رقم الترتيب:

رقم التسلسل:

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماسترأكاديمي

ميدان : رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص :تحليل دالي

الموضوع

الفراغ الإنعكاسي وشبه الإنعكاسي للفراغ الشعاعي التبولوجي

من إعداد الطالبة :

- ملاطي فاطمة الزهراء

تحت إشراف الأستاذ :

- عسيلة مصطفى

نوقشت يوم 20 جوان 2022 من طرف أعضاء اللجنة :

الأستاذ :قرفي عمارة	جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-	رئيسا
الأستاذ :سعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-	مناقشا
الأستاذ : عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-	مشرفا

السّـــنة الجـامعية 2021-2022

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين ، أحمد الله على كرمه و إحسانه ، أشكره على فضله و إمتنانه والصلاة والسلام على أشرف خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وعلى أله وأصحابه و سلم ، وعلى كل من سارة على دربه واقتدى به .

بعد حمد الله وشكره على توفيقه لإتمام هذا العمل المتواضع ، أتقدم بجزيل الشكر إلى الوالدين العزيزين اللذان أعاناني وشجعاني على الإستمرار في مسيرة التعلم والنجاح . كما أتقدم بخالص شكري وتقديري إلى فضيلة الأستاذ على إقتراحه موضوع المذكرة ، وإشرافه عليها ، الأستاذ الدكتور

"عسيلة مصطفى"

الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره الكبير علياأولا ، والذي لم يبخل عليا بما جاء في رصيده المعلوماتي ولا بوقته الثمين ثانيا ، وتوجيهاته العلمية التي لاتقدر بثمن ، التي ساهمت بشكل كبير في إتمام هذا العمل .

كما أتقدم بالشكر والتقدير إلى أساتذة اللجنة المناقشة على قبولهم مناقشة هاته المذكرة، والشكر موصول إلى كل أساتذة قسم الرياضيات ، كل واحد بإسمه.

إهـداء

أحمد الله عز وجل على منه وعونه على إتمام هذا البحث

أهدي ثمرة هذا الجهد المتواضع إلى الذي وهبني كل مايملك حتى أحقق له آماله ، إلى من كان يدفعني قدما نحو الأمام لنيل المبتغى إلى الذي سهر على تعليمي بتضحيات جسام ، مترجمة في تقديسه للعلم ، إلى مدرستي الأولى ومن هو قدوتي في الحياة الذي تعب وكدا من أجل تعليمي

"أبي الغالي: لحاج أحمد"

إلى التي وهبت فلذة كبدها كل العطاء والحنان ، إلى التي صبرت على كل شيئ ، إلى التي رعتني حق الرعاية وكانت سندي في الشدائد ، وكانت دعواتها لي بالتوفيق تتبعني خطوة بخطوة طيلة حياتي ، إلى نبع الحنان

"أمي العزيزة: خضرة برقوق"

إليهما أهدي هذا العمل المتواضع ، لكي أدخل على قلبهما شيئا من السعادة إلى جدتاي "عائشة بنت لعميد" رحمها الله و"عائشة بنت أحمد " حفظها الله ،اللتان لم تنسياني من صالح دعائهما ، إلى إخوتي : طاهر ، عبد الرحمان ، حمزة وأخر العنقود: نايل ،إلى أخواتي : عائشة وأية

كما أهدي ثمرة جهدي إلى أستاذي المحترم الدكتور "مصطفى عسيلة" ، الذي كلما سألت عن معرفة زودني بها ،أو طلبت كمية من وقته الثمين وفره لي

إلى كل قريب وبعيد تعرفت عليه في حياتي ، وإلى الأساتذة والطلبة خاصة طلبة قسم الرياضيات دفعة "2022" ، وإلى كل من نسيهم قلمي ولم تنسهم ذاكرتي .

الفَهرَس

دليـــــل الرّمـــــوز		
الرّمـــز	رقم الصفحة	مدلوله
$L(X,Y)$	4	مجموعة المؤثرات الخطية من X في Y
$\mathbb{K}$	4	الحقل $\mathbb{K}$، (إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)
ρ	4	شبه النظيم
$f(x,y)$	4	شكل ثنائي الخطية
τ	5	تبولوجيا
(X,τ)	5	فراغ تبولوجي
$(X,\parallel . \parallel)$	6	الفراغ الشعاعي النظيمي
X	6	فراغ شعاعي
$\mathbb{R}$	6	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	6	مجموعة الأعداد المركبة
$\parallel . \parallel$	6	تطبيق النظيم
$\parallel x \parallel$	6	نظيم العنصر x
$(X_0,\parallel . \parallel_0)$	8	فراغ شعاعي جزئي من الفراغ $(X,\parallel . \parallel)$
$< X,Y >$	16	يرمز إصطلاحا للجملة الثنوية
δ_{ij}	16	رمز كرونيكا
$\Im(.,.)$	17	التبولوجيا الضعيفة
X'	17	الفراغ الثنوي
X''	17	الفراغ الثنوي المكرر

دليـــــل الرّمـــــوز

الرّمــز	رقم الصفحة	مدلوله
$\beta(.,.)$	17	التبولوجيا القوية
A°	18	المجموعة القطبية
$\ell(X,Y)$	21	مجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y
X^*	23	الفراغ الثنوي الجبري للفراغ X
J_X	34	الطمر القانوني
$E(J_X)$	35	صورة الطمر القانوني

مقدّمـــــة عامة

يعتبر التحليل الدالي أحد فروع الرياضيات المهمة بدراسة فضاءات الدوال . حيث نشأ في أوائل القرن العشرين ، ورغم حداثة سنه نسبا ، إلا أنه حاليا يشغل مركزا مميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة .

مفهوم الإنعكاسية من المفاهيم الأساسية في التحليل الدالي.في هذا العمل نتطرق الى هذا المفهوم في الفراغات الشعاعية التبولوجية وخاصة الفراغات الشعاعية التبولوجية المحدبة محليا (كونها الأقرب) إلى الفراغات الشعاعية النظيمية.

في هذه المذكرة طرحت إشكالية حول إمكانية تعميم بعض خصائص الإنعكاسية في حالة فراغ بناخ ، إلى الفراغ الشعاعي التبولوجي .

تحتوي هذه المذكرة المعنونة ب :

الفراغ الإنعكاسي وشبه الإنعكاسي للفراغ الشعاعي التبولوجي

على ثلاث فصول :

1. **الفصل 1 "مفاهيم أساسية ":** وعرفنا فيه أهم المفاهيم المتعلقة بالفراغ الشعاعي ، الفراغ التبولوجي ،الفراغ الشعاعي النظيمي والفراغ الشعاعي التبولوجي .
2. **الفصل 2 "الإنعكاسية في الفراغ التبولوجي" :** تطرقنا إلى مفهوم الإنعكاسية في الفراغ الشعاعي التبولوجي ، كما توصلنا إلى مفاهيم وخصائص الجمل الثنوية والثنوية المكرر ، وكذا الإنعكاسية فيها .
3. **الفصل 3 "الإنعكاسية في الفراغ الشعاعي النظيمي ":** عرضنا في هذا الفصل ،أهم المفاهيم المتعلقة بالفراغ الثنوي والثنوي المكرر ، والفراغ الإنعكاسي له .

من أجل ذلك حاولت في مذكرتي هذه توضيح النظريات المهمة حول مفهوم الفراغ الإنعكاسي وشبه الإنعكاسي للفراغ الشعاعي التبولوجي ، ولهذا الغرض وفرنا جملة من المراجع ، من أهمها بعض المقالات التي درست وسلطت الضوء على الموضوع .

الفصل

1

مفاهيم أساسية

1.0 مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التحليل الدالي والتبولوجيا ، بالأخص المفاهيم الخاصة بالفراغ الشعاعي ، الفراغ التبولوجي ،الفراغ الشعاعي النظيمي والفراغ الشعاعي التبولوجي ، بحيث وردت مختصرة بالقدر الكافي ، لإستعمالها في الفصل الثاني والثالث .

1.1 الفراغ الشعاعي

تعريف 1.1.1

نقول أن الجملة B من الفراغ الشعاعي X أساس جبري (أو أساس هامل) له ،إذا وفقط إذا كانت :

- Bجملة مستقلة خطيا.
- كل عنصر من X ، يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لعدد منته من عناصر B .

نظرية (هامل)

كل فراغ شعاعي يملك أساسا جبريا.

تعريف 2.1.1

نقول أن بعد الفراغ X منته (يساوي nمثلا) ،إذا وجدت فيه عناصر (أشعة) $x_1, x_2, ..., x_n$ مستقلة خطيا وتولده.

هذه العناصر تسمى أساسا،أي:

$$\forall x \in X; \exists \lambda = \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}/x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

قضية 1.1.1

لتكن $(f_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من $L(X,Y)$ ، حيث X لبناخ.
إذا وجد ثابت $c > 0$ و $F(x_0, r)$ (كرة مغلقة) ، بحيث :

$$\forall x \in F(x_0, r) \longrightarrow \| f_n(x) \| \leqslant c$$

فإن المتتالية $(\| f_n \|)_{n\geqslant 1}$ محدودة ، أي يوجد ثابت M يحقق :

$$n \geqslant 1, \| f_n \| \leqslant M$$

تعريف 3.1.1

ليكن X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ ، وتسمى الدالة ρ المعرفة على الفراغ الشعاعي الحقيقي من X بشبه النظيم ،إذا تحققت الشروط التالية :

1. $\rho(x) \geqslant 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$.
3. $\forall x, y \in X, \rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.

تعريف 4.1.1

نقول عن الثنائية $f(x,y)$ أنها خطية ، إذا كانت خطية بالنسبة للمركبتين x , y(أي خطية بالنسبة ل x ، وخطية بالنسبة ل y).

تعريف 5.1.1

يقال أن المجموعة A محدبة ، إذا تحقق الشرط :

$$\forall x', x'' \in A \longrightarrow [x', x''] = \{(1-\lambda)x' + \lambda x'' / \lambda \in [0,1]\} \subset A$$

تعريف 6.1.1

يقال أن المجموعة A محدبة مطلقا ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall x^1, x^2 \in A, \left(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}/|\lambda| + |\mu| \leqslant 1\right) \longrightarrow \lambda x' + \mu x'' \in A$$

تعريف 7.1.1

يقال أن المجموعة A متوازنة ، إذا تحقق الشرط :

$$\left(\forall\lambda\in\mathbb{K}/|\lambda|\leqslant 1\right)\longrightarrow\lambda A\subset A$$

تعريف 8.1.1

يقال أن A مجموعة ماصة من X ، إذا حققت الشرط :

$$\forall x\in X,\exists\lambda>0,\left(\forall\mu\in\mathbb{K}/|\mu|\geqslant\lambda\right)\longrightarrow x\in\mu A$$

1.2 الفراغ التبولوجي

تعريف 1.2.1

يقال إن الأسرة B_x من $V(x)$ أساس لمجاورات النقطة x ، أو أساس لأسرة جوارات النقطة x ، إذا تحقق :

$$\forall\vartheta\in V(x),\exists\beta_x\in B_x/\beta_x\subset\vartheta$$

وتسمى الأسرة B_x جملة أساسية لمجاورات النقطة x

تعريف 2.2.1

يقال أن الفراغ التبولوجي (X,τ) قابل للفصل ، إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة على الأقل قابلة للعد.

