c^4+3c^2+\frac{1}{4}\right)\mathbb{E}\int_t^1 \left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2 ds+\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|y_1(s)-y_2(s)\right|^2 ds\right) \\
& +\frac{1}{2c^2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2 ds\right),
\end{aligned}$$

on prend $c=\sqrt{2}$ on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_1(s)-Y_2(s)\right|^2ds\leq\bar{c}\mathbb{E}\int_t^1\left|X_1(s)-X_2(s)\right|^2ds,$$

avec $\bar{c}=2c^4+3c^2+\frac{1}{4}$, par utilisation de la lemme de Growall on trouve unicité.

**Existence :** On va construsie une suite approximative, et on va utilisé l'itération de Picad avec l'aide de **Proposition 3.2.1**. Soit $X_0(t)=0$, et $(X_n(\cdot),Y_n(\cdot))\in\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\times\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ défini récursivement par :

$$X_n(t)+\int_t^1 f(s,X_{n-1}(s),Y_n(s))\,ds+\int_t^1\left[g(s,X_{n-1}(s))+Y_n(s)\right]dW_s=X. \tag{3.18}$$

On a que

$$\begin{aligned}X_{n+1}(t)-X_n(t)=&\int_t^1\left(f(s,X_n(s),Y_{n+1}(s))-f(s,X_{n-1}(s),Y_n(s))\right)ds\\&+\int_t^1\left(g(s,X_n(s))-g(s,X_{n-1}(s))\right)dW_s+\int_t^1\left[Y_{n+1}(s)-Y_n(s)\right]dW_s.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}d\left(X_{n+1}(t)-X_n(t)\right)=&-(f(t,X_n(t),Y_{n+1}(t))-f(t,X_{n-1}(t),Y_n(t)))dt \\&-\left(g(s,X_n(s))-g(s,X_{n-1}(s))\right)dW_t-\left(Y_{n+1}(t)-Y_n(t)\right)dW_t.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Maintenant on va appliqué la formule d'itô pour $\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2$

$$\begin{aligned}\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2=&\left|X_{n+1}(T)-X_n(T)\right|^2-2\int_t^1\left|X_{n+1}(s)-X_n(s)\right|d\left(X_{n+1}(s)-X_n(s)\right)\\&-\int_t^1 d\left\langle X_{n+1}-X_n,X_{n+1}-X_n\right\rangle_s,\end{aligned}$$

D'aprés (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}
|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2 &= 2\int_t^1 (X_{n+1}(s)-X_n(s))\,(f(s,X_n,Y_{n+1})-f(s,X_{n-1},Y_n))\,ds \\
&+2\int_t^1 |X_{n+1}(s)-X_n(s)|\,(g(s,X_n)-g(s,X_{n-1}(s)))\,dW_s \\
&+2\int_t^1 |X_{n+1}(s)-X_n(s)|\,(Y_{n+1}(s)-Y_n(s))\,dW_s \\
&-\int_t^1 (g(s,X_n(s))-g(s,X_{n-1}(s)))^2\,ds-\int_t^1 |Y_{n+1}(s)-Y_n(s)|^2\,ds \\
&-2\int_t^1 (Y_{n+1}(s)-Y_n(s))\,[g(s,X_n(s))-g(s,X_{n-1}(s))]\,ds
\end{aligned}$$

Par passage à espérence on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^1 |Y_{n+1}(s)-Y_n(s)|^2\,ds \\
&=2\mathbb{E}\int_t^1 (X_{n+1}(s)-X_n(s))\,(f(s,X_n,Y_{n+1})-f(s,X_{n-1},Y_n))\,ds \\
&-\mathbb{E}\int_t^1 |g(s,X_n(s))-g(s,X_{n-1}(s))|^2\,ds-2\mathbb{E}\int_t^1 (Y_{n+1}(s)-Y_n(s))\,(g(s,X_n(s))-g(s,X_{n-1}(s)))\,ds \\
&\leq 4c^2\mathbb{E}\int_t^1 |X_{n+1}(s)-X_n(s)|^2\,ds+\frac{1}{4c^2}\mathbb{E}\int_t^1 (f(s,X_n,Y_{n+1})-f(s,X_{n-1},Y_n))^2\,ds \\
&-c^2\int_t^1 |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2\,ds+\frac{1}{4}\mathbb{E}\int_t^1 |Y_{n+1}(s)-Y_n(s)|^2\,ds+4\mathbb{E}\int_t^1 |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^1 |Y_{n+1}(s)-Y_n(s)|^2\,ds \\
&\leq 4c^2\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s)-X_n(s)|^2\,ds\right)+\left(\frac{5}{4}-c^2\right)\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2\,ds\right) \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_{n+1}(s)-Y_n(s)|^2\,ds\right) \qquad (3.20)\\
&\leq c\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_{n+1}(s)-X_n(s)|^2\,ds\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_{n+1}(s)-Y_n(s)|^2\,ds\right).
\end{aligned}$$

