République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ des SCIENCES de la MATIERE et des MATHEMATIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en **Mathématiques**

Option : **Probabilités et Statistique**

Par

Zerrouki Ines

Titre :

Les équations différentielles stochastiques de type Mckean-Vlasov et leur contrôle relaxé

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Hanane Ben Gherbal	Encadreur
Dr.	Ibrahim Mansoul	Président
Dr.	Saouli Moustapha abdelouaheb	Examinateur

Juin 2022

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A la source de la patience, ma chère mère

A la source de ma force, mon chèr père

A mes soeurs et frères

A mes trés chèrs nouveux et nièces **Amjad Mazeen Wael** et **Leen**

A mes amis et intimes.

A tous ceux qui étaient à côtés de moi et qui m'ont soutenu dans ma carrière universitaire.

Ines Zerrouki

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciments à **Dieu** tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il ma données pour achever ce humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes chèrs parents que Dieu les protégent

avec santé et une longue vie pleine de bonheur.

Je remercie mon encadreur **Dr.Hanane Ben gherbal,** pour sa disponibilité, sa patience,

ses précieux conseils et sa confiance.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury

Dr.Ibrahim Mansoul et **Dr.Saouli Moustapha abdelouaheb**

Je remercie également tous ceux qui ont partagé avec moi les moments difficiles.

Ines Zerrouki

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
EDS	*Equation différentielle stochastique.*
$\mathbb{R}^d$	*Espace réel ecludienne de dimension* d.
$\mathbb{E}$	*Espérance par rapport a la probabilité* $\mathbb{P}$.
B_t	Mouvement brownien
$(MVSDE)$	Mc-kean vlasov stochastic differential equation
$J(.)$	La fonction de coût
U	Ensemble des contrôles admissible.
$\widehat{u}$	Contrôle optimale.
$P-p.s$	*Presque sûrement pour la mesure de probabilité.*

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous considérons une classe spéciale d'équations différentielles stochastiques, nous ajoutons un troisième paramètre aux coefficients appelé paramètre de distribution, ce qui permet de rendre les coefficients dépendants de la loi de processus inconnu non seulement de son état. Cette classe d'équations différentielles est appelée "*les équations différentielles stochastiques de McKean-Vlasov*", notées **(MVSDE)** ou encore de type Mean field **(MFSDE)**.

Les équations stochastiques de type Mean Field ont été étudiées en physique statistique, ces EDSs représentent en quelque sorte le comportement moyen d'un nombre infini de particules. Ces équations ont joué un rôle important dans la théorie des jeux, cette théorie a été inventée par P.L. Lions et J.M. Lasry en 2006, pour résoudre le problème de l'éxistence d'un équilibre de Nash approximatif pour les jeux différentiels, avec un grand nombre de joueurs. D'autre part, ce type d'équations a trouvé des applications dans plusieurs domaines tels que la finance mathématique, les réseaux de communication et la gestion des ressources pétrolières. On examine les propriétés générales de ces équations stochastiques, telles que l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la stabilité. En théorie de contrôle, notre attention s'est portée sur la contrôlabilité des systèmes gouvernés par des EDSs de type McKean-Vlasov. Cette étude est motivée par le comportement de grandes populations en interaction.

On donne un aspect général sur ce mémoire :

Dans le premier chapitre, on commençe par donner quelques préliminaires nécessaires pour aboutir aux principaux résultats. On fait rappel aux notions de base du calcul stochastique, les équations différentielles stochastiques (EDSs) et leurs propriétés générales et la mesure de martingale. On introduit également la métrique de Wasserstein, qui est une métrique dans l'espace des mesures de probabilité.

en deuxième chapitre,on présente le théorème d'éxistence et d'unicité pour une classe de MVSDE sous une condition de type Osgood sur les coefficients, améliorant le cas Lipschitzien, nous introduisons aussi une méthode itérative pour l'approximation d'une solution (l'approximation de Picard), et nous prouvons que sous certaines conditions une suite de processus itérés converge vers la solution unique de 2.1.

Le troisième chapitre est consacré à l'essentiel de ce travail, on considère les trois différents résultats de stabilité.

- Stabilité par rapport à la condition initiale : L'application qui associe une valeur initiale à la solution de 2.1, est une application continue en considèrant certaines conditions de régularité.
- Stabilité par rapport aux coefficients : C'est une façon d'approximer la solution à travers la définition des suites de fonctions qui convergent vers les coefficients.

  Sous certaines hypothèses, nous prouvons que les solutions obtenues convergent vers la solution unique.
- Stabilité par rapport à des processus directeurs : Nous pouvons approximer la solution en approchant le processus directeur par des martingales continues.

On termine par l'étude du problème de contrôle relaxé de ce type des EDSs en se basant sur une suite de problèmes de contrôle.

Chapitre 1

Préliminaires

On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet tout au long de ce travail.

1.1 Processus stochastiques

Dans cette section, nous concentrons sur les processus stochastiques, qui sont une composante nécessaire de la théorie des équations différentielles stochastiques. Nous donnons les définitions de base et les résultats les plus essentiels dont nous aurons besoin plus tard dans cet mémoire.

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité ,*T *un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *tout famille* $X = (X_t)_{t \in T}$ *de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* T *dépend de deux paramètres* t *et* w *telle que :*

pour $w \in \Omega$ fixé : l'état du processus est une variable aléatoire $X_t(w)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
pour t $\in T$ fixé : l'état du processus est une fonction à des valeurs réelles appelée trajectoire .

Définition 1.1.2 (Indistinguabilité) *Soient* X *et* Y *deux processus stochastiques. On* *dit que* $X = (X(t))_{t\in T}$ *et* $Y = (Y(t))_{t\in T}$ *sont indistinguables si :*

$$P(X_t = Y_t \quad , \forall t \in T) = 1.$$

Définition 1.1.3 (Modification des processus) *Soient* X *et* Y *deux processus.* X *est une modification de* Y *si, pour tout* $t \geq 0$ *, les variables aléatoires* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P} - p.s.$

$$\forall t \geq 0, \qquad P(X_t = Y_t) = 1.$$

– La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification.

– Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.

Définition 1.1.4 (Filtration) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace mésurable. Une filtration est une famille croissante des sous tribus emboîtés de* $\mathcal{F}$ *tel que :*

$$\forall s \leq t \quad , \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}, \mathbb{P})$ sera appelé un espace de probabilité filtré.

la filtration naturelle d'un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *est donnée par* $(\mathcal{F}_t^X, t \in \mathbb{R}^+)$ *telle que :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_i; 0 \leq i \leq t\}.$$

Définition 1.1.5 (Processus adapté) *un processus* $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *est adapté a une filtration* $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

Définition 1.1.6 (Processus progressivement mésurable) *On dit que* $X(t)$ *est progressivement mésurable par rapport à une filtration* $(F_t)_{t\geq 0}$*, si l'application :*

$$X : (\omega, t) \longrightarrow X_t\,(\omega)\, de \Omega \times [0, s]\, dans \mathbb{R}$$

est mésurable par rapport à $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}([0,s])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.7 (Processus continu) *un processus est dit à trajectoires continues (processus continu) si :*

$$P(\{w \in \Omega, t \longrightarrow X_t(w)\}) = 1$$

Définition 1.1.8 (Processus de Markov) *un processus* $X = (X_t)_{t\in R^+}$ *est dit de Markov si pour tout* $0 \leq s < t$, *et toute filtration borélienne et borné* $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *On a*

$$E[f(X_t)|F_s^X] = E[f(X_t)|X_{ss}^X] \qquad \mathbb{P} - p.s,$$

avec ($\mathcal{F}_s^X = \sigma\{X_i; 0 \leq i \leq s\}$).

