UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté de mathématiques et sciences des Matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et analyse numérique

Par : Djidour Faiza

Théme

Approximation par éléments finis du problème de Signorini scalaire

Soutenu publiquement le : 15/06/2022

Devant le jury composé de :

Mezabia Elhadi	MCA.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	M.C.A.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Merabet Ismail	Prof.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

L'année univarsitaire : 2021/2022

Didicaces

Je dédie ce travail à

Mes parents :

Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père(que Dieu lui fasse miséricorde), qui a été la base de ma vie, et de mon travail . Puisse Dieu faire de ce travail une fierté pour lui.

Mes frères qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

bien acquis.

Remerciement

Remerciement Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Mr MERABET ISMAIL, docteur à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, pour avoir accepté de diriger ce travaille. Je le remercie infiniment pour avoir toujours été présent par ses conseils, ses encouragements et sa gentillesse. Je voudrai aussi le remercier pour sa disponibilité et du temps consacré à mon travail de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail.

Table des matières

Didication **i**

Remerciement **ii**

Notations et Préliminaires **1**

Introduction **3**

1 Le problème de Signorini **5**

1.1 problème de Signorini : Contact unilatéral 6

1.2 Problème classique 8

1.3 le problème de Signorini Scalaire 8

1.3.1 La formulation variationnelle 9

1.3.2 Quelques résultats abstraits 14

1.3.3 Existence et unicité pour le problème de Signorini 16

2 Approximation par éléments finis du problème de Signorini **18**

2.1 Le problème discret 19

2.2 Existence et unicité pour le problème discret 20

2.3 Analyse d'erreur a priori 21

2.3.1 Analyse d'erreur a priori pour une solution H^2-régulière 23
2.3.2 Analyse d'erreur a priori pour une solution peu réguilière 24
2.3.3 Estimation d'erreur a priori optimale 29

Notations

➤ Ω : Une domaine de $\mathbb{R}^d$ (d= 2,3 pour les application).

➤ Γ : La frontière de Ω.

➤ $\Gamma_0, \Gamma_g, \Gamma_c$: Une partie de Ω.

➤ ν : La composante normale de u ($u_\nu = u.\nu$).

➤ n : normale unitaire extérieure.

➤ u_N : u.n la composante normale du déplacement.

➤ $u = (u_N, u_T)$, u_T la composante tangentielle du déplacement.

➤ $\sigma_N = (\sigma(u)n)n$: La composante de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

➤ $\sigma(u)n = (\sigma_N, \sigma_T)$, σ_T La composante tangentielle du vecteur $\sigma(u)$.

➤ $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}e_{kl}(u)$, $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, $div\sigma(u) = (\partial_j \sigma_{ij})$.

➤ Δ : L'opérateur de Laplace.

➤ ∇ : Opérateur de gradient .

➤ $(\cdot,\cdot)$: Le produit scalaire et $\langle\cdot,\cdot\rangle$: Le produit de dualité.

➤ $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall\alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$.

➤ $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$.

➤ H^{-1} : Le dual de l'espace H_0^1.

➤ $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_g),\ \exists u \in H^1(\Omega),\ \text{tel que } u_{|\partial\Omega} = g\ \}$.

➤ $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$: Le dual de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

➤ V_h : L'espace d'approximation .

➤$\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois continue, différentiable sur Ω.