Comme $U_n(t)=\mathbb{E}\left(\int_t^1 |X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2\,ds\right)$, il est claire de trouve

$$-\frac{d}{dt}(U_{n+1}(t))-cU_{n+1}(t)\leq cU_n(t)\,,\ \text{avec } U_{n+1}(1)=0,$$

par la méme méthode utilisé dans la **Proposition 3.2.1,** on obtient

$$U_{n+1}(0) \leq \frac{(ce^c)^n}{n!} U_n(0).$$

Ceci, avec (3.20), implique que $(X_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)$ et $(Y_n)$ une suite de Cauchy $\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$. Alors, d'après (3.18), $(X_n)$ converge aussi dans $\mathbb{L}^2\left(\Omega,\mathcal{C}\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\right)$. Il s'ensuit alors de (3.18) que

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n \text{ et } Y = \lim_{n\to\infty} Y_n,$$

resoudre l'equation *(3.2)*. ■

### 3.2.4 Le cas général

Maintenant en peut étudier l'équation

$$X(t) + \int_t^1 f(s, X(s), Y(s))\, ds + \int_t^1 g(s, X(s), Y(s))\, dW_s = X, \tag{3.21}$$

– avec $g : \Omega \times (0,1) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k} \to \mathbb{R}^{d\times k}$, $f : \Omega \times (0,1) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k} \to \mathbb{R}^d$, et la propriétés que :

$$\begin{cases} f(\cdot,0,0) \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right), \\ g(\cdot,0,0) \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right), \end{cases} \tag{3.22}$$

– et il existe $c \succ 0$ tel que :

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| + |g(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)| \leq c\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right), \tag{3.23}$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{d\times k}$, et il existe $\beta \succ 0$ tel que

$$|g(t,x,y_1) - g(t,x,y_2)| \geq \beta\, |y_1 - y_2| \tag{3.24a}$$

On note que (3.23)+(3.24a) implique que pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \to g(t,x,y)$ est une application bijection de $\mathbb{R}^{d\times k}$ sur lui-même.

**Théorème 3.2.2** *Dans les condition ci-dessus sur $X$, $f$ et $g$ satisfait (3.22) et (3.23), (3.24a), il existe un paire unique $(X,Y) \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\times\mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ résoudre équation*(3.21).

**Preuve.** La preuve est une adaptation avec des changements essentiellement évidents, des preuves des résultats précédents. Nous indiquons simplement les étapes et expliquons le nouvel argument qui est nécessaire dans la premiére étape. La premiére consiste à étudier l'équation

$$X = X(t) + \int_t^1 f(s)\,ds + \int_t^1 g(s,Y(s))\,dW_s. \tag{3.25}$$

où $g$ satisfait la version simplifiée de (3.22) et (3.23), (3.24a) obtenue en supprimant la dépendance en $x$. La deuxiéme étape résoudre l'équation

$$X = X(t) + \int_t^1 f(s,Y(s))\,ds + \int_t^1 g(s,Y(s))\,dW_s,$$

où $f$ et $g$ satisfont la version simplifiée de (3.22) et (3.23), (3.24a) obtenue en supprimant la dépendance en $x$, et la troisiéme étape résoudre l'équation (3.21). Considérons seulement l'équation (3.25). Du **Lemme 3.2.1,** il existe une paire unique $\left(X,\bar{Y}\right)$ tel que

$$X = X(t) + \int_t^1 f(s)\,ds + \int_t^1 \bar{Y}(s)\,dW_s,$$

il reste à montrer que étant donné $\bar{Y} \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$, il existe un unique $Y \in \mathcal{M}^2\left(0,1;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ tel que $g(t,Y(t)) = \bar{Y}(t)\ \mathbb{P}-p.s.$

Il résulte des propriétés de $g$ que pour tout $(t,w,y) \in [0,1]\times\Omega\times\mathbb{R}^{d\times k}$, il existe un élément unique $\Phi_t(w,Y)$ de $\mathbb{R}^{d\times k}$ tel que $g(t,w,\Phi_t(w,Y)) = Y$.

Il reste qu'à montrer que $\Phi$ est $\mathcal{P}\times\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ mesurable.