Définition 1.1.9 (Mouvement Brownien) *soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, le processus* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien standard si :*

- $B_0 = 0. \qquad p.s$
- (B_t) est à accroissements independants et stationnaires.
- $B_t \curvearrowright N(0,t), \forall t > 0$.

Définition 1.1.10 (Martingales) *On dit que* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) si :*

- $(M_t)_{t\geq 0}$ est adapté.
- $\forall t \geq 0$, $E(|M_t|) < \infty$.
- $\forall s < t$, $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$, $p.s$ (resp. $\leq M_s$, resp.$\geq M_s$).
- Un mouvement Brownien est une martingale.
- Le processus $\{X_t^2 - t\}$ est une martingale.

Théorème 1.1.1 (Représentation de martingale) *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien. Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale* $\mathcal{F}_t$-

adapté, alors il existe un processus Z tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s$$

1.2 Calculs stochastiques

Dans cette section, nous avons deux objectifs. La première consiste à donner une définition correcte pour l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien. Le deuxième objectif est définir les équations différentielles stochastiques et donner un théorème d'existence et d'unicité pour les solutions.

Définition 1.2.1 (L'intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô)) *Il s'agait d'une intégrale de la forme :*

$$\int_0^T X_t dB_t,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique,répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière, $(B_t)_{t\geq 0}$ pourrait par exemple représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et $(X_t)_{t\geq 0}$ la stratégie de trans répaction sur cet actif d'un investisseur.
L'intégrale est alors le gain réalisé à l'horizon f. la manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur le mathématicien Kiyoshi Itô.

Propriété 1.2.1 *L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :*

- $\int_0^T (aX_1 + bX_2)(s)\, dB(s) = a\int_0^T X_1(s)\, dB(s) + b\int_0^T X_2(s)\, dB(s)$,
- $E(\int_0^T X(s)\, dB(s)) = 0$,
- $E[(\int_0^T X(s)\, dB(s))^2] = E(\int_0^T X(s)^2 \ ds) \qquad (Isométrie\ d'Itô)$,
- $E[(\int_0^T X_1(s)\, dB(s))(\int_0^T X_2(s)\, dB(s)) = E(\int_0^T X_1(s)\, X_2(s)\ ds)$,
- $E(\int_0^t X(s)\, dB(s)\, |F_u) = (\int_0^u X(s)\, dB(s)) \qquad (Propriètè\ de\ martingale)$.

Rappelons que S^1 désigne l'ensemble des processus intégrables, S^2 est l'ensemble des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ tel que :

$$E\left(\int_0^T X^2(s)\,ds\right) < \infty.$$

Définition 1.2.2 ***(processus d'Itô)*** *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô s'il exsiste $X_0, Y \in S^1$ et $Z \in S^2$ tels que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s ds + \int_0^t Z_s dB_s$$

Théorème 1.2.1 ***(formule d'Itô)*** *Soit f une fonction continuement différentiable deux fois et W un mouvement brownien ,On pose :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

On a :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= [f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2)]dt + f'_x(t, X_t)dX_t \\ &= f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)d\langle X\rangle_t . \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) $(X(t))_{0\leq t\leq T}$, $(Y(t))_{0\leq t\leq T}$ *deux processus d'Itô, on a :*

$$X(t)\,Y(t) = X(t)\,Y(t) + \int_0^t X(s)\,dY(s) + \int_0^t Y(s)\,dX(s) + < X, Y >_t .$$

1.2.1 Equations differentielle stochastique (EDS)

Définition 1.2.3 *Soit T un nombre positif. On considère deux fonctions b et σ mesurables de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne également un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une* *filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et* B *un mouvement Brownien sur cet espace. On peut considérer une équation d'une forme plus générale*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Ou sous une forme :

$$\begin{cases} dX_t = x + b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans cette equation, le coefficient b s'appelle le drive et σ s'appelle le coefficient de diffusion.

Définition 1.2.4 (Solution forte) *Une solution forte de l'EDS est un processus* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *continu,* $\mathcal{F}_t$*-adapté, tel que :*

$$\begin{cases} \int_0^t |b(s, X)|^2 + \int_0^t |\sigma(s, X)|^2 ds < \infty \\ X \text{ vérifie l'équation.} \end{cases}$$

Définition 1.2.5 (Solution faible) *La solution faible de l'équation est un triplet :*

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, un espace de probabilité filtré,
- B un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien,
- X, un processus $\mathcal{F}_t-$adapté.

Les processus X et B sont définis sur le même espace donné et vérifient :

$$P(\int_0^T \sigma^2(s, X_s)ds < \infty) = P(\int_0^T b(s, X_s)ds < \infty) = 1,$$

et (B, X) est vérifie l'EDS (1.1).

Théorème 1.2.2 (Existence et unicité) *Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur* b *et* σ *pour avoir un résultat d'éxistence et d'unicité pour* (1.1).

1) b et σ deux fonctions continues .

2) Il existe une constante $K > 0$ telle que ; pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(t,x) + b(t,y)| + |\sigma(t,x) + \sigma(t,y)| \leq K\,|x - y|\,,$$
$$|b(t,x)|^{\,2} + |\sigma(t,x)|^{\,2} \leq K^2(1 - |x|^{\,2}).$$

3) La condition initiale X_0 est indépendante de t, et elle est de carré intégrable.$(E(|X_0|^{\,2}) < +\infty)$.

Alors, pour $t \leq T$, l'EDS admet une solution unique $(X_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues. De plus cette solution vérifie : $E(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^{\,2}) < \infty$.

L'unicité signifie que si $(X_t)_{t\geq 0}$ et$(Y_t)_{t\geq 0}$ sont deux solutions de l'équation (1.1), donc $\mathbb{P} - p.s. \forall t \geq 0, (X_t)_{t\geq 0} = (Y_t)_{t\geq 0}$, alors

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| = 0) = 1.$$

Définition 1.2.6 (Mesure martingale) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* (E, ε) *un espace métrique* $\{M_t(A), t \geq 0; A \in \mathcal{E}\}$ *est appelée un* $\mathcal{F}_t-$*mesure de martingale si et seulement si :*

1. $\{M_t(A), t \geq 0\}$ est une $\mathcal{F}_t-$ martingale, $\forall A \in \mathcal{E}$;
2. $\forall M_t(.)$ est une mesure $\sigma-$finie dans le sens suivant : il existe une suite non décroissante (E_n) de E avec $U_n E_n = E$ tel que

a) Pour chaque $t > 0$, $\sup\limits_{A\in\mathcal{E}_n} [M(A,t)^2] < \infty, \mathcal{E}_n = \mathcal{B}(E_n)$

b) Pour chaque $t > 0$, $E[M(A_j,t)^2] \to 0$; pour toute suite (A_j) de $\mathcal{E}_n$ décroissante à $\varnothing$.

Pour $A, B \in \mathcal{E}$, il existe un unique processus prévisible $\langle M(A), M(B)\rangle_t$ tel que $M(A,t)M(B,t) - \langle M(A), M(B)\rangle_t$ est une martingale. Une mesure de martingale M est appelé orthogonale si $M(A,t).M(B,t)$ est une martingale pour $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cap B = \varnothing$.

