

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA - جامعة كاسدي مرباح ورقلة



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

Mémoire de Fin d'Études pour l'Obtention du Diplôme De Master

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Option : ÉNERGÉTIQUE

Thème :

*Résolution du Problème des Ondes par la
méthode de Différences Finies*

Présenté par

DERDOURI Walid.

Devant le jury composé de :

Mme. BENADDI Hadda	Encadreur	Université Kasdi Merbah de Ouargla.
Mme. BATOCHE Mouna	Examineur	Université Kasdi Merbah de Ouargla.
Mr. DERGHOUT Zoheir	Président	Université Kasdi Merbah de Ouargla.

Promotion juin 2021

Dédicaces

Après avoir remercié vivement Allah, le tout puissant de m'avoir donné l'opportunité de penser et d'écrire, je dédie spécialement ce travail à mes parents.

A mes frères et sœurs,

A ma fiancée,

Et à mes amis et collègues de toute promotion.

Également, je vous dédie ce travail.

Remerciements

Avant tout, nous remercions ALLAH de m'avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail. Je tiens à remercier sincèrement Madame BENADDI HADDA, professeur à l'université de KASDI MERBAH-Ouargla, qui, en tant que Directrice de mémoire, s'est toujours à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, malgré ses charges académiques, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer.

Mes vifs remerciements vont à Monsieur DERGHOUT Zoheir, professeur à l'université de KASDI MERBAH Ouargla, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de mémoire. Je remercie également Madame BATOUCHE Mouna, professeur à l'université de KASDI MERBAH Ouargla, d'avoir accepté de juger ce document.

En préambule à ce mémoire, j'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur SADOUKI Lazhar, Doctorant à l'université de KASDI MERBAH qui m'a apporté son aide.

Mes remerciements vont également à toutes les personnes qui auront contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Notations

E, D, P : Equation aux dérivées partielles

$\sigma(E, E')$: Topologie faible définie sur E

$L^p(\Omega)$: Espace de Lobesgue

$W_0^{1,p}, W^{1,p}$: Espaces de Sobolev

H : Espace Hilbert

∇ : Gradient

Δ : Laplacien

A : Matrice

CFL : Courant-Friedrichs-lewy

c : Célérité d'onde

f : Fréquence d'onde

ω : Pulsation d'onde

T : Période d'onde

ρ_0 : Densité linéaire de la corde

T_0 : Tension de la corde

Δx : Pas en espace de maillage

Δt : Pas en temps

Liste des figures

Fig.1. Un exemple d'onde longitudinale, le pincement d'un ressort.....	27
Fig.2. Un exemple d'onde transverse.	27
Fig.3. Illustration de la période T d'une onde.	28
Fig.4. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 0.24s$	36
Fig.5. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 0.24s$	37
Fig.6. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 1.22s$	38
Fig.7. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 1.22s$	39
Fig.8. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 0.76s$ avec $c =$ $0.5, c_1 = 2$ et $c_2 = 4$	40
Fig.9. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 0.76s$ avec $c =$ $0.5, c_1 = 2$ et $c_2 = 4$	40
Fig.10. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 0.24s$ avec $\Delta x =$ $0.002, \Delta t = 0.001$	41
Fig.11. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 0.24s$ avec $\Delta x =$ $0.002, \Delta t = 0.001$	42

Table des matières

Notations.....	iii
Introduction.....	1
1. Analyse Fonctionnelle et Equation d'Onde	3
1.1. La topologie faible $\sigma(E, E')$	4
1.2. Espaces de Sobolev	5
1.2.1. Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$	5
1.2.2. Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$	5
1.3. Les opérateurs maximaux monotones	5
1.4. Théorème d'existence, unicité et régularité (Hille-Yosida)	6
1.5. Etude du problème linéaire des ondes.....	11
1.5.1. Position du problème	11
1.5.2. Existence, unicité et propriétés des solutions	12
2. Etude de l'équation des Ondes par la méthode de Différences Finies.....	14
2.1. La méthode de Différences Finies.....	15
2.1.1. Principe de la méthode de Différences Finies	15
2.1.2. Définitions et propriétés	15
2.1.3. Différences finies en dimension 1	17
2.1.4. Différences finies en dimension 2	18
2.2. Etude de l'équation des ondes par la méthode D.F	20
2.2.1. Position du problème	20
2.2.2. Le schéma d'Euler explicite.....	21
2.2.3. Stabilité, consistance et convergence	22
3. Les Ondes Mécaniques	25

3.1. Définitions.....	26
3.1.1. L'onde.....	26
3.1.2. Front d'onde	26
3.1.3. Vitesse de propagation	26
3.2. Quelques types d'ondes.....	26
3.2.1. Onde longitudinale	26
3.2.2. Onde transverse	27
3.2.3. Onde plane, onde sphérique	27
3.2.4. Onde progressive, onde stationnaire, onde évanescente	27
3.2.5. Onde périodique, non périodique, aléatoire	28
3.3. Grandeurs caractéristiques des ondes planes progressives périodiques.....	28
3.3.1. Période T , fréquence f et pulsation ω d'onde.....	28
3.3.2. Longueur d'onde λ et nombre d'onde k	29
3.4. Equation d'onde	29
3.4.1. Historique	29
3.4.2. Etablissement de l'équation d'onde par les lois de Newton et de Hooke	29
4. Application Numérique	31
4.1. La solution numérique d'équation unidimensionnelle des ondes (Corde Vibrante)	32
4.1.1. Exemple 01 : Conditions aux limites de Dirichlet.....	32
4.1.2. Exemple 01 : Conditions aux limites de Neumann	34
4.2. Programmes et graphes de solution.....	35
4.2.1. Programme 01	43
4.2.2. Programme 02	45
Conclusion	47

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP).

Il n'est en général pas question d'obtenir des solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

L'une des célèbres EDP est l'équation des ondes. L'équation des ondes est une EDP hyperbolique linéaire du second ordre qui décrit la propagation de diverses ondes dans les différents milieux (élastique, acoustique ...).

Le mouvement ondulatoire est fortement influencé par la présence des conditions ; aux limites par rapport à l'espace et initiales par rapport au temps : on est donc devant un problème d'ondes.

Dans de nombreuses situations, trouver des solutions analytiques aux équations aux dérivées partielles, notamment l'équation d'onde, est irréaliste, voire impossible.

Des méthodes numériques qui utilisent des algorithmes informatiques sont ensuite utilisées pour trouver une solution approximative.

L'objectif de ce mémoire est de déterminer la stabilité et la convergence de la méthode numérique de différences finies D.F qui se rapprochent d'une solution du problème des ondes.

Ce travail consiste à (04) chapitres essentiels :

Le premier chapitre va être un rappel d'analyse fonctionnelle, qui étudiera le côté mathématique du problème ; les domaines et espaces de solutions, ainsi que son existence et unicité.

Le deuxième chapitre évoquera la méthode numérique de différences finies : La méthodologie du travail ; le moyen par lequel on résout le problème des ondes.

Le troisième chapitre sera des généralités sur les ondes mécaniques.

Finalement, le quatrième chapitre contiendra des calculs, résultats et discussions avec une petite comparaison de résultats obtenus en tenant compte les conditions aux limites du problème.

Nous allons mettre en disposition des programmes informatiques qui seront réalisés avec 'Matlab' pour faciliter les calculs et pouvoir afficher et mieux discuter les résultats.

Chapitre 1

Analyse Fonctionnelle et Equation d'Onde

La résolution de toute équation mathématique nécessite d'étudier primordialement les domaines de ses solutions possible. Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence les espaces et domaines pour la résolution des équations aux dérivées partielles notamment l'équation des ondes.

1.1. La topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f: E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

La topologie faible $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$

Etant donnée une suite (x_n) de E , on désigne par $x_n \rightarrow x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Afin d'éviter les confusions on précisera souvent « $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ ». En cas d'ambiguïté on insistera en disant « $x_n \rightarrow x$ fortement » pour signifier que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

1) Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme duale $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$) et soit E'' son bidual (le dual de E'), muni de la norme

$$\|\xi\|_{f \in E'} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$$

On a une injection canonique $J: E \rightarrow E''$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé, l'application $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de E' dans \mathbb{R} constitue une forme linéaire sur E' (un élément de E'' noté J_x). On a donc,

$$\langle J_x, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \quad \forall x \in E, \forall f \in E'$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie ($\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$) ; en effet

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle J_x, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|$$

2) Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' . On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$

Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls est le réel, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta, \text{ où } \|\vec{u}\|, \|\vec{v}\| \text{ désignent respectivement}$$

Les normes des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et θ désigne l'angle formé par ces deux vecteurs.

Forme bilinéaire

On appelle forme bilinéaire sur E toute forme multilinéaire de $L^2(E)$.

Etant donnée ϕ une forme bilinéaire, on note ${}^t\phi$ l'application

$$(x, y) \rightarrow \phi(y, x).$$

Il est immédiat que ϕ est symétrique si $\phi = {}^t\phi$ et que ϕ est antisymétrique si ${}^t\phi = -\phi$

1.2. Espaces de Sobolev

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ on pose $L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}$ Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

1.2.1. Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

a) Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par :

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } : \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I)\}$$

On pose $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ et en déduit que : $H^2(I) = W^{2,2}(I)$.

b) L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

Ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{1/p}$ L'espace H^1 est muni du produit scalaire $(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

Est équivalente à la norme de $W^{1,2}$

1.2.2. Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$

a) Etant donné $1 \leq p \leq \infty$ on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W_0^{1,p}(I)$. On note

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$$

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(I)$; l'espace $H_0^1(I)$ est muni de produit scalaire induit par $H^1(I)$.

b) L'espace $H_0^1(I) \cap L^p(I)$ où $1 < p < \infty$ est séparable.

1.3. Les opérateurs maximaux monotones

a) Dans toute la suite, H désigne un espace Hilbert.

Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est monotone si

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A)$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f$$

b) Soit A un opérateur maximal monotone, alors

- 1- $D(A)$ est dense dans H
- 2- A est fermé
- 3- Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{L(H)} \leq 1$.

c) Soit A un opérateur maximal monotone. On a

- 1- $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0$
- 2- $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0$
- 3- $|A_\lambda v| \leq |Av| \quad \forall v \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0$
- 4- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in H$
- 5- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A)$
- 6- $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0$
- 7- $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda} |v| \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0$

d) On dit que l'opérateur A est défini de E dans E' , est borné s'il existe $C > 0$ tel que :
 $\|A(u)\|_{E'} \leq C \|u\|_E, \forall u \in E$

e) Formule de Green : soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières, w un champ de valeurs définies sur Ω , alors :

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} v \, d\delta$$

1.4. Théorème d'existence, unicité et régularité (Hille-Yosida)

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction $u \in C^{-1}([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur } [0, +\infty[; D(A) \\ u(0) = u_0 \text{ donnée initiale} \end{cases} \quad (1.1)$$

De plus, on a :

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |A u(t)| \leq |A u_0| \quad \forall t \geq 0$$

Démonstration : Nous la décomposerons en 6 étapes :

Etape 01 (Unicité) :

Soient u et \bar{u} deux solutions de (1). On a

$$\left(\frac{d}{dt}(u - \bar{u}), u - \bar{u} \right) = -(A(u - \bar{u}), u - \bar{u}) \leq 0$$

Or

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - \bar{u}(t)|^2 = - \left(\frac{d}{dt}(u(t) - \bar{u}(t)), u(t) - \bar{u}(t) \right)$$

Donc, la fonction $t \mapsto |u(t) - \bar{u}(t)|$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $|u(0) - \bar{u}(0)| = 0$

On en déduit que

$$|u(t) - \bar{u}(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Pour prouver l'existence de u , on remplace A par sa régularisée Yoshida A_λ , on établit diverses estimations indépendantes de λ et on passe à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$

Soit u_λ la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A) \end{cases} \quad (1.2)$$

Noter que u_λ existe grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard appliqué avec $F = -A_\lambda$

Etape 02 :

On a l'estimation

$$\left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |A u_0| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad (1.3)$$

Cette inégalité est une conséquence immédiate du Lemme 1.

