

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences Appliquées  
Département de Génie Electrique



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Electrotechnique

Spécialité : Machines électriques

Présenté par :

**CHAHAD ABDELKADIR**

**BEGGAA LAKHDAR**

**Thème:**

# **Etude des phénomènes électromagnétiques d'une pompe MHD annulaire à induction**

Soumis au jury composé de :

M <sup>f</sup>	Bourek Yacine	MCA	Président	UKM Ouargla
M <sup>me</sup>	Bouali Khadidja	MCA	Encadreur/rapporteur	UKM Ouargla
M <sup>me</sup>	Nacer Sonia	MCA	Examineur	UKM Ouargla

**Année universitaire 2020/2021**

# Remerciements

# Remerciements

On remercie d'abord Allah , le tout grand et puissant, qui nous a donné la volonté et la force d'entamer et de achever ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et reconnaissances à **Dr. Mme. Bouali Khadidja** qui a dirigé notre travail en nous accordant toute sa confiance. Nous avons la chance d'avoir été encadré par une personne toujours disponible, qui nous a fait partager sa curiosité et sa rigueur scientifique.

Nous avons bénéficié de son soutien même dans les moments difficiles. Pour tout cela, Nous tenons à lui exprimer notre sincère reconnaissance.

Mes vifs remerciements vont au membre de jury d'avoir accepté de juger ce document

En fin, nos remerciements vont spécialement à tous les membres de nos familles pour leurs patiences et encouragements.

# SOMMAIRE

### Sommaire

Introduction Générale	
Introduction	1
<b>Chapitre I Généralités sur les convertisseurs MHD</b>	
I.1	Introduction 4
I.2	Généralité 4
I.3	Les convertisseurs MHD 5
I.3.1	Les convertisseurs MHD linéaires à conduction 6
I.3.1.1	Description et principe de fonctionnement 6
I.3.1.2	Classification des pompes MHD à conduction 8
I.3.1.2.1	Les Pompes MHD à conduction à courant continu 8
I.3.1.2.2	Les Pompes MHD à Conduction à Courant Alternatif 8
I.3.2	Les convertisseurs MHD à induction 9
I.3.2.1	Différentes géométries des pompes à induction 10
A	Pompes plates 10
B	Pompes annulaires 11
C	Pompes Hélicoïdales 12
I.3.3	Comparaison entre les pompes MHD à conduction et à induction 13
I.3.4	Applications industrielles de la magnétohydrodynamique 13
I.3.4.1	Génération d'électricité 13
I.3.4.2	Propulseurs MHD 14
I.3.4.3	Applications de la magnétohydrodynamique à la métallurgie 14
I.3.5	Application biomédical 16
I.3.6	Application astrophysique et géophysique 16
I.4	Conclusion 17

### Chapitre II Modélisation des phénomènes électromagnétiques des convertisseurs MHD

II.1	Introduction	19
II.2	Analyse des phénomènes Électromagnétiques	19
II.3	Equations électromagnétiques	19
II.3.1	Les équations de Maxwell	19
II.3.1.1	Lois de couplage électromagnétique	20
II.3.1.2	Les équations de conservation	21
II.3.1.3	Lois de comportement des milieux des matériaux	21
II.4	Les modèles électromagnétiques	22
II.4.1	Modèle électrostatique	23
II.4.2	Modèle électrocinétique	23
II.4.3	Modèle magnétostatique	24
II.4.4	Modèle magnétodynamique	25
II.5	Formulation électromagnétique du problème	28
II.5.1	Formulations en Potentiels vecteur magnétique	28
II.5.2	Formulation en induction magnétique	29
II.6	Méthodes de discrétisation	30
II.6.1	Méthodes des différences finies (MDF)	30
II.6.2	Méthode des éléments finis (MEF)	30
II.6.3	Méthode des intégrales de frontières (MIF)	31
II.6.4	Méthode des volumes finis (MVF)	31
II.7	Conclusion	31

### Chapitre III Modélisation des phénomènes électromagnétiques de la pompe MHD annulaire à conduction avec COMSOL

III.1	Introduction	33
III.2	COMSOL Multiphysiques	33
III.3	Représentation de la Géométrie de la Pompe Magnétohydrodynamique	33
III.4	Résultats de simulation par COMSOL	36
III.4.1	Distribution du potentiel vecteur $\vec{A}$	36
III.4.2	Distribution de l'induction magnétique B	37
III.4.3	Représentation de la force électromagnétique	38
III.5	Validation de quelque résultats avec d'autre obtenus par volume finis	39
III.6	Conclusion	42
	Conclusion Générale	44

# Liste des figures

### Liste des figures

<b>Figure.I.1</b>	Barre mobile sur deux rails parallèles	4
<b>Figure.I.2</b>	Schéma idéal d'une pompe électromagnétique à conduction	4
<b>Figure.I.3</b>	Générateur MHD à gaz ionisé	5
<b>Figure.I.4</b>	Schéma d'une machine MHD à conduction	6
<b>Figure.I.5</b>	Schéma d'une pompe MHD à conduction	7
<b>Figure.I.6</b>	Pompe MHD à conduction à courant continu	8
<b>Figure.I.7</b>	Schéma d'une machine MHD à conduction à courant alternative	9
<b>Figure.I.8</b>	Lignes de courant dans une pompe MHD à induction	10
<b>Figure.I.9</b>	Pompe MHD à induction plate	10
<b>Figure.I.10</b>	Pompe MHD à induction annulaire	12
<b>Figure.I.11</b>	Schéma d'une pompe MHD hélicoïdale	12
<b>Figure.I.12</b>	Schéma d'une tuyère MHD	14
<b>Figure.III.1</b>	Géométrie de la pompe MHD	34
<b>Figure.III.2</b>	Geométrie de la pompe MHD avec les conditions aux limites	35
<b>Figure.III.3</b>	Maillage de la géométrie	35
<b>Figure.III.4</b>	Potentiel vecteur dans la pompe MHD	36
<b>Figure.III.5</b>	Potentiel vecteur A dans la pompe MHD	36
<b>Figure.III.6</b>	Induction B dans la pompe MHD	37
<b>Figure.III.7</b>	Induction B dans la pompe MHD	37
<b>Figure.III.8</b>	Induction B dans la pompe MHD	38
<b>Figure.III.9</b>	Force électromagnétique dans le canal	38
<b>Figure.III.10</b>	Force électromagnétique (norme) dans le canal	39
<b>Figure.III.11</b>	Potentiel vecteur dans la pompe MHD	39
<b>Figure.III.12</b>	Potentiel vecteur dans la pompe MHD	40
<b>Figure.III.13</b>	Induction magnétique dans la pompe	40
<b>Figure.III.14</b>	Induction magnétique dans la pompe	41
<b>Figure.III.15</b>	Induction magnétique norme dans la pompe MHD	41

# Liste des symboles et des abréviations

**Liste des symboles et des abréviations**

**I –Abréviation**

<b>Symbole</b>	<b>Définition</b>
MHD	Magnétohydrodynamique
MEF	Méthode des éléments finis
MDF	Méthode des différences finies
MVF	Méthodes des volumes finis
DC	Directe courant
1D	Une dimension
2D	Bidimensionnel
3D	Trois dimensionnel

**II – Symbole**

<b>Symbole</b>	<b>Définition</b>	<b>Unité</b>
$\vec{A}$	Potentiel vecteur magnétique	[T m]
$\vec{B}$	Induction magnétique	[T]
$\vec{D}$	Induction électrique	[C/m]
$\vec{E}$	Champ électrique	[V/m]
$\vec{H}$	Champ magnétique	[A/m]
$\vec{J}$	Densité de courant	[A/m <sup>2</sup> ]
$\vec{J}_{ex}$	Densité de courant d'excitation	[A/m <sup>2</sup> ]
$\vec{V}$	Vitesse d'écoulement du fluide	[m/s]
$\vec{F}$	Force électromagnétique	[N/m <sup>3</sup> ]
$\mu$	Perméabilité magnétique	[H/m]
$\mu_0$	Perméabilité magnétique à vide	[H/m]
$\mu_r$	Perméabilité magnétique relative	-
$\varepsilon$	Permittivité électrique	-

## Liste des symboles et des abréviations

---

$\sigma$	Conductivité électrique	[S/m]
$\rho$	Densité de charge volumique	[C/m]

# Introduction générale

# Introduction générale

La magnétohydrodynamique (MHD) est à la frontière de deux sciences, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. Elle consiste en l'étude de l'interaction entre un écoulement de fluide conducteur et des champs magnétiques et électriques. Sa naissance remonte au 19<sup>ème</sup> siècle, lorsque Faraday écrivit les lois de l'induction magnétique (1831). Elles montrent l'existence d'une force électromotrice induite dans un écoulement soumis à un champ magnétique. Cette force est susceptible de créer des courants qui peuvent agir avec le champ magnétique pour donner naissance à des forces de Laplace.

Le physicien suédois Hannes Alfvén fut le premier à employer le terme magnétohydrodynamique, en 1942. Il reçut le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux sur le sujet [1],

Le convertisseur MHD concerne la conversion de l'énergie mécanique du mouvement d'un fluide conducteur en énergie électrique. Ce mécanisme permet de transformer directement le mouvement de fluide en électricité sans passer par des turbines comme dans le cas des centrales classiques. Elle peut également s'effectuer en sens inverse, c'est à dire qu'il est possible d'utiliser l'énergie électrique pour mettre un fluide conducteur en mouvement. On réalise ainsi des pompes magnétohydrodynamiques [2], [4], [6], [8].

Ces pompes sont conçues dans le but de n'avoir aucune partie mobile et sont ainsi débarrassées de problèmes d'usure et de fatigue provoqués par la basse pression à travers les pièces mécaniques. Comparées à d'autres types de pompes non mécaniques, les pompes magnétohydrodynamiques montrent plusieurs avantages ; à savoir la simplicité de fabrication et des forces continues de pompage [2], [8].

Les applications de la magnétohydrodynamique sont très larges et dans des échelles très variées : l'industrie métallurgique, le transport, le pompage des métaux liquides en fusion,..., [13].

L'objectif de ce travail est l'étude des phénomènes électromagnétiques dans la pompe MHD annulaire à induction par la méthode des éléments finis, utilisant le logiciel COMSOL.

## Introduction générale

---

Pour se faire, le présent mémoire a été réparti en trois chapitres:

Le premier chapitre, consiste en une présentation générale des convertisseurs magnétohydrodynamiques (MHD) et leurs différentes applications.

Le deuxième chapitre fera l'objet d'une formulation mathématique des phénomènes électromagnétiques. Il consiste à déterminer les équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution des phénomènes physiques.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des résultats de simulation des phénomènes électromagnétiques par le logiciel COMSOL et la validation par la méthode des volumes finis.

Le mémoire est clôturé par une conclusion générale où des suggestions et des perspectives sont proposées.

# Chapitre I

## Généralités sur les convertisseurs MHD

## I.1 Introduction

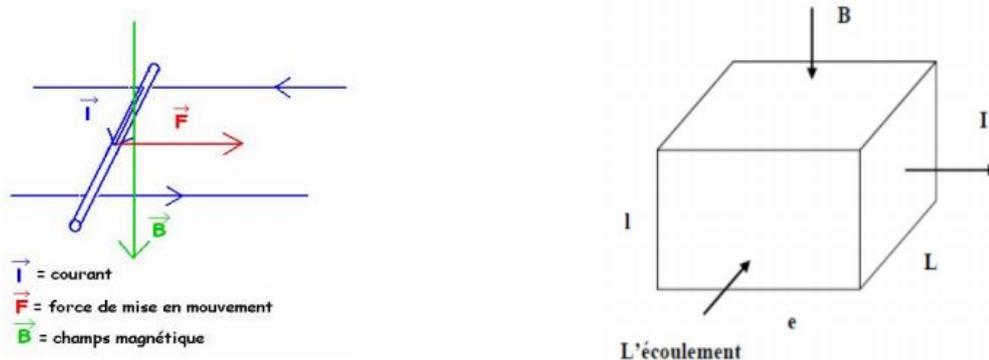
La magnétohydrodynamique est discipline de l'interaction entre les champs magnétiques et les écoulements de fluides conducteurs. Historiquement, c'est l'étude de la production d'électricité par des générateurs MHD qui a longtemps été l'activité la plus importante dans ce domaine. A partir de 1969, date à laquelle cette activité a été mise en sommeil et définitivement arrêtée car la rentabilité hypothétique dans ce secteur et loin de périr par désintérêt, la MHD s'est au contraire développée et diversifiée.

La MHD a étendu son domaine à la métallurgie et d'autres dispositifs industriels (pompes électromagnétiques, propulsion), ces pompes ont l'avantage par rapport aux pompes mécaniques de n'avoir aucune pièce mobile et aucun contact avec le fluide puisque ce dernier est simplement convecté par un champ magnétique. On suppose que le fluide s'écoule en bloc comme le mouvement d'un solide. Le problème étudié se rapproche donc de celui des moteurs linéaires. Il existe d'ailleurs des moteurs linéaires de type annulaire [1],[2].

Dans ce chapitre portera une présentation générale des convertisseurs magnétohydrodynamiques (MHD) et leurs différentes applications.