Si M est une mesure de martingale orthogonale, on peut prouver l'éxistence d'une mesure positive $\sigma-$finie $\mu(ds, dx)$ sur $\mathbb{R} \times E$; $\mathcal{F}_t$ prévisible, de telle sorte que pour chaque B de

$\mathcal{A}$ le processus $\mu((0,t]\times B))_t$ est prévisible et satisfait

$$\forall B \in \mathcal{E}, \forall t > 0, \qquad \mu((0,t]\times B) = \langle M(B)\rangle_t \qquad P-a.s$$

Définition 1.2.7 (La métrique de Wasserstein) *Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de probabilités définies sur $\mathbb{R}^d$ et pour tout $p > 1$, notons $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de probabilité à moment fini d'ordre p, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, on definit la distance de p-Wasserstein $W_p(\mu,\nu)$ par :*

$$W_p(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \left[\int_{E\times E} |x-y|^p \, d\pi(x,y)\right]^{1/p},$$

où $\Pi(\mu,\nu)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ dont le premier et le second marginales sont respectivement μ et ν.

Proposition 1.2.2 *Dans le cas où $\mu = \mathbb{P}_X$ et $\nu = \mathbb{P}_y$ sont les lois des variables aléatoires X et Y à valeur dans $\mathbb{R}^d$ d'ordre p, alors :*

$$W_p(\mu,\nu) \leq E\left[|X-Y|^p\right].$$

Proof. On a :

$$\begin{aligned}
&W_p(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \left[\int_{E\times E} |x-y|^p \, d\pi(x,y)\right]^{1/p} \\
&W_p(\mu,\nu)^p = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \left[\int_{E\times E} |x-y|^p \, d\pi(x,y)\right] \\
&\leq \int_{E\times E} |x-y|^p \, d\left(\mathbb{P}_{(X,Y)}\right)(x,y) \\
&= E\left[|X-Y|^p\right].
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.1 *Nous pouvons avoir besoin de définir la continuité de Lipschitz par* *rapport à la variable de distribution, c'est-à-dire pour toutes les mesures de probabilité tel que pour tout* $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$

$$|b\,(t, X_t, \mu) - b\,(t, X_t, \nu)| \leq d\,(\mu, \nu)\,,$$

où d est la distance entre deux mesures de probabilité.

Lemme 1.2.1 *Soient* $\mu, \nu \in \mathcal{P}_q\left(\mathbb{R}^d\right)$. *Alors*

$$W_p\,(\mu, \nu) \leq W_q\,(\mu, \nu)\,,$$

pour tout $1 \leq p < q < \infty$.

Proposition 1.2.3 (Kantovich-Rubinstein) *Pour* $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ *on a :*

$$W_1\,(\mu, \nu) = \left\{ \left| \sup \int_{\mathbb{R}^d} hd\,(\mu - \nu) \right| \, \middle| h \in Lips_1(\mathbb{R}^d) \right\};$$

où $Lips_1(\mathbb{R}^d)$ est composé de toutes les fonctions $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$|h\,(x) - h\,(y)| \leq \|x - y\|\,,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$.

1.3 Quelques inégalités

Lemme 1.3.1 (Inégalité de Gronwall) *Soit g une fonction continue telle que pour tout* $t \geq 0$, *on a :*

$$\forall t \in [0, T] \qquad 0 \leq g\,(t) \leq \alpha\,(t) + \beta \int_0^t g(s)ds, \quad avec \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Pour une constante $\beta \geq 0$ et pour une fonction $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebèsgue. On a alors

$$\forall t \in [0,T] \qquad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) \exp(\beta(t-s))\, ds.$$

En particulier, si est une fonction constante, on trouve

$$\forall t \in [0,T] \qquad g(t) \leq \alpha \exp(\beta)$$

Lemme 1.3.2 (Inégalité de Hölder) *Soient deux nombres conjugués* $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ *avec* $p, q \in \left]1, \infty\right[$

$f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors le produit $fg \in L^1$

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lemme 1.3.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *L'inégalité de Hölder pour* $p = q = 2$

$$\int |f.g| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Lemme 1.3.4 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BGD") *Soit* $L \in \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}^{d\times m}\right)$ *et* $p \in (0,\infty)$*, donc il existe deux constantes* $c_p, C_p > 0$ *ne dépendant que de* p *tel que :*

$$c_p \mathbb{E}\left[\sqrt{\int_0^T \|L_s\|^2 ds}\right]^2 \leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left\|\int_0^T L_s dB_s\right\|^P\right) \leq c_p \mathbb{E}\left[\sqrt{\int_0^T \|L_s\|^2 ds}\right]^2$$

Théorème 1.3.1 (Convergence dominée de Lebesgue) *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions mésurables telle que*

– $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x)$

– Il existe une fonction intégrable g telle que :

$$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \leq g(x)$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Chapitre 2

Les équations différentielles stochastiques de type Mckean-Vlasov

Dans cette section, nous introduisons les équations différentielles stochastiques de McKean-Vlasov **(MVSDE**s), qui sont une généralisation des équations différentielles stochastiques, mais les coefficients dépendent de la loi de processus inconnu non seulement de son état.

2.1 Formulation de problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité équipé d'une filtration, satisfaisant les conditions usuelles et B_t un mouvement Brownien d-dimensionelle défini sur cet espace.
Considérons l'équation différentielle stochastique de McKean-Vlasov **(MVSDE)** suivante qui s'appelle aussi l'équation différentielle stochastique à champ moyen :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}\right) ds + \sigma\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}\right) dB_s \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où b est la dérive et σ est la coefficient de diffusion. Pour ce type des EDSs la dérive et le coefficient de diffusion dépendent aussi au distribution de la solution.

Ces hypothèses sont valables tout au long de ce travail :

Notons $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ l'espace de toutes les mesures de probabilité μ avec un second moment fini, $i.e \int_{R^d} |x|^2 \mu(dx) < +\infty$. Supposons les fonctions boréliennes mésurables

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$$
$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

($\mathbf{H}_1$) Il existe $C > 0$ telle que

$$|b(t,x,\mu)| \leq C(1+|x|)$$
$$|\sigma(t,x,\mu)| \leq C(1+|x|),$$

pour tout $(t,x,\mu) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

($\mathbf{H}_2$) Il existe un constant $L > 0$ tel que :

$$|b(t,x,\mu) - b(t,y,\mu')| \leq L\left[|x-y| + W_2(\mu,\mu')\right]$$
$$|\sigma(t,x,\mu) - \sigma(t,y,\mu')| \leq L\left[|x-y| + W_2(\mu,\mu')\right]$$

Pour tout $t \in [0,T], x, y \in \mathbb{R}^d, \mu, \mu' \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, où W_2 est la métrique de wassertein.