Lemme 1. Soit $w \in C^1([0, +\infty[; H)$ une fonction vérifiant

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\quad (1.4)$$

Alors les fonctions $t \mapsto |w(t)|$ et $t \mapsto \left| \frac{dw}{dt}(t) \right| = |A_\lambda w(t)|$ sont décroissantes sur $[0, +\infty[$.

Démonstration : On a $\left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (A_\lambda w, w) = 0$ (Or (1.4.c)) $(A_\lambda w, w) \geq 0$ et par suite,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 \leq 0$$

D'autre part, comme A_λ est un opérateur linéaire borné, on déduit de (4) que w est C^∞ et que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda \left(\frac{dw}{dt}\right) = 0$$

On applique alors ce qui précède à $\frac{dw}{dt}$.

Etape 03 :

On va montrer que, pour tout $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge, quand $\lambda \rightarrow 0$, vers une limite notée $u(t)$; de plus cette convergence est uniforme en t sur chaque intervalle borné $]0, T]$.

En effet soient $\lambda, \mu > 0$ on a

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

Et par suite

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \quad (1.5)$$

Or

$$\begin{cases} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\mu u_\mu - J_\mu u_\mu - u_\mu) \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \end{cases} \quad (1.6)$$

On déduit alors de (1.3), (1.5) et (1.6) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |Au_0|^2$$

Et par intégration

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t |Au_0|^2$$

(i.e.)

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t} |Au_0| \quad (1.7)$$

Il en résulte que, pour chaque $t \geq 0$, $(u_\lambda(t))$ est de Cauchy, et donc converge quand $\lambda \rightarrow 0$ vers une limite notée $u(t)$. Passant à la limite dans (1.7) quand $\mu \rightarrow 0$ il vient

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|$$

Par conséquent la convergence est uniforme en t sur chaque intervalle borné $[0, T]$ et $u \in C(]0, +\infty[; H)$.

Etape 04 (Régularité de u) :

On suppose de plus que $u_0 \in D(A^2)$ i.e. $u_0 \in D(A)$ et $Au_0 \in D(A)$ alors $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quand $\lambda \rightarrow 0$, pour tout $t \geq 0$ et uniformément en t sur chaque intervalle borné $[0, T]$.

En effet posons

$$v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$$

De telle sorte que

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$$

Procédant comme à la 3^e étape on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda |A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu v_\mu|) \quad (1.8)$$

Or d'après le Lemme 1, on a

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0| \quad (1.9)$$

Et de même

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0| \quad (1.10)$$

Enfin puisque $Au_0 \in D(A)$ il vient

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$$

Et donc

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0| \quad (1.11)$$

Combinant (1.8), (1.9), (1.10) et (1.11) il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |A^2 u_0|^2$$

On conclut comme à la 3^e étape que $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quand $\lambda \rightarrow 0$, pour tout $t \geq 0$ et uniformément en t sur chaque intervalle borné.

Etape 05 :

Il existe une solution de (1.1) si l'on suppose de plus que $u_0 \in D(A^2)$. En effet, d'après ce qui précède, on sait que pour tout $T < \infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \rightarrow u(t), \text{ quand } \lambda \rightarrow 0, \text{ uniformément sur } [0, T] \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \text{ converge, quand } \lambda \rightarrow 0 \text{ uniformément sur } [0, T] \end{cases}$$

Il en résulte que $u \in C^1([0, \infty[; H)$ et que $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightarrow \frac{du}{dt}(t)$, quand $\lambda \rightarrow 0$, uniformément sur $[0, T]$. On écrit (1.2) sous la forme :

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0 \quad (1.12)$$

Notons que $J_\lambda u_\lambda(t) \rightarrow u(t)$ quand $\lambda \rightarrow 0$ car

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quand $\lambda \rightarrow 0$

En appliquant le fait que le graphe de A est fermé on déduit de (1.12) que $u(t) \in D(A), \forall t \geq 0$ et que

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$$

Enfin comme $u \in C^2([0, \infty[; H)$, la fonction $t \mapsto Au(t)$ est continue de $[0, \infty[$ dans H et donc $u \in C([0, \infty[; D(A))$.

Par conséquent, on a obtenu une solution de (1.1) vérifiant :

$$|u(t)| \leq |u_0|, \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0$$

Pour conclure, on aura besoin du Lemme 2.

Lemme 2. Soit $u_0 \in D(A)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{u}_0 \in D(A^2) \text{ tel que } |u_0 - \bar{u}_0| < \varepsilon \text{ et } |Au_0 - A\bar{u}_0| < \varepsilon.$$

Autrement dit : $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ (pour la norme du graphe).

Démonstration : Soit $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$, de sorte que $\bar{u}_0 \in D(A)$

Et

$$\bar{u}_0 + \lambda A \bar{u}_0 = u_0. \text{ Donc } A \bar{u}_0 \in D(A), \text{ i.e. } \bar{u}_0 \in D(A^2).$$

D'autre part, on sait de (1.4.c), que

$$A \bar{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0$$

Et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda A u_0 - A u_0| = 0$$

On choisit alors $\lambda > 0$ assez petit et on obtient le résultat désiré.

Etape 06 :

Soit $u_0 \in D(A)$. Grâce au lemme précédent il existe une suite $u_{0n} \in D(A^2)$ telle que $u_{0n} \rightarrow u_0$ et $A u_{0n} \rightarrow A u_0$.

D'après la 5^e étape on sait qu'il existe une solution u_n du problème.

$$\text{C.A.D. } \overline{D(A^2)} = D(A)$$

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + A u_n = 0 & \text{sur } [0, \infty[, \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \quad (1.13)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_m(t)| &\leq |u_{0n} - u_{0m}| \rightarrow 0 & m, n \rightarrow \infty \\ \left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| &\leq |A u_{0n} - A u_{0m}| \rightarrow 0 & m, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ uniformément sur } [0, \infty[$$

$$\frac{du_n}{dt}(t) \rightarrow \frac{du}{dt}(t) \text{ uniformément sur } [0, \infty[$$

Avec $u \in C^1([0, \infty[; H)$, Passant à la limite dans (1.13), grâce au fait que A est fermé, on voit que $u \in C([0, \infty[; D(A))$ et que u vérifie (1.1).

1.5. Etude du problème linéaire des ondes

1.5.1. Position du problème

Pour un domaine (ouvert connexe) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné, de frontière $\partial\Omega$ régulière et pour un temps $T > 0$ fixé, on considère le problème aux limites suivant :

Trouver une fonction $u = u(x, t)$ avec $x \in \Omega$ et $t \in (0, T)$, telle que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.14)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \quad (1.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.17)$$

A l'instant $t = 0$, on impose la valeur de u ainsi que la vitesse initiale $\frac{\partial u}{\partial t}$ par la donnée de deux fonctions u_0, v_0 . Le paramètre $c \in \mathbb{R}$ représente la célérité des ondes dans le milieu considéré. L'équation des ondes est un exemple modèle d'équation hyperbolique linéaire.

Remarque :

Lorsque $n = 1, \Omega =]0, 1[$, l'équation (1.14) modélise les petites vibrations d'une corde qui n'est soumise à aucune force extérieure. Pour chaque $t \geq 0$, le graphe de la fonction $x \in \Omega \mapsto u(x, t)$ coïncide avec la configuration de la corde à l'instant t . Lorsque $n = 2$, l'équation (1.14) modélise les petites vibrations d'une membrane élastique. Pour chaque $t \geq 0$, le graphe de la fonction $x \in \Omega \mapsto u(x, t)$ coïncide avec la configuration de la membrane à l'instant t . De manière générale l'équation (1.14) modélise la propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique, etc.) dans un milieu élastique homogène $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

L'équation (1.15) est la condition aux limites de Dirichlet ; elle peut être remplacée par la condition de Neumann. La condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ exprime que la corde (resp. La membrane, etc.) est fixée au bord $\partial\Omega$; la condition de Neumann exprime que la corde est libre à ses extrémités.

1.5.2. Existence, unicité et propriétés des solutions

Commençons par un résultat d'existence et d'unicité :

Si $f \in C([0, T], L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et que $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une solution unique de (1.14) - (1.17) telle que

$$u \in C([0, T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, T], L^2(\Omega)) \quad (1.18)$$

Vérifiant les équations (1.14) - (1.17) presque partout dans Ω et pour tout $t \in [0, T]$.

De plus,

- Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(|v_0|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T |f|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (1.19)$$

Pour tout $t \in [0, T]$.

- Si $f \equiv 0$ on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = |v_0|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.20)$$

Pour tout $t \in [0, T]$.

La relation (1.20) est une loi de conservation qui traduit la conservation d'une énergie au cours du temps. Contrairement à l'équation de la chaleur, l'équation des ondes n'a aucun effet régularisant sur les données initiales. Par exemple, $\Omega = \mathbb{R}$ et $f \equiv 0$, la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.21)$$

Est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds \quad (1.22)$$

Avec $v_0 = 0$, alors

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)]$$

On voit que la solution n'est pas plus régulière que u_0 . Si $u_0 \in C^\infty$ sauf en x_0 alors $u \in C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sauf sur les droites $x + ct = x_0$ et $x - ct = x_0$. Ces droites sont appelées les caractéristiques issues du point $(x_0, 0)$. Les singularités se propagent le long des caractéristiques.

Dans ce chapitre, nous avons étudié les espaces de solutions d'équation des ondes, l'existence et l'unicité de ces solutions.

Chapitre 2

**Etude de l'équation des Ondes
par la méthode de Différences
Finies**

Les mathématiques utilisent couramment les notions d'infini et de continu. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes: les différences finies, les éléments finis et les volumes finies.

2.1. La méthode de Différences Finies

2.1.1. Principe de la méthode de Différences Finies

La méthode de différences finies (D.F) consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons des valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds de maillage.

- **Avantage :**

Grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Elle est pratique et facile à accéder.

- **Inconvénients :**

Limitation à des géométries simple

Difficultés de prise en compte des conditions aux limites de certains types.

2.1.2. Définitions et propriétés

a) Maillage

On appelle 'maillage' un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer D.F pour une application définie sur un segment de \mathbb{R} , on ajoute en général les deux extrémités du segment : pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir éventuellement des points du contours du domaine de définition.

On appelle 'un pas de maillage' la distance entre deux points successifs de maillage.

b) Erreur de troncature

On appelle 'erreur de troncature' la quantité obtenue en remplaçant les dérivées par les différences divisées. Le calcul des erreurs de troncature est usuellement basé sur le développement de Taylor.

L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'équation est approchée par le schéma. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approchée (erreur de convergence), mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

c) Ordre de schéma

On dit qu'un schéma de discrétisation à N points de discrétisation est d'ordre p s'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de la solution exacte, telle que l'erreur de consistance satisfait :

$$\max_{i=1,\dots,N} R_i \leq Ch^p$$

Où R_i est l'erreur de troncature et h est le pas de maillage (c'est-à-dire le maximum de $(x_{i+1} - x_i)$).

d) Consistance de schéma numérique

Un schéma aux différences finies est consistant si :

$$\max_{i=1,\dots,N} R_i \rightarrow 0$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, où N est le nombre de points de discrétisation.

e) Stabilité de schéma numérique

Par définition, un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant: un schéma peut être :

- Inconditionnellement instable : Quels que soient Δt et Δx les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.
- Inconditionnellement stable : Quels que soient Δt et Δx les erreurs causées par le schéma numérique n'explorent pas au fil des itérations.
- Conditionnellement stable : On doit poser une condition sur Δt et Δx pour que la solution n'explode pas. Par exemple la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) qu'on va définir dans le paragraphe suivant.

f) Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy 1928 (CFL)

C'est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du schéma, ce qui montre que la stabilité d'un schéma ne peut pas nécessairement être assurée quelle que soit la manière dont Δt et Δx tendent vers zéro. C'est une condition très contraignante d'un point de vue pratique, car si l'on souhaite avoir une bonne précision en espace, il est nécessaire de choisir Δt nettement plus petit.

g) Convergence-Théorème (Lax)

Dans un problème bien posé, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'un schéma est la consistance.