Introduction

Les phénomènes de contact avec ou sans frottement sont fréquemment rencontrés. Le contact de des pneux d'une voiture avec le sol, le sabot avec le disque de frein et les chemises avec les pistons sont des exemples courants. La fréquence des ces problèmes de contact a engendré récemment de nombreux ouvrages mathématiques et numériques. En 1933, A. Signorini a formulé un problème de contact sans frottement entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide. Ce n'est qu'en 1964, que G. Fichera a pu résoudre ce problème en utilisant quelques propriétés des inéquations variationnelles elliptique. L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé en 1972, avec l'ouvrage de Duvaut Lions, où on trouve des résultats d'existance et l'unicité de plusieurs problèmes de contact, mais dans le cas linéaire. Les problèmes de contact avec conditions aux limites de Signorini ont été étudiés par plusieurs auteurs. Les problème de contact avec conditions aux limites de Signorini et frottement de Coulomb induisent de nombreuses difficultés mathématiques dans la résolution mathématique. L'analyse mathématique des problèmes de contact n'est qu'une étape marginal dans le traitement de ces problèmes dans les secteur industriel. Afin de répondre aux besoins du secteur industriel, il convient de faire appel au traitement numérique de la nécessité de proposer ou de construire des modèles approchés pour ces problèmes de contact. Beaucoup de travaux portant sur l'étude numérique des problèmes de contact on été réalisés, on peut citer par exemples [9] pour les problèmes linéaires et [5], [6] et [11] pour les problèmes non linéaires.

Dans ce travail, nous avons étudié l'approximation par l'éléments finis du problème de Signorini scalaire. Ce mémoire se compose de trois chapitres.

La premier chapitre est consacrée aux définitions des outils mathématique et mécanique dont on a besoin dans l'étude de notre problème mécanique de contact.

La deuxième chapitre porte sur l'étude théorique du contact sans frottement entre un corps élastique non linéaire et une fondation rigide avec l'hypothèse des petites déformations et dans le processus statique. Les conditions aux limites de contact sont celles de Signorini. Les résultats d'existance et d'unicité de la solution faible de ce problème peuvent être trouvés dans [16].

La troisième chapitre est réservé à l'approximation de ce problème mécanique de contact. Nous donnons une méthode d'approximation de ce problème, ensuite nous démontrons la convergence ce cette méthode. Notre contribution dans l'étude de ce problème de contact réside dans l'estimation théorique de l'erreur d'approximation ainsi que la démonstration de la convergence de la solution approchée vers la solution faible du problème mécanique.

Chapitre 1

Le problème de Signorini

Introduction

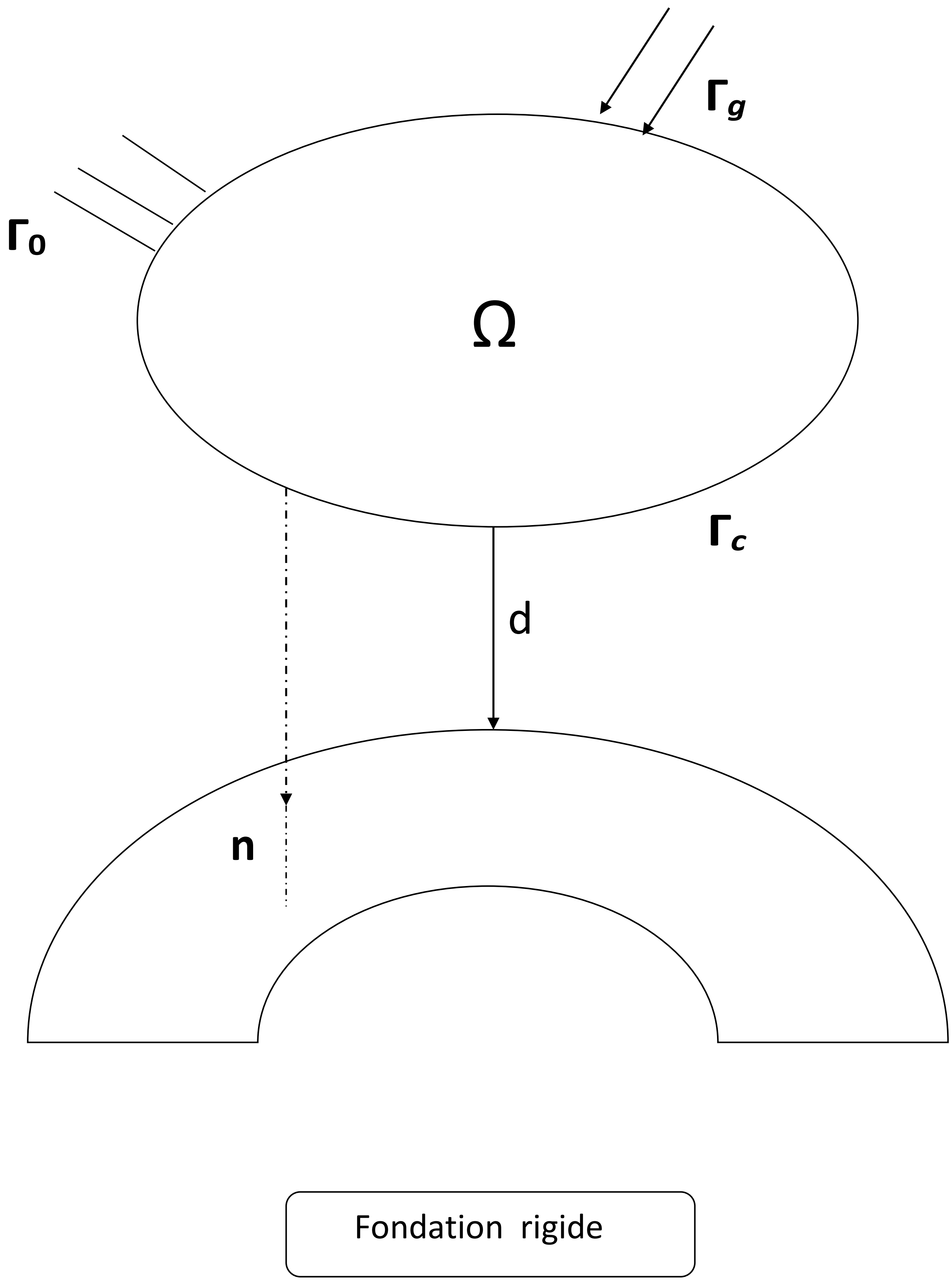
Dans de nombreuses situations pratiques en mécanique des solides, il est important de modéliser situation ou deux corps ou plus entrent en contact l'un avec l'autre. L'objectif de ce chapitre est de dériver les conditions de contact pour une solution classique et assez facile problème dans ce contexte, à savoir le contact entre un corps élastique subissant petites déformations et une fondation rigide et sans frottement. Dans la suite ceci problème est référencé comme le problème de Signorini, qui est aussi le nom de ce problème le plus utilisé dans la littérature.