تعريف 3.2.1

يقال أن الفراغ التبولوجي (X,τ) منفصل ، إذا حقق :

$$\{\forall x,y\in X/x\neq y\}\Rightarrow\{\exists v_x\in V(x),\exists v_y\in V(y)/v_x\cap v_y=\phi\}$$

تعريف 4.2.1

يقال أن الفراغ (X,τ) متراص ، إذا كان منفصلا وكل تغطية مفتوحة له ، تحتوي تغطية منتهية له .

تعريف 5.2.1

يقال أن المجموعة A، من الفراغ التبولوجي المنفصل ، أنها شبه متراصة (متراصة نسبيا)، إذا كانت $\overline{A}$ متراصة (إذا إحتوت في مجموعة من X متراصة).

تعريف 6.2.1

يعرف أثر التبولوجيا τ على المجموعة A ، بالأسرة τ_A المعرفة كالتالي :

$$\tau_A=\{G\subset X/G=G_0\cap A,G_0\in\tau\}$$

أي أنه :

$$\forall G \in \tau_A, \exists G_0 \in \tau / G = G_0 \cap A$$

ومنه τ_A هي تبولوجيا على A .
ويسمى الزوج (A, τ_A) بالفراغ الجزئي من الفراغ (X, τ)

تعريف 7.2.1

يقال أن x نقطة تلاصق للمجموعة M، إذا كان كل جوار لنقطة x ، يحوي على الأقل نقطة من M، يرمز لمجموعة نقط تلاصق M ،بالرمز $\bar{M}$،(المجموعة $\bar{M}$ تسمى لصاقة M) ، ونكتب :

$$x \in \bar{M} \Leftrightarrow (\forall v \in V(x) \longrightarrow v \cap M \neq \phi)$$

1.3 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1.3.1

الزوج $(X, \| \cdot \|)$ يسمى فراغا شعاعيا نظيميا ، إذا كانت X فراغ شعاعي على الحقل$\mathbb{K}$، و $\mathbb{K}$ إماالحقل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.و $\| \cdot \|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ ،المعرف كالتالي :

$$X \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \| x \|$$

ويحقق الشروط التالية:

1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$
3. $\forall x, y \in X, \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

الرمز $\| \cdot \|$ يسمى نظيما،والعدد $\| x \|$ يسمى نظيم العنصرx.

ملاحظة

الفراغ الشعاعي النظيمي ،يكتب إختصارا ف.ش.ن.

نتيجة

إذا كان $(X, \| \cdot \|)$ ف.ش.ن ،فإن:

1. $\| x \| \geqslant 0$

2. $\| x-y \| = \| y-x \|$

3. $\| x \| - \| y \| \leqslant \| x-y \|$

تعريف 2.3.1

ليكن $\| . \|_1$, $\| . \|_2$ نظيمين معرفين على X.
يقال أن النظيمين $\| . \|_1$, $\| . \|_2$ متكافئان،إذا وجد α , β من $\mathbb{R}$ موجبين ، من أجلهما يتحقق مايلي:

$$\forall x \in X \longrightarrow \alpha \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant \beta \| x \|_1$$

قضية 1.3.1 إذا كان $(X, \| . \|)$ ف. ش. ن. $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ متتاليتين من X ، و $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من الحقل $\mathbb{K}$ ، فإن :

1. $\Big(\| x_n - a \|_{n\to\infty}\longrightarrow 0 \Big) \Rightarrow \Big(\| x_n \|_{n\longrightarrow\infty}\longrightarrow \| a \| \Big)$

2. $\Big(\| x_n - a \|_{n\longrightarrow\infty}\longrightarrow 0, |\lambda_n - \lambda|_{n\longrightarrow\infty} \longrightarrow 0 \Big) \Rightarrow \Big(\| \lambda_n x_n - \lambda a \|_{n\longrightarrow\infty}\longrightarrow 0 \Big)$

3. $\Big(\| x_n - a \| \longrightarrow 0, \| y_n - b \| \longrightarrow 0 \Big) \Rightarrow \Big(\| x_n + y_n - (a+b) \|_{n\longrightarrow\infty}\longrightarrow 0 \Big)$

تعريف 3.3.1

نقول أن X فراغ لبناخ ، إذا كانت كل متتالية أساسية (لكوشي) منه، متقاربة فيه.

نتيجة

لتكن السلسلة $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ من فراغ بناخ.

1. إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ متقاربة مطلقا من فراغ بناخ ، أي أن $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \| u_i \|$ سلسلة متقاربة فإن السلسلة $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ متقاربة ، وعندها تكون:

$$\| \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \| \leqslant \| \sum_{i=1}^{+\infty} \| u_i \|$$

2. تكون $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ سلسلة متقاربة ، إذا وفقط إذا تحقق هذا الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geqslant 1 / \forall n \geqslant n_0 \longrightarrow \| u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} \| < \varepsilon, k = 1; 2, 3, ..., n$$

نتيجة

إذا كانت كل سلسلة متقاربة ، متقاربة مطلقا في ف.ش.ن ، فإن هذا الفراغ يكون فراغا لبناخ.

تعريف 4.3.1

يعرف ف.ش.ن.الجزئي من الفراغ $(X, \| \cdot \|)$ ، بأنه الزوج $(X_0, \| \cdot \|_0)$ ، حيث $\| \cdot \|_0$ هو إقتصار النظيم $\| \cdot \|$ على المجموعة X_0.

تعريف 5.3.1

كل ف.ش.ن.جزئي من فراغ بناخ ،إذا كان مغلقا ، فإنه يكون فراغا لبناخ.

قضية 2.3.1

كل فراغ نظيمي بعده n ، يكون هوميومرفيزميا بإنتظام مع الفراغ $\mathbb{K}^n$.

نتيجة

1. كل النظم على فرغ ذي بعد منته متكافئة.
2. كل ف.ش.ن جزئي منته ، من ف.ش.ن يكون مغلقا .
3. كل ف.ش.ن جزئي بعده منته ، من ف.ش.ن يكون فاغا لبناخ.
4. كل ف.ش.ن بعده منته ، يكون قابلا للفصل.
5. المجموعة المتراصة في ف.ش.ن.بعده منته ، تكافئ محدودة و مغلقة.

تعريف 6.3.1

ليكن $(X, \| \cdot \|)$ ف.ش.ن ، و$(X_0, \| \cdot \|_0)$ ف.ش.ن جزئي منه بعده منته ،وx عنصر من X ، حيث : $x \notin X_0$.

1. نقول عن العنصر y_0 من X_0 أنه أحسن تقريب للعنصر x من X ، إذا أخذ الإنحراف (البعد) ، $\| y - x \|$ أقل قيمة له في النقطة y_0 أي :

$$\| y_0 - x \| = \inf\{\| y - x \|, y \in X_0\}$$

2. من أجل كل عنصر y من X_0،القيمة $\| y - x \|$ تسمى إنحراف العنصر y عن العنصر x .

نتيجة

لكل x من X يوجد أحسن تقريب له y_0 من X_0 .

قضية 3.3.1

يكون الفراغ الشعاعي النظيمي ذا بعد منته ، إذا وفقط إذا كانت كرة الوحدة المغلقة فيه ، متراصة فيه.

تعريف 7.3.1

لتكن S جملة من دوال الفراغ $C[a,b]$.

1. يقال إن الجملة S محدودة بإنتظام ، إذا وجد عدد c ، بحيث يتحقق :

$$\forall f \in S, \forall x \in [a,b] \longrightarrow |f(x)| \leqslant c$$

أي :

$$\forall f \in S \longrightarrow d(f,0) \leqslant c$$

2. يقال إن الجملة S متساوية الإستمرار، إذا استطعنا من أجل كل ε $(\varepsilon > 0)$ ،إيجاد δ، $(\delta > 0)$ بحيث يكون $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ وذلك من أجل كل نقطتين x_1, x_2 من $[a,b]$ يحققان $|x_1 - x_2| < \delta$ ، ومن أجل كل تابع $f \in S$ ، أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in S, \Big(\forall x_1, x_2 \in [a,b] / |x_1 - x_2| < \delta\Big) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

نظرية (أرزيلا)

تكون الأسرة S من C[a,b]، المزودة بالمسافة التالية :

$$d(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|, f, g \in C[a,b]$$

شبه متراصة في $C[a,b]$ ، إذا وفقط إذا كانت ، محدودة بإنتظام ومتساوية الإستمرار .

تعريف 8.3.1

تعرف التبولوجيا التقارب المنتظم (المنتظمة) ، وتسمى أيضا بالتبولوجيا القوية (بالتقارب القوي) على الفراغ X ، بأنها التبولوجيا المتولدة من نظيمه .
أي أن الأسرة $B_0(\varepsilon)$ المعرفة كالتالي :

$$B_0(\varepsilon) = \{x \in X / \parallel x \parallel_X < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

هي جملة أساسية لأسرة جوارات الصفر .

1.4 الفراغ الشعاعي التبولوجي

تعريف 1.4.1

يقال أن f شكل خطي ، إذا حقق مايلي :

1. $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \longrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in D(f) \longrightarrow \alpha x, \beta y \in D(f)$

ولكي يصبح f شكل خطي مستمر في النقطة x_0 من X ، يجب أن يوجد من أجل كل جوار v للنقطة $f(x_0)$ ، جوار u للنقطة x_0 صورته وفق f محتواة في v ، أي :

3. $\forall v \in V\Big(f(x_0)\Big), \exists \vartheta \in V(x_0) / f(\vartheta) \subset v$

تعريف 2.4.1

تعرف التبولوجيا الضعيفة على الفراغ X بأنها أضعف تبولوجيا على X من أجلها تكون التطبيقات ψ المعرفة كالتالي :

$$\psi : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\psi(x) = f^*(x) / f^* \in X'$$

مستمرة .

تعريف 3.4.1

ليكن X فراغ شعاعي تبولوجي ، X' فراغه الثنوي و A , B مجموعة من X , X' على التوالي .
تعرف المجموعة القطبية للمجموعة :

1. A ويرمز لها بالرمز A° ، كالتالي :

$$A^\circ = \{f^* \in X' / |f(x)| \leqslant 1, \forall x \in A\}$$

2. B ويرمز لها بالرمز B° ، كالتالي :

$$B^\circ = \{x \in X / |f(x)| \leqslant 1, \forall f^* \in B\}$$

بحيث $A^\circ \subset X'$ و $B^\circ \subset X'$.

تعريف 4.4.1

يقال أن الفراغ .ش.ت شبه إنعكاسي ،إذا : $X \approxeq (X'_\beta)'$ أي إذا كان فراغه الثنوي المكرر يملك بنية جبرية فقط .