2.1.3. Différences finies en dimension 1

Toutes les méthodes numériques présupposent les discrétisations du domaine géométrique pour passer d'un problème continu avec une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

a) Discrétisation de domaine

Dans ce cas on discrétise l'intervalle continu $[a, b]$, on approche les dérivées aux points de discrétisation par des opérateurs aux différences. Plus précisément, on se donne un entier N à partir duquel on définit le pas de discrétisation.

$$h = \Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

On introduit les $N + 1$ points $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N$ qui forment alors une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ (manière uniforme). On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées u_i des solutions $u(x_i)$ aux points x_i de la discrétisation.

b) Construction de schéma

1) La dérivée première

Soit u une fonction d'une variable de classe C^2 , Si h tend vers 0, en utilisant le développement limite de Taylor de la fonction u jusqu'à l'ordre 2 au point $(x_i + h), (x_i - h)$ on obtient:

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2)$$

• Indicielle cas D1 :

Le schéma aux D.F d'ordre 1 en « avant » ou « décentré avant » ou « décentré à droite » :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Le schéma aux D.F d'ordre 1 en « arrière » ou « décentré à gauche » :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

On note

$$u_i = u(x_i) \text{ et}$$

Et

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i$$

- **Schéma centré:**

Effectuons d'abord un développement de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 3.

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3)$$

La soustraction de ces deux équations donne:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit « centré » pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Remarque :

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle stencil.

2) La dérivée seconde

Effectuons d'abord un développement de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 4.

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

En faisant la somme des deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre 2 dit « centré » pour l'approximation de la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

2.1.4. Différences finies en dimension 2

a) Discrétisation de domaine

On a recours à la discrétisation en temps et en espace de façon uniforme pour se ramener à un système d'équations de dimension finie. Il est souhaitable pour la validité du

calcul que la solution approchée obtenue par la résolution de ce système. La discrétisation consiste donc à se donner un ensemble de points t^n , $n = 0, \dots, N$ de l'intervalle $[a, b]$.

Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace.

Soit $h = \frac{b-a}{N} = \Delta x$: le pas de discrétisation en espace, et $k = \frac{T}{M} = \Delta t$: le pas de discrétisation en temps. On pose alors $t^n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N$.

Dans le cas de D2, $u(x, t)$, les couples de points (x_i, t^n) qui forment une grille espace-temps sont appelés les nœuds de grille.

On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au nœuds (x_i, t^n) (i.e : $u_i^n \simeq u(x_i, t^n)$).

b) Construction du schéma

1) La dérivée première

Par le développement limité de Taylor par rapport à la variable de temps (x_i étant fixé) on obtient :

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^+), \quad \xi^+ \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$u(x_i, t^{n-1}) = u(x_i, t^n) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^-), \quad \xi^- \in [t^{n-1}, t^n]$$

De la même manière on obtient :

- **Différentielle progressive (en avant) d'ordre 1 :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Avec ce schéma, on obtient un schéma explicite d'ordre 1 en temps.

Explicite : calcul direct de u^{n+1} en fonction de u^n . En particulier, aucune inversion de matrice ou résolution de système linéaire n'est nécessaire pour ce calcul, c'est le plus simple et stable mais sous conditions.

- **Différentielle régressive (en arrière) d'ordre 1 :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Avec ce schéma on obtient un schéma implicite d'ordre 1 en temps.

Implicite : on doit passer par un système linéaire pour trouver u^{n+1} en fonction de u^n , plus compliquée mais inconditionnellement stable.

- **Schéma centré :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

Ce schéma appelé schéma saute-mouton est à la fois explicite et d'ordre 2 en temps. Cependant, comme on le verra, il est toujours instable, et donc numériquement inutilisable.

2) La dérivée seconde

De la même manière on obtient :

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

C'est un schéma centré et d'ordre 2 en espace.

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial t^2}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

C'est un schéma centré d'ordre 2 en temps.

2.2. Etude de l'équation des ondes par la méthode D.F

2.2.1. Position du problème

On considère l'équation des ondes en dimension 1 en espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f & x \in [0, L], t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \text{ données: conditions initiales.} \end{cases}$$

Pour simplifier, on choisit une discrétisation régulière de $[0, L] \times [0, T]$, on se donne une grille de pas d'espace $\Delta x = \frac{L}{N} > 0$ et de pas de temps $\Delta t > 0$ les points de grille sont de la forme $t_n = n\Delta t$ et $x_i = i\Delta x$.

On cherche u_i^n l'approximation numérique de $u(x_i, t_n)$.

2.2.2. Le schéma d'Euler explicite

Supposons la solution u assez régulière. On a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Donc les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = u_i^0 = u_0(x_i)$$

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} = u_1(x_i) \Rightarrow u_i^1 = u_i^0 + \Delta t u_1(x_i)$$

Et on suppose les conditions aux limites de Dirichlet homogène comme :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \Rightarrow u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \forall n$$

Et les conditions de Neumann homogène, on utilise le schéma avant en espace, alors :

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = \frac{u_{N+1}^n - u_N^n}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1^n = u_0^n \\ u_{N+1}^n = u_N^n \end{cases}$$

Donc le schéma numérique s'obtient en remplaçant les opérateurs aux dérivés partielles par les quotients différentiels, en remplaçant la solution exacte par la solution numérique, et enfin en supprimant les divers $O(\dots)$. On obtient :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = f_i^n, & 1 \leq n \leq N \\ u_i^0 = u_0(x_i) \text{ et } u_i^1 = u_i^0 + \Delta t u_1(x_i) \text{ tel que } i = 1, \dots, M-1 \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \forall n \end{cases}$$

Posons pour tout n :

$$U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Ainsi que

$$A_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A_{\Delta x}$ est tridiagonale. C'est la matrice du Laplacein discret. Alors le schéma se réécrit :

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - A_{\Delta x}U^n = F^n$$

Pour des conditions aux limites homogènes. On mettre ce problème sous la forme d'une récurrence d'ordre un

$$X^{n+1} = AX^n + G^n$$

Nous posons

$$X^n = \begin{pmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{pmatrix}, \quad G^n = \begin{pmatrix} \Delta t^2 F^n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2I + \Delta t^2 A_{\Delta x} & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.3. Stabilité, consistance et convergence

On remarque la matrice A n'est pas normale, $AA^t \neq A^tA$. Donc nous ne pouvons pas montrer la stabilité à l'aide des valeurs propres.

Proposition : Prenons $F^n = 0$ pour n . On a $E^{n+\frac{1}{2}} = E^{n-\frac{1}{2}}$ avec

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right\|^2 - \frac{1}{2} (A_{\Delta x}U^n, U^n).$$

On calcule le produit scalaire de l'équation avec $\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2}$. On trouve

$$\left(\frac{(U^{n+1} - U^n) - (U^n - U^{n-1})}{\Delta t^2}, \frac{(U^{n+1} - U^n) - (U^n - U^{n-1})}{2} \right) - \frac{1}{2} (A_{\Delta x}U^n, U^n) + \frac{1}{2} (U^n, A_{\Delta x}U^{n-1}) = 0$$

En utilisant la symétrie de $A_{\Delta x}$, puis on réorganise.

Proposition : Supposons que $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$C(\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2) \leq E^{n+\frac{1}{2}}.$$

On a

$$(A_{\Delta x}U^n, U^{n+1}) = \frac{1}{2} (A_{\Delta x}U^n, U^n) + \frac{1}{2} (A_{\Delta x}U^{n+1}, U^{n+1}) - \frac{1}{2} (A_{\Delta x}(U^{n+1} - U^n), U^{n+1} - U^n)$$

Posons pour simplifier $V^{n+\frac{1}{2}} = U^{n+1} - U^n$. On a

$$\begin{aligned} (A_{\Delta x} V^{n+\frac{1}{2}}, V^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \sum_{i=1}^N (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) v_i \\ &= -\frac{\Delta x}{\Delta x^2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i)^2 \geq -\frac{2}{\Delta x^2} \sum_{i=1}^N v_i^2 \end{aligned}$$

Ce qu'on montre en calculant la différence. Donc

$$\begin{aligned} E^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2\Delta t^2} \|V^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{1}{2\Delta x^2} \|V^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \dots (*) \\ &+ \frac{\Delta x}{4\Delta x^2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + \frac{\Delta x}{4\Delta x^2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})^2 \\ &\geq \frac{\Delta x}{4\Delta x^2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + \frac{\Delta x}{4\Delta x^2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})^2 \end{aligned}$$

Grâce à la condition CFL et à une inégalité de Poincaré discrète.

Théorème : Sous les mêmes hypothèses et en supposant la solution de classe C^4 , il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\|U^n - E_{\Delta x} u(t^n)\| \leq C(\varepsilon) T^2 \Delta x^2.$$

Nous allons utiliser l'estimation précédente mais pour l'erreur $V^n = U^n - E_{\Delta x} u(t^n)$.

On a tout d'abord

$$\frac{V^{n+1} - 2V^n + V^{n-1}}{\Delta t^2} - A_{\Delta x} V^n = \varepsilon^n \text{ avec } \|\varepsilon^n\| = O(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

On a aussi $V^1 = U^0$. Soit

$$\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} \right\|^2 - \frac{1}{2} (A_{\Delta x} V^n, V^{n+1})$$

Qui vérifie en reprenant les calculs

$$\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{E}^{n-\frac{1}{2}} = \left(\varepsilon^n, \frac{V^{n+1} - V^n}{2} \right)$$

Puis grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\frac{\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \leq C(\Delta t^2 + \Delta x^2) \left(\frac{\|V^{n+1} - V^n\|}{\Delta t} + \frac{\|V^n - V^{n-1}\|}{\Delta t} \right)$$

Pose $W^{n+\frac{1}{2}} = \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t}$. on sait que pour $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 - \varepsilon$

$$\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}} \geq \tilde{C}(\varepsilon) \left\| W^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2$$

En reprenant les calculs précédents, voir inégalité (*). Cela montre l'inégalité intermédiaire

$$\left\| W^{n+\frac{1}{2}} \right\| + \left\| W^{n-\frac{1}{2}} \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}(\varepsilon)}} \left(\sqrt{\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\tilde{E}^{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

En reportant dans l'inégalité précédente on obtient

$$\frac{\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \leq C(\Delta t^2 + \Delta x^2) \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}(\varepsilon)}} \left(\sqrt{\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\tilde{E}^{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

Puis après simplification

$$\frac{\sqrt{\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\tilde{E}^{n-\frac{1}{2}}}}{\Delta t} \leq \frac{C}{\sqrt{\tilde{C}(\varepsilon)}} (\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

Après sommation en n

$$\sqrt{\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}} \leq n\Delta t \frac{C}{\sqrt{\tilde{C}(\varepsilon)}} (\Delta t^2 + \Delta x^2) \leq \frac{2CT}{\sqrt{\tilde{C}(\varepsilon)}} \Delta x^2 = \hat{C}T\Delta x^2.$$

Donc

$$\left\| \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} \right\| = \left\| W^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C'T\Delta x^2.$$

L'intégration en temps fournit

$$\|V^n\| \leq C'T^2\Delta x^2$$

Ce qui montre le résultat recherché.

Nous avons vu l'application de la méthode numérique de différence finies dans l'équation des ondes, le schéma utilisé et ses discrétisations ont montré des solutions approchées aux solutions exactes. Néanmoins, les résultats étaient fiables.