Une introduction à la mécanique des continus se trouve dans Ciarlet [3]. Une vue détaillée de l'élasticité linéaire est présentée par Necas et Hlavacek [14]. Les problèmes de lois élastiques-plastiques ou de matériaux plastiques sont étudiés par Korneev et Langer [10] ou Necas et Hlavacek [14]. Le problème d'un corps élastique venant en contact avec une fondation rigide a d'abord été modélisé par Signorini [15] en 1933. La dérivation des conditions de contact présenté ici est fortement basé sur le livre de Kikuchi et Oden [11].

Une généralisation de cette approche à deux problèmes de contact corporel peut être trovée dans Hlavacek, Haslinger, Necas et Lovisek [8].

1.1 problème de Signorini : Contact unilatéral

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d(d = 2, 3)$ de $\mathcal{C}^{1,1}$, occupé par un matériau élastique isotrope et homogène de densité ρ. la frontière de Ω est divisée en trois parties $\Gamma_0, \Gamma_g, \Gamma_c$ (mes$(\Gamma_c) > 0$). Ce matériau entre en contact avec une fondation rigide en Γ_c, subit une force surfacique g sur Γ_g et une force volumique f sur Ω. On suppose que la partie Γ_0 est encastrée (Fondation rigide) supposons que le système est en état statique et le contact sur Γ_c est avec les conditions de Signorini. Notre objectif est la recherche des déplacements des points de $(\bar{\Omega})$.