2.2 Existence et unicité des solutions

2.2.1 Cas globale de Lipschitz

Dans cette section, nous allons généraliser le théorème qui énonce l'éxistence et l'unicité d'une solution.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypthèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$), l'équation (2.1) admet une solution* *unique tel que*

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t|^2\right] < +\infty$$

Preuve. Considérons l'application suivante

$$\Psi : \mathcal{C}\left([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right) \rightarrow \mathcal{C}\left([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right)$$
$$\mu \rightarrow \Psi(\mu) = (\mathcal{L}(X_t^\mu))_{t\geq 0}, \text{la distribution de } X_t^\mu$$

Ψ est bien définie comme X_t^μ a trajectoires continues et $E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^\mu|^2\right] < +\infty.$
Pour prouver l'existence et l'unicité de (2.1), il suffit de prouver que l'application a un point fixe unique. Utilisons le calcul stochastique, les propriètés de la métrique de Wasserstein, en va montrer facilement que :

$$\sup_{t\leq T} W_2(\Psi^k(\mu)_t, \Psi^k(\nu)_t)^2 \leq C\frac{T^k}{k!}\sup_{t\leq T} W_2(\mu,\nu)^2$$

pour x grand, Ψ^k est une contraction stricte qui implique que Ψ admet un point fixe unique dans l'espace métrique complet $C\left([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\right)$. ■

Exemple 2.2.1 *On va montrer qu'il existe une solution unique au MVSDE suivante*

$$\begin{cases} dX_t = \cos(X_t)\, dB_t + \mathbb{E}\sin(X_t)\, dt \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

Rappelons que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions Lipschitz bornées par 1. Par conséquent, le coefficient σ satisfait clairement (H_1) et (H_2), il suffit donc de vérifier que le coefficient b est Lipschitzien continu. On a

$$b(t,x,\mu)=\int_{\mathbb{R}}\sin(u)\,d\mu(u),$$

utilisons la proposition (1.2.3)

$$\begin{aligned}
&|b(t,x,\mu)-b(t,x,\nu)|=\left|\int_{\mathbb{R}}\sin(u)\,d\mu(u)-\int_{\mathbb{R}}\sin(t)\,d\nu(t)\right|\\
&=\left|\int_{\mathbb{R}}\sin(u)\,d(\mu-\nu)\right|\\
&\leq\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}}h(u)\,d(\mu-\nu)(u)\right||h\in Lips_1(\mathbb{R})\right\}\\
&=W_1(\mu,\nu)\\
&=|x-y|+W_1(\mu,\nu)
\end{aligned}$$

Donc, par le lemme (1.2.1) on trouve :

$$|b(t,x,\mu)-b(t,x,\nu)|=|x-y|+W_2(\mu,\nu).$$

2.2.2 L'unicité sous la condition d'Osgood

Dans cette section, nous relaxons la condition globale de Lipschitz en la variable d'état.En va démontrer l'éxistence et l'unicité d'une solution lorsque les coefficients sont globalement Lipschitz dans la variable de distribution et satisfont un condition de type Osgood en la variable d'état. Considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t=b\left(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t}\right)ds+\sigma\left(t,X_t\right)dB_s \\ X_0=x \end{cases} \tag{2.2}$$

Supposons que b et σ sont des fonctions boreliennes bornées a valeurs réelles satisfaisant :

(H$_4$) Il existe $C > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $(\mu, \nu) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$

$$|b(t, x, \mu) - b(t, x, \upsilon)| \leq CW_1(\mu, \nu)$$

(H$_5$) Il existe une fonction strictement croissante $\rho(u)$ sur $[0; +\infty)$ telle que $\rho(0) = 0$ et ρ^2 une fonction convexe satisfaisant $\int\limits_{0^+} \rho^{-2}(u)\, du = +\infty$, telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(|x - y|).$$

(H$_6$) Il existe une fonction strictement croissante $\kappa(u)$ sur $[0; +\infty)$ telle que $\kappa(0) = 0$ et κ concave satisfaisant $\int\limits_{0^+} k^{-1}(u)\, du = +\infty$,telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$|b(t, x, \mu) - b(t, y, \mu)| \leq \kappa(|x - y|).$$

Avec ces hypothéses on peut formuler et prouver le théorème suivant qui nous donne l'unicité trajectorielle pour la solution de l'équation (2.2).

Théorème 2.2.2 *Sous les hypothèses $(H_4) - (H_6)$ l'équation (2.2) possède la propriété d'unicité forte.*

preuve. Puisque $\int\limits_{0^+} \rho^{-2}(u)\, du = +\infty$, il existe une suite décroissante (α_n) de nombres positives réelles telque $1 > \alpha_n$ satisfait :

$$\int_{\alpha_1}^{1} \rho^{-2}(u)\, du = 1, \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \rho^{-2}(u)\, du = 2, ..., \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} \rho^{-2}(u)\, du = n, ...$$

α_n converge vers 0, quand n tend vers 0.

Les propriétés de ρ nous permettent de construire des fonctions $\psi_n(u)$, $n = 1, 2, ...$, telles que :

$\psi_n(u)$ est une fonction continue telle que son support est contenu dans (α_n, α_{n-1}),

$0 \leq \psi_n(u) \leq \frac{2}{n}\rho^{-2}(u)$ et $\int\limits_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} \psi_n(u)du = 1.$

Soit

$$\vartheta_n(x) = \int\limits_0^{|x|} dy \int\limits_0^y \psi_n(u)du, x \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $\vartheta_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $|\vartheta_n'| \leq 1$ et (ϑ_n) est une suite croissante converge vers $|x|$.

Soit X_t^1 et X_t^2 deux solutions correspendant au même mouvement Brownien et même MVSDE :

$$X_t^1 - X_t^2 = \int\limits_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right) dB_s + \int\limits_0^t \left(b\left(s, X_s^1, \mathbb{P}_{X_s^1}\right) - b\left(s, X_s^2, \mathbb{P}_{X_s^2}\right)\right) dB_s.$$

Utilisons la formule d'Itô, on obtient :

$$\vartheta_n\left(X_t^1 - X_t^2\right) = \int\limits_0^t \vartheta_n'\left(X_s^1 - X_s^2\right)\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right) dB_s$$
$$+\int\limits_0^t \vartheta_n'\left(X_s^1 - X_s^2\right)\left(b\left(s, X_s^1, \mathbb{P}_{X_s^1}\right) - b\left(s, X_s^2, \mathbb{P}_{X_s^2}\right)\right) ds$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta_n''\left(X_s^1 - X_s^2\right)\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right)^2 ds,$$

ϑ_n' et σ sont bornées, alors le processus sous le signe d'intégrale est suffisamment intégrable. Le premier terme est une martingale (locale) Alors son espérance est 0, Donc

$$E\left(\vartheta_n\left(X_t^1 - X_t^2\right)\right) = E\left[\int\limits_0^t \vartheta_n'\left(X_s^1 - X_s^2\right)\left(b\left(s, X_s^1, \mathbb{P}_{X_s^1}\right) - b\left(s, X_s^2, \mathbb{P}_{X_s^2}\right)\right) ds\right]$$
$$+\frac{1}{2}E\left[\int\limits_0^t \vartheta_n''\left(X_s^1 - X_s^2\right)\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right)^2 ds\right]$$
$$= I_1 + I_2 \,.$$

Mais nous savons déja que

$$W_1\left(\mathbb{P}_{X_s^1},\mathbb{P}_{X_s^2}\right)=E\left[\left|X_s^1-X_s^2\right|\right]$$

Donc

$$|I_1|\leq E\int_0^t\kappa\left|X_s^1-X_s^2\right|ds+\int_0^t CE\left|X_s^1-X_s^2\right|ds.$$

Puis par le lemme de Gronwall, il existe un constant M tel que

$$|I_1|\leq M.E\int_0^t\kappa\left|X_s^1-X_s^2\right|ds.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}|I_2|&=\frac{1}{2}E\left[\int_0^t\vartheta_n''\left(X_s^1-X_s^2\right)\left(\sigma\left(s,X_s^1\right)-\sigma\left(s,X_s^2\right)\right)^2ds\right]\\&\leq\frac{1}{2}E\left[\int_0^t\frac{2}{n}\rho^{-2}\left(X_s^1-X_s^2\right)\rho^2\left(X_s^1-X_s^2\right)ds\right]=\frac{t}{n}\ .\end{aligned}$$

Donc $|I_2|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Soient n tend vers $+\infty$ on trouve :

$$E\left(\left|X_t^1-X_t^2\right|\right)\leq M.E\int_0^t\kappa\left(\left|X_s^1-X_s^2\right|\right)ds.$$

Pour que $\int_{0^+}k^{-1}(u)\,du=+\infty$. Nous conclure que $E\left(|X_t^1-X_t^2|\right)=0.$ ■

2.3 Convergence de l'approximation successive de Picard

Supposons que $b(t,x,\mu)$ et $\sigma(t,x,\mu)$ satisfont les hypothèses **(H$_1$)** et **(H$_2$)**. Nous allons prouver la convergence de schéma d'itération de Picard. Ce schéma utile pour les calculs numériques de la solution unique de l'équation (2.1).