## I.2 Généralité

Une expérience simple à réaliser, une petite barre mobile et un aimant en U nous permet de comprendre le phénomène. On peut générer une force «  $F$  » à l'aide d'un champ magnétique «  $B$  » perpendiculaire à celle-ci ainsi qu'un courant d'intensité «  $I$  » lui aussi perpendiculaire aux deux autres vecteurs «  $F$  » et «  $B$  ». (fig. I.1) Si on inverse le sens du vecteur  $B$ , la force  $F$  s'inverse aussi. Ce principe obéit à la règle dite « règle des trois doigts »



**Fig. I.1** Barre mobile sur deux rails parallèles **Fig. I.2** Schéma idéal d'une pompe à conduction avec :

$I$  : représente l'intensité du courant qui traverse le fluide entre les deux électrodes.

$B$  : représente l'intensité du champ magnétique «  $F$  » représente la force de Laplace le liquide traverse le canal à une longueur ' $L$ ', largeur ' $l$ ' et une hauteur ' $e$ '.

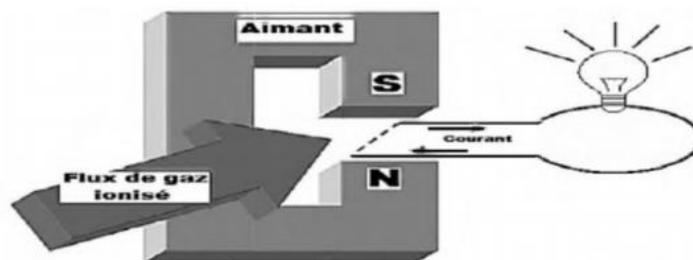
Les propriétés MHD peuvent être utilisées soit pour produire de l'énergie électrique ou magnétique soit pour la convertir en énergie cinétique. Dans le cas de la propulsion MHD par exemple, la force «  $F$  » générée est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique ainsi qu'à l'intensité du courant circulant dans le fluide. La propulsion MHD nécessite d'être utilisée à travers un fluide suffisamment conducteur de courant .Elle peut être donc utilisée dans l'eau de mer (qui conduit le courant grâce au sel dissous qu'elle contient) mais aussi dans l'air atmosphérique. [5]

### I.3 Les convertisseurs MHD

Un convertisseur MHD est une machine électromagnétique sans pièces mécaniques mobiles ; possédant un inducteur classique pour produire un champ magnétique mais avec un induit fluide conducteur (eau salée, métal liquide, gaz ionisé...) ; remplaçant l'induit conventionnel composé de pièces solides (acier, aluminium, cuivre...).

Un convertisseur MHD est réversible comme toute machine électromagnétique, il permet de :

- ✓ Convertir l'énergie mécanique présente dans le mouvement d'un fluide en énergie électrique, c'est le cas d'un générateur MHD ;
- ✓ Convertir l'énergie électrique en énergie mécanique par la mise en mouvement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique, c'est le cas d'un accélérateur MHD, [6].



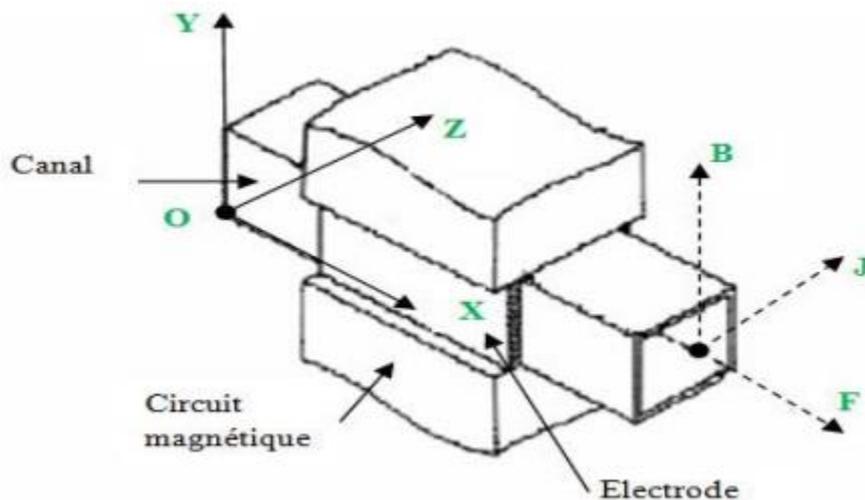
**Fig. I.3** Générateur MHD à gaz ionisé

### I.3.1 Les convertisseurs MHD linéaires à conduction

#### I.3.1.1 Description et principe de fonctionnement

Les machines magnétohydrodynamiques linéaires à conduction sont constituées d'un canal dans lequel s'écoule un fluide électriquement conducteur à la vitesse  $V$ . L'interaction entre le champ magnétique  $B$  et le courant  $J$  injecté par les électrodes donne naissance à la force de LAPLACE  $\vec{F}$ , [9],[10].

Le schéma d'une machine à conduction est représenté ci-dessous :



**Fig. I.4** Schéma d'une machine MHD à Conduction

Les différentes parties de la machine à conduction sont :

- ✚ **Circuit magnétique** : est destiné à canaliser les lignes du champ magnétique. Pour qu'un circuit magnétique soit de bonne qualité il doit :
  - Avoir une faible réluctance magnétique afin de réduire les pertes et de minimiser les fuites.
  - Être constitué de matériaux possédant de bonnes qualités magnétiques à savoir:
    - Un bon coefficient de perméabilité.
    - Un cycle d'hystérésis étroit.
    - Une bonne résistivité.

Ces qualités permettent de limiter les pertes par hystérésis et par courant de Foucault qui sont fonction de l'induction magnétique.

- ✚ **Canal** : dans lequel s'écoule un fluide électriquement conducteur à la vitesse  $V$ .

- ✚ **Fluide** : c'est un métal liquide de très bonne conductivité électrique, parmi les Fluides les plus utilisés dans ces pompes on trouve.

**Tableau I.1** Les fluides les plus utilisés

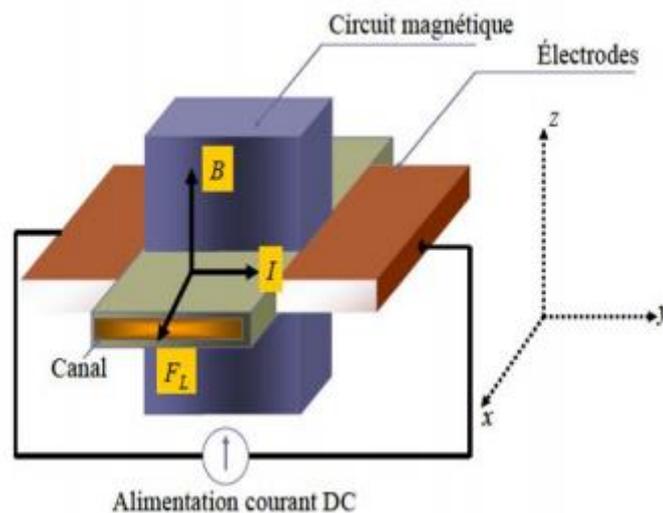
Elément	Conductivité électrique [S/m]
Le Mercure	$1.66 \cdot 10^6$
Mélange de Sodium et Potassium (NaK) (22%Na, 78%K)	$2.7 \cdot 10^6$
Eau mer	4 à 10

- ✚ **L'électrode** : une électrode peut être définie comme une partie de circuit électrique en contact avec un milieu à conduction non métallique et qui participe. souvent à l'effet désiré, comme dans notre cas l'électrode en contact avec le fluide conducteur, [3].

Il existe plusieurs formes de pompes à conduction ; on peut citer :

- Les pompes à conduction à courant continu;
- Les pompes à conduction à courant alternatif.

La différence entre ces deux types de pompes se situe au niveau de l'alimentation du bobinage qui peut être soit en courant continu ou bien en courant alternatif [2].



**Fig. I.5** Schéma d'une pompe MHD à conduction

### I.3.1.2 Classification des pompes MHD à conduction

#### I.3.1.2.1 Les Pompes MHD à conduction à courant continu

La pompe magnétohydrodynamique à conduction à courant continu (MHD DC) est le modèle le plus simple. Les courants dans le canal et dans le bobinage inducteur (cas d'un électroaimant) sont continus. Pour créer le champ magnétique, on peut aussi utiliser un aimant permanent. Le circuit magnétique peut être refermé par un barreau de fer pour éviter les fuites Magnétiques vers l'extérieur et obtenir une induction élevée, L'un des principaux avantages des pompes (MHD DC) reste la simplicité de leur géométrie. Leur coût de fabrication est relativement faible devant les autres types. En revanche, ce type de pompes présente plusieurs défauts. [4]

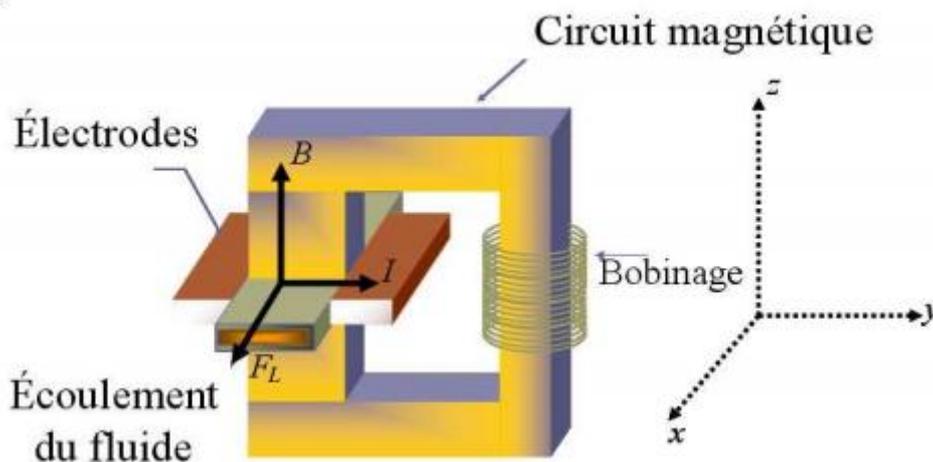
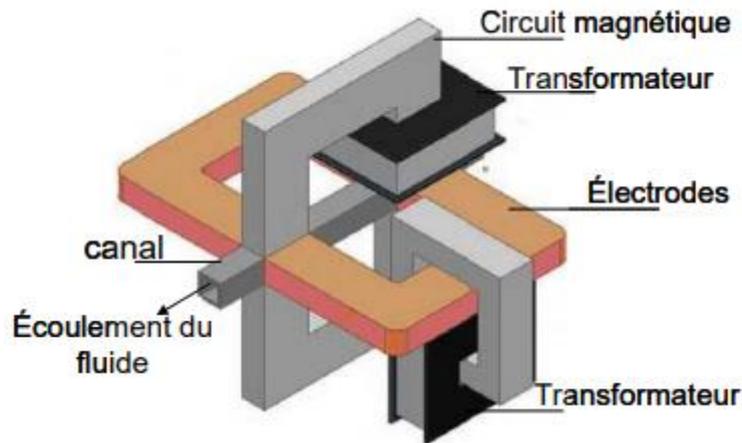


Fig. I.6 Pompe MHD à conduction à courant continu

#### I.3.1.2.2 Les Pompes MHD à Conduction à Courant Alternatif

Dans le cas des pompes magnétohydrodynamiques à courant alternatif (MHD AC), les courants dans le fluide et dans le bobinage sont sinusoïdaux. Le courant traversant le canal de pompage peut donc être fourni en sortie d'un transformateur et le champ magnétique par un électro-aimant figure (1.7) [6].



**Fig. 1.7** Schéma d'une machine MHD à conduction à courant alternatif

### I.3.2 Les convertisseurs MHD à induction

Une alternative de la pompe à conduction est la pompe à induction, où les courants électriques sont induits dans le métal liquide au moyen d'un champ magnétique, produisant une force avec le champ instantané pour assurer l'écoulement. Plusieurs types de pompes à induction sont possibles. Ici on s'intéresse à la pompe linéaire plate à induction et la pompe annulaire à induction, [16].

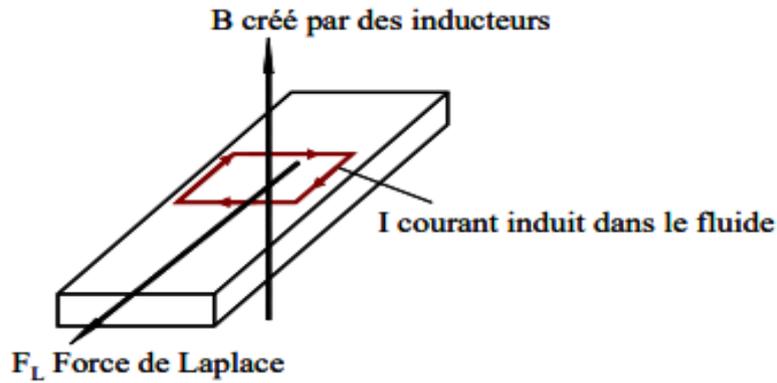
Les inconvénients typiques sont les pertes de puissance et le besoin d'isolation électrique haute températures.