Γ_g
Γ_0
Ω
Γ_c
d
n
Fondation rigide

1.2 Problème classique

$$\text{Trouver } u \in K(\Omega) \text{ tel que}$$

$$\text{- div}\sigma(u) = f, \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1}$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \tag{1.2}$$

$$\sigma(u)n = g, \quad \text{sur } \Gamma_g \tag{1.3}$$

$$u_N \geq d, \quad \sigma_N \geq 0, \quad \sigma_N(u_N - d) = 0, \quad \sigma_T = 0, \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.4}$$

On simplifie l'écriture par $\sigma(u) = Ae(u)$ qui est appelée loi de comportement. On suppose que les coefficients $a_{ijkl} \in L^\infty$ vérifient la propriété de la symétrie et la propriété de l'ellipticité i.e :

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

$$\exists M > 0,\ a_{ijkl}e_{ij}(u)e_{kl}(u) \geq Me_{ij}(u)e_{ij}(u),\ \forall e_{ij} = e_{ji}$$

Les équations (1.2) et (1.3) sont les conditions imposée sur les bords respectivement Γ_0 et Γ_g. Les conditions dans (1.4) sont appelées les conditions de Signorini. $\sigma_T = 0$ pas de frottement, pas de cisaillement. d une fonction d'interstice définie sur Γ_c est dans $H^{1/2}(\Gamma_c)$.

1.3 le problème de Signorini Scalaire

Ce section traite de l'analyse mathématique du problème de Signorini scalaire. Première de tout une formulation variationnelle de ce problème de contact sera dérivée. Et de plus, l'existence d'une solution unique sera démontrée.

De nombreux résultats sur l'analyse des problèmes variationnels se trouvent dans Duvant et Lions [4]. Traiter les inégalités variationnelles en particulier la monographie par Kinderlehrer et Stampachia [12] doit être noté. Kikuchi et Oden [11] présente de nombreux résultats pour différents types de problèmes de contact.

La section 2.1 présente la dérivation d'une formulation variationnelle de Signorini problème, dans la section 2.2, quelques résultats abstraits pour l'inégalités variationnelles sont présentés. En utilisant ces théorèmes, l'existance et l'unicité d'une solution du l'inégalité variationnelle décrivant le problème de Signorini est déduite dans la section

Dans ce qui suit, une formulation variationnelle des conditions d'équilibre d'un corps élastique linéaire venant en contact avec une fondation rigide sans frottement est dérivé.

On définie le problème classique pour les données $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma_g)$, le problème de Signorini consiste à trouver le déplacement $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= g, \quad \text{sur } \Gamma_g \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \geq 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_C \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale extérieure sur $\partial\Omega$. On note ici qu'on a considéré le cas ou l'obstacle $\psi = 0$, dans le cas générale lorsque $\psi \neq 0$ les condition $u \geq 0$ et $u\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ deviennent :

$$u - \psi \geq 0, \quad et \quad (u-\psi)\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Dans ce qui suit, une formulation variationnelle du problème énoncé en (1.5) sera dérivé.

1.3.1 La formulation variationnelle

On introduit l'espace fonctionnel :

$$V := \{H^1(\Omega, \Gamma_0) := v \in H^1(\Omega), \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0\} \tag{1.6}$$

et l'ensemble :

$$K(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega, \Gamma_0), \quad v \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c\} \tag{1.7}$$

et l'inégalité variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K(\Omega) \end{cases} \tag{1.8}$$

Pour la dérivation d'une formulation variationnelle, on procède formellement et supposons $v \in K(\Omega)$. Soit u la solution de Signorini problème (1.5), et v un élément quelconque de $K(\Omega)$.

Alors par intégration partielle ce qui suit est valable :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(v-u)dx = \int_{\Omega} f(v-u)dx + \int_{\Gamma_g} g(v-u)ds. \tag{1.9}$$

D'après la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds = \int_{\Omega} f(v-u)dx + < g, v-u >_{1/2,\Gamma_g} . \tag{1.10}$$

L'intégrale de $\partial\Omega$ peut être simplifiée de la manière suivante :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds = \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds + \int_{\Gamma_g} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds.$$

En utilisant (1.10)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u)dx - \int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds - \int_{\Gamma_g} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds \\ = \int_{\Omega} f(v-u)dx + < g, v-u >_{1/2,\Gamma_g} . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ainsi toute solution classique de (1.5) satisfait l'inégalité variationnelle.