Soit $(X_t^0) = x$ pour tout $t \in [0,T]$, On définit $\left(X_t^{n+1}\right)$ la solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t^{n+1} = b\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}\right) ds + \sigma\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}\right) dB_s \\ X_0^{n+1} = x. \end{cases}$$

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses **(H$_1$)** et **(H$_2$)**, la suite (X^n) converge vers X la solution unique de (2.1)*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^{\,2}\right] \longrightarrow 0.$$

Preuve. Soit $n \geq 0$, appliquant les arguments usuelles comme l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Schwartz et l'inégalité de Burkholder Davis Gundy pour la partie martingale, on obtient :

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq 2\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right| ds\right)^2$$

$$+2\left(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n, P_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}, P_{X_s^{n-1}}\right)\right| dB_s\right)^2$$

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \leq 2TE[\int_0^T \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s^{n-1}, \mathbb{P}_{X_s^{n-1}}\right)\right|^2 ds]$$

$$+2C_2E[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}, \mathbb{P}_{X_s^{n-1}}\right)\right|^2 ds].$$

Les coefficients b et σ étant Lipschitziennes est continus en (x, μ). Alors on obtient :

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq 2\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T E\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]+W_2\left(\mathbb{P}_{X_s^n},\mathbb{P}_{X_s^{n-1}}\right)ds$$

$$\leq 4\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T E\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]ds$$

$$\leq 4\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]ds,$$

pour tout $n\geq 1$ et $t\leq T$

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^1-X_s^0\right|^2\right]\leq 2T\int_0^T b\left|(s,x,\mu)\right|^2 ds+C_2\int_0^T \sigma\left|(s,x,\mu)\right|^2 ds$$

$$\leq 2\left(C_2+T\right)M\left(1+E\left|x\right|^2\right)T$$

$$\leq A_1 T,$$

où le constant A_1 dépend seulement de C_2, M, T et $E\left|x\right|^2$. Donc par récurrence en n, on obtient :

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{A_2^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En particulier, il implique que (X_n^t) est une suite de Cauchy dans l'éspace complet $L^2\left(\Omega,\left(C\left[0,T\right],\mathbb{R}^d\right)\right)$.

Par conséquent (X_t^n) converge vers une limite (X_t) qui est la solution unique de (2.1). ■

Chapitre 3

Stabilité et compactification en contrôle optimal des équations différentielles stochaastique de type Mckean-Vlasov

Dans ce chapitre, nous considérons quelques résultats de stabilité de la solution. Dans ce qui suit, nous considérons des problèmes de contrôle optimal, notre point de départ est le problème de contrôle strict. Nous construisons un deuxième problème de contrôle appelé le contrôle relaxé et nous donnons son approximation.

3.1 Quelques propriétes de stabilité des équations différentielles stochastiques

3.1.1 Stabilité par rapport la condition initiale

On note par (X_t^x) la solution unique de 2.1 tel que $X_0^x = x$

$$\begin{cases} dX_t^x = b\left(t, X_t^x, \mathbb{P}_{X_t^x}\right) dt + \sigma\left(t, X_t^x, \mathbb{P}_{X_t^x}\right) dB_t \\ X_0^x = x \end{cases}$$

Théorème 3.1.1 *Supposons que $b(t,x,\mu)$ et $\sigma(t,x,\mu)$ satisfont **(H_1)**,**(H_2)**, alors l'appliaction :*

$$\Phi : \mathbb{R}^d \to L^2\left(\Omega, \mathcal{C}\left[0,T\right], \mathbb{R}^d\right)$$

définie par $\left(\Phi\left(x\right)_t\right) = \left(X_t^x\right)$ est continue.

Preuve. Soit (X_n) une suite de $\mathbb{R}^d$ converge vers X. Prouvons que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} \left|X_t^n - X_t\right|^2\right] = 0,$$

où $X_t^n = X_t$. On a

$$|X_t^n - X_t|^2 = |x_n - x + \int_0^t \left(b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right) ds$$

$$+\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) dB_s|^2$$

$$\leq 3\left|x_n - x\right|^2 + 3(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right| ds)^2$$

$$+3(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right| dB_s)^2$$

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3\left|x_n - x\right|^2 + 3E[\sup_{s\leq t}\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right| ds)]^2$$

$$+3E[\sup_{s\leq t}\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right| dB_s]^2 .$$

Par les inégalités de Schawrtz et Burkholder Davis Gundy, On obtient :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3\left|x_n - x\right|^2 + 3TE[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right|^2 ds)]$$

$$+3C_2E[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right|^2 ds].$$

La condition de Lipschitz implique que :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3\left|x_n - x\right|^2 + 3\left(T + C_2\right)L^2[\int_0^t E\left|X_s^n - X_s\right|^2 + \mathbb{W}_2\left(\mathbb{P}_{X_s^n}, \mathbb{P}_{X_s}\right)]ds$$

tel que

$$\mathbb{W}_2^2\left(\mathbb{P}_{X_t^n}, \mathbb{P}_{X_t}\right) \leq E\left[|X_s^n - X_s|^2\right],$$

alors

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3|x_n - x|^2 + 6(T + c_2)L^2\int_0^t E|X_s^n - X_s|^2 ds$$

$$\leq 3|x_n - x|^2 + 6(T + c_2)L^2\int_0^t E[\sup_{t\leq T}|X_s^n - X_s|^2]ds.$$

Appliquant le lemme de Gronwall, on conclut que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3|x_n - x|^2 \exp\left[6(T + c_2)L^2 t\right].$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X,$$

implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] = 0.$$

■

3.1.2 Stabilité par rapport aux coefficients

Dans cette partie, en va établir la stabilité des MVSDEs par rapport aux coefficients b et σ à perturbations faibles. Considérons des suites de fonctions (b_n) et (σ_n) et considérons l'équation :

$$\begin{cases} dX_t^n = b_n\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}\right)dt + \sigma_n\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}\right)dB_t \\ X_0^n = x. \end{cases} \tag{3.1}$$

Théorème 3.1.2 *Supposons que les fonctions $b(t,x,\mu)$, $b_n(t,x,\mu)$, $\sigma(t,x,\mu)$ et $\sigma_n(t,x,\mu)$ satisfont **(H_1)** et **(H_2)**, Supposons en outre que pour chaque $T > 0$ et chaque ensemble compact K , il existe $C > 0$ tel que*

i) $\sup_{t\leq T}\left(|b_n(t,x,\mu)| + |\sigma_n(t,x,\mu)|\right) \leq C(1 + |x|)$,

ii) $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\leq T}\sup_{x\in K}\sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)}\|b_n(t,x,\mu)-b(t,x,\mu)\|+\|\sigma_n(t,x,\mu)-\sigma(t,x,\mu)\|=0.$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^n-X_t\right|^2\right]=0,$$

où (X_t^n) et (X_t) sont respectivement les solution de (3.1) et (2.1).