Chapitre 3

Les Ondes Mécaniques

Inventée pour décrire les caractéristiques des vagues à la surface d'un plan d'eau, la notion d'onde joue depuis le 17^{ème} siècle un rôle central dans la compréhension de nombreux phénomènes physiques et dans la mise en équations mathématiques qui permet d'expliquer et de prédire le comportement de situations extrêmement diverses.

3.1. Définitions

3.1.1. L'onde

Une onde est la propagation d'une perturbation d'une grandeur physique quelconque. Par exemple faire bouger avec un seul mouvement sec l'extrémité d'une corde va générer une onde mécanique sur la corde : la déformation initiale va se propager le long de la corde. La propagation se fait dans un milieu matériel (solide, liquide, gaz, ...) ou dans le vide (ondes électromagnétique, ondes gravitationnelles par exemple).

La propagation d'une onde se fait sans transport de matière. Reprenons l'exemple de l'onde sur une corde. Le mouvement de la corde se propage mais les morceaux de la corde ne se déplacent pas le long de la corde. Par contre, la propagation d'une onde s'accompagne d'un transport d'énergie.

3.1.2. Front d'onde

L'ensemble des points atteints en un temps donné depuis la source de l'onde est appelé le front d'onde.

3.1.3. Vitesse de propagation

La vitesse de propagation d'une onde, est la vitesse à laquelle la perturbation se déplace. Cette vitesse ne doit pas être confondue avec la vitesse due au passage de la perturbation. Reprenons encore l'exemple de la corde. La vitesse à laquelle la déformation de la corde se déplace le long de la corde n'est pas celle d'oscillation des points de la corde autour de la direction moyenne de la corde.

3.2. Quelques types d'ondes

3.2.1. Onde longitudinale

Une onde est longitudinale quand la direction du déplacement de la perturbation est parallèle à la direction d'oscillation de la grandeur perturbée. L'onde obtenue en comprimant une partie d'un ressort à spires non jointives est longitudinale : la zone de compression se déplace le long du ressort et les points du ressort oscillent avec un mouvement parallèle au ressort.

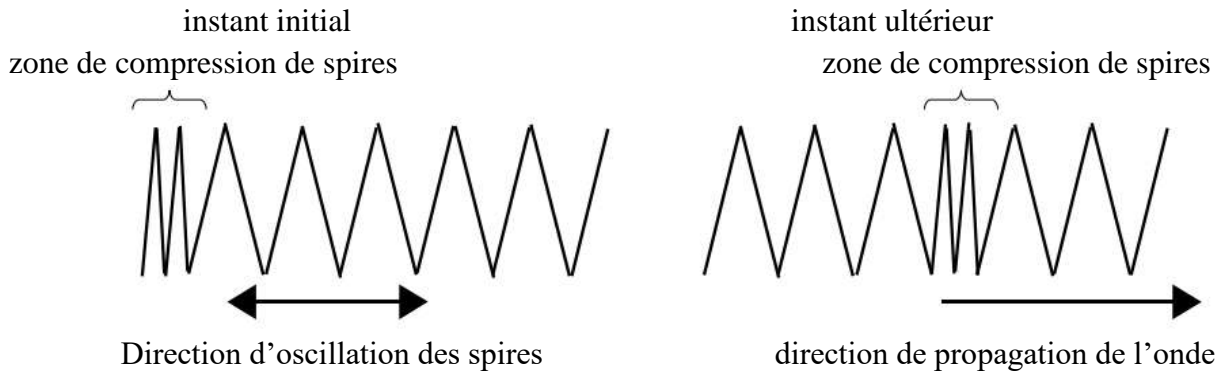


Fig.1. Un exemple d'onde longitudinale, le pincement d'un ressort.

3.2.2. Onde transverse

Une onde est transverse quand la direction du déplacement de la perturbation est perpendiculaire à la direction d'oscillation de la grandeur perturbée. Une onde se déplaçant le long d'une corde est une onde transverse.

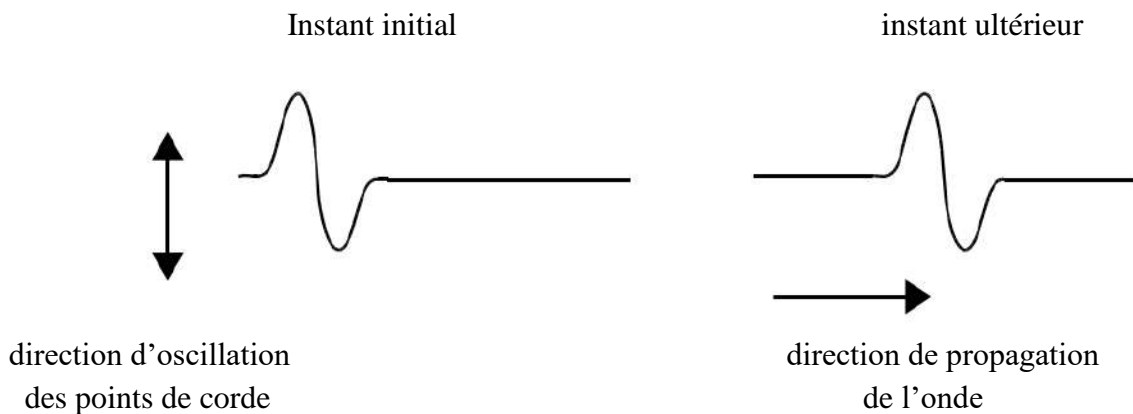


Fig.2. Un exemple d'onde transverse.

3.2.3. Onde plane, onde sphérique

Une onde est dite plane lorsque le front d'onde est un plan. La seule coordonnée d'espace intervenant dans la description mathématique de l'onde est celle perpendiculaire au front d'onde.

Une onde est dite sphérique lorsque le front d'onde est une sphère. La seule coordonnée d'espace intervenant dans la description mathématique de l'onde est la distance au centre de la sphère.

3.2.4. Onde progressive, onde stationnaire, onde évanescence

On ajoute le qualificatif de « *progressive* » à toute onde qui correspond à la propagation effective d'une perturbation. Si l'on se réfère à la définition d'une onde donnée plus haut, ce qualificatif est redondant. Il est surtout utilisé pour marquer la différence avec d'autres types d'ondes que nous allons évoquer dans les paragraphes suivants. Dans le cas

d'une onde plane, l'expression mathématique de l'onde dépend uniquement de la variable $u_1 = ct - x$ (avec c la célérité, t le temps et x la coordonnée perpendiculaire au front d'onde) pour les ondes se propageant vers les x croissants, ou de $u_2 = ct + x$ pour les ondes se propageant vers les x décroissants.

Une onde stationnaire est une onde dans laquelle la propagation de la perturbation a disparu (cela pourrait sembler contradictoire avec la définition d'une onde mais l'usage a consacré cette appellation). Les dépendances temporelle et spatiale sont découplées et l'on peut écrire l'onde sous la forme d'un produit d'une fonction du temps par une fonction de l'espace soit $p(x, t) = f(t) * g(x)$ (en prenant l'exemple d'une onde de pression à une dimension). Une manière de construire une onde de même amplitude se propageant en sens inverse.

Une onde évanescence est une onde qui s'atténue sans se propager (atténuation exponentielle en général).

3.2.5. Onde périodique, non périodique, aléatoire

Une onde est périodique (sous-entendu en temps) si, pour un endroit donné, elle se répète à l'identique à un intervalle de temps constant. On montre (décomposition en série de Fourier) qu'une onde périodique peut toujours se décomposer comme la somme (en général infinie) d'ondes sinusoïdales.

Les ondes non périodiques en acoustique se subdivisent en deux catégories :

- Les sons déterministes qui sont décrits, en un endroit donné, par une fonction déterminée du temps.
- Les bruits (*bruit* étant compris au sens de la théorie du signal) qui au contraire ne peuvent être décrits par une fonction du temps mais ont un caractère aléatoire.

3.3. Grandeurs caractéristiques des ondes planes progressives périodiques

3.3.1. Période T , fréquence f et pulsation ω d'onde

La période T est la durée minimale de la répétition à l'identique de l'onde en un endroit donné. La fréquence f est le nombre de ces répétitions par unité de temps. Dans le système international, T se mesure en seconde (s) et f en Hertz (Hz). On a les relations :

$$f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$$

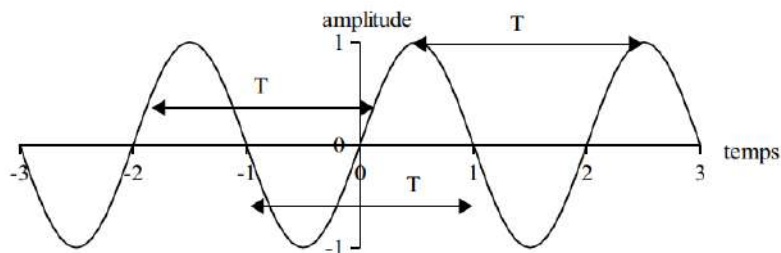


Fig.3. Illustration de la période T d'une onde.

La pulsation ω

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ω [rad. s⁻¹]. Même si l'on peut formellement définir la pulsation pour toute onde périodique, son usage en pratique est restreint aux ondes sinusoïdales.

3.3.2. Longueur d'onde λ et nombre d'onde k

La longueur d'onde λ est la distance minimale de répétition à l'identique de l'onde pour un instant donné (c'est la période spatiale), λ est la distance parcourue par l'onde en une période. Dans le système international, λ se mesure en mètre (m).

Le nombre d'onde k se définit par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k [m⁻¹]. Même si l'on peut définir le nombre d'onde pour toute onde périodique, son usage en pratique est restreint aux ondes sinusoïdales.

3.4. Equation d'onde

3.4.1. Historique

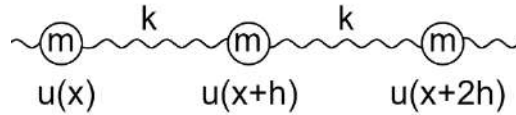
L'équation d'onde (parfois appelée équation des ondes ou équation de d'Alembert) est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle.

L'établissement de l'équation des ondes est venu de l'étude des vibrations d'une corde de violon. Afin de pouvoir modéliser ce comportement, les mathématiciens du 17^{ème} siècle ont appliqué la deuxième loi de Newton à la corde, d'abord vue comme un ensemble fini de masses ponctuelles reliées par des ressorts (dont le comportement est donné par la loi de Hooke établie en 1660), avant d'augmenter le nombre de masses pour se rapprocher de la corde.

En 1727, Jean Bernoulli reprend l'expérience de la corde de violon et constate que ses vibrations forment une sinusoïde et que la variation de son amplitude en un point forme également une courbe sinusoïdale, mettant ainsi en évidence les modes. En 1746, Jean le Rond d'Alembert reprend le modèle des masses ponctuelles liées par des ressorts et établit uniquement à partir des équations que les vibrations de la corde dépendent à la fois de l'espace et du temps.

3.4.2. Etablissement de l'équation d'onde par les lois de Newton et de Hooke

Considérons une chaîne de masses ponctuelles m interconnectées par des ressorts sans masse de longueur h et de raideur k :



Considérons $u(x)$ le déplacement de la masse m en x par rapport à sa position de repos à l'horizontale. Les forces exercées sur la masse m au point $x + h$ sont :

$$F_{Newton} = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + h, t) \quad (3.1)$$

$$F_{Hooke} = F_{x+2h} - F_x = k[u(x + 2h, t) - u(x + h, t)] - k[u(x + h, t) - u(x, t)] \quad (3.2)$$

Le déplacement de la masse au point $x + h$ est donc donné par :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + h, t) = \frac{k}{m} [u(x + 2h, t) - 2u(x + h, t) + u(x, t)] \quad (3.3)$$

Le changement de notations permet de rendre la dépendance au temps de $u(x)$ explicite.