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u)dx \geq \int_{\Omega} f(v-u) + < g, v-u >_{1/2,\Gamma_g} \tag{1.12}$$

Maintenant, l'inégalité variationnelle (1.12) est supposée valable pour une fonction $u \in K(\Omega)$. On montrée que u est aussi une solution classique de (1.5), pourvu que u soit suffisamment lisse.

En utilise formule de Green :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(v-u)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds \geq \int_{\Omega} (f, v-u)dx + \int_{\Gamma_g} (g, v-u)ds \quad \forall\, v \in\ K. \tag{1.13}$$

Puisque $v - u = 0 \quad$ dans $\partial\Omega$, donc l'inégalité (1.13) être :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(v-u)dx - \int_{\Omega}(f, v-u)dx \geq 0,$$

et soit $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$(fonction non négative) tel que :$v = u \pm t\phi \in K(\Omega)$ pour tous $0 < t \leq 1$ et par substitution de v on trouve pour tous $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$:

$$\pm t \int_{\Omega}(-\Delta u - f, \phi)dx \geq 0, \tag{1.14}$$

ceci implique pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$:

$$-\Delta u = f \quad p.p \; dans \; \Omega, \tag{1.15}$$

si $u \in K(\Omega) \subset H_0^1(\Omega, \Gamma_0)$ est un solution de problème obstacle, alors vérifiée

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ u &\geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \end{aligned} \tag{1.16}$$

En utilisant (1.13), (1.15). peut être simplifié, comme

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u(v-u)dx - \int_{\Omega}(f, v-u)ds &\geq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds + \int_{\Gamma_g}(g, v-u)ds \\ &\geq \int_{\Gamma_g \cup \Gamma_c \cup \Gamma_0}(\frac{\partial u}{\partial n}, v-u)ds + \int_{\Gamma_g}(g, v-u)ds, \end{aligned}$$

résultant en l'inégalité variationnelle

$$\int_{\Gamma_g \cup \Gamma_c \cup \Gamma_0}(\frac{\partial u}{\partial n}, v-u)ds \geq \int_{\Gamma_g}(g, v-u)ds. \tag{1.17}$$

On suppose que $\phi \in D(\Omega \cup \Gamma_g), v = u \pm \phi$. Alors (1.17) donnée :

$$\pm \int_{\Gamma_g}(\frac{\partial u}{\partial n} - g, \phi)ds \geq 0, \tag{1.18}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma_g, \tag{1.19}$$

(1.17). Peut à nouveau être simplifiée conduisant à

$$\int_{\Gamma_C} (\frac{\partial u}{\partial n}, v-u)ds \geq 0. \tag{1.20}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux ci-dessus, on peut montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \tag{1.21}$$

on suppose : $v = 0, \quad v = 2u,$

On utilise l'inéquation (1.20)

$$\int_{\Gamma_c} (\frac{\partial u}{\partial n}, -u)\ ds \leq 0,$$
$$\int_{\Gamma_c} (\frac{\partial u}{\partial n}, u)\ ds \geq 0, \tag{1.22}$$

donc

$$\int_{\Gamma_c} (\frac{\partial u}{\partial n}, u)\ ds = 0, \tag{1.23}$$

alors

$$\frac{\partial u}{\partial n}\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c. \tag{1.24}$$

Finalement on obtient le problème obstacle classique :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \quad \text{sur } \Gamma_g \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_c \end{aligned}$$

Soit $H^{\alpha}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev d'order α et l'inégalité $u \geq 0$ sur Γ_c devrait tenir presque partout. Si l'inégalité variationnelle (1.12) est vérifiée pour $u \in K(\Omega), f \in L^2(\Omega), g \in H^{-1/2}(\Gamma_g)$, alors u est appelée solution faible de le problème de Signorini.

Remarque 1.1 .