تعريف 5.4.1

يقال أن الفراغ .ش.ت إنعكاسي ،إذا : $X \approxeq (X'_\beta)'_\beta$ أي فراغه الثنوي المكرر مزود بتبولوجيا قوية .

تعريف 6.4.1

ليكن h تطبيق معرفا كالتالي :

$$h : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$$

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x$$

واضح أن التطبيق عبارة عن تقابل خطي .
المجموع $X = X_1 + X_2$ ، يكون جمعا مباشرا تبولوجيا ، إذا وفقط إذا كان التطبيق إيزومورفيزم تبولوجيا من $X = X_1 \times X_2$ ، في $X = X_1 + X_2$.

تعريف 7.4.1

إذا كانت τ تبولوجيا على X ، فإن الفراغ التبولوجي (X, τ) ، يسمى فراغا شعاعيا تبولوجيا .إذا تحققت الشروط التالية :

1. التطبيق المعرف من $X \times X$ في X ، كالتالي :

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

2. التطبيق المعرف من $\mathbb{K} \times X$ في X ، كالتالي :

$$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

مستمران ، أي يكون الفراغ (X, τ) فراغا شعاعيا تبولوجيا ،إذا كانت البنية الجبرية و البنية التبولوجية متلائمتين .

ملاحظة

الفراغ الشعاعي التبولوجي إختصارا يكتب ف.ش.ت.

تعريف 8.4.1

الفراغات .ش.ت. X_1 , X_2 على نفس الحقل $\mathbb{K}$. يقال أنهما هوميومورفيزميان ،إذا وجد تطبيق f خطي ومتقابل وf,f^{-1} مستمران ، عندها يسمى f هوميومورفيزم.

قضية 1.4.1

إذا كان X ف.ش.ت ،فإن :

1. من أجل كل x_0 من X،ومن أجل كل λ_0 من $\mathbb{K}$ ($\lambda_0 \neq 0$)،التطبيق $x \longrightarrow \lambda_0 x + x_0$ يكون هوميومورفيزم من X على نفسه .

2. من أجل كل مجموعة جزئية A من X ، ومن أجل كل جملة أساسية v لمجاورات الصفر في X ؛ يكون :

$$\bar{A} = \cap\{A + u / u \in v\}$$

3. من أجل كل مجموعة مفتوحة A من X ، و من أجل كل مجموعة B من X ،تكون المجموعة $A + B$ مفتوحة.

4. إذا كانت A مجموعة متوازنة من X ،فإن لصاقتها $\bar{A}$ ،تكون أيضا متوازنة.

5. داخلية A ،أي المجموعة $\mathring{A}$، تكون متوازنة ، إذا كان $0 \in \mathring{A}$.

قضية 2.4.1

التبولوجيا τ على الفراغ X ، تكون ملائمة للبنية الجبرية ل X ، أي تحقق الشرطين 1 و 2 من التعريف ، إذا و فقط إذا كانت τ لا تتغير بواسطة الإزاحة و تملك أساس لمجاورات الصفر B ؛ الذي يحقق الشروط التالية :

1. $\forall v \in B, \exists u \in B / u + u \subset v$

2. كل v من B تكون متناظرة وماصة.

3. يوجد $\lambda \in \mathbb{K}$ ($0 < |\lambda| < 1$)،بحيث إذا كان $v \in B$ ، يكون $\lambda v \in B$.

1.4.1 المجموعات المحدودة

تعريف 9.4.1

المجموعة A من ف.ش.ت X، تسمى محدودة، إذا وجد من أجل كل جوار U للصفر في الفراغ X عدد λ من $\mathbb{K}$ ، بحيث يكون : $A \in \lambda U$

نتيجة

المجموعة A من X تكون محدودة ،إذا وفقط إذا كان كل جوار متوازن للصفر ، يمتص A.

تعريف 10.4.1

المجموعة B من ف.ش.ت X ، تسمى محدودة كليا ، إذا وجد من أجل كل جوار U للصفر في X ، مجموعة منتهية B_0 من B ، بحيث يكون: $B \subset B_0 + U$

نتيجة

المجموعة B من ف.ش.ت X المنفصل ، تكون محدودة كليا ،إذا وفقط إذا كانت شبه متراصة .

قضية 3.4.1

إذا كانت A , B مجموعتين محدودتين (محدودتين كليا) ، من الفراغ ف.ش.ت X، فإن :

1. كل مجموعة جزئية من A محدودة.
2. لصاقة المجموعة A محدودة.
3. المجموعات $A+B$, $A\cup B$, λA ، حيث : $\lambda\in\mathbb{K}$ ، تكون مجموعات محدودة (محدودة كليا).

نتيجة

1. كل مجموعة محدودة كليا ، تكون محدودة.
2. الغلاف الخطي المتوازن للمجموعة المحدودة ، يكون محدود .
3. كل متتالية كوشي محدودة.

قضية 4.4.1

المجموعة A من ف.ش.ت X تكون محدودة ،إذا وفقط إذا كانت من أجل كل متتالية $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ من $\mathbb{K}$ متقاربة نحو الصفر ، ومن أجل كل متتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ من A ، المتتالية $(\lambda_n x_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة في X .

1.4.2 الفراغ المحدب محليا

تعريف 11.4.1

الفراغ الشعاعي التبولوجي (X,τ) ، يقال أنه محدب محليا ،إذا كات كل x_0 من X ، يملك جملة أساسية لمجاوراتها ، مكونة من جوارات محدبة.

نتيجة

1. الفراغ الشعاعي التبولوجي (X,τ) يكون محدبا محليا ، إذا وفقط إذا كان الصفر يملك جملة أساسية لمجاواته ، مكونة من جوارات محدبة .
   عندها τ تسمى التبولوجيا المحدبة محليا .

2. إذا كان X فراغ شعاعي ، فإن التبولوجيا المحدبة محليا على X ، يمكن تعريفها عن طريق β_0 ،أساس لمجاورات الصفر ، المكونة من مجموعات محدبة ، متوازنة وماصة ، بحيث :

$$\forall \vartheta \in \beta \longrightarrow \frac{1}{2}\vartheta \in \beta$$

ذلك لأن : $\vartheta = \frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta$ ، وهذا راجع لكون ϑ محدبة.

نتيجة

التبولوجيا المحدبة محليا على X ، يمكن تعريفها عن طريق مجموعة أشباه النظم ؛ $\{\rho_i; i \in I\}$ كالتالي:

من أجل كل $i \in I$ ، نعرف مجموعة U_i ، كالتالي:

$$U_i = \{x \in X / \rho_i(x) \leqslant 1\}$$

الأسرة β حيث :

$$\beta = \{\frac{1}{n}U\}, n \geqslant 1$$

و U مجموعة كل التقاطعات المنتهية من الأسرة:

$$\{U_i; i \in I\}$$

الأسرة β هي أساس لمجاورات الصفر في التبولوجيا المحدبة محليا ، هذه التبولوجيا تسمى التبولوجيا المولدة من مجموعة أشباه النظم $\{\rho_i; i \in I\}$.

والعكس صحيح ، أي كل تبولوجيا محدبة محليا على X ، تولد مجموعة أشباه نظم .

نظرية

إذا كان X ف.ش.ت محدب محليا ، فإن كل شكل خطي مستمر f ، معرف على فراغ جزئي X_0 من X ، يملك تمديد مستمر على X .

نتيجة

لكل جملة $\{x_1, ..., x_n\}$ من الفراغ التبولوجي المحدب محليا X ، يوجد n شكل خطي مستمر $\{f_1, ..., f_n\}$ على X ، بحيث :

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}; i, j \in \mathbb{N}$$

قضية 5.4.1

في كل فراغ شعاعي تبولوجي محدب محليا الغلاف المحدب والغلاف المتوازن المحدب للمجموعة شبه المتراصة ، يكون شبه متراص .

1.4.3 فراغ برميل (Barreld)

تعريف 12.4.1

المجموعة A من الفراغ الشعاعي التبولوجي X يقال أنها برميلية ،إذا كانت مغلقة ، محدبة ، متوازنة وماصة.

تعريف 13.4.1

الفراغ الشعاعي التبولوجي X ، يقال أنه فراغ برميل ،إذا كانت كل مجموعة برميلية في X جوارا لصفر .

قضية 6.4.1

كل فراغ برميل محدب محليا ، يكون فراغا برميليا.

نتيجة

1. كل فراغ بناخ ،هو فراغ برميلي .
2. كل فراغ منفصل لفراغ برميل ، يكون فراغا برميليا.

الفصل

2

الإنعكاسية في الفراغ الشعاعي التبولوجي

2.1 الجمل الثنوية والتبولوجيا الضعيفة

ليكن X , Y فراغين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$ ، و f شكل ثنائية الخطية على $X \times Y$ ، و يحقق الشروط التالية :

1. $\{\forall y \in Y \longrightarrow f(x_0, y) = 0\} \Rightarrow x_0 = 0$
2. $\{\forall x \in X \longrightarrow f(x, y_0) = 0\} \Rightarrow y_0 = 0$

الشرطين 1 , 2 يسميان بشرطي الإنفصال.

تعريف 1.1.2

تعرف الجملة الثنوية (الزوج الثنوي) بأنها الثلاثية (X, Y, f) ، عندها يقال أن الشكل f يضع الفراغين X $Y,$ في تناظر منفصل ، ويسمى عندها بالشكل الثنائي الخطي القانوني ، ويرمز له إصطلاحا ب :

$$f(x, y) =< x, y >$$

ونرمز إختصارا للثلاثية (X, Y, f) بالرمز : $< X, Y >$.

قضية 1.1.2

1. إذا كانت $< X, Y >$ جملة ثنوية ، و $\{y_1, ..., y_n\}$ جملة مستقلة خطيا من Y ، فإنه توجد جملة $\{x_n, ..., x_1\}$ مستقلة خطيا من X ،وتحقق الآتي :

$$< x_i, y_j >= \delta_{ij}; i, j = 1, ..., n/\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

2. كل شكل خطي f على الفراغ X ، يكون مستمرا بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة $\Im(X,Y)$
إذا وفقط إذا كتب من الشكل:

$$f(x) =< x, y >$$

حيث y عنصر معين وحيد من Y .
عندها يكون : $(X, \Im(X,Y))' \equiv Y$

3. إذا كانت $< X, Y >$ جملة ثنوية ، وY_0 فراغ جزئي من Y ، فإن الشكل الثنائي الخطي القانوني يضع X و X_0 في تناظر منفصل ، إذا وفقط إذا كان الفراغ Y_0 كثيف في Y بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة $\Im(Y,X)$.

نظرية

إذا كانت $< X, Y >$ جملة ثنوية ، فإن من أجل كل مجموعة M من X تكون الثنائية القطبية لها $M^{\circ\circ}$ تطابق الغلاف الخطي المحدب والمغلق $M \cup \{0\}$ للمجموعة بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة $\Im(X,Y)$.

2.2 الفراغ الثنوي المكرر

تعريف 1.2.2

تعرف التبولوجيا القوية على X' ويرمز لها ب $\beta(X', X)$ ،بأنها تبولوجيا التقارب المنتظم على كل المجموعات المحدبة في X .