En considérant une chaîne de N masses équidistantes réparties sur une longueur $L = Nh$, de masses totale $M = Nm$, et de raideur totale $K = k/N$, on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + h, t) = \frac{KL^2}{M} \frac{[u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)]}{h^2} \quad (3.4)$$

En faisant tendre N vers l'infini et donc h vers 0 (en considérant la longueur totale comme restant finie), sous des hypothèses de régularité, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

Avec $c^2 = \frac{KL^2}{M}$; le carré de la vitesse de propagation de la déformation, donc :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.6)$$

Autrement dit :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7)$$

La quantité c^2 est spécifique ; son expression varie selon le problème d'onde étudié.

Cette partie a traité le coté physique du problème, nous avons étudié les ondes, leurs types et caractéristiques. Enfin, nous avons vu l'équation des ondes et comment elle s'établit.

Chapitre 4

Application Numérique

En cette section nous décrivons les calculs numériques pour obtenir une solution au problème des ondes ci-dessous en utilisant la méthode de différences finies, qui a été étudiée au Chapitre 2.

On va considérer le problème des ondes unidimensionnel d'une corde vibrante, où l'équation d'onde gouvernante prend la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

La quantité c^2 dans ce cas vaut

$$c^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$$

Avec :

T_0 [$kg \cdot \frac{m}{s^2}$] : la tension de la corde,

ρ [$kg \cdot m^{-1}$] : La densité linéaire de la corde (masse par unité de longueur).

4.1. La solution numérique d'équation unidimensionnelle des ondes (Corde Vibrante)

Nous considérons une corde de longueur L ($L = 4m$) fixée aux extrémités. L'équation de déplacement transversal au cours de temps avec les conditions initiales s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in [0, 4], \quad t \in [0, 2] \\ u(x, 0) = c_1 \sin(c_2 \pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in [0, 4] \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $c^2 = 1$

c_1 : Une constante qui contrôle l'amplitude.

c_2 : Une constante qui contrôle le nombre d'ondes.

En ajoutant les conditions aux limites, nous calculons la solution numérique comme nous pouvons voir dans nos exemples :

4.1.1. Exemple 01 : Conditions aux limites de Dirichlet

Nous considérons l'équation unidimensionnelle des ondes (4.1), avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in [0, 4], \quad t \in [0, 2] \\ u(x, 0) = c_1 \sin(c_2 \pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in [0, 4] \\ u(0, t) = u(4, t) = 0, & \text{conditions de Dirichlet.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Problème approché

Pour vérifier les conditions de stabilité, consistance et la convergence de schéma nous posons : $\Delta x = 0.02 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$, et d'après le principe de la méthode de différences finies nous trouvons le problème approché du problème (4.2) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_i^0 = \sin(2\pi x) \text{ et } \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} = 0 \quad i = 2, \dots, 200 \\ u_0^n = u_{200}^n = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots, 200 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Donc ce problème s'écrit comme :

$$\begin{cases} U^{n+1} = (2I + \Delta t^2 A_{\Delta x}) U^n - U^{n-1} \\ u_i^0 = \sin(2\pi x_i) \text{ et } u_i^1 = u_i^0, \quad i = 2, \dots, 200 \\ u_0^n = u_{200}^n = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots, 200 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Tel que

I : La matrice unitaire, et

$$A_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Et

$$U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

Donc le système admet une solution numérique $u_i^n = u(x_i, t_n)$ par les calculs suivants :

Calcul numérique :

$$u_1^0 = 0.1253$$

$$u_1^1 = 0.1253$$

$$u_1^2 = 0.1248$$

⋮

$$u_1^{200} = 0.1253$$

De même, on calcule les valeurs de $u(x, t)$ à l'instant $t = 0$

$$u_2^0 = u_2^1 = 0.2487$$

$$u_3^0 = u_3^1 = 0.3681$$

$$u_4^0 = u_4^1 = 0.4818$$

$$\vdots$$

$$u_{199}^0 = u_{199}^1 = -0.1253$$

De même, on peut calculer u_2^2 et u_3^2

$$u_2^2 = 0.2477$$

$$u_3^2 = 0.3667$$

4.1.2. Exemple 02 : Conditions aux limites de Neumann

Nous conservons les mêmes données d'exemple 01, avec les conditions aux limites de Neumann, donné le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in [0, 4], \quad t \in [0, 2] \\ u(x, 0) = c_1 \sin(c_2 \pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 4] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(4, t) = 0 \quad \text{conditions de Neumann.} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Problème approché

Toujours, sur les mêmes données d'exemple 01, où :

$\Delta x = 0.02 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$. Nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_i^0 = \sin(2\pi x) \quad \text{et} \quad \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} = 0 \quad i = 2, \dots, 200 \\ \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = \frac{u_{200}^n - u_{199}^n}{\Delta x} = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots, 200, \quad \forall n = 1, 2, \dots, 200 \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Alors ce problème écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1} = (2I + \Delta t^2 A_{\Delta x}) U^n - U^{n-1} \\ u_i^0 = \sin(2\pi x_i) \quad \text{et} \quad u_i^1 = u_i^0, \quad i = 2, \dots, 200 \\ u_1^n = u_0^n \quad \text{et} \quad u_{200}^n = u_{199}^n \quad \forall n = 1, 2, \dots, 200 \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

Tel que :

I : La matrice unitaire,

$$A_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc le système admet une solution numérique $u_i^n = u(x_i, t_n)$ par les calculs suivants :

Calcul numérique :

On a d'après les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u_0^0 = u_0^1 = u_0^2 = \dots = u_0^{200} = 0$$

Et
$$u_{200}^0 = u_{200}^1 = u_{200}^2 = \dots = u_{200}^{200} = 0$$

Et d'après les conditions aux limites de Neumann, on a :

$$u_0^n = u_1^n \quad \text{et} \quad u_{200}^n = u_{199}^n \quad \forall n \in [0, 200]$$

Alors
$$u_1^0 = u_1^1 = u_1^2 = \dots = u_1^{200} = 0$$

De même
$$u_{199}^0 = u_{199}^1 = u_{199}^2 = \dots = u_{199}^{200} = 0$$

Les u_i^0 s'obtiennent en remplaçant les valeurs de i dans la première condition initiale pour tout $200 > i \geq 2$.

De même, les u_i^1 s'obtiennent en remplaçant dans la deuxième condition initiale.

$$u_2^0 = u_2^1 = 0.2487$$

$$u_3^0 = u_3^1 = 0.3681$$

$$u_4^0 = u_4^1 = 0.4817$$

⋮

$$u_{198}^0 = u_{198}^1 = -0.2487$$

On applique la discrétisation (3.3.2) :

$$\begin{aligned} u_2^2 &= 1.5 u_2^1 + 0.25 (u_1^1 + u_3^1) - u_2^0 \\ &= 1.5 * (0.2487) + 0.25 * (0 + 0.3681) - 0.2487 \end{aligned}$$

$$u_2^2 = 0.2164$$

De même :

$$\begin{aligned} u_3^2 &= 1.5 u_3^1 + 0.25 (u_2^1 + u_4^1) - u_3^0 \\ &= 1.5 * (0.3681) + 0.25 * (0.2487 + 0.4818) - 0.3681 = 0.3667 \end{aligned}$$

4.2. Programmes et graphes de solution

Pour calculer le déplacement u , à une certaine position x à l'instant t , nous avons écrit deux (02) programmes à l'aide de l'outil informatique 'Matlab' afin de résoudre numériquement les problèmes d'onde ci-dessus.

- Le premier considère les conditions aux limites de Dirichlet

- Le deuxième considère les conditions aux limites de Neumann

Ça nous a permis de constater l'effet de considération des conditions aux limites de Neumann sur la stabilité de la solution.

Les deux (02) figures suivantes nous montrent la différence entre les deux profils de déplacement établis avec le programme 01 et le programme 02 respectivement, en un même instant (choisi aléatoirement) $t = 0.24s$.

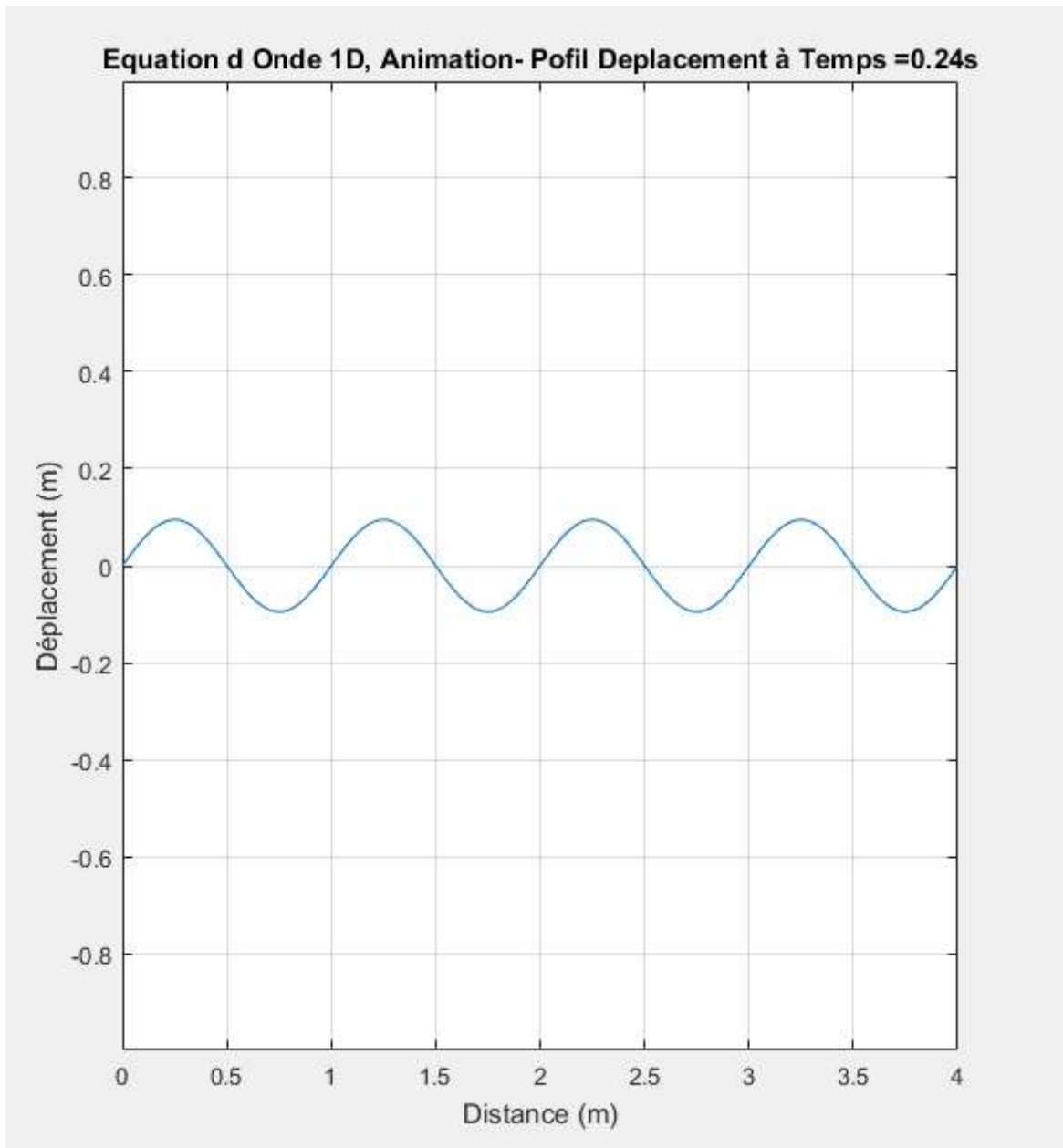


Fig.4. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 0.24s$.