1. *Dans l'inégalité variationnelle (1.12) la surface de contact Γ_c n'apparait pas explicitement au prix de résoudre une inégalité au lieu de l'inégalité (1.5) .*

2. *L'inégalité variationnelle (1.12) peut également être dérivée d'une minimisation principe. L'énergie potentielle d'un corps avec un champ de déplacement u est donnée par*

$$E_{pot}(u) = \int_\Omega \Delta u dx - \int_\Omega < f, u > dx - \int_{\Gamma_g} < g, u > ds. \tag{1.25}$$

En introduisant la fondation F, la solution u doit avoir un potentiel minimal énergie de tous les champs de déplacement admissibles, c'est-à-dire.

$$E_{pot}(u) \leq E_{pot}(v), \qquad v \in K(\Omega). \tag{1.26}$$

C'est pourquoi pour tout $v \in K(\Omega)$ la fonction

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Theta \longmapsto E_{pot}(u + \Theta(v-u)) \tag{1.27}$$

a son minimum à $\Theta = 0$, résultant en

$$\begin{aligned} h'(0) &= \lim_{\Theta \longrightarrow 0, \Theta \geq 0} \frac{E_{pot}(u + \Theta(v-u)) - E_{pot}(u)}{\Theta} = E'_{pot}(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega \Delta u dx - \int_\Omega < f, v-u > dx - \int_{\Gamma_c} < g, v-u > ds \quad \geq 0. \end{aligned}$$

Dans la suit on montre l'existence d'une unique solution de (1.12) dans l'ensemble des déplacements admissibles $K(\Omega)$. Par conséquent, quelques théorèmes de base et abstraits pour les inégalités variationnelles sont nécessaires, qui sont données dans la section(2.2)

1.3.2 Quelques résultats abstraits

Cette section traite de deux résultats de base pour les inégalités variationnelles. Ce dernier est une généralisation du théorème du Lax Milgram donnant un instrument pour prouver l'existence et l'unicité des solutions d'inégalités variationnelles

Proposition 1.2 $K(\Omega)$ *un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de Hilbert* V.

Preuve.

$K(\Omega)$ convexe fermé non vide.

convexe :

Maintenant on considère $t \in [0,1]$, et $u, v \in k(\Omega)$ c'est à dire : $u \geq \psi$ et $v \geq \psi$

Alors

$$tu + (1-t)v \geq t\psi + (1-t)\psi = \psi$$

donc

$$tu + (1-t)v \in K(\Omega) \Longrightarrow K(\Omega) \text{ est convexe}$$

fermé :

Soit $v_n \in K(\Omega)$, un suit convergence $v_n \longrightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$, On va démontrée que $v \in K(\Omega)$:

$$v_n \geq \psi \Rightarrow v_n - v + v \geq \psi,$$

on a

$$(v_n - v) + v \geq \psi,$$

et

$$|v_n - v| \geq v_n - v \geq \psi - v,$$

donc

$$0 \geq \psi - v \Rightarrow v \geq \psi,$$

$\Longrightarrow K(\Omega)$ fermé. ■

En utilisant le proposition (2.2), le théorème des Lions et Stampacchia peut être prouvé.

Dans le théorème de Lions et Stampacchia, il n'y a aucune exigence de symétrie de l'opérateur apparaissant. Ceci est particulièrement important si l'opérateur différentiel sous-jacent est non symétrique. De plus, les problème non linéaires peuvent être traités avec une demande importante sera l'ellipticité de l'opérateur sous-jacent. Le théorème de Lax Milgram résult comme corollaire de ce qui suit théorème :

Théorème 1.3 *(Lions, Stampacchia).*

Soit V un espace de Hilbert, $K(\Omega) \subseteq V$ a sous ensemble fermé, convexe, non vide de l'espace V et $A : V \longrightarrow V'$ une continue et un opérateur coercive,pas nécessairement linéaire, c'est-à-dire que les constantes M, $\alpha \geq 0$ existent avec

$$\| Au - Av \| \leq M \| u - v \|, \quad u, v \in K(\Omega), \tag{1.28}$$

$$< Au - Av, u - v > \geq \alpha \| u - v \|^2, \quad u, v \in K(\Omega). \tag{1.29}$$

Où V' désigne le dual de l'espace V.