تعريف 2.2.2

يعرف الفراغ الثنوي المكرر للفراغ X ، بأنه الفراغ الثنوي للفراغ X' ، أي أنه الفراغ $(X')'$، ويرمز له بالرمز X'' ، ونكتب $(X')' = X''$، مزود بالتبولوجيا التقارب المنتظم .

نتيجة

بما أن $< X', X'' >$ هي جملة ثنوية ، فإن الفراغ X'' يمكن تزويده بعدة تبولوجيات التقارب المنتظم .

- أقواها هي التبولوجيا $\beta(X'', X')$ ،التي هي تبوبوجيا التقارب المنتظم ، على كل المجموعات المحدودة من X' بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X', X'')$ ، وهي نفسها تبولوجيا التقارب المنتظم على كل المجموعات المحدودة من X' بالنسبة للتبولوجيا $\beta(X', X)$.
- هذة المجموعات تسمى المجموعات المحدودة بقوة في X' ، المجموعات المحدودة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X', X)$، نسميها محدودة بضعف .

نتيجة

كل مجموعة محدودة بقوة تكون محدودة بضعف .

قضية 1.2.2 (1)

إذا كانت $< X, X' >$ جملة ثنوية ، فإن المجموعة A' من X' تكون محدودة بقوة ، إذا وفقط إذا كانت مجموعتها القطبية A° في X تمتص كل المجموعات المحدودة .

قضية 2.2.2

لتكن $< X, X' >$ جملة ثنوية ، إذا كان τ تبولوجيا على X ملائمة للجملة الثنوية $< X, X' >$ ، فإن :

- كل مجموعة من X' متساوية الإستمرار ، بالنسبة للتبولوجيا τ ، و تكون محدودة بقوة .
- كل مجموعة محدبة مطلقا و متراصة ، بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X', X)$ ، تكون محدودة بقوة .

نتيجة

مجموعة كل المجموعات الجزئية من X' ، و متساوية الإستمرار ، بالنسبة للتبولوجيا τ ، يمكن تعريفها من خلال تبولوجيا التقارب المنتظم على X'' .

- إذا كان u أساس للجوار المحدب مطلقا ، والمغلقة بالنسبة للتبولوجيا τ ، فإن الثنائية القطبية $U^{\circ\circ}$ في X'' ، للمجموعة U من u ، تشكل أساس جوارات هذه التبولوجيا ، عندها نرمز لها ب $\tau^{\circ\circ}$ ، بما أن $u = X \cap U^\circ$ ، فإن تبولوجيا الأثر ل $\tau^{\circ\circ}$ على X ، هي التبولوجيا τ.
- وعليه إذا كانت X من التبولوجيا τ ، يكون محدب محليا ومنفصل ، فإن الفراغين X' و X'' ، يمكن تزويدهما بتبولوجيتين ، تبولوجيا $\tau^{\circ\circ}$ ، وهي تبولوجيا التقارب المنتظم ، على المجموعات المتساوية للإستمرار ، والتبولوجيا القوية $\beta(X'', X')$.

قضية 3.2.2 (2)

إذا كان X فراغ محدب محليا و منفصل، X' الفراغ الثنوي و X'' فراغه الثنوي المكرر المزود بالتبولوجيا $\beta(X'', X')$ ، فإن التطبيق الحيادي من X في X'' ، يكون إيزومورفيزم ،إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة من X' ، محدودة بقوة تكون متساوية الإستمرار .

البرهان

الشرطين متكافئين ، لأن التبولوجيتين $\tau^{\circ\circ}$ و $\beta(X'', X')$ منطبقتين حيث τ تبولوجيا على X.

نتيجة

إذا كان X برميلي فإن التطبيق الحيادي من X في X'' يكون إيزومورفيزم.

قضية 4.2.2

إذا كان X فراغ محدب محليا ، منفصل وتام فإن كل مجموعة من X' محدودة بضعف ، تكون محدودة .

البرهان

إذا كانت A' من X' محدودة بضعف فإن المجموعتهاالقطبية A'° تكون برميلية ، ومنه تمتص كل المجموعات المحدودة ، المحدبة والتامة .

لكن بإعتبار X تام ، فإن كل مجموعة من X محدودة تكون محتوى في مجموعة محدودة ، محدبة وتامة ؛ ومنه نستنتج أن A'° ، تمتص كل المجموعات المحدودة ، ومنه حسب القضية (1) ، تكون A' محدودة بقوة .

قضية 5.2.2

إذا كان X ف.ش.ت ، فإن الفراغ X'' كفراغ جزئي من X'^{*} ، يساوي إتحاد كل لصاقات المجموعات المغلقة في X وفق التبولوجيا $\Im(X'^{*}, X')$.

البرهان

- واضح أن التبولوجيا $\Im(X'^{*}, X')$، هي أثر التبولوجيا $\Im(X'', X')$ على X'' .
- إذا كانت $z \in X''$ (نرمز لي $\{z\}^{\cdot}$ لقطبية $\{z\}$ بالنسبة للجملة الثنوية $< X'', X' >$) ، فإن $\{z\}^{\cdot}$ جوار الصفر في التبولوجيا $\beta(X', X)$.
- ومنه $B = \{z\}^{\cdot\circ}$ تعتبر مجموعة محدبة ومحدودة من X، حاوية للصفر .
- من ناحية ثانية ، واضح أن $B^{\circ\cdot} = z \in B^{\cdot\cdot}$ ، ومنه وبإعتبار $B^{\cdot\cdot}$ هي لصاقة B بالنسبة لتبولوجيا $\Im(X'', X')$.
- هذا وبإعتبار $B^{\cdot}$ مجموعة من X'' متساوية الإستمرار ومغلقة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X'', X')$ ، فإنها متراصة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X'', X')$ ، ومنه تطابق لصاقة المجموعة B في X'^{*}، بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X'^{*}, X')$.
- نفرض الآن B مجموعة من X ، محدودة ومحدبة وحاوية للصفر ، تكون مجموعة ثنائي القطبية $B^{\cdot\cdot}$ هي لصاقة B في X'' بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X'', X')$ ، مساوية الإستمرار ، ومنه تكون متراصة بالنسبة ل $\Im(X'', X')$ ، وعليه تكون مغلقة في X'^{*} بالنسبة ل $\Im(X'^{*}, X')$.

2.3 الفراغ الإنعكاسي

تعريف 1.3.2

الجملة الثنوية نقول أنها إنعكاسية ، إذا كان الفراغ X يطابق فراغه الثنوي المكرر X''.

قضية 1.3.2 (3)

الجملة الثنوية $< X, X' >$ تكون إنعكاسية ، إذا وفقط إذا كانت كل جملة من X محدبة ، محتوى في مجموعة متراصة بضعف .

البرهان

واضح أن الجملة $< X, X' >$ تكون إنعكاسية ، إذا وفقط إذا كانت التبولوجيا $\beta(X', X)$ ، ملائمة للجملة الثنوية $< X, X' >$، أي إذا وفقط إذا كانت كل جملة من X محدودة ، محتوات في مجموعة محدبة مطلقا ومتراصة بضعف .

إذا كان X فراغا محدبا ومنفصلا ، فإن X يقال أنه إنعكاسيا ، إذا وفقط إذا كان X إزومورفيزم مع X'' .

قضية 2.3.2

إذا كان X فراغا محدبا محليا ومنفصلا ، فإنه يكون إنعكاسيا ، إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة من X محدودة ، محتوى في مجموعة متراصة بضعف ، وكل مجموعة من X' محدودة ، تكون متساوية الإستمرار .

البرهان

يستنتج من (2)و (3) .

نتيجة

الفراغ المحدب محليا والمنفصل يكون إنعكاسيا ، إذا وفقط إذا كان برميلي ، وكل مجموعة منه محدودة ، محتوى في مجموعة متراصة بضعف .

نتيجة

إذا كان الفراغ المحدب محليا و المنفصل ،إنعكاسيا ، فإن فراغه الثنوي بقوة يكون إنعكاسيا .

نتيجة

في الفراغ الشعاعي التبولوجي X، الإثباتات التالية متكافئة :

1. X شبه إنعكاس .
2. كل شكل خطي على X' مستمر بالنسبة للتبولوجيا $\beta(X', X)$ ، يكون مستمرا بالنسبة $\Im(X', X)$.
3. X' برميلي .
4. كل مجموعة محدودة من X ، تكون متراصة بالنسبة ل $\Im(X, X')$.

البرهان

- $2 \Rightarrow 1$ تستنتج مباشرة من تعريف شبه الإنعكاس .

- $3 \Rightarrow 2$من 2 نستنتج أن التبولوجيا القوية $\beta(X',X)$ ملائمة للجملة الثنوية $< X,X' >$ و منه يكون $\beta(X',X) = \Im(X',X)$ ، بما أن كل مجموعة برميلية في X' تعتبر جوارا للصفر بالنسبة للتبولوجيا$\beta(X',X)$ ، فإن X' تكون برميلية .
- $4 \Rightarrow 3$إذا كانت X' برميلية ،فإن كل مجموعة محدودة في X تكون متساوية الإستمرار لمجموعة في الفراغ $X = \ell(X',\mathbb{K})$ ، ومنه تكون شبه متراصة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X,X')$.
- $1 \Rightarrow 4$ واضح أن كل مجموعة من X متراصة، تكون تامة .

نتيجة

كل مجموعة محدودة من الفراغ الشعاعي التبولوجي X ، تكون شبه متراصة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X,X')$.

البرهان

لتكن B محدودة من X . معلوم أن الفراغ $X'^* = (\Im(X'^*,X'),X'^*)$ شبه إنعكاس ، ومنه وبإعتبارالإثباتات في النتيجةالسابقة ، تكون $\bar{B}$ لصاقة B في X'^* متراصة ، ومنه تامة .

نظرية

الفراغ المحدب محليا X يكون إنعكاسيا ، إذا وفقط إذا كان برميلي ، وكل مجموعة من X محدودة تكون شبه متراصة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X,X')$.

نتيجة

الثنوي القوي للفراغ الإنعكاسي ، يكون إنعكاسيا .

البرهان

إذا كان X إنعكاسيا ، فإن $\beta(X',X) = \Im(X',X)$ ، ذلك لأن X شبه إنعكاسي.
بما أن X برميلي ، فإن كل مجموعة من X' محدودة ، تكون شبه متراصة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X',X)$ ،ومنه يكون X' إنعكاسي .

نتيجة

إذا كان X ف.ش.ت ، فإن الإثباتات التالية متكافئة :

1. X إنعكاس .
2. X'إنعكاس .
3. كل من X و X' شبه إنعكاس .
4. كل من X و X' برميلي .

البرهان

- $2 \Rightarrow 1$- إذا كان X إنعكاس ، فإن $\beta(X',X)$ ملائمة مع $< X,X' >$ ، ومنه تكون $\Im(X',X) =$ $\beta(X',X)$ ، وعليه يكون X' الثنوي القوي X ، هذا يعني أن X' إنعكاسي .