Commentaire :

On remarque que le schéma est convergent et stable avec les conditions de Dirichlet

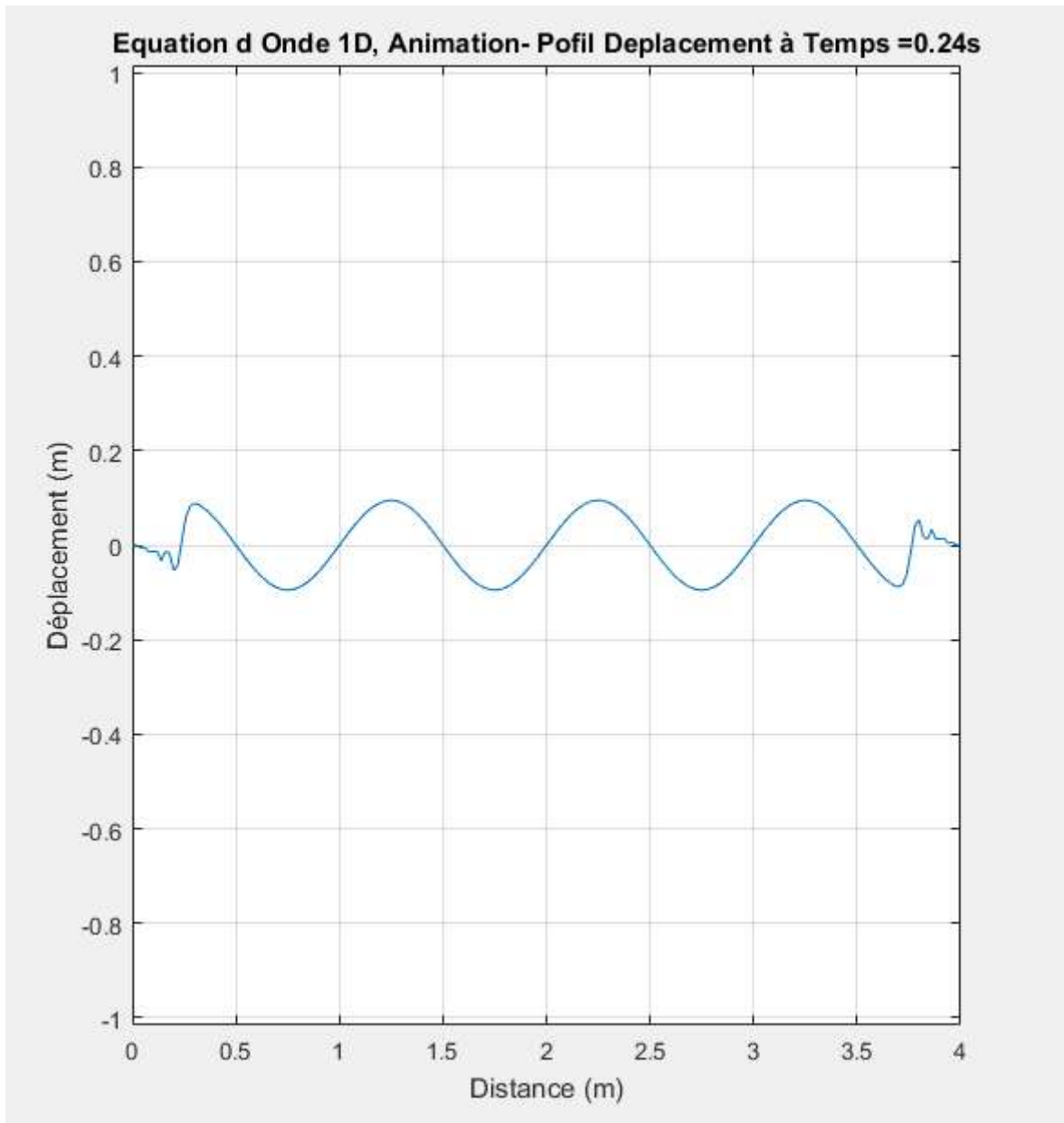


Fig.5. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 0.24s$.

Commentaire :

On remarque que le schéma n'est pas stable avec les conditions de Neumann.

Les deux (02) figures suivantes nous montrent la différence entre les deux profils de déplacement établis avec le programme 01 et le programme 02 respectivement, à un autre instant $t = 1.22s$.

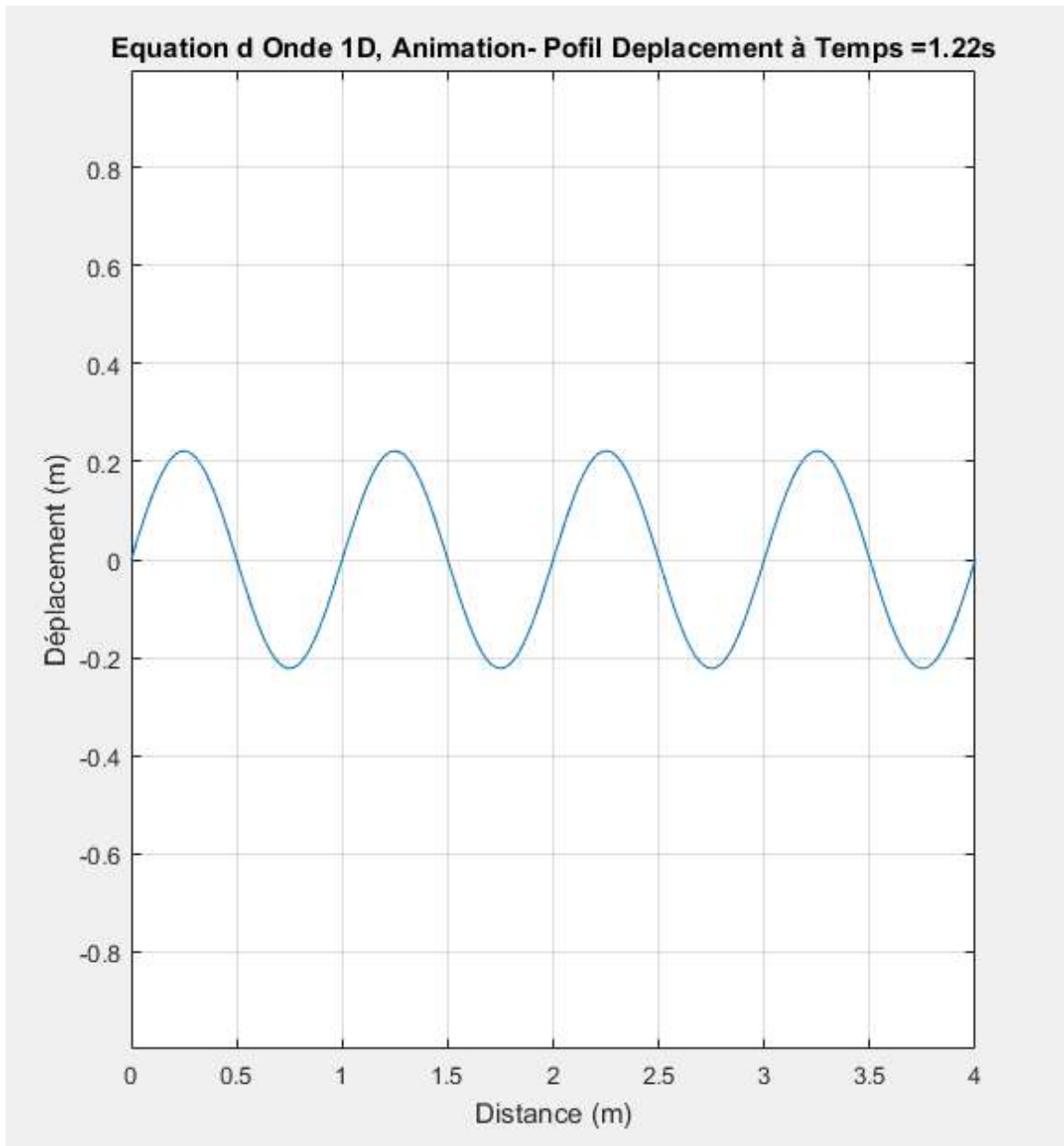


Fig.6. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 1.22s$.

Commentaire :

Le schéma d'exemple 01 est toujours stable et convergent.

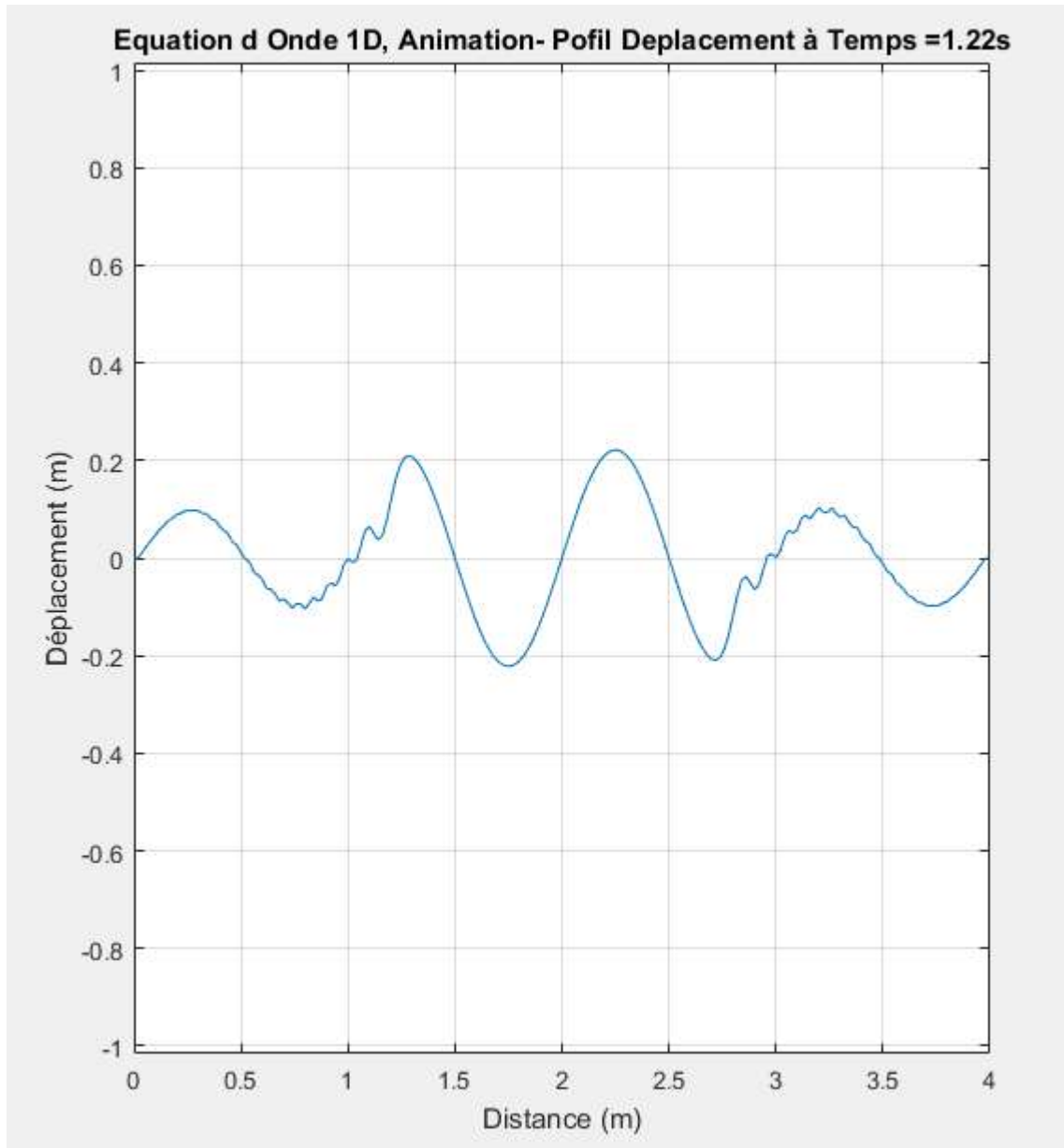


Fig.7. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 1.22s$.