Proof. pour tout $n\in\mathbb{N}$, Soit (X_t^n) la solution de (3.1), utilisons :

$$\begin{aligned}
\left|X_t^n-X_t\right|^2 &\leq 3\Big(\int_0^t\left|b_n\left(s,X_s^n,\mathbb{P}_{X_s^n}\right)-b_n\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)\right|ds\Big)^2\\
&+3\Big(\int_0^t\left|b_n\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)-b\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)\right|ds\Big)^2\\
&+3\left|\int_0^t\left|\sigma_n\left(s,X_s^n,\mathbb{P}_{X_s^n}\right)-\sigma_n\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)\right|ds)^2\right|\\
&+3\left|\int_0^t\left|\sigma_n\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)-\sigma\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)\right|ds)^2\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Burkholder Davis Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^n-X_t\right|^2\right] &\leq 3\left(T+C_2\right)L^2\int_0^t\mathbb{E}[\left|X_s^n-X_s\right|^2+W_2\left(\mathbb{P}_{X_s^n},\mathbb{P}_{X_s}\right)^2]ds\\
&+3\left(T+C_2\right)\mathbb{E}[\int_0^t\left|b_n\left(s,X_s^n,\mathbb{P}_{X_s}\right)-b\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)\right|^2ds]\\
&+3\left(T+C_2\right)\mathbb{E}[\int_0^t\left|\sigma_n\left(s,X_s^n,\mathbb{P}_{X_s}\right)-\sigma\left(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s}\right)\right|^2ds]\\
&\leq 6\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T\mathbb{E}[\left|X_s^n-X_s\right|^2]ds+K_n\\
&\leq 6\left(T+C_2\right)L^2\int_0^T\mathbb{E}[\sup_{s\leq t}\left|X_s^n-X_s\right|^2]dt+K_n,
\end{aligned}$$

el que

$$K_n = 3\left(T + C_2\right)\mathbb{E}[\int_0^T \left|b_n\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right) - b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right)\right|^2 + \left|\sigma_n\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s}\right) - \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right)\right|^2]ds.$$

Par le lemme de Gronwall, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^n - X_t\right|^2\right] \leq K_n \exp 6\left(T + C_2\right)L^2 T.$$

Donc par les hypothèses $i)$ et $ii)$ il est facile à voir que $K_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, cela nous amène à la preuve. ■

3.1.3 Stabilité par rapport aux processus directeurs

Dans cette partie, nous considérons les MVSDEs dirigées par des semi-martingales continues. Soit $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ des fonctions continues bornées. On considère les MVSDEs dirigées par des semi-martingales continues de la forme suivante

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}\right)dA_t + \sigma\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}\right)dM_t \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{3.2}$$

où (A_t) est un processus continu adapté à variation bornée et M_t est un martingale locale continu.

Considérons la suite suivante de MVSDEs :

$$\begin{cases} dX_t^n = b\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}\right)dA_t^n + \sigma\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}\right)dM_t^n \\ X_0^n = x \end{cases} \tag{3.3}$$

où (A^n) est une suite des processus continus et $\mathcal{F}_t-$adaptés à variation bornée et M^n est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ martingale locale continue.

Supposons que (A, A^n, M, M^n) satisfait :

$(\mathbf{H}_7)$

1. La famille (A, A^n, M, M^n) est bornée dans $\mathbb{C}([0,1])^4$.
2. $(M^n - M)$ converge vers 0 en probabilité dans $\mathbb{C}([0,1])$ quand n tends vers $+\infty$.
3. La variation totale $(A^n - A)$ converge vers 0 en probabilité dans $\mathbb{C}([0,1])$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 3.1.3 *Supposons que $b(t,x,\mu)$ et $\sigma(t,x,\mu)$ satisfont **$(\mathbf{H}_1)$,$(\mathbf{H}_2)$** : Supposons en outre que (A, A^n, M, M^n) vérifie **$(\mathbf{H}_7)$**, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] = 0,$$

où (X_t^n) et (X_t) sont respectivement des solutions de (3.2) et (3.3).

Proof. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors en utilisant les mêmes arguments des théorèmes précédents, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3(\mathbb{E}[\sup_{t\leq T} \int_0^t \left|b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right)\right|]dA_s^n)^2$$
$$+3\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) - \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_s^n}\right) dM_s^n\right|^2\right]$$
$$+3\mathbb{E}[(\sup_{t\leq T}\int_0^t |b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right)| \, d\left|A_s^n - A_s\right|)^2 + \sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right) d(M_s^n - M_s)\right|^2].$$

soit

$$K_n = 3\mathbb{E}[(\sup_{t\leq T}\int_0^t |b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right)| \, d\left|A_s^n - A_s\right|)^2 + \sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}\right) d(M_s^n - M_s)\right|^2].$$

En utilisant les iinégalités de Schwartz et Burkholder Davis Gundy avec les conditions de

Lipschitz, on obtient

$$\mathbb{E}[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2] \leq C(T)(\int_0^T (\mathbb{E}[\left(\sup_{s\leq t}|X_s^n - X_s|^2\right)$$

$$+\mathbb{W}_2\left(\mathbb{P}_{X_s^n}, \mathbb{P}_{X_s}\right)^2)\left(dA_s^n + d < M^n,\ M^n >_s\right)] + K_n$$

$$\leq 2C(T)\int_0^T \mathbb{E}[\sup_{s\leq t}|X_s^n - X_s|^2]\left(dA_s^n + d < M^n,\ M^n >_s\right)] + K_n,$$

où $C(T)$ est une constante positive qui peut varier d'une ligne à l'autre.

Puisque $(A_s^n + d < M^n, M^n >_s)$ est un processus croissant, alors selon le lemme de Gronwall

$$\mathbb{E}[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2] \leq 2K_n C E\left(dA_T^n + d < M^n,\ M^n >_T\right) < +\infty,$$

où C est une constante.

En utilisant l'hypothèse **($\mathbf{H}_7$),** c'est facile d'avoir que :

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = 0,$$

par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right] = 0.$$

■

3.2 Compactification en contrôle optimal des MVSDEs

Dans cette partie, nous considérons les problèmes de contrôle optimal, où le système est réagi par une équation différentielle stochastique de McKean-Vlasov (MVSDE)

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, u_t\right) ds + \sigma\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, u_t\right) dB_s \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.4}$$

La fonction de coût sur l'intervalle de temps $[0, T]$ a la forme :

$$J\left(u\right) = E\left[\int_0^T h\left(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, u_t\right) dt + g\left(X_T, \mathbb{P}_{X_T}\right)\right].$$

L'objectif est de minimiser le coût fonctionnel $J\left(u\right)$ sur l'espace $\mathcal{U}_{ad}$ trouver u^* tel que

$$J\left(u^*\right) = \min\left\{J\left(u\right), u \in \mathcal{U}_{ad}\right\}.$$

On note $\mathbb{V}$ l'ensemble des mesures de produit sur $[0, T] \times \mathbb{A}$ dont la projection sur $[0, T]$ coincide avec la mesure de Lebesgue dt. $\mathbb{V}$ en tant que sous-espace fermé de l'espace des mesures positives de radon $M_+([0, T] \times \mathbb{A})$ est compact pour la topologie de convergence faible.