- $3 \Rightarrow 2$- إذا كان X' إنعكاس ، فإن X' يكون شبه إنعكاس ، وبالإضافة لذلك X' برميلي ، ومنه نستنتج أن كل مجموعة من X محدودة ، تكون شبه متراصة بالنسبة للتبولوجيا $\Im(X,X')$، وعليه يكون شبه إنعكاس .

- $4 \Rightarrow 3$- من 3 نستنتج ، أن كل من التبولوجيتين $\beta(X',X)$ و $\beta(X,X')$ ملائمتين ل $< X,X' >$ ، أي أن $\Im(X',X) = \beta(X',X)$ و $\Im(X,X') = \beta(X,X')$ ،Xومنه وبإعتبار كل برميلي في X' يعتبر جوار للصفر بالنسبة ل $\beta(X',X)$ و $\beta(X,X')$ على التوالي ، نستنتج أن X و X' برميلي

- $1 \Rightarrow 4$- X برميلي ، وهو شبه إنعكاس ،ومنه يكون .إنعكاس

الفصل

3

الإنعكاسية في الفراغ الشعاعي النظيمي

3.1 الفراغ الثنوي

تعريف 1.1.3

X' هو رمز الفراغ الثنوي ، كما يرمز للفراغ الثنوي الجبري بالرمز X^*.

نتيجة

1. الفراغ $(X', \| . \|)$ فراغ بناخ.

2. يمكن تعريف على الفراغ X' ، النظم التالية :

$$\| g^* \|_{X'} = \begin{cases} \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |g^*(x)| \\ \sup\limits_{\|x\|=1} |g^*(x)| \\ \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|g^*(x)|}{\| x \|} \\ \inf\{c \in \mathbb{R}_+^* / g^*(x) \leqslant c \| x \|\} \end{cases} \qquad /x \in X$$

إختصارا نكتب $\| g^* \|$ بدلا من $\| g^* \|_{X'}$.

مثال

التطبيق g^* من $C[-1,1]$ في $\mathbb{R}$ ، حيث :

$$\| f \| = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|, f \in C[-1,1]$$

$$g^*(f) = f(0)$$

شكل خطي مستمر على $C[-2,2]$ ، أي : $g^* \in \left(C[-2,2]\right)'$.
من أجل كل f و g من $C[-1,1]$ ومن أجل كل α , β من $\mathbb{R}$ نلاحظ أن :

$$g^*\left(\alpha f + \beta g\right) = \left(\alpha f + \beta g\right)(0) == \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha g^*\left(f\right) + \beta g^*\left(g\right)$$

أي أن خطي g^* ، أي $g^* \in \left(C[-1,1]\right)^*$. بما أن الشكل الخطي هو مؤثر خطي ، فإنه حسب النظرية لبرهان الإستمرار يكفي برهان المحدودية . لاحظ أن :

$$|g^*(f)| = |f(0)| \leqslant \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| =\| f \|$$

ومنه حسب النتيجة 1 يكون محدود ، أي $g^* \in \left(C[-1,1]\right)'$ ويحقق :

$$\| g^* \| \leqslant 1$$

من ناحية ثانية من أجل f_0 , $\left(x \in [-1,1], f_0(x) = 1\right)$ ، حسب النتيجة 1 يكون :

$$\| g^* \| \geqslant \frac{|g^*(f_0)|}{\| f_0 \|} = f_0(0) = 1$$

ذلك لأن $\| f_0 \| = 1$
وعليه يكون :

$$\| g^* \| \geqslant 1$$

من الصيغ السابقة نستنتج أن : $\| g^* \| = 1$

3.1.1 تمديد الشكل الخطي ونظرية هان-بناخ

تمديد الأشكال الخطية

تعريف 2.1.3 ليكن f^* , g^* من X' .
نقول إن :

1. الشكلين الخطيين f^* , g^* منطبقان ، إذا تحقق مايلي :

   (ا) $D\left(g^*\right) = D\left(f^*\right) = D$ ؛

   (ب) $\forall x \in D \longrightarrow g^*(x) = f^*(x)$.

2. الشكل الخطي f^* تمديد (توسيع)، الشكل الخطي g^* أو الشكل g^* إقتصار الشكل الخطي f^*، إذا تحقق مايلي :

(أ) $D\left(g^*\right) \subset D\left(f^*\right)$

(ب) $f^*(x) = g^*(x) \longrightarrow \forall x \in D\left(g^*\right)$.

عندها نقول أن g^* إقتصار f^* على $D\left(g^*\right)$، وتكتب . $g^* = f^* |_{D(g^*)}$

قضية 1.1.3

لكل g^* من $\left(D\left(g^*\right)\right)'$، حيث $\overline{D\left(g^*\right)} = X$ ، يوجد له تمديد φ^* من X' ، ويحقق : $\| \varphi^* \| = \| g^* \|$.

نتيجة

لكل g^* من $\left(D\left(g^*\right)\right)'$ ، يملك تمديد من $\left(\overline{D\left(g^*\right)}\right)'$، و يحقق $\| g^* \| = \| \varphi^* \|$.

نظرية هان-بناخ

1. نظرية هان-بناخ في الفراغ الشعاعي

النظرية التمهيدية لزورن

لتكن A مجموعة مرتبة ترتيبا جزئيا بالعلاقة ρ، إذا كان لكل مجموعة جزئية مرتبة من A حد أعلى ،فإن للمجموعة A عنصرا أعظميا.

نظرية هان-بناخ الحقيقية (*) :

إذا كانت P دالة معرفة على فراغ شعاعي حقيقي X، وتحقق من أجل كل x,y من X مايلي :

$$P(x+y) \leqslant P(x) + P(y)$$

$$P(\alpha x) \leqslant \alpha P(x), \alpha \geqslant 0$$

و g^* شكلا خطيا على فراغ جزئي X_0 من X، و يحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow g^*(x) \leqslant P(x)$$

فإنه يوجد شكل خطي g^* معرف على كل X ، ويحقق ما يلي :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = g^*(x)$$

$$\forall x \in X \longrightarrow f^*(x) \leqslant P(x)$$

قضية 2.1.3

إذا كانت P الدالة المعرفة في النظرية $(*)$ ، فإنه يوجد شكل خطي f^* على X ، و يحقق :

$$\forall x \in X \longrightarrow P(-x) \leqslant f^*(x) \leqslant P(x)$$

البرهان

من أجل كل x_0 نقطة ثابتة من X ، نعرف الفراغ الجزئي X_0 كالتالي :

$$X_0 = \{x \in X / x = \lambda x_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

نعرف التطبيق g^* على X_0 كالتالي : $g^*\left(\lambda x_0\right) = \lambda P\left(x_0\right)$

واضح أن g^* شكل خطي على X_0 ، يحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow g^*(x) \leqslant P(x)$$

بالفعل ، لأنه في الحالة :

- $\lambda > 0$: عندنا $g^*(x) = g^*(\lambda x_0) = \lambda P(x_0) = P(\lambda x_0) = P(x)$
- $\lambda < 0$: عندنا $g^*(x) = g^*(\lambda x_0) = \lambda P(x_0) \leqslant -\lambda P(-x_0) = P(\lambda x)$

(ذلك لأن في هذه الحالة يكون $\lambda P(x_0) \leqslant -\lambda P(-x_0)$)

ومنه حسب النظرية $(*)$ ، يوجد شكل خطي f^* معرف على كل X ويحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = g^*(x)$$

$$\forall x \in X \longrightarrow f^*(x) \leqslant P(x)$$

بما أن :

$$-f^*(x) = f^*(-x) \leqslant P(-x)$$

فإنه من الصيغة السابقة نحصل على :

$$\forall x \in X \longrightarrow -P(-x) \leqslant f^*(x) \leqslant P(x)$$

2. نظرية هان-بناخ في الفراغ الشعاعي النظيمي

ليكن X فراغ شعاعي نظيمي ،و X_0 فراغ شعاعي نظيمي جزئي منه .

نظرية هان-بناخ الحقيقية

إذا كان X ف.ش.ن. حقيقي ، و X_0 ف.ش.ن.جزئي منه ، فإن لكل g^* من X_0' يوجد f^* من X'،و يحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = g^*(x)$$

$$\| g^* \| = \| f^* \|$$

البرهان

في حالة$X = \bar{X}_0$ ، البرهان حالة خاصة .

في الحالة العامة نعرف دالة P على X ، كالتالي $P(x) = \| g^* \| \| x \|$.

لاحظ أن g^*,P يحققان شروط نظرية هان -بناخ الحقيقية ، ومنه يوجد شكل خطي f^* معرف على X كل ويحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = g^*(x)$$

$$\forall x \in X \longrightarrow f^*(x) \leqslant P(x)$$

من تعريف الدالة P تمديد و بإعتبار القضية 1 نستنتج أن :

$$\forall x \in X \longrightarrow |f^*(x)| \leqslant P(x)$$

لاحظ

$$\| f^* \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f^*(x)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} P(x) = \| f \|$$

هذا يعني أن $f^* \in X'$.

من ناحية ثانية يكون :

$$\| f^* \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, x \in X} |f^*(x)| \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1, x \in X_0} |f^*(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, x \in X_0} |g^*(x)| = \| g^* \|$$

من الصيغ السابقة ، نستنتج أن : $\| g^* \| = \| f^* \|$.

نتيجة

ليكن X فراغ شعاعي نظيمي .

1. من أجل كل x من X ، حيث $x \neq 0$ ،يوجد f^* من X'، يحقق :

$$\| f^* \| = 1, f^*(x) = \| x \|$$

2. $\forall x \in X \longrightarrow \| x \| = \sup_{f^* \in X', \|f^*\|=1} |f^*(x)|$

البرهان

1. ليكن X_0 فراغا جزئيا من X معرفا كالتالي :

$$X_0 = \{y \in X / y = tx, t \in \mathbb{R}\}$$

نعرف تطبيقا g^* على كالتالي : $g^*(tx) = t \| x \|$
واضح أن $g^* \in X_0'$
من أجل كل y من X_0 ، لاحظ أن :

$$|g^*(y)| = |g^*(tx)| = |t| \| x \| = \| tx \| = \| y \|$$

ومنه نستنتج أن $\| g^* \| = 1$ ، أي أن $g^* \in X'$
وبالتالي حسب نظرية هان-بناخ ، يوجد f^* من X' يحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = g^*(x) \quad \| g^* \| = \| f^* \|$$

بما أن x من X_0 ، فإن : $f^*(x) = g^*(x) = \| x \|$
واضح أن $1 = f^*(x) = g^*(x)$

2. حالة $x = 0$ واضحة ذلك لأن :

$$\forall f^* \in X' \longrightarrow f^*(0) = 0$$

حالة $x \neq 0$ عندنا :

$$\forall f^* \in X' \longrightarrow |f^*(x)| \leqslant \| f^* \| \| x \|$$

وعليه يكون

$$\sup_{f^* \in X', \|f^*\|=1} |f^*(x)| \leqslant \| x \|$$

من ناحية ثانية حسب النقط

$$\exists h^* \in X' / \| h^* \| = 1, h^*(x) = \| x \|$$

ومنه و بإعتبار الصيغة السابقة يكون

$$\| x \| = h^*(x) = |h^*(x)| \leqslant \sup_{f^* \in X', \|f^*\|=1} |f^*(x)| \leqslant \| x \|$$

وبالتالي نستنتج أن :

$$\forall x \in X \longrightarrow \| x \| = \sup_{f^* \in X', \|f^*\|=1} |f^*(x)|$$

نتيـجة

ليكن X ف.ش.ن و X_0 ف.ش.ن.جزئي منه .