❖ les différentes parties d'une pompe à induction sont:

**L'inducteur** : il est constitué d'un circuit magnétique créant un champ glissant grâce à un bobinage polyphasé ;

**L'induit** : il est constitué par le fluide conducteur ;

**L'entrefer** .



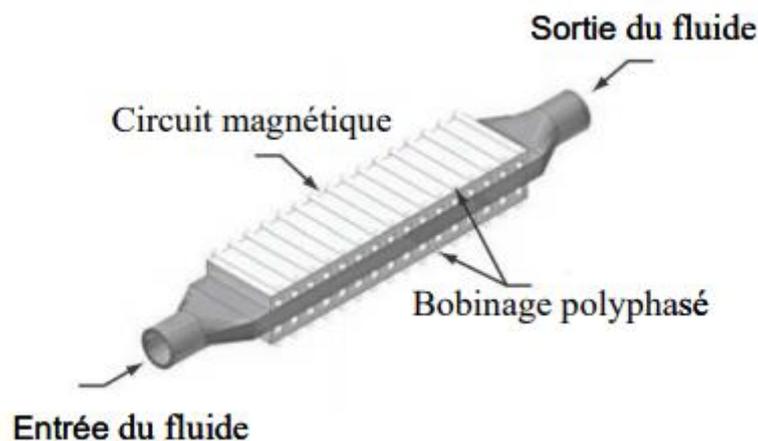
**Fig. I.8** Lignes de courant dans une pompe MHD à induction

### I.3.2.1 Différentes géométries des pompes à induction

Il existe plusieurs types de pompes à induction. Les plus utilisées dans l'industrie sont les pompes plates et les pompes annulaires. La différence entre ces types de pompes est leur géométrie, [4][6][8].

#### A Pompes plates

Elles ressemblent beaucoup au moteur linéaire ; La figure (1.9) montre le schéma d'une pompe MHD à induction plate. Le liquide circule dans un canal rectangulaire. Le refroidissement se fait par circulation forcée d'air dans les inducteurs [7].



**Fig. I.9** Pompe MHD à induction plate

## B Pompes annulaires

Le métal liquide circule dans l'espace annulaire entre deux parties magnétiques. La partie intérieure contient un noyau de fer doux et la partie extérieure contient en plus des bobines triphasées en forme de galettes circulaires. Les pompes annulaires sont plus performantes que les pompes plates car les courants induits sont toujours perpendiculaires à la direction de l'écoulement. Ainsi, la force de Laplace a partout la même direction que celle de l'écoulement. [4]

Le type annulaire est plus performant que le type rectangulaire car les courants induits sont toujours perpendiculaires à la direction de l'écoulement. Ainsi, la force de Laplace a partout la même direction que celle de l'écoulement. Par contre, dans le cas d'une machine de section rectangulaire, les courants induits se bouclent d'une façon moins favorable aux échanges d'énergie mécanique en énergie électrique et provoquent d'avantage des pertes Joule. Les avantages de ces pompes sont les suivants :

- Les courants électriques se referment dans la masse du fluide, ce qui rend inutile l'adhérence de celui-ci sur la paroi ;
- La forme est simple et l'encombrement économique ;
- Le démontage est facile, [2], [10].

Le principe de fonctionnement de ces pompes ne diffère pas des moteurs classiques. Le courant des enroulements primaires produit un champ magnétique de déplacement qui produit à son tour un courant induit dans le métal liquide. L'interaction entre le champ principal et le courant induit donne naissance à des forces appliquées au niveau du liquide [11].

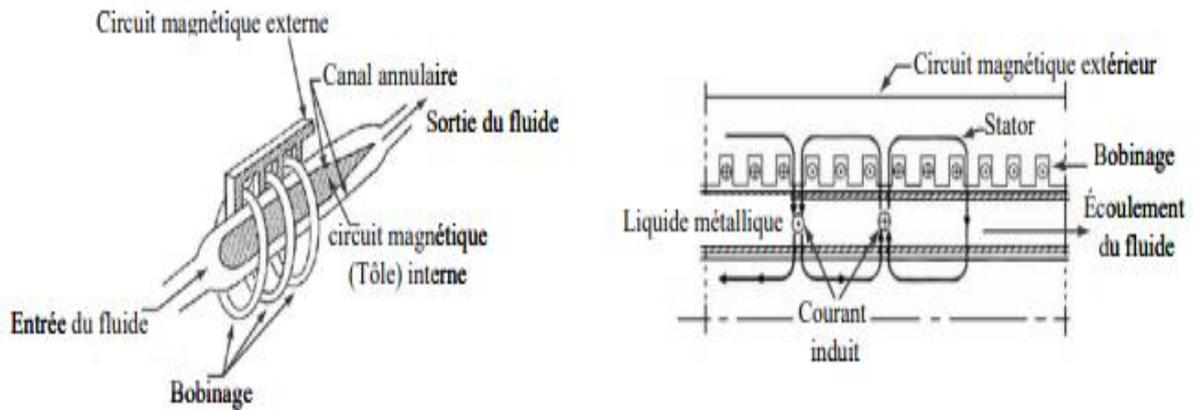


Fig. I.10 Pompe MHD à induction annulaire

### C Pompes Hélicoïdales

Dans ce type de pompes, le conduit annulaire est hélicoïdal au lieu d'être rectiligne. Les pertes supplémentaires dues à la composante azimutale de la vitesse et les difficultés de fabrication sont prohibitives, [12].

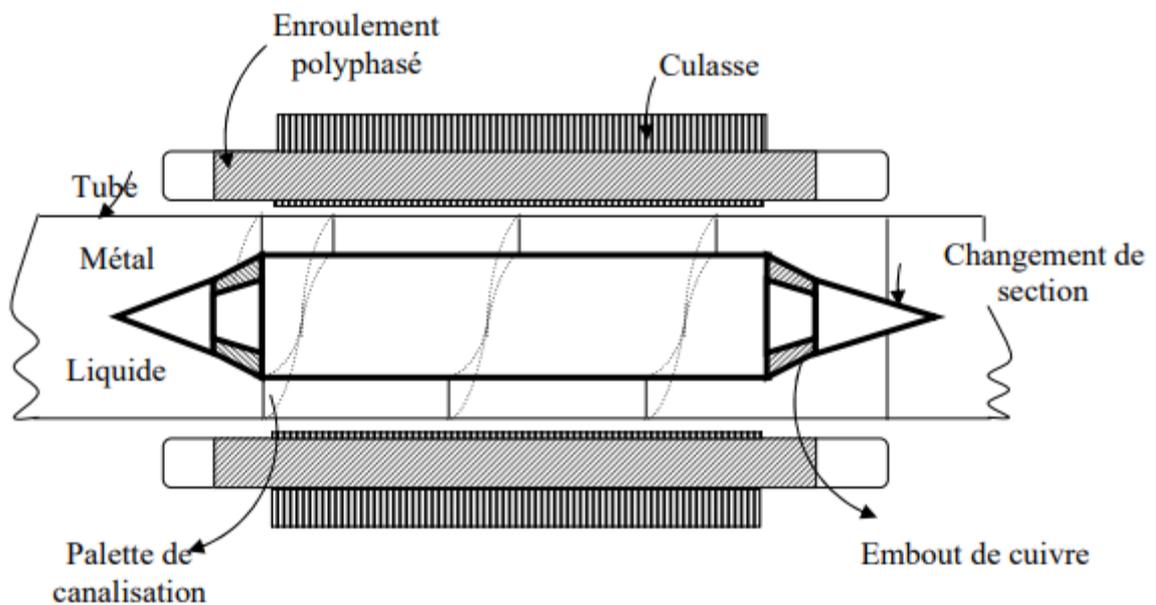


Fig. I.11 Schéma d'une pompe MHD hélicoïdale

### I.3.3 Comparaison entre les pompes MHD à conduction et à induction

La description des pompes de façon générale, montre que chaque type de pompes présente ses propres avantages et des inconvénients.

- Les pompes linéaires à induction sont plus simples moins coûteuses que celles à conduction et ceci est dû à l'absence d'électrodes et la facilité de travailler à des niveaux de tensions conventionnelles. Par contre, elles possèdent un rendement de conversion d'énergie moins important à cause de l'appel de courant réactif pour la magnétisation du circuit en présence d'un entrefer important [13].
- Généralement les pompes à induction sont utilisées pour les métaux liquides à grande conductivité et les pompes à conduction pour les petites conductivités.
- La présence des électrodes dans les machines à conduction est un inconvénient par rapport aux machines à induction, elles subissent une érosion au contact avec le fluide dont la température est généralement élevée.[6]

### I.3.4 Applications industrielles de la magnétohydrodynamique

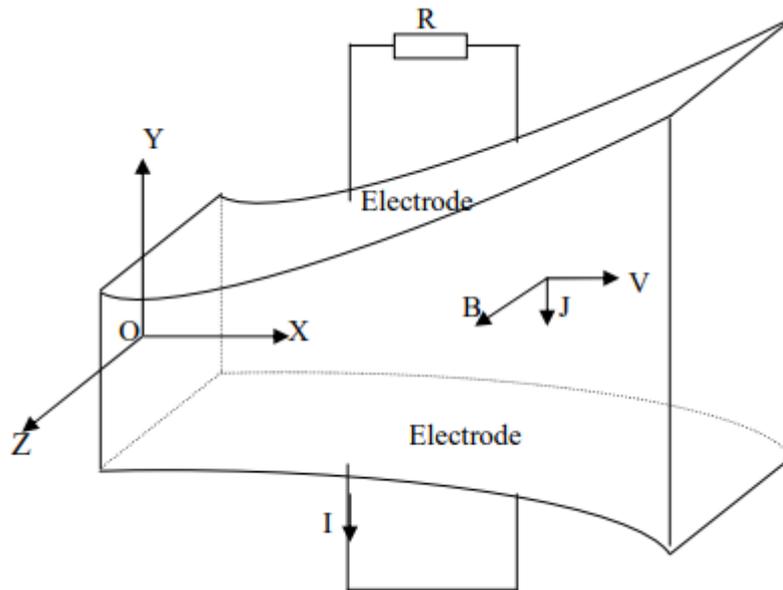
#### I.3.4.1 Génération d'électricité

Dans ce processus, l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique, on peut considérer que le système le plus simple est celui du convertisseur à conduction.

Il est constitué d'un organe essentiel qui est le canal placé dans l'entrefer d'un aimant dans lequel s'écoule un métal liquide qui traverse une induction magnétique  $\vec{B}$  qui induit un courant  $\vec{J}$  collecté par des électrodes en contact avec le fluide.

L'électricité peut être générée avec un système à cycle ouvert ou fermé c'est à dire le fluide est recyclé.

Ce dernier est plus utilisé dans le cas des métaux liquides pour les vaisseaux spatiaux. [9]



**Fig. I.12** Schéma d'une tuyère MHD

Il existe plusieurs types de générateurs MHD suivant la forme et le fluide utilisés.

- Machines circulaires à plasma.
- Générateur à métaux liquides.
- Générateur à induction.

### I.3.4.2 Propulseurs MHD

- Propulseurs à plasma.
- Propulsion MHD navale.

### I.3.4.3 Applications de la magnétohydrodynamique à la métallurgie

Dans ce cas, les forces magnétiques doivent être suffisantes (proportionnelles à la conductivité) pour mettre le métal liquide en mouvement (brassage), le maintenir en sustentation (lévitation), le façonner (formage), le pulvériser (pulvérisation). Le champ magnétique fluctuant agit sur le fluide par l'intermédiaire de la force de Laplace  $J \wedge B$  en fonction de l'application désirée, [2]

#### 1) Brassage

Les brasseurs électromagnétiques, tout comme les pompes électromagnétiques, ont la particularité de ne pas posséder de parties mobiles. Par brassage, ils entraînent l'élimination

de bulles, d'impuretés et aussi l'accélération du mélange (par turbulence) lors de réactions métallurgiques (fabrication d'alliages).

## **2) Lévitiation**

Les procédés de lévitation utilisés par la MHD permettent de résoudre trois problèmes à la fois :

a) L'absence de contact entre la charge et le creuset évite la contamination du métal par la paroi ;

b) L'échauffement de la charge par effet Joule peut en causer la fusion ;

c) Le brassage interne du fluide formé produit un mélange efficace des constituants (alliages).

## **3) Formage**

Le formage électromagnétique consiste à façonner des masses métalliques en lévitation magnétique par l'action de champs magnétiques qui modèlent la surface libre désirée. Cette technique a l'avantage d'éviter le chauffage et le reformage après solidification.

## **4) Pulvérisation**

La technique électromagnétique permet la fabrication de poudres et grenailles de tailles moyennes ( $\approx 100\mu\text{m}$ ) avec un débit massique élevé. De plus, l'ajustement de la granulométrie est facile et automatique.

Le freinage des métaux peut être aussi assurée par des convertisseurs linéaires à induction appelés vannes électromagnétiques ou robinets électromagnétiques. Il en est de même pour la mesure des vitesses d'écoulement qui peut être effectuée à l'aide des débitmètres électromagnétiques, [13].

## **5) Magnétohydrodynamique des fours à induction**

Les fours à induction se composent essentiellement d'une bobine inductrice refroidie par circulation d'eau, entourant un creuset dans lequel se trouve la masse métallique à fondre et à traiter.

L'utilisation des champs magnétiques alternatifs dans les fours à induction s'est considérablement développée ces dernières années dans les domaines de l'élaboration et le traitement des métaux. En effet ce type de champ magnétique offre la possibilité d'agir à distance et de façon contrôlée sur un fluide électro conducteur [9].