On peut, sans perte de généralité, supposer que $\Omega = \mathcal{C}\left([0,1]\,;\mathbb{R}^{d\times k}\right)$, $W_t(\omega) = \omega(t)$ et $\mathcal{F}_1$ est une tribu de Borel. Notez que l' application

$$G(t,\omega,y) = (t,\omega,g(t,\omega,y))$$

est une bijection de $[0,1]\times\Omega\times\mathbb{R}^{d\times k}$ en lui-même. Puisque $[0,1]\times\Omega\times\mathbb{R}^{k}$ est un espace métrique complet et séparable, il découle du théorème 10.5, page 506 dans Ethier et Kurtz [3] que $G^{-1}$ est Borel mesurable, c'est-à-dire $\mathcal{B}([0,1])\times\mathcal{F}_1\times\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ mesurable.

En considérant pour chaque $t$ la restriction de la même application à $[0,t]\times\mathcal{C}\left([0,1]\,;\mathbb{R}^{d\times k}\right)\times\mathbb{R}^{d\times k}$, on obtient que $G^{-1}$ est $\mathcal{P}\times\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d\times k}\right)$ mesurable, ce qui prouve ce qui précède assertion pour $\Phi$. ■

## 3.3 Conclusion :

Dans ce mémoire, on a donné la premiére esquisse de la notion Calcul d'Itô et d'équation différentielle stochastique. On a démontré la théoreme fondamentale d'existence et d'unicité et quelques exemples ont été cité dont le modéle de Black et Scholes qui est une application à la finance. On a essayé d'éxposer une résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une **EDSR** qui établi par E.Pardoux en 1990 qui étudier le cas où le générateur $f$ est globalement Lipschitzien avec une condition terminale $\xi$, $\mathcal{F}_T-$mesurable et de carré intégrable.

# Bibliographie


[1] BRETON, Jean-Christophe. Calcul stochastique. Notes de cours, M2 Mathéma, 2014.

[2] BRETON, Jean-Christophe. Processus stochastique. Université de Rennes1, 2013

[3] Ethier, S.N. and Kurtz, T.G., 1987. Markov processes : Characterization and convergence. Bull. Amer. Math. Soc, 16, pp.315-318.

[4] JEANBLANC, Monique. Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option finance, 2002.

[5] MESSAOUDI, Rania et BOUSSAAD, A. Résolution du probléme du temps d'arrêt optimal en horizon fini. mémoire de master.

[6] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars

[7] Pardoux and S. Peng,(1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation,Systems Control Lett. 14 , no. 1, 55–61.

[8] ROGALSKI, Marc. Les futurs mathématiciens de l'université : comment les faire devenir des «enseignants acceptables» ?. Gazette des Mathématiciens, 2014, vol. 139, p. 51-6

# Annexe : Resultats utiles

**Lemme 3.3.1** ***(Lemme de Gronwall)*** *: Soit $T \succ 0$ et soit $g$ une fonction positive mesurable bornée sur l'integralle $[0, T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0, b \geq 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ :*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds.... (1)$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$ :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

**Preuve.** En itérant la condition (1) sur $g$, on a pour tout $n \geq 1$ :

$$g(t) \leq a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + ... + a\frac{(bt)^n}{n!} + b^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_n} g(s_{n+1})\, ds_{n+1}.$$

Si $g$ est majorée par $A$, le dernier terme se majore par $\frac{A(bt)^{n+1}}{(n+1)!}$ et il tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce prouve le lemme car le dévelopement à droite tend vers a $\exp(bt)$. ■

**Théorème 3.3.1** ***(Théoreme de representation des martingales Browniennes)*** *Soit $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de MB $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$. Soit $M$ une martingale continue de carré intégrable par rapport a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Alors il existe un unique processus prévisible $H$ vérifiant : $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) \prec \infty$ tel que $\forall t \in [0, T]$ ;*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.\mathbb{P} - p.s$$

**Lemme 3.3.2** ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués.ie.$\frac{1}{p}+$*

$\frac{1}{q} = 1$. *Si* $f, g$ *sont des applications mesurables,alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

*En particulier, l'inégalite de Hölder(dans le cas* $p = 2$*) donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

**Lemme 3.3.3** ***(Lemme de Fatou)*** *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a réeles, alors*

$$\int \lim_{n\to\infty} \inf X_n dY \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int X_n dY$$

**Théorème 3.3.2** ***(Inégalité de Doob)*** *Si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale continue, alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_n|\right] \leq 4 \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[|X_T|^2\right].$$

**Théorème 3.3.3** ***(Théoreme du point fixe)*** *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique complet et* $Q : E \to E$ *une application contractante, i.e.Lipschitizienne de rapport* $K \prec 1$*. Alors,* $Q$ *admet un unique point fixe* $a \in E$ *telque :*$Q(a)$.