إذا كان x_0 من X ، بحيث: $\alpha = \inf\limits_{x\in x_0} \| x - x_0 \| > 0$ ، فإنه يوجد f^* من X' ، ويحقق :

1. $\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = 0$.
2. $f^*(x_0) = 1$
3. $\| f^* \| = \frac{1}{\alpha}$.
4. X_0 لا يكون كثيفا في X ،إذا وفقط إذا وجد f^* غير معدوم من X'، ويحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = 0$$

البرهان

- ليكن X_1 فراغا جزئيا من X معرفا كالتالي :

$$X_1 = \{y \in X / y = x + tx_0, x \in X_0, t \in \mathbb{R}\}$$

نعرف تطبيقا g^* على X_1 كالتالي $g^*(y) = t$
واضح أن g^* خطي .
لاحظ أن :

$$|g^*(y)| = |t| = \frac{|t| \| y \|}{\| y \|} = \frac{1}{\| \frac{y}{t} \|} \| y \| = \frac{1}{\| \frac{x}{t} + x_0 \|} \| y \| \leqslant \frac{1}{\alpha} \| y \|$$

ومنه $g^* \in X_1'$ ويحقق:

$$\| g^* \| \leqslant \frac{1}{\alpha}$$

من ناحية ثانية من التعريف g^* نستنتج :

$$\begin{cases} g^*(y) = 0, y \in X_0 \\ g^*(x_0) = 0, y \in x_0 \end{cases}$$

نبرهن أن : $\| g^* \| \geqslant \frac{1}{\alpha}$
عندنا $\alpha = \inf\limits_{x\in X_0} \| x - x_0 \|$ ،: هذا يعني

$$\exists (x_n)_{n\geqslant 1} \subset X_0 / \alpha = \lim\limits_{n\to +\infty} \| x_n - x_0 \|$$

بما أن g^* خطي ، وبإعتبار الصيغة السابقة ، فإن :

$$g^*(x_0 - x_n) = g^*(x_0)_g^*(x_n) = 1 - 0$$

أي :

$$1 = g^*(x_0 - x_n) \leqslant \| g^* \| \| x_0 - x_n \|$$

بإدخال النهاية على المتراجحة السابقة ، نحصل على $1 \leqslant \alpha \parallel g^* \parallel$،أي:

$$\| g^* \| \geqslant \frac{1}{\alpha}$$

من الصيغ السابقة ، نستنتج أن: $\| g^* \| = \frac{1}{\alpha}$

لإتمام البرهان نطبق نظرية هان-بناخ ، نجد f^* من X' يحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = 0$$

$$f^*(x_0) = 1 \quad \| f^* \| = \frac{1}{\alpha}$$

- [$\Leftarrow$]بفرض $\bar{X}_0 \neq X$ ،نستنتج أن :

$$\exists x_0 \in X / \alpha = d(x_0, X_0) = \inf_{x \in X_0} > 0$$

حسب النتيجة يوجد f^* من X' يحقق $f^*(x_0) = 1$،(أي $f^* \neq 0$) ، و

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = 0$$

[$\Rightarrow$] نفرض $\bar{X}_0 = X$،أي :

$$\forall x \in X, \exists (x_n)_{n \geqslant 1} \subset X_0 / \alpha = \lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

لاحظ بإعتبارنا f^* غير معدوم من X' ، يحقق :

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = 0$$

يكون :

$$f^*(x_n) = 1, n \geqslant 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} f^*(x_n) = f^*(x), n \geqslant 1$$

ومنه نستنتج أن :

$$\forall x \in X \longrightarrow f^*(x) = 0$$

هذا يعني أن $f^* = 0$،وهذا مناف لكون f^* غير معدوم ومنه الفرض غير صحيح ،أي أن $\bar{X}_0 = X$
.

نتيـجة

ليكن X ف.ش.ن.

من أجل كل x'' ,x' من X ،حيث $x' \neq x''$ يوجد f^* من X' ، بحيث يكون :

$$f^*(x') \neq f^*(x'')$$

البرهان

يكفي برهان ، أنه من أجل كل x^* من X ، حيث $x^* \neq 0$ ، يوجد f^* من X' يحقق $f^*(x^*) \neq 0$ ،

(ذلك لأن $f^*(x') \neq f^*(x'') \Leftrightarrow f^*(x''-x') \neq 0$)

لهذا نعرف الفراغ الجزئي X_0 من X كالتالي :

$$X_0 = \{y \in X / y = tx^*, t \in \mathbb{R}\}$$

نعرف تطبيقا g^* على X_0 كالتالي $g^*(y) = t$

لاحظ $g^*(x^*) = 1$ و $g^* \in X'_0$.

ومنه حسب نظرية هان-بناخ ، يوجد f^* من X'، يحقق

$$f^*(x^*) = 1 \neq 0$$

3.1.2 التمثيل العام للأشكال الخطية

الأساس الثنوي

ليكن X فراغا شعاعيا نظيميا،

قضية 3.1.3

1. إذا كانت الجملة $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مستقلة خطيا من X ،فإنه توجد جملة $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ مستقلة خطيا من X' ، من أجل كل$i, j = 1, 2, 3, ..., n$ تحقق :

$$g_i^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

ومنها هذه الجملة $\{x_i, g_i^*\}$,$i, j = 1, 2, 3, ..., n$ ، تحقق الثنائية القطبية (يصطلح عليها بثنائية التعامد)

البرهان

ليكن X_1 لغلاف الخطي للجملة $\{x_2, x_3, ..., x_n\}$،واضح أن X_1 مغلق في X من ناحية ثانية بما أن الجملة $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مستقلة خطيا ، فإن $x_1 \notin X_1$ وعليه يكون :

$$d(x_1, X_1) = \inf_{x \in X_1} \| x - x_1 \| > 0$$

فإنه يوجد خطيا g_1^* من X' ، يحقق :

$$\begin{cases} g_1^*(x) = 0, \forall x \in X_1 \\ g_1^*(x_1) = 1 \end{cases}$$

ومنه نكتب :

$$\begin{cases} g_1^*(x_i) = 0, i = 2, 3, ..., n \\ g_1^*(x_1) = 1 \end{cases}$$

بنفس الطريقة نجد $g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*$ من X' تحقق :

$$\begin{cases} g_k^*(x_i) = 0, i \neq k \\ g_k^*(x_k) = 1, \end{cases} \quad /k = 2, 3, ..., n$$

نبرهن أن الجملة $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ مستقلة خطيا. نفرض أن $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = 0^*$، حيث 0^*الشكل الخطي المعدوم.

ومنه وبإعتبار الصيغ السابقة ، من أجل كل $j = 1, 2, 3, ..., n$ نستنتج أن :

$$0 = 0^*(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x_j) = \alpha_j$$

هذا يعني أن الجملة $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ مستقلة خطيا .

2. إذا كانت $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ جملة مستقلة خطيا من X' ، فإنه توجد جملة $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مستقلة خطيا من X ، بحيث تكون الجملة $\{x_i, g_i*\}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ ، ثنائية قطبية.

البرهان

نبرهن القضية بالتراجع .

من أجل $n = 1$ نأخذ $0^* \neq g_1^* \in X'$ ومنه :

$$\exists x_0 \in X / g_1^*(x_0) \neq 0$$

ومنه بأخذ $x_1 = \frac{x_0}{g_1^*(x_0)}$ نستنتج أن :

$$x_1 \neq 0, g_1^*(x_1) = 1$$

بالتالي القضية صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن القضية الصحيحة من أجل $n - 1$،أي إذا كانت $\{g_2^*, g_3^*, ..., g_n^*\}$ جملة مستقلة خطيا

من X'، فإنه توجد جملة $\{x_2, x_3, ..., x_n\}$ مستقلة خطيا من X ، بحيث تكون الجملة $\{x_i, g_i^*\}$ ، $i = 2, 3, ..., n$ ثنائية القطبية .

من أجل كل x من X ، نضع

$$y = x - \sum_{i=2}^{n} g_i^*(x)x_i$$

من أجل كل $j = 2, 3, ..., n$ ، لاحظ أن :

$$g_j^*(y) = g_j^*(x) - \sum_{i=2}^{n} g_i^*(x)g_j^*(x_i) = g_j^*(x) - g_j^*(x) = 0$$

من ناحية ثانية من أجل كل x من X ، إذا كان $g_1^*(y) = 0$ ، فإنه من الصيغة السابقة ، يكون :

$$g_1^*(x) = \sum_{i=2}^{n} g_i^*(x)g_1^*(x_i)$$

أي أن : $g_1^*(x) = \sum\limits_{i=2}^{n} g_1^*(x_i)g_i^*$ ،وهذا مناف كون الجملة $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ مستقلة خطيا ، ومنه نستنتج : وجود x_1 من X ، بحيث بوضع نضع $y_1 = x_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} g_i^*(x_1)x_i$ يكون $g_1^*(y_1) \neq 0$:

ومنه بوضع $z_1 = \dfrac{y_1}{g_1^*(y_1)}$ يكون :

$$g_1^*(z_1) = 1, g_i^*(z_1) = 0, i = 2, 3, ..., n$$

نطبق الآن صحة القضية من أجل الجملة $n-1$ على الجملة $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ ، أي من أجلها توجد جملة $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مستقلة خطيا من X ، بحيث تكون الجملة $\{\{z_1, z_2\}, \{g_1^*, g_2^*\}\}$،ثنائية قطبية .

بنفس الطريقة السابقة نحصل على عنصر z_2من X من أجله يتحقق :

$$g_2^*(z_2) = 1, g_i^*(z_2) = 0, i = 1, 3, ..., n$$

نواصل العملية نحصل على جملة $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ ، بحيث تكون الجملة $\{z_i, g_i^*\}$ ، $i = 2, 3, ..., n$ ثنائية قطبية.

الجملة $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ مستقلة خطيا ، ذلك لأن بفرض $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = 0$ ، يكون :

$$0 = g_k^*(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_k^*(z_i) = \alpha_k, k = 1, 2, ..., n$$

نتيجة

إذا كانت هذه الجملة $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساسا للفراغ X،فإن الجملة $\{g_1^*, g_2^*, ..., g_n^*\}$ تكون أساسا للفراغ X'، ويسمى الأساس بالأساس الثنوي.

3.2 الفراغ الثنوي المكرر

تعريف 1.2.3

يسمى الفراغ الثنوي للفراغ X'، بالفراغ الثنوي المكرر X'' .