### **I.3.5 Application biomedical**

La MHD a permis de développer une technique nouvelle permettant de bouger des espèces ioniques en présence à la fois de champs magnétique et électrique. Les micros pompes MHD contrôlent le flux à l'intérieur du système micro fluide en générant une différence de pression le long du micro canal, proportionnelle à l'intensité du courant électrique et au champ magnétique. Pomper des solutions électrolytiques avec la MHD implique la génération de courants continus (DC) dans tels environnements,[14].

### **I.3.6 Application astrophysique et géophysique**

La circulation induite par des mouvements convectifs radiaux créés dans le noyau est à l'origine du magnétisme terrestre ; on a en effet couplage entre le champ magnétique créé par le mouvement du fluide conducteur et l'entraînement de ce fluide par lui-même (effet dynamo).

Depuis que cela a été vérifié, le mécanisme d'une instabilité dynamo dite " l'effet dynamo fluide" est couramment admis pour expliquer la présence de champ magnétique sur Terre. [15] Donc l'étude des mouvements du plasma magnétisé de la couronne solaire est assurée par la MHD.

## **I.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté une description générale des convertisseurs MHD ainsi que leur principe de fonctionnement.

Les formulations mathématiques du phénomène électromagnétique font l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre II

Modélisation des phénomènes  
électromagnétiques des  
convertisseurs MHD

## II.1 Introduction

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques classiques sont régis par les équations aux dérivées partielles de Maxwell [17].

Les équations de la physique fondamentale qui régissent un tel domaine sont appelées équations de Maxwell. Elles sont constituées pour un ensemble des équations différentielles linéaires, appliqués à un certain nombre de grandeurs physiques appelées électromagnétiques [18].

Ce chapitre est l'objet de formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques. Il consiste à déterminer les équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution des phénomènes physiques.

## II.2 Analyse des Phénomènes Électromagnétiques

L'effet du champ électrique ou magnétique (ou de leur combinaison) détermine le fonctionnement des machines tournantes, des pompes et des transformateurs. En effet, on peut déduire du champ magnétique les valeurs des flux, des forces électromotrices (dans les générateurs), des couples d'entraînement (dans les moteurs) et des forces d'évacuation du fluide dans les pompes [19].

L'objet fondamental de l'électromagnétisme est de décrire les interactions qui s'exercent à l'intérieur d'un système de particules chargées [18].

## II.3 Equations électromagnétiques

### II.3.1 Les equations de Maxwell

Quatre grandeurs vectorielles caractérisent le champ électromagnétique. Ces grandeurs, qui dépendent de l'espace et du temps sont le champ électrique  $\vec{E}$ , le champ magnétique  $\vec{H}$ , l'induction magnétique  $\vec{B}$  et l'induction électrique  $\vec{D}$ . c'est grâce à Maxwell qu'aujourd'hui nous pouvons modéliser les phénomènes électromagnétiques en se basant sur les quatre équations suivantes [8] :

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{Loi d'Ampere -Maxwell} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 & \text{Loi de conservation du flux} \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Loi de FARADAY} \\ \text{div}(\vec{D}) = \rho & \text{Loi de GAUSS} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

### II.3.1.1 Lois de couplage électromagnétique

- **Loi d'induction de Faraday**

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

L'équation exprime le couplage électrique- magnétique en régime dynamique où la variation temporelle de  $\vec{B}$  détermine le  $\text{Rot} \vec{E}$  .

Le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers une surface S s'appuyant sur un conducteur fermé est donné par la relation :

$$\Phi = \iint_s \vec{B} ds \quad (2.3)$$

Où :

S est la section droite.

- **Théorème d'Ampère.**

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Cette équation montre que les champs magnétiques sont produits à la fois par les courants de conduction et par des champs électriques variables  $[\partial D / \partial t]$  ; elle établit la relation entre les champs électriques, champs magnétiques et les courants électriques,[20].

Dans un matériau purement conducteur, la permittivité électrique est faible. Il est donc possible de négliger les courants de déplacement dans l'équation, et elle se ramène à :

$$\vec{Rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (2.5)$$

### II.3.1.2 Les équations de conservation

- **Divergence de l'induction magnétique**

$$\text{Div}\vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

Cette relation traduit mathématiquement que les sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique ; c'est pourquoi les lignes du champ se ferment sur elles-mêmes. Elles forment des boucles, ces dernières n'ont ni point de départ, ni point d'arriver, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative[20], [21].

- **Théorème de Gauss.**

$$\text{Div}\vec{D} = \rho \quad (2.7)$$

Une charge électrique est une source d'un champ électrique, autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques.

### II.3.1.3 Lois de comportement des milieux des matériaux

- **Induction et champ électrique.**

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Cette équation décrit la relation entre le vecteur d'induction électrique  $\vec{D}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  dans un milieu isotope, de permittivité  $\varepsilon$ .

- **Induction et champ magnétique.**

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r$$

Cette équation décrit la relation entre le vecteur d'induction magnétique  $\vec{B}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  dans un milieu isotope, de perméabilité  $\mu$  .et l'induction rémanente  $\vec{B}_r$ .

La relation entre l'induction magnétique  $\vec{B}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  peut être non linéaire, ainsi que la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  .[20],[22].

A les équations de maxwell, on ajoute les équations de comportement du milieu :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (2.8)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.9)$$

Et d'autre part la loi d'Ohm généralisée :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{g} \wedge \vec{B}) + \vec{J}_{ex} \quad (2.10)$$

Le terme  $\sigma \vec{E}$  exprime la densité des courants résultants du champ électrique  $\vec{E}$  (imposé ou induit) et le terme  $\sigma(\vec{g} \wedge \vec{B})$  exprime la densité des courants résultants du mouvement, [23],[24].

Aux interfaces, entre deux milieux de propriétés différentes, les champs de vecteurs doivent vérifier les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = 0 \\ (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \vec{n} = 0 \\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = K \\ (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \end{array} \right. \quad (2.11)$$

En notant  $\vec{n}$  la normale à l'interface séparant les deux milieux.  $K$  et  $\rho_s$  sont respectivement les densités de courant et de charge électrique portées par la surface de séparation.

Ces conditions expriment que les composantes tangentielles du champ électrique et la normale de l'induction magnétique et la normale de l'induction électrique sont discontinues par la présence respective du courant superficielle, [25].

## II.4 Les modèles électromagnétiques

On cite :

- Modèle électrostatique
- Modèle électrocinétique

- Modèle magnétostatique
- Modèle magnétodynamique

### II.4.1 Modèle électrostatique

Dans ce modèle, le champ  $\vec{E}$  est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en terme de répartition. Ce modèle est régi par les équations suivantes, [20], [23], [25] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Rot}\vec{E} = 0 \\ Div\vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Car  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

La relation :  $\vec{Rot}\vec{E} = 0$  permet de définir une fonction auxiliaire  $U$  appelée potentiel scalaire électrique, tel que :  $\vec{E} = -gradU$

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante :

$$Div(\varepsilon gradU) + \rho = 0 \quad (2.13)$$

### II.4.2 Modèle électrocinétique

Ce modèle est utilisé dans l'étude de la répartition du courant électrique de conduction dans des conducteurs isolés soumis à des différences de potentiel continues. Il est régi par les équations suivantes, [22], [24], et[25] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Rot}\vec{E} = 0 \\ Div\vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \sigma\vec{E} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

La relation:  $\vec{Rot}\vec{E} = 0$  montre qu'il existe encore un potentiel électrique scalaire  $U$  (tension électrique), tel que :  $\vec{E} = -gradU$

Le modèle se ramène alors à :

$$Div(\sigma \vec{grad}(U)) = 0 \quad (2.15)$$

### II.4.3 Modèle magnétostatique

Dans ce modèle, le terme  $\partial \vec{B} / \partial t$  est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps.

#### ❖ Modèle magnétostatique scalaire.

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. On obtient alors les relations :

$$\vec{Rot} \vec{H} = 0 \quad \text{Courants nuls}$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad \text{Conservation du champ}$$

Avec la loi du milieu,  $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r$ ,

$H$  : Dérive d'un potentiel scalaire magnétique  $\phi$ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :  $\vec{H} = \vec{grad}(\phi)$ , [20],[22]

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$Div(\mu \vec{grad}(\phi)) = Div \vec{B}_r \quad (2.16)$$

#### ❖ Modèle magnétostatique vectorielle

Dans ce modèle, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\vec{Ro} \vec{H} = \vec{J}$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad (2.17)$$

Avec la loi du milieu :  $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r$ ,

La relation (2.15), permet de définir une fonction vectoriel  $\vec{A}$  appelée potentiel vecteur magnétique,

tel que :  $\vec{B} = \vec{Rot} \vec{A}$

D'où le système d'équations :

$$\text{Rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{Rot}(\vec{A})\right) = \vec{J} + \text{Rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}_r\right) \quad (2.18)$$

$$\text{Div}\vec{A} = 0$$

#### II.4.4 Modèle magnétodynamique

Dans ce cas, les sources du courant sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électriques et magnétiques seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de Foucault).

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  joue un rôle primordial, car la connaissance de  $\vec{A}$  implique la connaissance de toutes les autres grandeurs physiques:

$$\vec{B} = \text{Rot}\vec{A} \quad (2.19)$$

En termes d'équations, on a :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Rot}\vec{H} = \vec{J} \\ \text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{B} = \text{Rot}\vec{A} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

A ces équations, on ajoute les lois caractéristiques du milieu

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

A partir de l'équation du flux magnétique, on définit le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  par l'équation suivante :

$$\vec{B} = \text{Rot}\vec{A}$$

Dans le cas général, il existe une infinité de vecteur  $\vec{A}$  pouvant satisfaire la relation  $\vec{B} = \vec{Rot}\vec{A}$ . En effet, puisque le rotationnel du gradient de toute fonction scalaire  $U$  est nul, donc, tout vecteur  $(\vec{A} + \vec{grad}U)$  satisfait la relation  $\vec{B} = \vec{Rot}\vec{A}$ , d'où la nécessité d'imposer une condition de Jauge afin d'assurer l'unicité de la solution. On propose d'utiliser la Jauge de Coulomb  $Div\vec{A} = 0$ .

L'équation qu'on va établir s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels il y a présence de courants induits provenant de la variation des champs dans le temps,[22], [24].

En remplaçant  $\vec{B}$  par  $\vec{Rot}(\vec{A})$ , l'équation  $\vec{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  devient :

$$\vec{Rot}(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad (2.21)$$

A partir de cette relation, on peut définir un potentiel scalaire électrique  $U$  tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{grad}U$$

$$\vec{J} = \vec{J}_{ex} + \sigma\vec{E}$$

La combinaison des équations (2.18) et (2.19) donne:

$$\sigma\vec{E} = \vec{J} - \vec{J}_{ex} = \sigma(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{grad}U) \quad (2.22)$$

D'où

$$\vec{J} = -\sigma(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{grad}U) + \vec{J}_{ex} \quad (2.23)$$

$$\vec{Rot}(\frac{1}{\mu}\vec{B}) = \vec{J}$$

De ces équations on aboutit :

$$\vec{Rot}(\frac{1}{\mu}\vec{Rot}\vec{A}) = \vec{J}_{ex} + \sigma\vec{E} + \sigma(\vec{V} \wedge \vec{Rot}A)$$

$$\vec{Rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{Rot} \vec{A}\right) = \vec{J}_{ex} + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{grad} U \right) + \sigma (\vec{V} \wedge \vec{Rot} \vec{A})$$

$$\vec{Rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{Rot} \vec{A}\right) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{grad} U \right) - \sigma (\vec{V} \wedge \vec{Rot} \vec{A}) = \vec{J}_{ex}$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ne peut pas être défini par la seule condition  $\vec{B} = \vec{Rot} \vec{A}$ , on doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles.

On ajoute alors la Jauge de Coulomb. On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{Rot} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{grad} U - \sigma (\vec{V} \wedge \vec{Rot} \vec{A}) = \vec{J}_{ex} \\ \text{Div} \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Les termes  $\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  et  $\sigma (\vec{V} \wedge \vec{Rot} \vec{A})$  représentent les densités des courants induits. Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques, tandis que le terme  $(-\sigma \vec{grad} U)$  décrit la densité du courant dépendante des conditions électriques imposées aux extrémités des conducteurs, [22], [23].

Dans le cas où le régime est statique, et  $U$  est considéré uniformément nulle, l'équation (2.24) devient :

$$\vec{Rot}(v \vec{Rot} \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{ex}$$

$$\text{Div} \vec{A} = 0$$

Où  $v = \frac{1}{\mu}$  désigne la réductivité magnétique

L'équation (2.20) prend différentes formes selon la région d'étude et les caractéristiques des différents milieux.

## II.5 Formulation électromagnétique du problème

On utilise le système d'équation de Maxwell (2.1), pour déterminer le modèle mathématique qui régit les phénomènes électromagnétiques, mais on ajoute certaines hypothèses simplificatrices qui sont :

- Dans le cadre de l'approximation quasi-statique, les courants de déplacements  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  sont négligés devant  $\vec{J}$  et  $\text{Rot} \vec{H}$ . Cette hypothèse est pleinement justifiée pour les faibles fréquences.
- Le terme  $\vec{J}$  regroupe les densités de courants d'excitation  $\vec{J}_{ex}$  et induites dans le canal  $\vec{J}_i$ . Donc, on peut écrire l'expression de  $\vec{J}$  de la façon suivante :
 
$$\vec{J} = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_i \quad (2.25)$$
- Les matériaux à utiliser sont à propriétés isotropes.