**Proposition 3.3.1** ***(Suite de Cauchy)*** *On dit qu'un suite de réels est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq N \ et\ m \geq N) \Rightarrow (|U_n - U_m| \leq \varepsilon).$$

*Cette proposition peut se comprendre comme*

$$\lim_{n,m\to\infty} |U_n - U_m| = 0.$$

**Définition 3.3.1** ***(Espace de Hilbert)*** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

**Remarque 3.3.1**

1. Tout suit convergent$\Rightarrow$suit de Cauchy.
2. Une suite de Cauchy dans espace de Hilbert $\Rightarrow$suite convergent.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | |
|---|---|
| $\left(\Omega, \mathcal{F}, , \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\, \mathbb{P}\right)$ | un espace de probabilité filtré |
| $L^2$ | l'espace des fonctions de carré intégrable |
| $\mathcal{C}^{n+1}$ | Ensemble des fonctions $(n+1)$ fois dérivable et dont la dérivée $(n+1)$ éme est continue |
| $p.s$ | Presque sûrement |
| $p.p$ | Presque partout. |
| $\sigma^*$ | Transposée de lamatrice $\sigma$. |
| $càdlàg$ | Continue à droite admet de limite à gauche. |
| $\mathbb{P}-p.s$ | presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ |
| $dt \times d\mathbb{P}$ | Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$ |
| $trace\,(M)$ | La trace de la matrice.$M$. |
| $tq$ | Telle que |
| $\mathbb{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$ | L'espace formé par les processus $Z$ progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}$ .. |
| $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^k)$ | l'espace vectoriel formé par les processus $Y$ progressivement mesurable à valeur dans$\mathbb{R}^k telleque \, \|Y\|_{\mathbb{S}^2} = \mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T} \|Y_t\|^{\,2}\right) < \infty\}$ |
| $\mathbb{M}^2{}_{n\times d}(\mathbb{R}^{k\times d})$ | l'espace formé par lesprocessus $Z$ progressivemen tmesurable à valeur dans$\mathbb{R}^{k\times d} telleque \, \|Z\|_{\mathbb{M}^2} = \mathbb{E}\left(\int_0^T \|\, \|Z_t\|\, \|^{\,2} dt\right) < \infty\}, où : siZ \in \mathbb{R}^{k\times d}, \|Z\|^2_{\mathbb{M}^2}$ |
| $\mathbb{S}^2_c$ | le sous-espace par les processus continue} |
| $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ | désigne l'ensemble des classes équivalente de$\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ |
| $i.e$ | C'est à dire |
| $\mathbb{R}^k$ | Espace réel euclidien de dimension $k$. |
| $\mathbb{R}^{k\times d}$ | Ensemble des matrice réelles $k \times d$ |
| $resp$ | Respectivement |
| $Id$ | Matrice identité |
| $EDSR$ | Equation Différentielle Stochastique Rétrograde |
| $EDS$ | Equation Différentielle Stochastique |
| $\langle .,. \rangle$ | Produit Scalaire |
| $MB$ | Mouvement Browniens |

# ملخص

إن الهدف الرئيسي من إجراء هذا العمل هو برهنة و دراسة نتيجة وجود ووحدانية الحل بالنسبة للمعدلات التفاضلية العشوائية التراجعية, هذه النتيجة هي دراسة أساسية, تعالج الحالة الليبشيزية التي تأسست عام 1990 من قبل S.peng و E.Pardoux

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية التراجعية العشوائية, الحالة الليبشيزية الوجود و الوحدانية

# Résumé

L'objectif principal de ce travail est de démontrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'équations différentielles stochastique rétrogrades '(EDSR en abrégé) ; ce résultat est une étude de base, qui traité le cas lipchitzien établi en 1990 par E. pardoux et S.peng.

**Mots clés :** Equations différentielles stochastiques rétrogrades, cas Lipchitzien, l'existence et l'unicité.

# Abstract

The main objective of this work is to demonstrate and study the result of existence and uniqueness of backward stochastic differential equations (BSDE in short) ; this result is a basic study , which deals with the Lipchitz case established in 1990 by E.Pardoux and S.peng.

**Key words:** Backward stochastic differential equations, Lipchitz case, existence and uniqueness.