نتيجة

1. الفراغ $(X'', \| . \|)$ فراغ بناخ.
2. على الفراغ X'' ، يمكن تعريف النظم التالية :

$$\| \psi^* \|_{X''} = \begin{cases} \sup\limits_{\|g^*\| \leqslant 1} |\psi^*(g^*)| \\ \sup\limits_{\|g^*\| = 1} |\psi^*(g^*)| \\ \sup\limits_{g^* \neq 0} \dfrac{\psi^*(g^*)|}{\| g^* \|} \\ \inf\{c \in \mathbb{R}_+^* / \psi^*(g^*) \leqslant c \| g^* \|\} \end{cases} \qquad / g^* \in X'$$

إختصارا نكتب $\| \psi^* \|$ بدلا من $\| \psi^* \|_{X''}$.

الطمر القانوني

تعريف 2.2.3

يعرف الطمر القانوني من X في X''، ويرمز له بالرمز J_X بالصيغة التالية :

$$J_X : X \longrightarrow X''$$

$$x \longrightarrow J_X(x)$$

حيث من أجل كل x من X , $J_X(x)$ شكل خط محدود على X' معرف كالتالي :

$$J_X(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f^* \longrightarrow (J_X(x))(f^*) = \begin{cases} \overline{f^*(x)}, \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ f^*(x), \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{cases}$$

وتكتب الصيغة العامة كالآتي :

$$J_X : X \longrightarrow X''$$

$$x \longrightarrow J_X(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f^* \longrightarrow (J_X(x))(f^*) = \begin{cases} \overline{f^*(x)}, \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ f^*(x), \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{cases}$$

نتيجة

الفراغان X و $E(J_X)$،إزومورفيزميان متقاسان ، أي $X \approxeq E(J_x)$.

قضية 1.2.3

الطمر القانوني J_X يكون إزومورفيزما جبريا متقاسا من X في $E(J_X)$،$(J_X(X) \subset X'')$ ، أي أنه تقابل خطي من X على $E(J_X)$ يحقق :

$$\parallel J_X(x) \parallel\parallel x \parallel, \forall x \in X$$

البرهان

- لاحظ من أجل كل x,y من X ومن أجل كل α , β من $\mathbb{K}$، يكون :

$$\Big(J_X(\alpha x + \beta y)\Big)\Big(f^*\Big) = f^*(\alpha x + \beta y) = \alpha f^*(x) + \beta f^*(y) =$$
$$\alpha\Big(J_X(x)\Big)\Big(f^*\Big) + \beta\Big(J_X(y)\Big)\Big(f^*\Big) = \Big(\alpha\Big(J_X(x)\Big) + \beta\Big(J_X(y)\Big)\Big)\Big(f^*\Big)$$

ذلك من أجل كل f^* من X'.

- ومنه نستنتج أن :

$$J_X(\alpha x + \beta y) = \alpha\Big(J_X(x)\Big) + \beta\Big(J_X(y)\Big)$$

وبالتالي الطمر القانوني J_X خطي .

لبرهان التقابل يكفي برهان $KerJ_X = \{0\}$ لاحظ (لأن: $J_X : X \longrightarrow E(J_X)$).

- من أجل كل x من $KerJ_X$ عندنا $J_X(x) = 0$ ومنه نستنتج أنه من أجل كل f^* من X' يكون $f^*(x) = 0$ ، و بالتالي تكون $x = 0$ أجل ،أي أن $KerJ_X = \{0\}$.

وبالتالي الطمر القانوني J_X تقابل .

- من أجل كل x من X وبإعتبار النتائج السابقة.

يكون :

$$\parallel J_X(x) \parallel = \sup_{f^* \in X', \parallel f^* \parallel = 1} \left|\Big(J_X(x)\Big)\Big(f^*\Big)\right| = \sup_{f^* \in X', \parallel f^* \parallel = 1} |f^*(x)| = \parallel x \parallel$$

وبالتالي الطمر القانوني J_X حافظ للنظم ،(تقايس).

3.3 الفراغ الإنعكاسي

تعريف 1.3.3

نقول عن الفراغ الشعاعي النظيمي X ،أنه إنعكاسي ،إذا كان $E(J_X) = X''$، يعني أن يكون الطمر القانوني J_X من X في X'' غامرا.

بمعنى آخر الفراغ X نقول عنه أنه إنعكاسي ، إذا كانت كل الأشكال الخطية المحدودة على X' ، (عناصر X'') تكتب من J_X ، أي :

$$\forall \psi^{**} \in X'', \exists x^{*} \in X / \longrightarrow \psi^{**}(f^{*}) = f^{*}(x^{*}), f^{*} \in X'$$

قضية 1.3.3

1. إذا كان X فراغ لبناخ ، فإن صورة كرة الوحدة المغلقة في X وفق الطمر القانوني J_X تكون مغلقة في كرة الوحدة المغلقة في X'' .

البرهان

بما أن $F_X(0,1)$ مغلقة في الفراغ X لبناخ، فإنها تكون تامة ، و منه و بإعتبار الطمر القانوني J_X ، تكون :

- المجموعة $J_X\Big(F_X(0,1)\Big)$ تامة ،(ومنه مغلقة)، في الفراغ X'' .
- $J_X\Big(F_X(0,1)\Big) \subset F_{X''}(0,1)$

وبالتالي حسب تعريف تبولوجياالفراغ X'' على $F_{X''}(0,1)$تكون المجموعة $J_X\Big(F_X(0,1)\Big)$ مغلقة في الفراغ الجزئي $F_{X''}(0,1)$.

2. نقول عن ف.ش.ن X أنه إنعكاسي ،إذاوفقط إذا كانت صورة كرة الوحدة المغلقة في X وفق الطمر القانوني J_X تساوي كرة الوحدة المغلقة في X''، أي أن :

$$E\Big(J_X\Big) = X'' \Leftrightarrow J_X\Big(F_X(0,1)\Big) = F_{X''}(0,1)$$

البرهان

[$\Leftarrow$] من أجل كل g^{**} ، $(g^{**} \neq 0)$ من X'' يكون $\frac{g^{**}}{\| g^{**} \|} \in F_{X''}(0,1)$ ،ومنه حسب الفرض :

$$\exists x' \in F_X(0,1)/\frac{g^{**}}{\| g^{**} \|} = J_X(x')$$

ومنه و بإعتبار J_X خطي نستنتج أن :

$$\forall (g^{**} \neq 0) \in X'', \exists (x_{*} = x' \| g^{**} \|) \in X/g^{**} = J_X(x_{*})$$

بماأن $J_X(0)=0$ ،فإن:

$$\forall g^{**} \in X'', \exists x_0 \in X / g^{**} = J_X(x_0)$$

ومنه نستنتج أن $X'' = E(J_X)$.

[⇒] بماأن الفراغ من X إنعكاسي ، فإن J_X يكون تقايسا ومنه نستنتج أن :

$$J_X(F_X(0,1)) \subset F_{X''}(0,1)$$

من أجل كل g^{**} من $(F_{X''}(0,1))$, $(F_{X''}(0,1) \subset X'')$ يوجد x' من X بحيث يكون

$$g^{**} = J_X(x'), \| g^{**} \| = \| x' \|$$

ومنه نستنتج أن $\| x' \| \leqslant 1$ ، هذا يعني أن $x' \in F_X(0,1)$ وبالتالي من الصيغة الأخيرة نستنتج أن :

$$F_{X''}(0,1) \subset J_X(F_X(0,1))$$

من الصيغ السابقة يكون $F_{X''}(0,1) = J_X(F_X(0,1))$.

من $F_{X''}(0,1)$,$(F_{X''}(0,1) \subset X'')$، وبماأن فراغ هيلبارت H هو فراغ شعاعي نظيمي ، فإنه لبرهان المطلوب يكفي برهانه.

3. إذا كان X ف.ش.ن إنعكاسيا ، فإن فراغه الثنوي X' يكون أيضا إنعكاسيا.

البرهان

ليكن J_X و $J_{X'}$ الطمر القانوني من X في X'' ومن X' في X''' على التوالي أي أن :

$$J_X : X \longrightarrow X''$$

$$x \longrightarrow J_X(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\varphi^* \longrightarrow (J_X(x))(\varphi^*) = \varphi^*(x)$$

$$J_{X'} : X' \longrightarrow X'''$$

$$\varphi^* \longrightarrow J_{X'}(\varphi^*) : X'' \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$g^{**} \longrightarrow (J_{X'}(\varphi^*))(g^{**}) = g^{**}(\varphi^*)$$

برهان المطلوب يعني برهان أن :

$$E(J_X) = X'' \Rightarrow E(J_{X'}) = X'''$$

لهذا حسب القضية يكفي برهان أن $E(J_X) \supset X'''$، أي:

$$\forall f^{***} \in X''', \exists f_0^* \in X' / f^{***} = J_{X'}(f_0^*)$$

من أجل كل f^{***} من X''' نعرف تطبيقا h_0^* كالتالي $h_0^* = f^{***} \circ J_X$،أي :

$$h_0^* : X \longrightarrow X'' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h_0^*(x) = f^{***}\Big(J_X(x)\Big), x \in X$$

ومنه وبإعتبار تعريف الطمر القانوني، نستنتج أن $h_0^* \in X'$، ويحقق :.

$$f^{***}(J_X(x)) = h_0^* = (J_X(x))(h_0^*) = (J_{X'}(h_0^*))(J_X(x)), x \in X$$

بماأن $E(J_X) = X''$، فإنه من الصيغة الأخيرة نستنتج أن $f^{***} = J_{\prime}(h_0^*)$ ومنه :

$$\forall f^{***} \in X''', \exists \Big(f_0^* = h_0^*\Big) \in X' / f^{***} = J_{X'}(f_0^*)$$

أي أن $E(J_X) \supset X'''$، وبالتالي يكون $E(J_{X'}) = X'''$، هذا يعني أن الفراغ الثنوي X' إنعكاسي إنعكاسي .

4. كل فراغ جزئي مغلق من ف.ش.ن إنعكاسي ، يكون إنعكاسيا أيضا.

البرهان

- ليكن X ف.ش.ن.إنعكاسي و X_0 فراغا جزئيا مغلقامنه .
- ليكن J_X و J_{X_0}الطمر القانوني من X في X'' ومن X_0 في X_0'' على التوالي X_0'' ، أي أن :

$$J_X : X \longrightarrow X''$$

$$x \longrightarrow J_X(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\varphi^* \longrightarrow \Big(J_X(x)\Big)\Big(\varphi^*\Big) = \varphi^*(x)$$

$$J_{X_0}: X_0 \longrightarrow X_0''$$
$$x \longrightarrow J_{X_0}\Big(x\Big): X_0' \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\psi^* \longrightarrow \Big(J_{X_0}(x)\Big)\Big(\psi^*\Big) = \psi^*(x)$$

- برهان المطلوب يعني برهان أن :

$$E\Big(J_X\Big) = X'' \Rightarrow E\Big(J_{X_0}\Big) = X_0''$$

لهذا يكفي برهان أن $E\Big(J_{X_0}\Big) \supset X_0''$، أي :

$$\forall \omega^{**} \in X_0'', \exists y_0 \in X_0 / \omega^{**} = J_{X_0}\Big(y_0\Big)$$

- نعرف مؤثرين F و T كالتالي :

$$T: X' \longrightarrow X_0'$$
$$\varphi^* \longrightarrow T\Big(\varphi^*\Big) = \varphi^*|_{X_0}$$

أي أن الشكل $T(\varphi^*)$ هو إقتصار الشكل φ^* ونكتب :

$$\forall y \in X_0 \longrightarrow \Big(T(\varphi^*)\Big)(y) = \varphi^*(y)$$

$$F: X_0'' \longrightarrow X''$$
$$\omega^{**} \longrightarrow F\Big(\omega^{**}\Big): X' \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\varphi^* \longrightarrow \Big(F(\omega^{**})\Big)\Big(\varphi^*\Big) = \omega^{**}\Big(T(\varphi^*)\Big)$$

بما أن الفراغ Xإنعكاسي ،فإن الطمر القانوني غامر ومنه يوجد J_X^{-1}.