En tenant compte de ces simplifications, les équations de Maxwell se réduisent alors au système d'équations suivant :

$$\text{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.26)$$

$$\text{Rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (2.27)$$

$$\text{Div} \vec{B} = 0 \quad (2.28)$$

$$\text{Div} \vec{D} = 0 \quad (2.29)$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} U \quad (2.30)$$

$$\vec{J}_i = \sigma(\vec{E} + \vec{g} \wedge \vec{B}) \quad (2.31)$$

En utilisant le système d'équations ci dessus, on peut formuler complètement le problème électromagnétique. Il existe plusieurs formulations telles que : formulation en  $\vec{B}$  et formulation en  $\vec{A}$ , [11].

### II.5.1 Formulations en Potentiels vecteur magnétique

Le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  est exprimé par :

$$\vec{B} = \text{Rot} \vec{A} \quad (2.32)$$

Les équations précédentes peuvent être combinées de façon à obtenir l'équation vectorielle suivante

$$\text{Rot} \frac{1}{\mu} \text{Rot} \vec{A} + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - V \wedge \text{Rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_a \quad (2.32)$$

Après développement en coordonnées cartésiennes, dans le cas bidimensionnel (2D) où la densité de courant et le potentiel vecteur magnétique sont perpendiculaires à la section longitudinale de la pompe MHD à conduction, l'équation devient,[13] :

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} - V \frac{\partial A}{\partial x} \right) = J_{ex} + J_a \quad (2.33)$$

Avec  $A$  et  $J_{ex}$  sont les composantes suivant (OZ) des vecteurs  $A$  et  $J_{ex}$  .

La pompe est alimentée en courant continu, les champs varient également de façon continue, dans ces conditions, on travail on régime statique où :  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$  , alors l'équation devienne :

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) - \sigma V \frac{\partial A}{\partial x} = J_{ex} + J_a \quad (2.34)$$

Pour résoudre ce système et assurer l'unicité de  $\vec{A}$  , on rajoute généralement la condition de Jauge de Coulomb :  $\text{Div} \vec{A} = 0$  . Cette hypothèse est naturellement vérifiée dans la configuration bidimensionnelle (2D).

## II.5.2 Formulation en induction magnétique

On utilise les équations de Maxwell comme précédemment en tenant compte de l'équation de conservation de la charge électrique, en considérant le rotationnel de l'équation (2.27) et en remplaçant la loi d'Ohm (2.31) on obtient :

$$\text{Rot}(\text{Rot} \vec{B}) = \text{Rot} \mu \sigma (\vec{E} + \vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{B}) \quad (2.35)$$

Et avec la loi de Maxwell Faraday, on obtient :

$$\vec{Rot}(\vec{Rot}\vec{B}) = \mu\sigma\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{Rot}(\vec{g} \wedge \vec{B})\right) \quad (2.36)$$

## II.6 Méthodes de discrétisation

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution du système d'équations différentielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la détermination des champs électromagnétiques.

### II.6.1 Méthodes des différences finies (MDF)

La MDF est basée sur la discrétisation du domaine d'étude et le développement limité en série de Taylor de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage. Ainsi, l'équation différentielle est transformée en équation algébrique en chacun des nœuds. L'écriture de cette transformation pour tous les nœuds du maillage conduit à un système algébrique dont la solution permet d'obtenir la distribution de l'inconnue dans le domaine d'étude. Cette méthode s'adapte mal aux objets de géométries complexes à cause de la rigidité du maillage. D'autre part, la mise en compte des conditions de symétrie, de passage d'un milieu physique à un autre (fer, air, etc,..) et des non linéarités (saturation) nécessite un traitement spécifique, [13],[22], [26].

### II.6.2 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis (MEF) est utilisée pour la résolution des équations différentielles dans le domaine des sciences des ingénieurs.

Le principe de la méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en régions élémentaires (éléments finis) et à représenter l'inconnue par une approximation polynomiale dans chacune de ces régions, ensuite, l'erreur due à l'approximation doit être minimisée.

La MEF est une méthode très puissante pour la résolution des équations différentielles surtout dans les géométries complexes. Sa mise en œuvre par contre, est assez compliquée et demande une place mémoire assez importante,[28],[29], [30], et [31]

### **II.6.3 Méthode des intégrales de frontières (MIF)**

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine.

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème d'Ostrogorski - Green. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure 3D ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude, [32], [22], [27], et [33].

Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

### **II.6.4 Méthode des volumes finis (MVF)**

La MVF est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en mécanique des fluides où elle est apparue il y a une vingtaine d'années. Depuis, cette méthode a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation dans d'autres branches de l'ingénierie scientifique : l'électromagnétisme, thermique, ... etc. L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis a permis de développer récemment les principes fondamentaux qui en font une méthode de discrétisation performante. L'idée de base de la formulation des volumes finis est facile à comprendre et permet de donner l'interprétation physique des phénomènes, [29],[ 34].

## **II.7 Conclusion**

Ce chapitre a été consacré aux formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques présents dans les dispositifs électrotechniques. Des modèles mathématiques ont été établis dans leurs formes générales.

La modélisation des phénomènes électromagnétiques des convertisseurs MHD par la méthode des éléments finis par le logiciel COMSOL sera étudiée dans le chapitre trois.

# **Chapitre III**

Modélisation des phénomènes  
électromagnétiques de la pompe  
MHD annulaire à induction avec  
COMSOL

### III.1 Introduction

Après avoir exposé les formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques dans les pompes MHD et les différentes méthodes de résolution du problème électromagnétiques, on va essayer dans ce chapitre de présenter les résultats de simulation du modèle élaboré à partir du logiciel COMSOL. Ce logiciel permet de simuler de nombreuses phénomènes physiques et applications en ingénierie, et tout particulièrement les phénomènes couplés ou simulation multi-physiques.

Dans ce chapitre, une étude magnétostatique des phénomènes électromagnétiques de la pompe annulaire par la méthode des éléments finis utilisant le logiciel COMSOL.

### III.2 COMSOL Multiphysiques

Le COMSOL est un outil utilisé pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP). Il a pour objectif :

- Multi physiques (généricité, couplage mécaniques des fluides, électromagnétisme, mécaniques des structures, thermique)
- Utilise la méthode des éléments finis (MEF)
- Nombre illimité d'interactions entre des différentes applications physiques
- Contient la plupart des équations à dérivé partielle
- Utilise une interface graphique
- peu de programmation
- le couplage avec une interface MATLAB est possible

### III.3 Représentation de la Géométrie de la Pompe

#### Magnétohydrodynamique

En raison de la symétrie axiale de la pompe, seule une représentation bidimensionnelle du système sera considérée. Ainsi le modèle géométrique adopté comprend trois régions surfaciques:

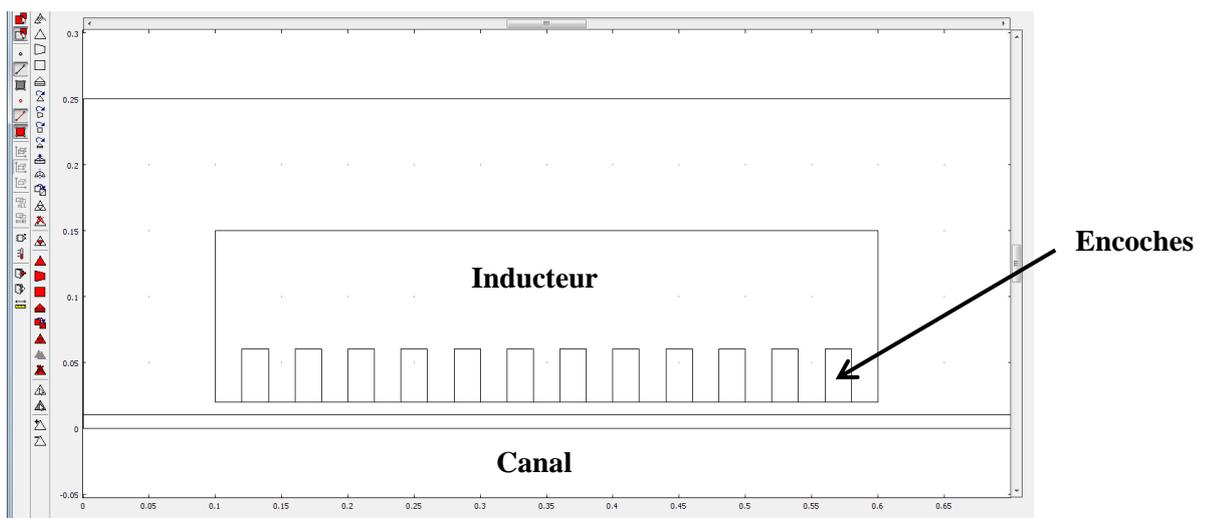
- L'inducteur ;
- Les bobines ;
- Le canal.

La pompe MHD annulaire à induction à 12 encoches dont les dimensions et les propriétés physiques sont données comme suit :

- Longueur de l'inducteur : 50cm
- Largeur de l'inducteur : 15cm
- Largeur du canal : 2cm
- Largeur de l'entrefer : 2mm
- Largeur des encoches : 2cm
- Profondeur des encoches : 4cm
- Largeur des dents : 2cm
- Nombre de pôles : 2
- Nombre de phases : 3
- Nombre d'encoches : 12

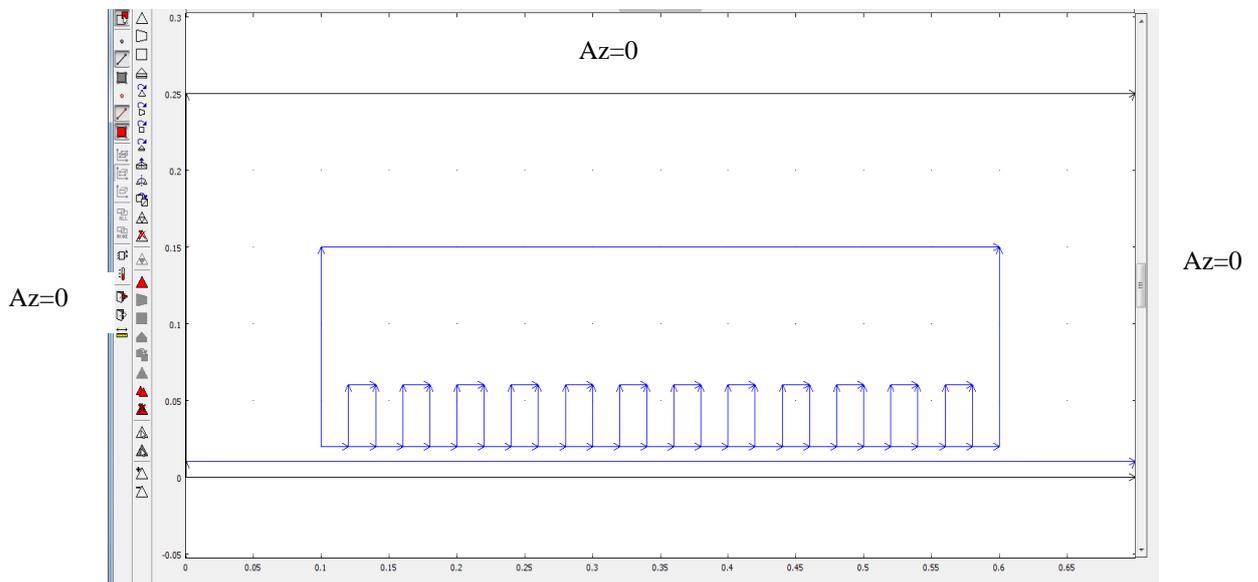
Les propriétés physiques du mercure :  $\mu_r$  (H/m)= 1.55) et  $\sigma$  ( $\Omega.m$ )<sup>-1</sup>=  $1=1.06 \cdot 10^6$ . La perméabilité du matériau ferromagnétique dans le cas linéaire est grande et le courant d'excitation nominal  $J_{ex}$  ( $A/m^2$ ) =  $6 \times 10^6$

La figure (III.1) représente la Géométrie de la pompe MHD annulaire.



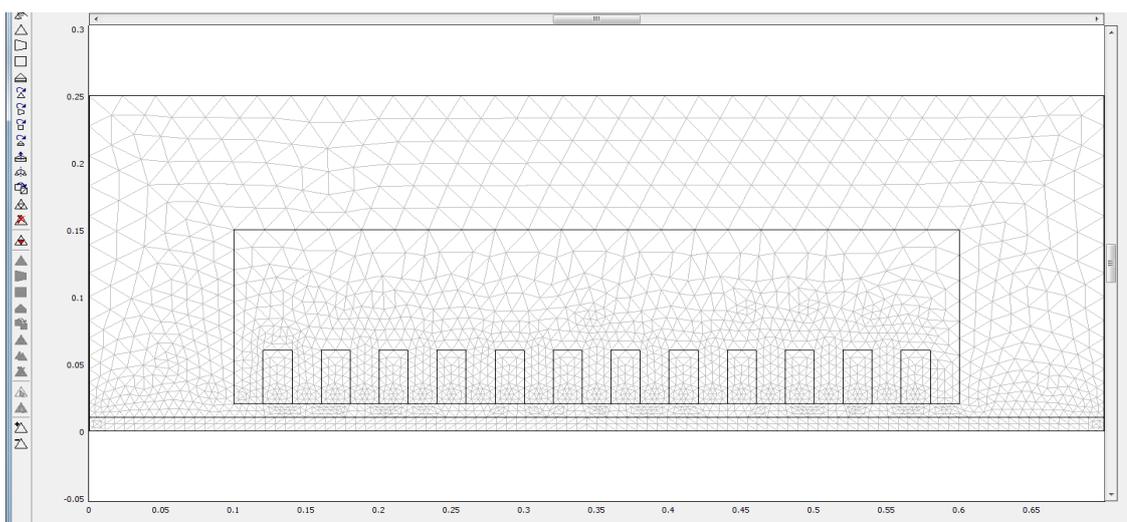
**Fig.III.1** Géométrie de la pompe MHD

La figure (III.2) représente la géométrie de la pompe MHD avec les conditions aux limites de type Dirichlet  $A_z=0$ .