Commentaire :

On remarque que l'instabilité n'est pas toujours proche aux extrémités et elle change selon t le long de x .

Remarque :

Le choix d'un instant différent a pour objectif d'observer le comportement de la déformation du profil de la solution (instabilité et divergence) d'exemple 02.

Validation des résultats :

- a) Prenons maintenant d'autres valeurs pour les quantités : c_1, c_2 et c et voyons les allures des nouveaux profils du déplacement, soient :

$c_1 = 2$ (Amplitude différente), $c_2 = 4$ (Nombre d'ondes différent).

Et $c = 0.5$ (Condition CFL différente) : $r = 0.5 * \frac{0.01}{0.02} = 0.25 \leq 1$ toujours.

Les deux (02) figures suivantes nous montrent la différence entre les deux profils de déplacement établis avec le programme 1 et le programme 2 respectivement à $t = 0.76s$.

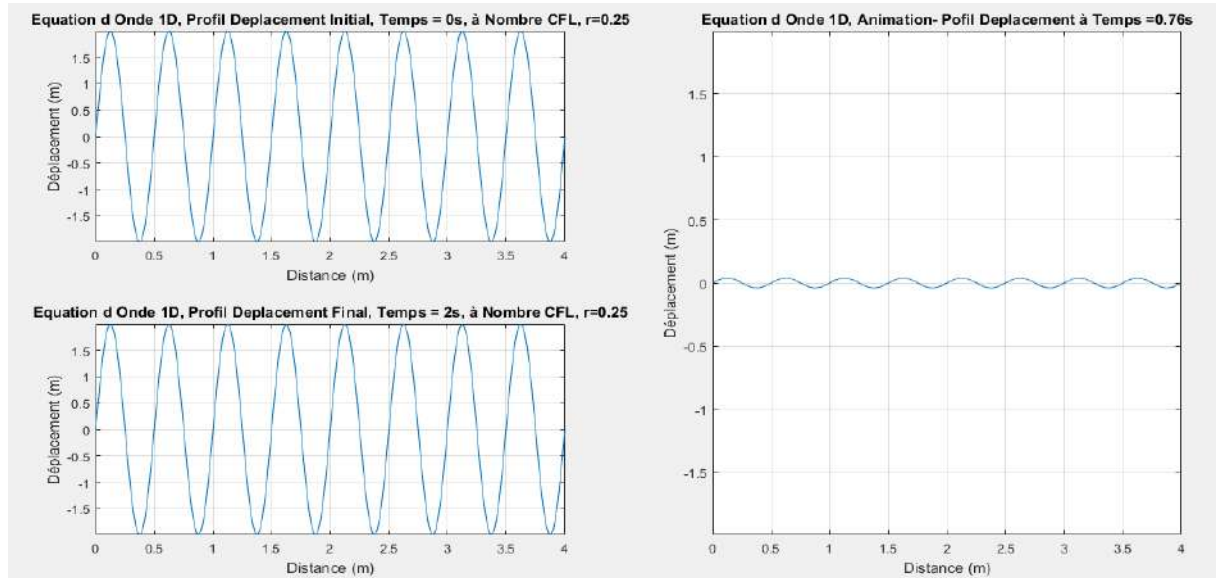


Fig.8. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 0.76s$ avec $c = 0.5, c_1 = 2$ et $c_2 = 4$.

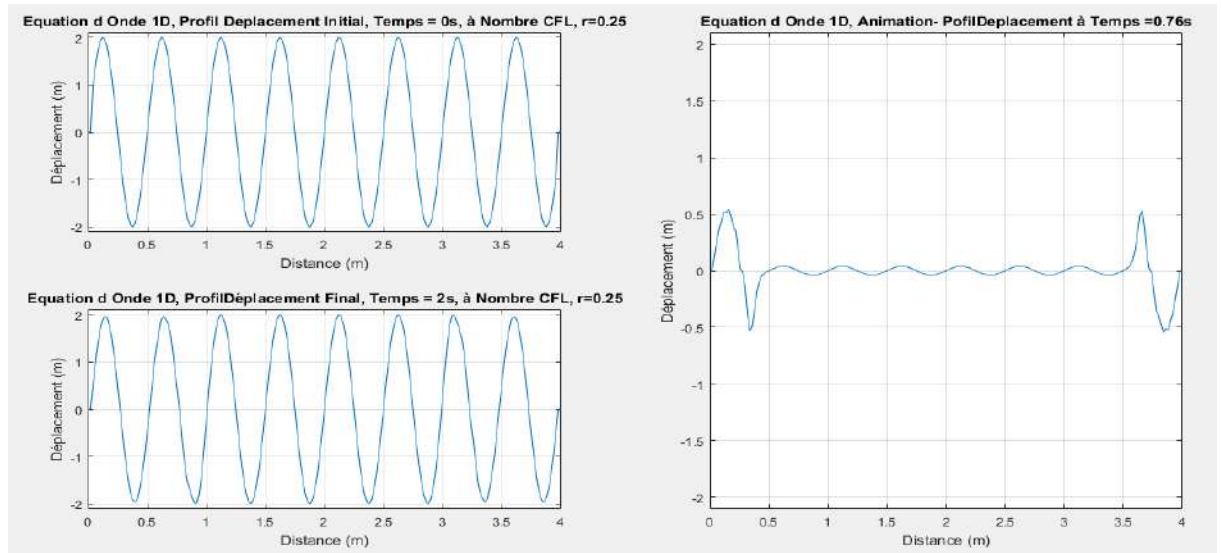


Fig.9. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 0.76s$ avec $c = 0.5, c_1 = 2$ et $c_2 = 4$.

Commentaire :

Mêmes remarques avec les premières hypothèses concernant la convergence et la stabilité.

- b) Prenons maintenant les mêmes premières hypothèses : $c = 1$, $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$ mais en minimisant les pas en espace et en temps :

On prend par exemple : $\Delta x = 0.002$ et $\Delta t = 0.001$. A l'instant $t = 0.24s$ on a les figures suivantes :

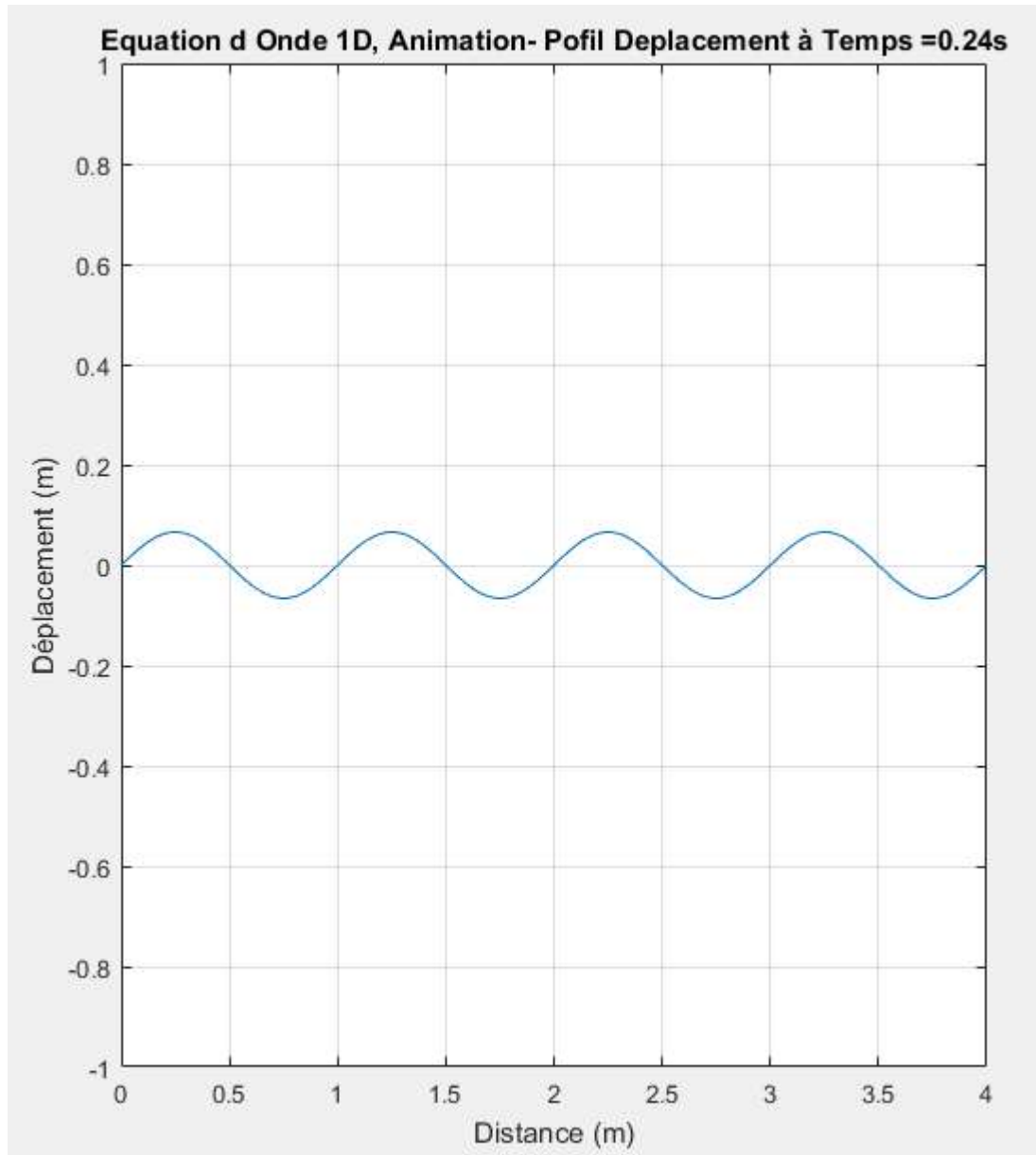


Fig.10. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Dirichlet- à l'instant $t = 0.24s$ avec