Dans cette section, en va prouver deux résultats principaux. Le premier est un résultat d'approximation forte du problème de contrôle relaxé et le deuxième résultat est l'existence d'un contrôle optimal relaxé sous la continuité des coefficients.

3.2.1 Formulation de problème

Soit (B_t) est un mouvement Brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni de la topologie introduite par la métrique de 2-Wasserstein, satisfaisant aux conditions habituelles. Soit $\mathbb{A}$ un espace métrique compact appelé espace d'actions. On défini la métrique de 2-Wesserstein $W_2\left(\mu, \nu\right)$ par

$$W_2\left(\mu, \nu\right) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left[\int_{E \times E} |x - y|^2 \, d\pi(x, y)\right]^{1/2},$$

où $\Pi(\mu,\nu)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dont le premier et le second marginales sont respectivement μ et ν.

Dans le cas où $\mu = \mathbb{P}_X$ et $\nu = \mathbb{P}_y$ sont les lois des variables aléatoires X et Y à valeur dans $\mathbb{R}^d$ d'ordre p, alors :

$$W_2(\mu,\nu)^2 \leq E\left[|X-Y|^2\right].$$

Supposons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} b &: [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}^d \\ \sigma &: [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d \\ h &: [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}^d \\ g &: \mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{3.5}$$

sont des fonctions bornées et continues.

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J(u) = E\left[\int_0^T h(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t},u_t)\,dt + g(X_T,\mathbb{P}_{X_T})\right] \\ X_t = x + \int_0^t b(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s},u_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s},u_s)\,dB_s. \end{cases}$$

Sur $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des contrôles admissibles (contrôles stricts) qui sont des processus progressivement mesurables avec des valeurs sur l'espace des actions $\mathbb{A}$.

Soit L^v le générateur infinitésimal associé à la solution de l'équation(3.4)

$$L^v f(t,x,a) = \frac{1}{2}\sigma\sigma^*\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x,a) + b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,a),$$

où $b = b(t,x,\nu,a)$ et $\sigma\sigma^* = \sigma\sigma^*(t,x,\nu,a)$ pour $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Définition 3.2.1 *Un contrôle strict est le terme* $\alpha = (\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P},u,X,x)$ *tel que*

1. $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ *est un espace de probabilité équipé d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *satisfaisant aux conditions usuelles.*

2. *α est un processus à valeur dans $\mathbb{A}$, progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.*

3. *(X_t) est à valeur dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_t-$adapté, avec des trajectoires continus, tels que*

$$\mathrm{f}(X_t) - f(x) - \int_0^t L^{\mathbb{P}_{X_s}} f\left(s, X_s, u_s\right) ds \ estuneP - martingale,$$

pour chaque $f \in C_b^2$.

3.2.2 Le problème de contrôle relaxé

Soit $\mathbb{V}$ l'ensemble des mesures produit μ sur $[0,T] \times \mathbb{A}$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt. Comme $\mathbb{V}$ un sous-espace fermé de l'espace des mesures positives du radon $\mathbb{M}_+([0,T] \times A)$, compact pour la topologie de convergence faible.

Définition 3.2.2 *Un contrôle mesuré à valeurs sur l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *est une variable aléatoire.*

$\mu = dt.\mu_t\left(da\right)$ à valeurs dans $\mathbb{V}$, telle que $\mu_t\left(da\right)$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ tel que pour chaque t, $1_{(0,t]}.\mu$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

Définition 3.2.3 *Un contrôle relaxé est le terme $\alpha = (\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mu, X, x)$ tel que*

1. *$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions usuelles.*

2. *μ est un contrôle relaxé, progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.*

3. *(X_t) à valeur dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_t-$adapté, à des trajectoires continus, tels que*

$$\mathrm{f}(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} L^{\mathbb{P}_{X_s}} f\left(s, X_s, a\right) \mu_s\left(da\right) ds \ estunP - martingale,$$

pour chaque $f \in C_b^2$.

Par conséquence, La fonction de coût relaxé est définie par

$$J(u) = E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{A}} h(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, a)\, \mu_t(da)dt + g(X_T, \mathbb{P}_{X_T})\right]$$

Remarque 3.2.1 *L'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ de contrôles stricts est intégré dans l'ensemble de contrôles relaxé par identifier u_t avec $dt\delta_{u_t}(da)$.*

Le processus d'état correspondant à un contrôle relaxé doit satisfaire une MVSDE, dirigée par une mesure de martingale.

$$\begin{cases} dX_t = \int_{\mathbb{A}} b(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, a)\, \mu_t(da)dt + \int_{\mathbb{A}} \sigma(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, a)\, M(da, dt) \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{3.6}$$

où M est une martingale continue orthogonale, d'intensité $dt\mu_t(da)$.

Le problème de contrôle relaxé est donc défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J(u) = E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{A}} h(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, u_t)\, \mu_t(da)dt + g(X_T, \mathbb{P}_{X_T})\right] \\ X_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}, a)\, \mu_t(da)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma(s, X_s, \mathbb{P}_{X_s}, u_s)\, M(da, ds), \end{cases}$$

sur la classe des contrôles relaxés.

3.2.3 Approximation du problème de contrôle relaxé

Soit μ un contrôle relaxé. Il existe alors une suite de processus adaptés u_t^n à valeurs dans $\mathbb{A}$, de telles sortes que la suite de mesures aléatoire $\left(\delta_{u_t^n}(da)\, dt\right)$ converge dans $\mathbb{V}$ vers $\mu_t(da)$, $P - a.s$, c'est-à-dire pour tout f continue sur $[0, T] \times \mathbb{A}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(s, u_s^n)\, ds = \int_0^T \int_{\mathbb{A}} f(s, a)\, \mu_t(da) \text{ uniformément dans } t \in [0, T], P - a.s.$$

Preuve. Soit X la solution de l'équation (3.4) correspond à u^n, où u^n est un contrôle stricte comme défini dans le dernier lemme. Si on note $M^n(t,F)=\int_0^t\int_F \delta_{u_s^n}(da)\,dW_s$, où $M^n(t,F)$ une mesure de martingale orthogonale et X_t^n peut écrit sous une forme relaxé comme suit

$$\begin{cases} dX_t^n = \int_{\mathbb{A}} b\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}, a\right)\delta_{u_t^n}(da)dt + \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(t, X_t^n, \mathbb{P}_{X_t^n}, a\right) M^n(dt,da) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Donc, on peut considérer X_t^n comme la solution de (3.6) correspondant au contrôle relaxé $\mu^n = dt\delta_{u_t^n}(da)$.