**Fig.III.2** Géométrie de la pompe MHD avec les conditions aux limites

COMSOL permet également un maillage automatique d'une géométrie 2D prédéfinie. Le maillage du domaine analysé en triangles de différentes formes. On peut raffiner le maillage de n'importe quelle zone de la structure. La figure (III.3) représente Maillage de la géométrie



**Fig.III.3** Maillage de la géométrie

### III.4 Résultats de simulation par COMSOL

Les résultats issus de COMSOL sont exploités pour représenter l'allure du potentiel vecteur magnétique (fig.III.4), (fig.III.5) et la répartition de l'induction magnétique  $B_r$ , dans la section longitudinale de la pompe MHD annulaire à induction, (fig.III.6), (fig.III.7), et (fig.III.8), alimentée en courant de densité  $J=6 \times 10^6 \text{ A/m}^2$

#### III.4.1 Distribution du potentiel vecteur $\vec{A}$

Les figures (III.4) et (III.5) représente la distribution du potentiel vecteur  $\vec{A}$  dans la pompe MHD.

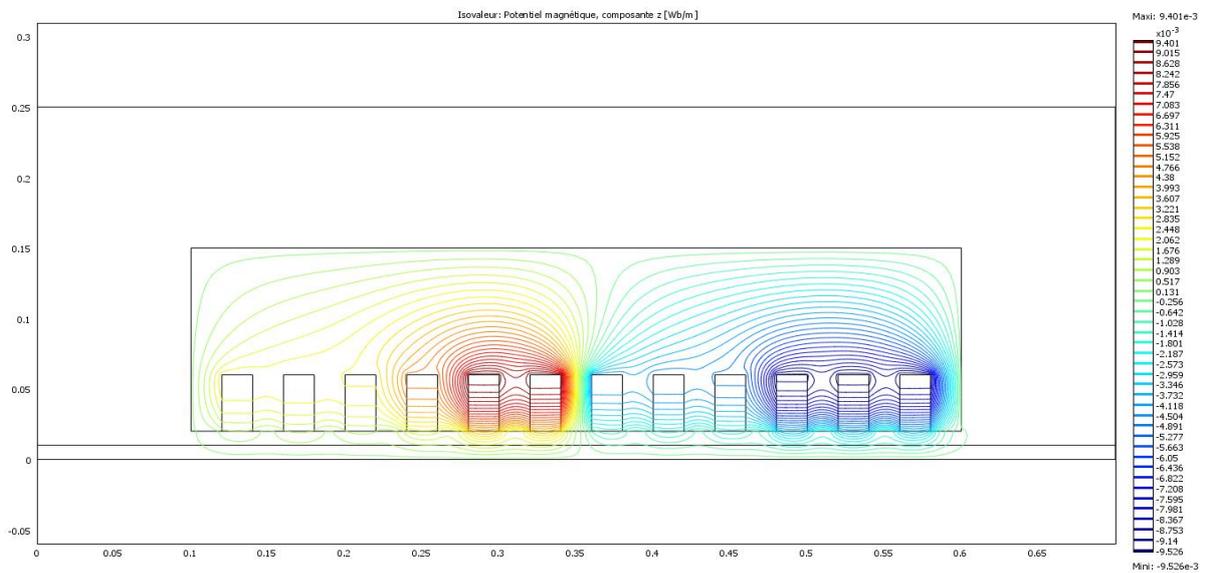


Fig.III.4 Potentiel vecteur dans la pompe MHD

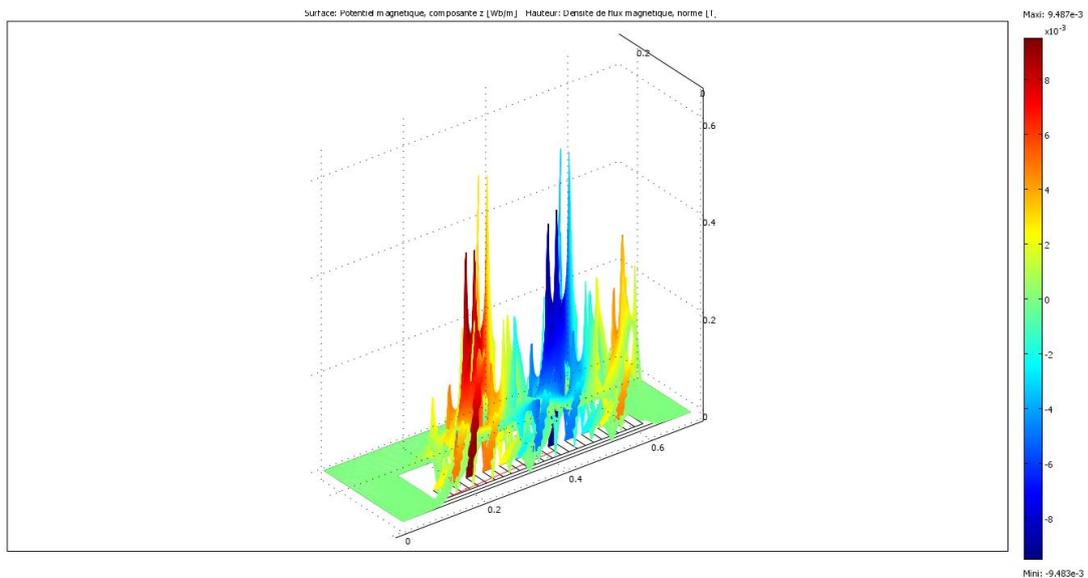


Fig.III.5 Potentiel vecteur A dans la pompe MHD

Le potentiel vecteur  $A$  atteint sa valeur limite au niveau de l'inducteur et diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne du domaine.

### III.4.2 Distribution de l'induction magnétique $B$

Les figures (III.6), (III.7) et (III.8) présentent la distribution de l'induction magnétique dans la pompe MHD annulaire simulée par COMSOL

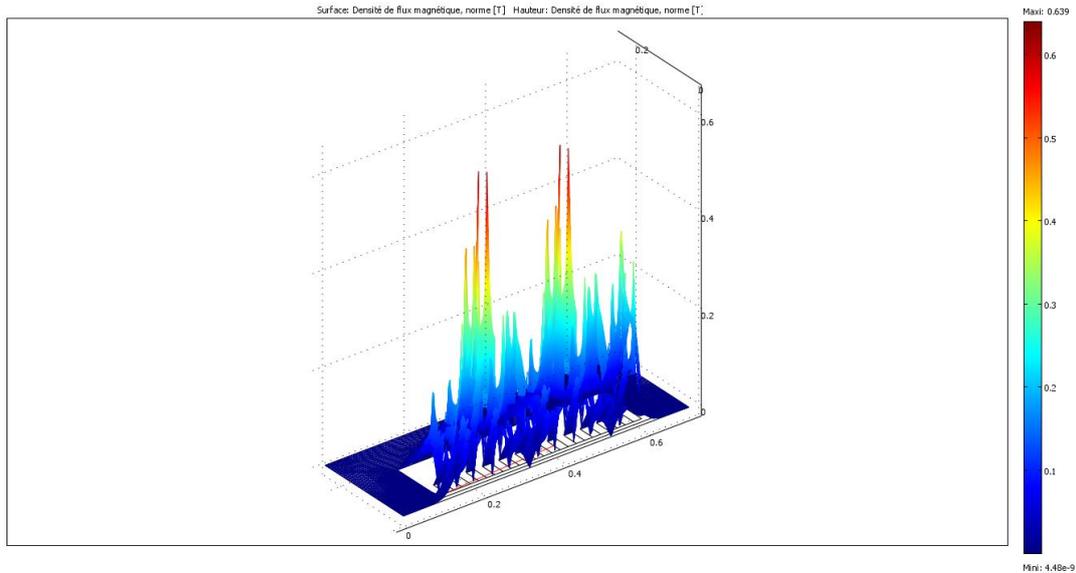


Fig.III.6 Induction  $B$  dans la pompe MHD

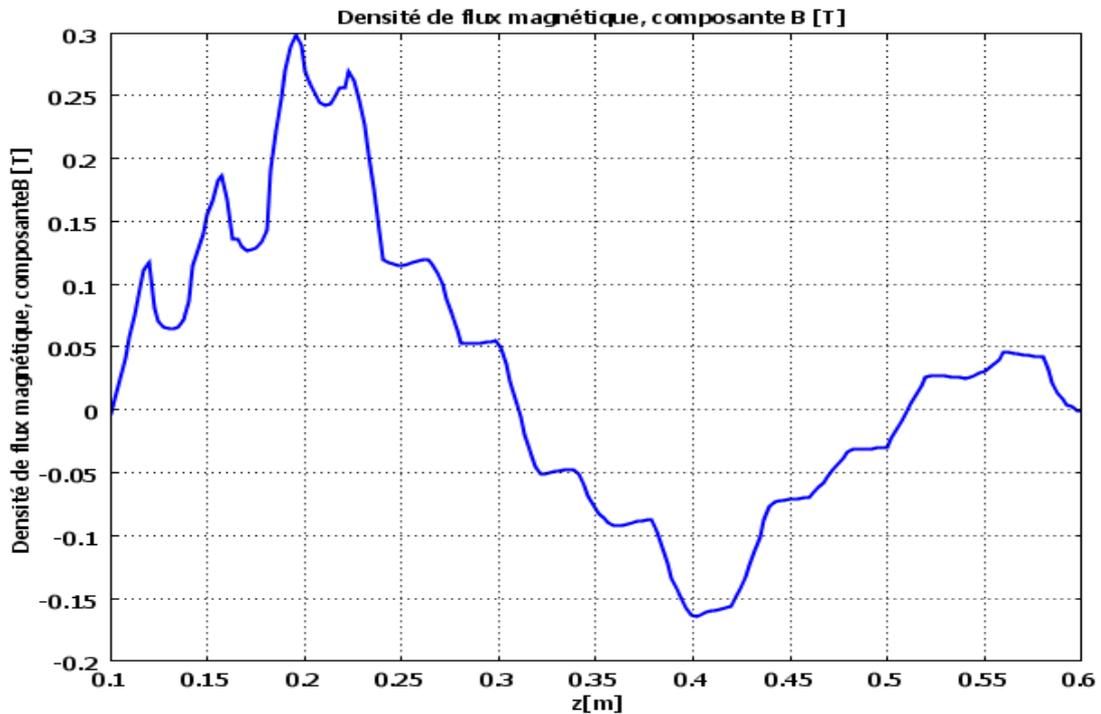


Fig.III.7 Induction  $B$  dans la pompe MHD

L'induction magnétique  $\vec{B}$  atteint sa valeur limite au niveau de l'inducteur et diminue quand on s'éloigne du domaine.