- نبرهن أن :

$$J_X^{-1}\Big(F(X_0'')\Big) \subset X_0$$

نفرض العكس ،أي :

$$\exists \omega_0^{**} \in X_0^{**} / J_X^{-1}\Big(F(\omega_0^{**})\Big) = x_0 \notin X_0$$

- ومنه وبإعتبار X_0 مغلقة ،حسب النتيجة من نظرية هان-بناخ ،يتحقق :

$$\exists \varphi^* \in X'/ \begin{cases} \varphi^*(x) = 0, x \in X_0 \\ \varphi^*(x_0) = 1 \end{cases}$$

- ومنه نستنتج أن :

$$T(\varphi^*) = \varphi^*|_{X_0} = 0^* \in X_0^*$$

عندها يكون :

$$0 = \omega_0^{**}\Big(T(\varphi^*)\Big) = \Big(F(\omega_0^{**})\Big)\Big(\varphi^*\Big) = \Big(J_X(x_0)\Big)\Big(\varphi^*\Big) = \varphi^*(x_0) = 1$$

وهذا تناقض ، وعليه تكون الصيغة صحيحة.

- نبرهن أن :

$$\forall \omega^{**} \in X_0^{**} \longrightarrow J_{X_0}\Big(J_X^{-1}(F(\omega^{**}))\Big) = \omega^{**}$$

بوضع $y = J_X^{-1}\Big(F(\omega^{**})\Big)$، وعليه يكون $y \in X_0$.
حسب نظرية هان-بناخ (نظرية التمديد في ف.ش.ن) ،عندنا :

$$\forall \psi^* \in X_0', \exists \varphi^* \in X' \in X'/T\Big(\varphi^*\Big) = \psi^*$$

- وبالتالي من أجل كل ψ^* من X_0' نستنتج أن :

$$\Big(J_{X_0}\Big(J_X^{-1}(F(\omega^{**}))\Big)\Big)\Big(\psi^*\Big) = \psi^*(y) = \Big(T(\varphi^*)\Big)(y) = \varphi^*(y) =$$

$$= \Big(J_X\Big(y\Big)\Big)\Big(\varphi^*\Big) = \Big(F\Big(\omega^{**}\Big)\Big)\Big(\varphi^*\Big) = \omega^{**}\Big(T\Big(\varphi^*\Big)\Big) = \omega^{**}\Big(\psi^*\Big)$$

- ومنه من أجل كل ψ^* من X_0' كالتالي :

$$\Big(J_{X_0}\Big(J_X^{-1}\Big(F(\omega^{**})\Big)\Big)\Big)\Big(\psi^*\Big) = \omega^{**}\Big(\psi^*\Big)$$

وعليه يكون : $J_{X_0}\Big(J_X^{-1}\Big(F(\omega^{**})\Big)\Big) = \omega^{**}$

- وبالتالي يحقق :

$$\forall \omega^{**} \in X_0'', \exists y_0 = J_X^{-1}\Big(F\Big(\omega^{**}\Big)\Big) \in X_0/\omega^{**} = J_{X_0}\Big(y_0\Big)$$

ومنه $E\Big(J_{X_0}\Big) \supset X_0''$،هذا وبإعتبار $E\Big(J_{X_0}\Big) \subset X_0''$

- وبالتالي يكون $E\Big(J_{X_0}\Big) = X_0''$، هذا يعني أن الفراغ الجزئي X إنعكاسي.

5. إذا كان X فراغ لبناخ ، فإنه يكون إنعكاسيا ، إذا و فقط إذا كان فراغه الثنوي X' إنعكاسيا.

البرهان

[$\Leftarrow$] حسب القضية -ب-

[$\Rightarrow$] عندنا الفراغ الثنوي X' إنعكاسي، حسب الإستلزام الأول يكون الفراغ الثنوي مكرر X'' إنعكاسيا.

- حسب القضية -أ- و النتيجة ، الفراغان X و $E(J_X)$ ، إزومورفيزميان متقايسان ، $(X \cong E(J_X))$ ، و $E(J_X) \subset X''$ ، فإنه لبرهان X إنعكاسي يكفي برهان $E(J_X)$ إنعكاسي.
- بما أن $X \cong E(J_X)$ و X مغلق ، فإن $E(J_X)$ يكون مغلقا أيضا ، هذا و بإعتبار $E(J_X) \subset X''$ و X'' إنعكاسي ، فإنه حسب القضية -ج- يكون $E(J_X)$ إنعكاسيا و بالتالي يكون X إنعكاسيا أيضا.

نتيـجة

الفراغ الشعاعي النظيمي X يكون إنعكاسيا ، إذا وفقط إذا كانت كرة الوحدة فيه متراصة بضعف .

نتيـجة

إذا كان X ف.ش.ن إنعكاسي ،فإن الفراغات X و X'' إزومورفيزميان متقايسان ، أي$X \cong X''$: (العلاقة بينهما آتية عن طريق الطمر القانوني J_X).

تنبيه

- عكس النتيجة في الحالة العامة غير صحيح ،بمعنى يوجد فراغ X يحقق $X \cong X''$ ، لكن ليس إنعكاسيا ،أي أن $E\left(J_X\right) \subsetneq X''$.
- بمعنى يوجد فراغات لبناخ ليست إنعكاسية بالرغم من وجود إيزومورفيزم بين الفراغ X وفراغه الثنوي المكرر X''، وهذا راجع لكون الإيزومورفيزم بينهما لم تأتي عن طريق الطمر القانوني J_X ، كمثال عن ذلك فراغ جيمس .أنظر المرجع [9]

مثـال

1. كل فراغ شعاعي نظيمي X بعده منته،$(dimX = n)$ يكون إنعكاسيا .

- معلوم أنه إذا كان $dimX = n$ ، فإن كل شكل خطي على X ، يكون محددا ، أي أن الفراغ الثنوي الجبري يساوي الفراغ الثنوي التبولوجي، أي $X^* = X'$ ، عندها يكون :

$$dimX = dimX' = n$$

- بنفس الطريقة نجد $X'' = X^{**}$ و $dimX' = dimX'' = n$.
- و منه يكون $dimX = dimX'' = n$ الجملة ، و بالتالي يكون الطمر القانوني J_X غامر ، هذا يعني أن الفراغ X إنعكاسي.

2. الفراغ l^1 ليس إنعكاسيا.
3. الفراغات c_c , c_0 , l^∞ ليست إنعكاسية .
4. الفراغ l^p ،حيث $1 < p < \infty$، فراغ إنعكاسي .
5. (ا) الفراغ $L_\infty[a, b]$ ، ليس إنعكاسي.

   (ب) الفراغ $C[a, b]$، ليس إنعكاسيا.

خـــــاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة في توضيح المفاهيم المحققة في الفراغ الشعاعي النظيمي وغير المحققفة في الفراغ الشعاعي التبولوجي ، من حيث الإنعكاسية .

تطرقنا في البداية للإنعكاسية في الفراغ الشعاعي التبولوجي ، وخصصناها في الفراغ الشعاعي النظيمي .

لهذا الغرض جمعنا أهم الكتب و المقالات التي تناولت هذا الموضوع والمتعلقة بها ، بعض المراجع من التحليل الدالي ، والفراغ الشعاعي التبولوجي ، وتبقى الدراسة مفتوحة لفراغات أخرى .

المصادر

المصادر باللغة العربية

[1] د.أ. كولموغوروف ،س.فومين، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي ، - تعريب أبو بكر خالد سعد الله-د.م.ج.1987.

[2] م. عسيلة ؛ المؤثرات الخطية المحدودة ونظريةالأطياف ، مطبوعة-جامعة ورقلة-2015.

[3] م .عسيلة ؛ دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي ،سامي لطباعة-الجزائر-2009.

[4] م. عسيلة ؛ سلسلة التحليل الدالي الكتاب الأول، سامي لطباعة-2022.

[5] م. عسيلة ؛ سلسلة التحليل الدالي الكتاب الثاني ، مطبوعة-2022.

المصادر باللغة الأجنبية

[6] A.P.and W.ROBERTSON;Topological Vector Spaces,Cambridge at the university press,1973.

[7] H.H.Schaefer,M.P.Wolff;Topological Vector Spaces ,Springer Science +Businees Media,LLC,1991.

[8] N.BourbaKi,Espaces vectoriels topologiques.

[9] R. C.James, A Non-Reflexive Banach Space Isometric with Its Second Conjagate Space ;JSTOR,V37,Issue (Mar.15,1951),Pages 174-177.

[10] Yu.I.Petunin,A criterion for the reflexivity of a Banach space Dokl.Akad.Nauk SSSR,1961,Volume 140,Number 1,Pages 56-58.

[11] Yu.I. Petunin, Conjugate Banach spaces containing subspaces of characteristic zero,Dokl.Akad.Nauk SSSR,1964,Volume 154,Number 3,Pages 527-529.

الملخص

هذا العمل يهدف إلى معرفة الخواص و المفاهيم في الفراغ الإنعكاسي للفراغ الشعاعي النظيمي، وإمكانية تعميمها على الفراغات الشعاعية التبولوجية .
لهذا بدأت الدراسة بمعرفة مفاهيم مختلفة حول الفراغ الشعاعي النظيمي والفراغ الشعاعي التبولوجي ، ومن ثم تطرقنا إلى الإنعكاسية في الفراغ الشعاعي النظيمي ، وتعميمها في الفراغ الشعاعي التبولوجي ، الذي إعتمدنا فيه على الفراغات المحدبة محليا .

الكلمات المفتاحية : الفراغ الشعاعي النظيمي ، الفراغ الشعاعي التبولوجي ، الفراغ المحدب محليا ، الفراغ الإنعكاسي.

Abstract

This work aims to know the properties and concepts in the reflexive space of the normed vector space, and whether it is possible that it can be generalized in the topological vector space.
So, the study have started with the different concepts about normed vector space and topological vector space . Then,we have discussed reflexivity in normed vector space , and its generalization in topological vector space , in which we have relied on locally convex spaces .

key words : Normed vector space , Topological vector Space, Locally convex space , Reflexive space .