$$\Delta x = 0.002, \Delta t = 0.001.$$

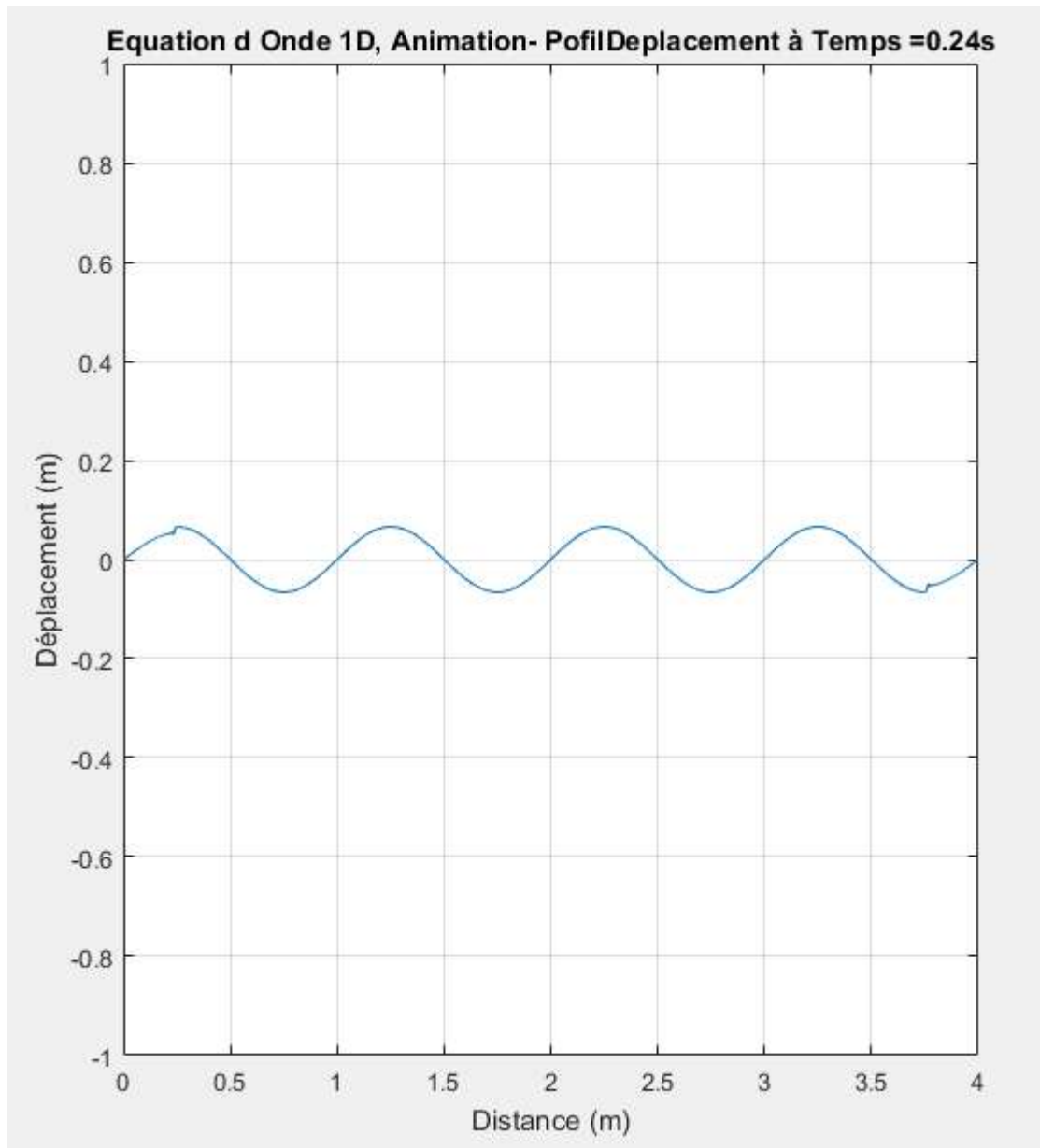


Fig.11. Profil de la solution $u(x)$ -conditions de Neumann- à l'instant $t = 0.24s$ avec

$$\Delta x = 0.002, \Delta t = 0.001.$$

Commentaire :

Problème 02 : Plus le pas est petit, plus le schéma est stable et plus la solution converge vers la solution exacte.

On en déduit que le schéma du problème 02 sera parfaitement stable lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$, ce qui est difficile voire impossible à appliquer car les itérations et les temps de calcul seront infinis.

4.2.1. Programme 01

```

% Equation d'Onde 1D
% Problème Générique :  $u_{tt} = c^2 * u_{xx}$ 
% Méthode Differences Finies
% Condition CFL  $r = c*\delta_t/\delta_x \leq 1$ 
% Conditions aux Limites Dirichlet
clear vars
clear plots
clear
clc
c = 1; % Vitesse Propagation , m/s
L = 4; % Distance, m
m = 200; % Nombre Pas Espace
delta_x = L/m; % Pas Spatial
T = 2; % Temps Total
n = 200; % Nombre Pas Temps
delta_t = T/n;
r = c*delta_t/delta_x; % Nombre CFL (objectif-stabilité);
inférieur ou égal à 1
%  $u_{in} = f(x)$ ; % Condition Initiale
u_t_in = 0; % Condition Initiale
u_cl1 = 0; % Condition aux Limites
u_cl2 = 0; % Condition aux Limites
c1 = 1; % Constante dans l'équation, controle l'amplitude
c2 = 2; % Constante dans l'équation, controle no. d onde
wait_time = 2;
x = zeros(m+1,1); % Localisation le long de la direction de x
x(1) = 0;
for i = 1:m
    x(i+1) = x(i) + delta_x;
end
x;
t = zeros(n+1,1); % Temps à différents pas
t(1) = 0;
for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + delta_t;
end
t;
u = zeros(m+1,n+1);
% Condition Initiale
for i = 2:m
    u(i,1) = c1*sin(c2*pi()*x(i));
    u(i,2) = c1*sin(c2*pi()*x(i));

```

```
% u(i,3) = u(i,2) + (nu^2/2) * ( u(i-1,2) - 2*u(i,2) +
u(i+1,2) )
end
% Conditions aux limites
u(1,1:n+1)=u_cl1;
u(m+1,1:n+1)=u_cl2;
u;

% NoeudsInterieurs
for j = 2:n
    for i = 2:m
        u(i,j+1) = 2*u(i,j) - u(i,j-1) + (r^2) * (u(i-1,j) -
2*u(i,j) + u(i+1,j));
    end
end
u(1:m+1,1);
u(1:m+1,n+1);
disp(['Nombre CFL, r = ' , num2str(abs(r))]);
pause(wait_time)
%plot
uvector=u(:);
umax=max(uvector);
end
```

4.2.2. Programme 02

```

% Equation d'Onde 1D
% Problème Générique :  $u_{tt} = c^2 * u_{xx}$ 
% Méthode Differences Finies
% Condition CFL  $r = c*\delta_t/\delta_x \leq 1$ 
% Conditions aux Limites Neumann
clear vars
clear plots
clear
clc
c = 1; % Vitesse Propagation , m/s
L = 4; % Distance, m
m = 200; % Nombre Pas Espace
delta_x = L/m; % Pas Spatial
T = 2; % Temps Total
n = 200; % Nombre Pas Temps
delta_t = T/n;
r = c*delta_t/delta_x; % Nombre CFL (objectif-stabilité);
inférieur ou égal à 1
%  $u_{in} = f(x)$ ; % Condition Initiale
u_t_in = 0; % Condition Initiale
u_cl1 = 0; % Condition aux Limites
u_cl2 = 0; % Condition aux Limites
c1 = 1; % Constante dans l'équation, controle l'amplitude
c2 = 2; % Constante dans l'équation, controle no. d onde
wait_time = 2;
x = zeros(m+1,1); % Localisation le long de la direction de x
x(1) = 0;
for i = 1:m
    x(i+1) = x(i) + delta_x;
end
x;
t = zeros(n+1,1); % Temps à différents pas
t(1) = 0;
for i = 1:n
    t(i+1) = t(i) + delta_t;
end
t;
u = zeros(m+1,n+1);
% Condition Initiale
for i = 2:m
u(i,1) = c1*sin(c2*pi()*x(i));
    u(i,2) = c1*sin(c2*pi()*x(i));

```

```

    % u(i,3) = u(i,2) + (nu^2/2) * ( u(i-1,2) - 2*u(i,2) +
u(i+1,2) )
end
% Conditions aux limites Dirichlet
u(1,1:n+1) = u_cl1;
u(m+1,1:n+1) = u_cl2;

% Conditions aux limites Neumann
u(2,1:n+1) = u_cl1;
u(m,1:n+1) = u_cl2;
u;
% NoeudsInterieurs
for j = 2:n
    for i = 3:m-1
        u(i,j+1) = 2*u(i,j) - u(i,j-1) + (r^2) * (u(i-1,j) -
2*u(i,j) + u(i+1,j));
    end
end
u(1:m+1,1);
u(1:m+1,n+1);
disp(['Nombre CFL, r = ' , num2str(abs(r))]);
pause(wait_time)
%plot
uvector=u(:);
umax=max(uvector);
end

```

Dans cette section, nous avons pris le cas d'une corde vibrante comme exemple de problème unidimensionnel des ondes, avec deux (02) sous-problèmes : l'un était celui avec les conditions aux limites de Dirichlet et l'autre était avec les conditions aux limites de Neumann; nous avons fait leur discrétisation selon D.F avec le schéma explicite. La simulation des deux (02) problèmes avec le 'Matlab' nous a permis d'écrire deux (02) programmes qui ont fourni une facilité de calcul. Le jeu de paramètres de simulation a mis en évidence les conditions de stabilité pour chaque problème.

Conclusion

Dans ce travail nous avons appliqué la méthode de différences finies pour la solution de l'équation d'onde unidimensionnelle, on a étudié le problème d'une corde vibrante avec des états de frontière de Dirichlet et de Neumann.

Le développement en série de Taylor est utilisé pour développer les approximations aux différences finies dans le schéma explicite.

En utilisant le théorème d'équivalence de Lax, la convergence de la méthode a été décrite.

Les résultats obtenus ont confirmé une bonne précision de la méthode d'une part, d'autre part les calculs étaient simples en comparant avec les techniques traditionnelles.

L'application de très petits pas de maillage en temps et en espace nous a conduit à établir une importante convergence de solution.

Cependant, plus le pas de maillage est petit, plus le nombre d'itérations est grand ; un pas tend vers zéro nécessite une infinité d'itérations alors un temps de calcul infini. Devant ce paradoxe, l'optimisation de la taille du pas de maillage est fortement recommandée.

On a découvert que le schéma est stable avec les conditions aux limites de Dirichlet et conditionnellement stable avec la condition aux limites de Neumann.

Références bibliographiques

- [1]: **A. Martin**, Equations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, 1992.
- [2]: **F. S. Crawford, Jr.**, Ondes, Cours de physique de Berkeley, Edition française Librairie Armand Colin, Paris, 1972.
- [3]: **H. Brézis**, Analyse fonctionnelle. Dunod, Paris, 1999.
- [4]: **H. Benaddi**, Quelques problèmes aux limites gouvernés par l'opérateur des ondes et de la diffusion. Mémoire de Magister, septembre 2006, Université K. Merbah de Ouargla.
- [5]: **J. L. Lions**, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Presses de L'Univ, de Montréal, 1965.
- [6]: **Jean-Emile Rakotoson, Jean-Michel Rakotoson**, Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles. Presses Universitaires de France, 1999.
- [7]: **J. F. Scheid**, Méthodes numériques pour La dynamique des fluides. Université de Lorraine, 2011.
- [8]: **K. N. Habib**, Convergence Analysis for Wave Equation by Explicit Finite Difference Equation with Dirichlet and Neumann Boundary Condition. Mathematics Letters. Vol. 7, No. 2, pp. 19-24, 2021.
- [9]: **P.G. Ciarlet**, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, 1990.
- [10]: **P.A. Raviart et J. M. Tomas**, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, 1992.

Résumé :

Cette thèse propose la méthode numérique de Différences Finies (D.F) pour la résolution du problème des ondes, dont le schéma utilisé était celui d'Euler explicite et les conditions aux limites appliquées sont de type Dirichlet et Neumann. Les résultats obtenus ont confirmé une bonne précision de la méthode d'une part, d'autre part les calculs étaient simples en comparant avec les techniques analytiques. Le schéma était stable avec les conditions aux limites de Dirichlet et conditionnellement stable avec la condition aux limites de Neumann.

Mots clés : Différences finies, problème des ondes, conditions de Dirichlet, conditions de Neumann.

Abstract:

This thesis proposes the numerical method of Finite Differences (F.D) for the resolution of the wave problem, whose diagram used was that of explicit Euler and the boundary conditions applied are of Dirichlet and Neumann type. The results obtained confirmed a good precision of the method on the one hand, on the other hand the calculations were simple by comparing with the analytical techniques. The scheme was stable with the Dirichlet boundary conditions and conditionally stable with the Neumann boundary condition.

Keywords: Finite differences, wave problem, Dirichlet conditions, Neumann conditions.

ملخص :

تقترح هذه الأطروحة طريقة الفروق المنتهية (ف.م) العددية لحل مسألة الأمواج، أين استخدمنا مخطط أويلر المفصل والشروط الحدية المطبقة هي من نوع ديريكليه ونيومان. أكدت النتائج التي تم الحصول عليها الدقة الحيدة للطريقة من ناحية، ومن ناحية أخرى كانت الحسابات بسيطة بالمقارنة مع التقنيات التحليلية. كان المخطط مستقرًا مع شروط ديريكليه ومستقرًا بشروط مع شروط نيومان.

الكلمات المفتاحية: الفروق المنتهية، مسألة الأمواج، شروط ديريكليه، شروط نيومان.