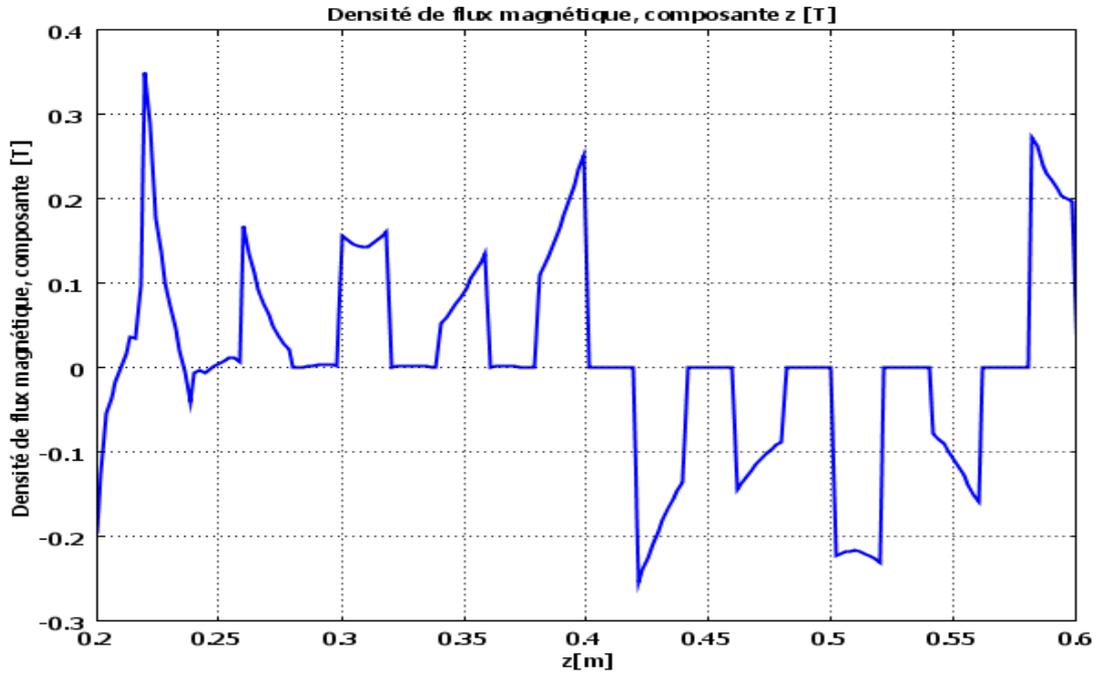


Fig.III.8 Induction B dans la pompe MHD

### III.4.3 Représentation de la force électromagnétique

Les figures (III.9) et (III.10) présentent la distribution de force électromagnétique dans la pompe MHD annulaire simulée par COMSOL dans le canal

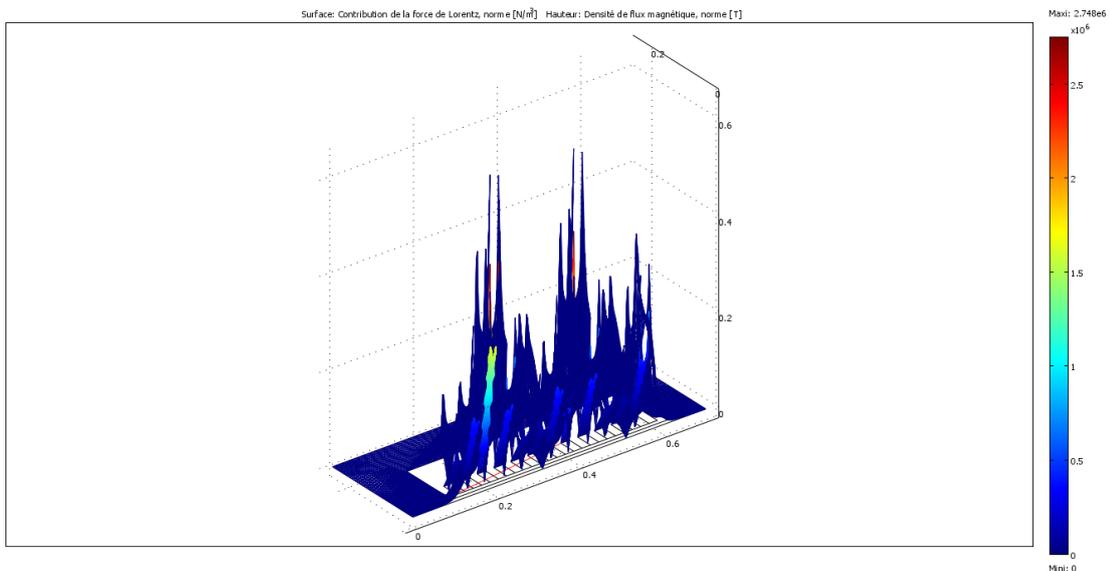
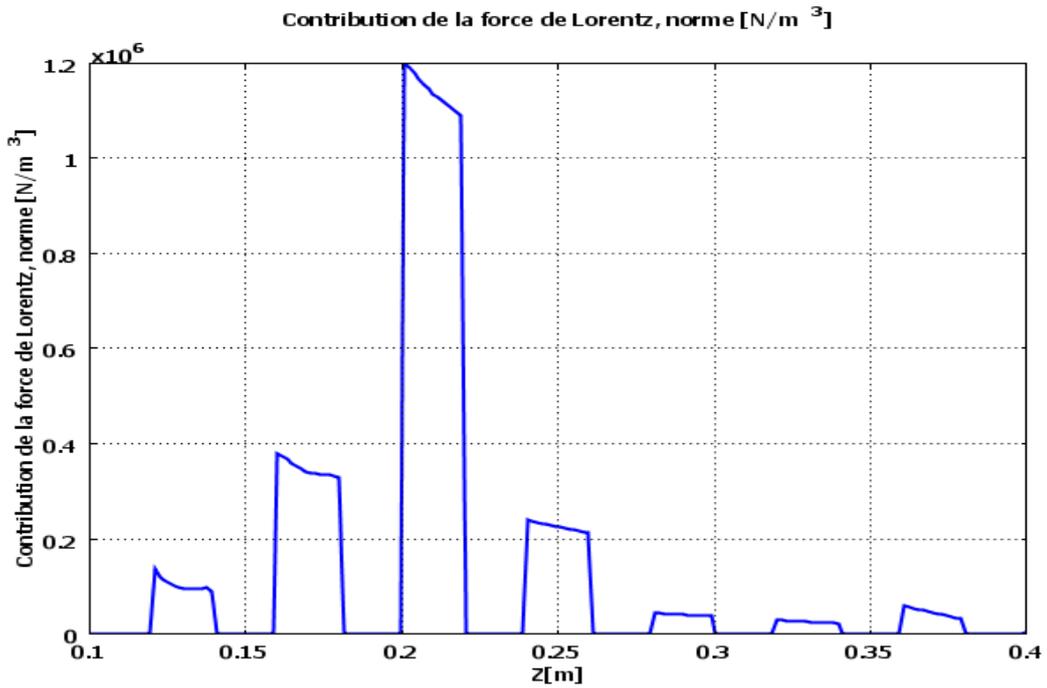


Fig.III.9 Force électromagnétique dans le canal

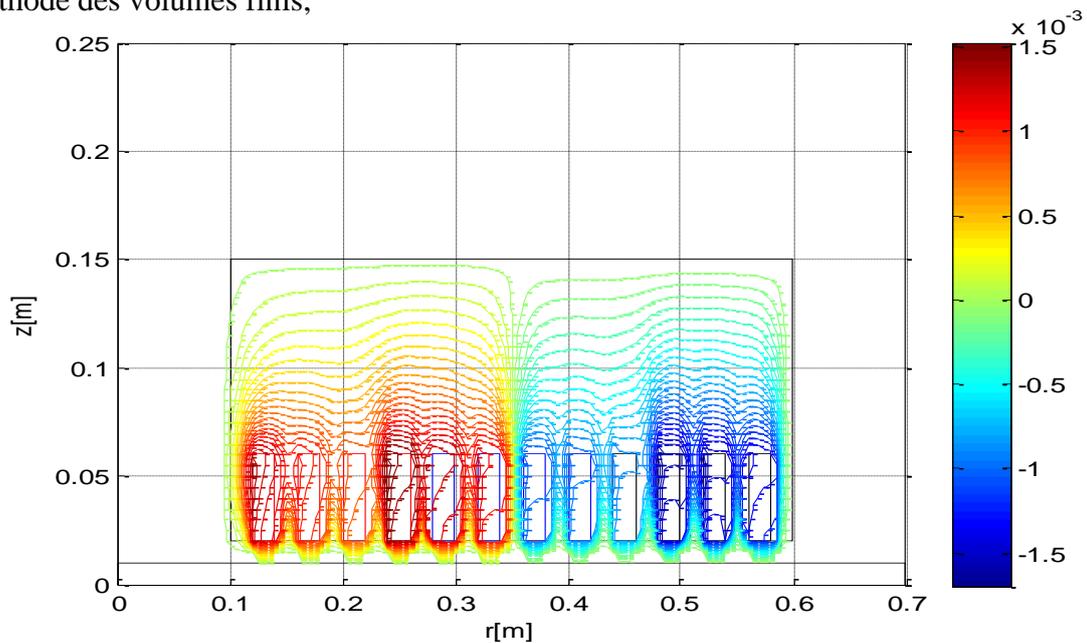


**Fig.III.10** Force électromagnétique (norme) dans le canal

On voit bien que, la force électromagnétique atteint son maximum au milieu du canal par contre elle est faible quand on s'éloigne de ce dernier.

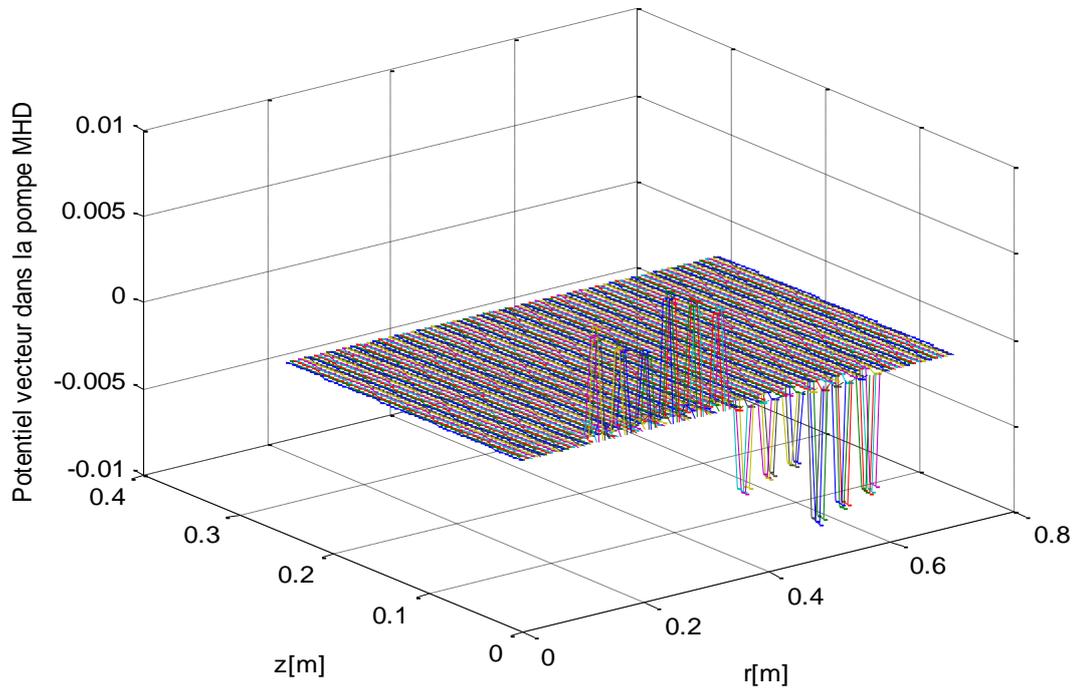
### III.5 Validation des résultats avec la méthode des volumes finis

La figure (III.11) représente Potentiel vecteur dans la pompe MHD obtenus par la méthode des volumes finis,



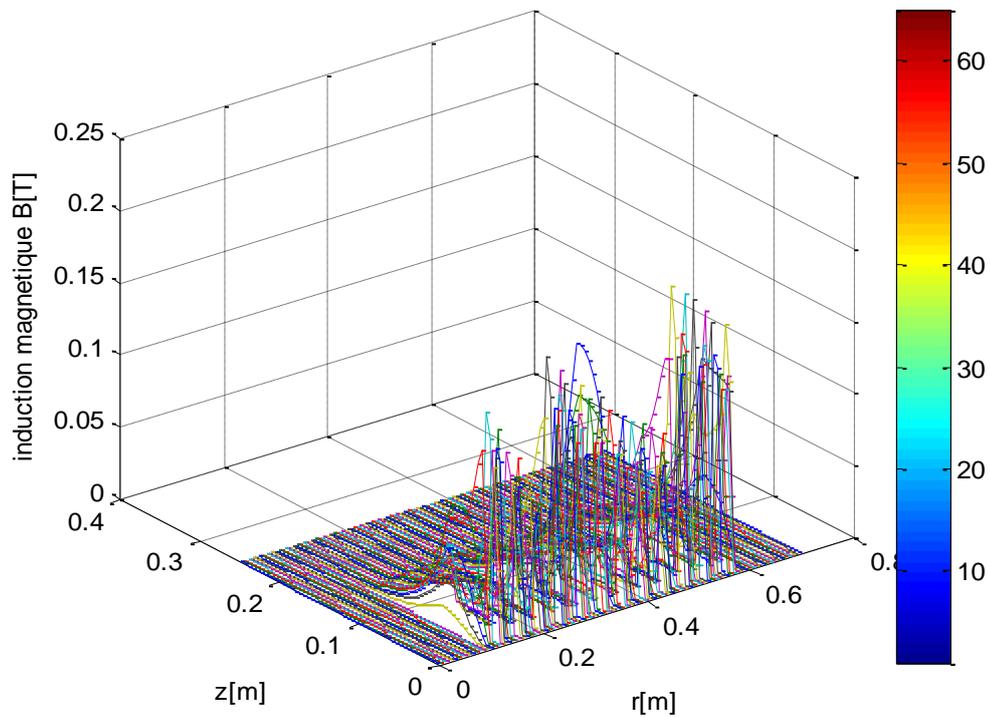
**Fig.III.11** Potentiel vecteur dans la pompe MHD