Comme $\left(\delta_{u_t^n}(da)\,dt\right)$ converge faiblement vers $\mu_t(da)\,dt$, $P-a.s.$ Alors, pour tout processus prévisible borné $\vartheta : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}$, tel que $\vartheta(\omega,t,.)$ est continus, On a

$$E\left[\left(\int_0^T\int_{\mathbb{A}}\vartheta(\omega,t,a)\,M^n(da,dt) - \int_0^t\int_{\mathbb{A}}\vartheta(\omega,t,a)\,M(da,dt)\right)^2\right] \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad n\longrightarrow+\infty$$

■

Théorème 3.2.1 *Soit X la solution de processus d'état relaxé de* (3.6) *et X_n la solution de* (3.4) *correspond à u^n. Alors, si l'unicité trajectorielle est vérifie pour l'équation* (3.6) *on a :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sup\limits_{t\leq T}|X_t^n - X_t|^2\right]=0.$

2) Si $J(u^n)$ et $J(\mu)$ désignent les coûts attendus correspondant respectivement à u^n et μ, alors $J(u^n)$ converge vers $J(\mu)$.

preuve .

i) Soit X_t,X_t^n les solutions du MVSDE correspondant aux contrôles μ et u^n. On a

$$
\begin{aligned}
|X_t - X_t^n| &\leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, u\right) \mu_s(da).ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_t^n}, u\right) \delta_{u_s^n}(da) ds \right| \\
&+ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, a\right) M(ds, da) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_t^n}, a\right) M^n(ds, da) \right| \\
&\leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, u\right) \mu_s(da).ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, u\right) \delta_{u_s^n}(da) ds \right| \\
&+ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, u\right) \delta_{u_s^n}(da) ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s^n, \mathbb{P}_{X_t^n}, u\right) \delta_{u_s^n}(da) ds \right| \\
&+ \left| \int_0^s \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(v, X_v, \mathbb{P}_{X_v}, a\right) M(dv, da) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(v, X_v, \mathbb{P}_{X_v}, a\right) M^n(dv, da) \right| \\
&+ \left| \int_0^s \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(v, X_v, \mathbb{P}_{X_v}, a\right) M^n(dv, da) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(v, X_v^n, \mathbb{P}_{X_v^n}, a\right) M^n(dv, da) \right|.
\end{aligned}
$$

Appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour la partie martingale et le fait que toutes fonctions dans l'équation (3.6) sont Lipschitz et continues, on trouve :

$$
\mathbb{E}\left(|X_t - X_t^n|^2\right) \leq C \int_0^T \mathbb{E}\left(|X_s - X_s^n|^2 - \mathbb{W}_2\left(\mathbb{P}_{X_s^n}, \mathbb{P}_{X_s}\right)^2\right) dt + K_n,
$$

où C est un constant positive et :

$$
\begin{aligned}
K_n &= E\left(\left| \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, u\right) \mu_s(da) ds - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} b\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, u\right) \delta_{u_s^n}(da) ds \right|^2\right) \\
&- E\left(\left| \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, a\right) M(ds, da) - \int_0^t \int_{\mathbb{A}} \sigma\left(s, X_s, \mathbb{P}_{X_t}, a\right) M^n(ds, da) \right|^2\right) \\
&= I_n + J_n \ ,
\end{aligned}
$$

et par le fait que

$$W_2\left(\mathbb{P}_{X_s^n},\mathbb{P}_{X_s}\right)\leq E\left[\left|X_s-X_s^n\right|^2\right].$$

Alors

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t-X_t^n\right|^2\right)\leq 2C\int_0^T\mathbb{E}\left(\left|X_s-X_s^n\right|^2\right)dt+K_n.$$

Comme la suite $\left(\delta_{u_t^n}(da)\,dt\right)$ converge faiblement vers $(\mu_t(da)dt)$, $P-as.$et b est borné et continue pap rapport à la variable du contrôle, puis en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}I_n=0.$$

D'autre part, σ est bornée et continus dans a, appliquant (**??**) on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}J_n=0.$$

On conclut en utilisant le lemme de Gronwall

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^n-X_t\right|^2\right]=0.$$

Soit u^n et μ, comme nous l'avons fait dans $i)$:

$$\begin{aligned}\left|J\left(u^n\right)-J\left(\mu\right)\right|&\leq E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{A}}\left|h\left(t,X_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},a\right)-h\left(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t},a\right)\right|\delta_{u_t^n}(da)dt\right]\\&+E\left[\left|\int_0^T\int_{\mathbb{A}}h\left(t,X_t,\mathbb{P}_{X_t},a\right)\delta_{u_t^n}(da)dt-\int_0^T\int_{\mathbb{A}}\left|h\left(t,X_t^n,\mathbb{P}_{X_t^n},a\right)\right|\mu_t(da)dt\right|\right]\\&+E\left[\left|g\left(X_T^n,\mathbb{P}_{X_T^n}\right)-g\left(X_T,\mathbb{P}_{X_T}\right)\right|\right].\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de continuité et de bornitude sur les coefficients h et g et le théorème de convergence dominé il est facile de conclure que la suite X_t^n converge en probabilité vers X_t.

■

Remarque 3.2.2

D'après le dernier théorème, il est clair que l'infimum des contrôles relaxés est égal à l'infimum des contrôles stricts, ce qui implique que les fonctions de valeur pour les modèles stricts et relaxés sont les mêmes.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les EDSs de McKean-Vlasov. Les propriétés générales de ce type d'équations différentielles stochastiques, telles que l'existence et l'unicité de la solution, la stabilité par rapport aux paramètres, ont été examinées.

On a etudié aussi le problème de contrôle optimal relaxé

Nous avons cité a la fin de ce mémoire, quelque références bibliographiques permettant au lecteur intéressé d'avoir accés à quelques sources que nous avons utilisés pour rédiger ce mémoire.

Bibliographie

[1] Bahlali, K., Mezerdi, M. A., & Mezerdi, B. (2020). Stability of McKean–Vlasov stochastic differential equations and applications. Stochastics and Dynamics, 20(01), 2050007.

[2] Bahlali, K., Mezerdi, M., & Mezerdi, B. (2018). On the relaxed mean-field stochastic control problem. Stochastics and Dynamics, 18(03), 1850024.

[3] Ikeda, N., & Watanabe, S. (2014). Stochastic differential equations and diffusion processes. Elsevier.

[4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Evry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[5] Lasry, J. M., & Lions, P. L. (2007). Mean field games. Japanese journal of mathematics, 2(1), 229-260.

[6] Mezerdi, M. A. (2021). Compactification in optimal control of McKean-Vlasov stochastic differential equations. Optimal Control Applications and Methods, 42(4), 1161-1177.

[7] Nykänen, J. (2020). On the uniqueness of a solution and stability of McKean-Vlasov stochastic differential equations.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté les EDSs de type McKean-Vlasov où les coefficients de dérive et de diffusion dépendent aussi au loi de processus inconnu pas seulement de son état. Notre objective est d'étudier certains résultats telles que l'existence et l'unicité de la solution et quelques propriétés de stabilité et aussi le problème de contrôle relaxé pour ce type des EDSs.

Mots clés: Equation différentielle stochastique de McKean-Vlasov; Mesure martingale; Métrique de Wasserstein; Contrôle relaxé.

Abstract

In this work, we have presented the McKean-Vlasov SDEs where the drift and the diffusion coefficients depend on the law of unknown processes not only on its state. Our goal is to study some results such as the existence and uniqueness of the solution and some properties of stability and also the relaxed control problem for this type of SDEs.

Key words: McKean-Vlasov stochastic differential equation; Martingale measure; Wasserstein metric; Relaxed control

ملخص

في هذا العمل، قدمنا المعادلات التفاضلية العشوائية لماكين فلاصوف حيث ترتبط المعاملات بالتوزيع الاحتمالي للعمليات العشوائية المجهولة، ليس فقط بحالتها.

هدفنا دراسة بعض النتائج مثل وجود ووحدانية الحل وكذا بعض الخواص المتعلقة بالاستقرار، إضافة إلى ذلك قمنا بمعالجة إشكالية التحكم المريح الخاصة بهذا النوع من المعادلات.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية لماكين فلاصوف, قياس-مرتنغال,مسافة Wasserstein, التحكم المريح.