La figure (III.12) représente Potentiel vecteur dans la pompe MHD avec MVF en 3D



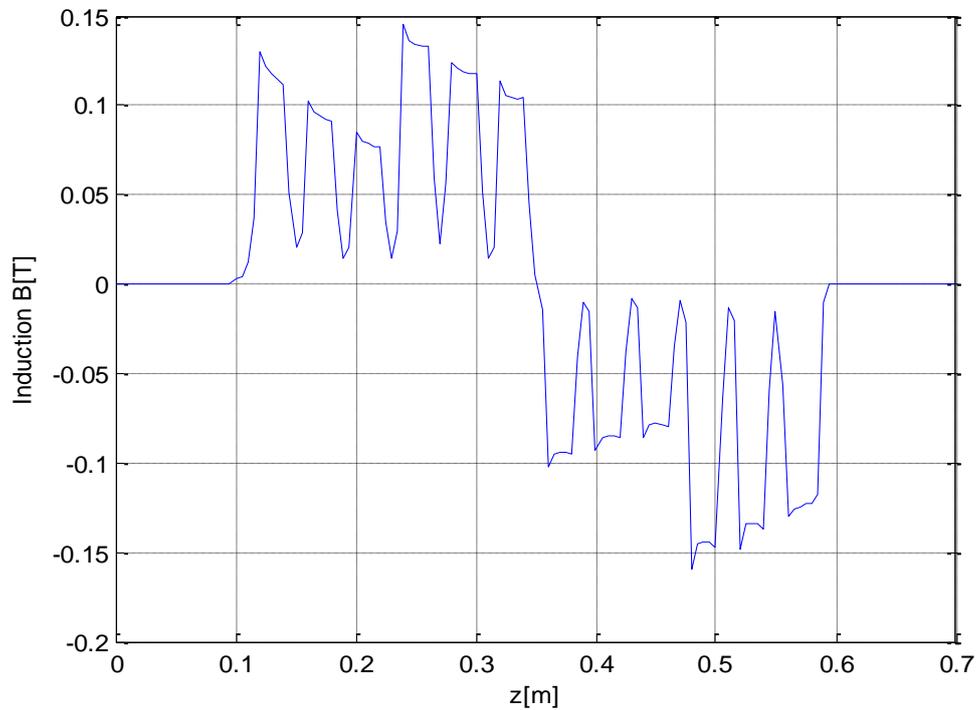
**Fig.III.12** Potentiel vecteur dans la pompe MHD

La figure (III.13) représente Induction magnétique dans la pompe MHD avec MVF en 3D



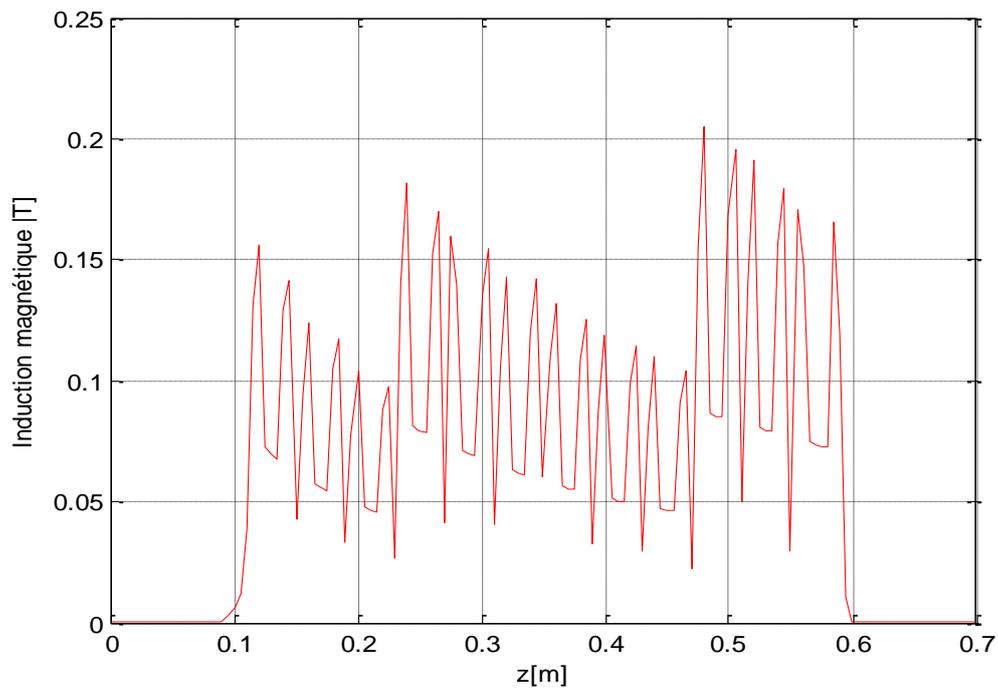
**Fig.III.13** Induction magnétique dans la pompe

La figure (III.14) représente l'induction magnétique  $B_z$  dans la pompe MHD avec MVF en 2D



**Fig.III.14** Induction magnétique dans la pompe

La figure (III.15) la norme de l'induction magnétique dans la pompe



**Fig.III.15** Induction magnétique norme dans la pompe MHD

La comparaison entre les résultats obtenus par COMSOL et MVF (potentiel vecteur magnétique l'induction magnétique  $B$ ), pour la même géométrie et différents maillages montre une grande similitude.

### **III.6 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus par l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes électromagnétiques dans la pompe MHD simulé par le logiciel COMSOL. Ces résultats sont validés en les comparants à ceux obtenus par MVF.

# Conclusion Générale

### Conclusion Générale

La magnétohydrodynamique (MHD) est un domaine très vaste de la physique qui concerne l'interaction entre un champ électromagnétique et un fluide conducteur de l'électricité. Ainsi, on conçoit aisément que, suivant le type d'interaction, on peut trouver la MHD liée aux problèmes apparemment disjoints de la couronne solaire, de la magnétosphère, de la conversion d'énergie fossile en énergie électrique, de la fusion thermonucléaire de la propulsion ou encore aux techniques industrielles de la métallurgie.

Dans le présent travail, nous avons traité la modélisation des phénomènes électromagnétiques dans la pompe MHD à induction à douze encoches par une méthode numérique. Le choix des méthodes utilisées s'est effectué en fonction des caractéristiques principales des phénomènes physiques. Nous avons ainsi retenu la méthode des éléments finis en utilisant COMSOL et la validation des résultats avec la méthode de volumes finis.

Le logiciel COMSOL a été utilisé pour simuler et valider les différentes caractéristiques électromagnétiques de la pompe annulaire. Les résultats de simulation (densité de flux magnétique, potentiel vecteur, force électromagnétique) ont été validés avec ceux obtenus par la méthode des volumes finis. L'étude comparative entre ces deux méthodes numériques montre une grande similitude.

#### **Suggestions et perspectives :**

Comme perspectives, on propose l'approche de certains points tels que:

- L'optimisation de la pompe MHD;
- Le couplage électromagnétique-hydrodynamique;
- Le couplage électromagnétique-thermique ;
- La modélisation électromagnétique en 3D

# Références bibliographiques

### Références bibliographiques

- [1] L. Leboucher, «Optimisation Des Convertisseurs MHD à Induction : Problème Inverse En Electromagnétisme », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique De Grenoble, Grenoble, France, 1992
- [2] R. Berton, «Magnétodynamique», Editions Masson, Paris, 1991
- [3] A. Faussurier, R.Servan, « Les matériaux électrotechniques », Edition Dunod, Paris 1971
- [4] M. Tawk, «Etude et réalisation d'un système de refroidissement pour l'électronique de puissance basé sur la mise en mouvement d'un fluide conducteur électrique » Thèse de doctorat, l'université de Grenoble, 2011
- [5] N. Bennecib, R.Abdesmed, S.Drid, « On the numerical analysis of a new seawater DC pump MHD» Al-Azhar University Engineering Journal JAUES,Vol.2,N°.4,Apr. 2007
- [6] L. Maddoui, « Etude et réalisation d'un dispositif péristaltique pour application médicale », Thèse de Magister, Université de BATNA, 2010
- [7] C.A. Borghi, A. Cristofolini, and M. Fabbri, «Optimal design of a liquid metal Induction Pump», Department of Electrical Engineering, University of Bologna, Viale Risorgimento 2, I-40136 Bologna, Italy, 1997
- [8] N. Bergoug « Etude de l'influence des Matériaux ferromagnétiques sur les performances d'une machine MHD par la Modélisation Numérique 2d », Thèse de Magister, Université de BATNA .2006
- [9] P.J. Wang C.Y. Chang A, M.L. Chang b, «Simulation of two-dimensional fully developed laminar flow for a magneto-hydrodynamic (MHD) pump », 2004
- [10] D. Convert, «Propulsion Magnétohydrodynamique en eau de mer ». Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 1995
- [11] S.Naceur« Contribution à La Modélisation Numérique D'une Pompe MHD En Tenant Compte De La Nature Des Matériaux Des Electrodes Et Du Fluide», Thèse de Magister, Université de BATNA .2007
- [12] N. Bennecib « Contribution à l'étude des phénomènes d'écoulement dans les générateurs MHD ».Thèse de magistère 2001
- [13] F. Z. Kadid, «Contribution A L'étude Des Convertisseurs MHD A Induction », Thèse de doctorat, Institut de l'électrotechnique, Université de Batna, 2003
- [14] I.Chaibi M.benkabouya, « étude électromagnétique d'une pompe magnétohydrodynamique MHD », Mémoire master academique, université kasdi merbah ouargla, 2015

## Références bibliographiques

---

- [15] M. François Petrèlis, « Effet Dynamo: Etude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique », Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, 2002
- [16] M.S. Tillack and N. B. Morley, « Magnetohydrodynamics », McGraw Hill Standard Handbook For Electrical Engineers, 14th Edition, 1998
- [17] J.C. Sabonnadiere, J.L. COULOMB, « CAO En Electrotechnique », Hermes Publishing, 1985, 51 rue Rennequin, Paris
- [18] J.P. Faroux and J. RENAULT, « Cours De L'électromagnétique » 2, 1998 Dunod Paris
- [19] C. Boulbe « Contribution à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique et de la magnétostatique », Thèse de Doctorat, Université de Pau et des pays de l'Adour, 2007
- [20] R. Abdessemed, M.S. Aggoune et F.Z. Kadid, « Magnétisme Cours et Exercices ». Presses de l'université de Batna, 1997
- [21] J.P. Faroux, J. Renault, « Electromagnétisme I, 94 exercices et problèmes corrigés rappels de cours » Dunod, Paris 2000
- [22] H. Becha « Modélisation des phénomènes électromagnétiques et thermique couplés par la méthode des Volumes finis et de la paramétrisation dans les systèmes Amagnétiques de chauffage par induction. » Thèse de magistère 2001
- [23] J.P. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger, « Electromagnétisme vide et milieux matériels ». Edission Masson, 1991
- [24] M.L. Khene « Modélisation des phénomènes électromagnétiques dans les structures à géométrie complexe par adaptation de la méthode des volumes finis » Thèse de magistère 2006
- [25] J.C. Sabonnadiere, J. L. Coulomb, « Calcul des champs électromagnétiques », Technique de l'ingénieur D.3020PP.-20
- [26] M. Hamidi « Modélisation axisymétrique par la méthode des volumes finis du transformateur à plasma thermique inductif Méthode des volumes fini- méthode des circuits couple ». Thèse de magistère 2001
- [27] A. Maioufi « Modélisation des phénomènes électromagnétiques non linéaire par la méthode des Volumes finis ». Thèse de magistère 2006
- [28] M.N.O Sadiku « Numerical technics in electromagnetics » CRC, London 1992

## Références bibliographies

---

- [29] M. Boumahrat, A. Gourdin, «Méthode numériques appliquées», (O.P.U), 1993
- [30] G. Dahtt, G. Touzault, «Une Présentation De La Méthode Des Eléments Finis», Maloine S.A. Editeur Paris 1984
- [31] L. Mokrani, «Contribution A la simulation du moteur lineaire a simple induction par la methode des elements finis», Thèse de Magister, l'institut d'électrotechnique, Université de Biskra, 1997
- [32] F.Gherabli « Modélisation des phénomènes électromagnétiques par couplage : Méthode de Galerkin sans maillage» Thèse de magistère 2003
- [33] N.Piskounov, « Calcul differential et integral » Tome 1, Edition MIR,Moscou, 1980
- [34] S.V.Patankar, «Numerical Heat Transfer Fluide Flow», Hemisphere Publishing, corporation, 1980.

## Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire, consiste en une étude des phénomènes électromagnétiques d'une pompe MHD annulaire à induction .L'objectif essentiel de ce travail, est la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques de la pompe par la méthode des éléments finis sous logiciel de simulation COMSOL Multi physiques. Les différentes caractéristiques électromagnétiques sont présentées.

**Mots-clés:** Canal, inducteur, Magnétohydrodynamique (MHD), Méthode des volumes finis (MVF), COMSOL

## Abstract

The work presented in this memory, is a study of the electromagnetic phenomena of an induction MHD. The essential objective of this work is the numerical modeling of electromagnetic model of the pump by the finite element methods in COMSOL Multiphysics. The different characteristics electromagnetic are presented.

**Keywords:** Canal, inductor, Magneto hydrodynamics (MHD), The finite volume method (FVM), COMSOL

## المخلص

العمل المقدم في هذه الاطروحة ، دراسة الظواهر الكهرومغناطيسية لـ MHD Magnétohydrodynamique الهدف الرئيسي للعمل هو النمذجة الرقمية لنموذج كهرومغناطيسي لمضخة بطريقة الحجم المحدود باستعمال برنامج المحاكاة COMSOL Multiphysics لمختلف الخصائص الكهرومغناطيسية.

## الكلمات المفتاحية

قناة ، محث ، كهروديناميكية ، COMSOL ، طريقة الحجم المحدود.