Alors pour tout $L \in V'$ il existe une unique solution $u \in K(\Omega)$ de l'inégalité variationnelle

$$< Au - L, v - u > \geq 0. \tag{1.30}$$

De plus, l'opérateur de solution non linéaire est Lipschitz continue avec une constante $1/\alpha$, c'est-à-dire

$$\| u_1 - u_2 \| \leq \frac{1}{\alpha} \| L_1 - L_2 \| . \tag{1.31}$$

Corollaire 1.4 *(théorème de Lax-Milgram).*

Soit $L(.), a(\cdot, \cdot)$ comme ci-dessus. Si $K(\Omega) = V$, alors l'inégalité variationnelle

$$a(u, v) =< L, v >, \quad v \in V, \tag{1.32}$$

est uniquement résoluble.

1.3.3 Existence et unicité pour le problème de Signorini

Définition 1.5 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de* 1^{er} *espace tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K(\Omega) \end{cases} \tag{1.33}$$

Dans ce section présente l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles elliptique de première espèce.

Théorème 1.6 *(de Stampacchia)*
Si $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ *forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel* $V, L(\cdot) : V \longmapsto \mathbb{R}$ *forme linaire sur* V *est* $K(\Omega)$ *sous ensemble convexe non vide de* V *alors l'inéquation variationnelle (1.33) admet une solution unique.*

Preuve.

l'ensemble $K(\Omega)$ est convex, fermé.
La forme $a: \ H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$: est bilinéaire, symétrique (évident), et continue(par l'inégalité de Cauchy Shwarz) :

$$|a(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx \ | \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

Et coercive dans $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \ dx.$$

Par inégalité de Ponicarré : $\|u\|_0^2 \leq \gamma \|\nabla u\|_0^2, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega),$
donc :

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + c\|u\|_0^2 \\ &\geq \|u\|_1^2 \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

où :$c = \frac{1}{\gamma}$, c'= min $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2c})$ sont des constantes positives.

De plus, il est claire que L est linéaire continue. ■

Théorème 1.7 *Soit Ω un domaine borné dont le bord est constitué d'un nombre fini de parties lisses, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ de mesure positive. Laisser*

$$K(\Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega, \Gamma_0), \quad v \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c\}, \tag{1.34}$$

$f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma_g)$.

Alors l'inégalité variationnelle (1.12) admet une unique solution dans $K(\Omega)$.

Chapitre 2

Approximation par éléments finis du problème de Signorini

Introduction :

Dans ce chapitre une discrétisation par éléments finis de l'inégalité variationnelle (1.12) est présenté et analysé. Donc l'espace des solutions $H^1(\Omega)$ est remplacé par l'espace discret des éléments finis linéaires par morceaux. De plus un discret, l'approximation polygonal de l'ensemble admissible $K(\Omega)$ est introduite. Dans la section(3.2) l'existence et l'unicité d'une solution discrète sont démontrées. De plus un résultat donnant des conditions de convergence de la solution discrète vers la solution de le problème continue (1.12) est présenté dans la section(3.3).

Sur les méthodes des éléments finis de nombreuses monographies ont été publiées au cours de la dernière vingt ans. Seuls certains sont mentionnés ici, par ex. Zienkiewices [17], Goering, Roos et Tobiska [7], Kikuchi [11], Ciarlet [3] ou Krizek et Neittaanmaki [13]. Dans le contexte des inégalités variationnelles le livre de Glowinski, Lions et Trémolières [6] ou Brezzi, Hager et Raviart [2] doivent être noté. De nombreuses références sur divers aspects de la méthode des éléments finis en particulier dans le contexte avec des méthodes multiniveaux peut être trouvé dans Langer [10].

2.1 Le problème discret

Afin d'approcher cette inéquation variationnelle par éléments finis quadratiques on suppose que Ω et polygonal. Pour tout paramètre de discrétisation h>0, on considère $\mathcal{T}_h$, une partition de Ω en triangles (ou en quadrangles) avec une taille maximale h, i.e. $\bar{\Omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} \bar{T}$. La triangulation $\mathcal{T}_h$ est supposée $\mathcal{C}^0$-régulière au sens de [3]. Dans chaque élément $T \in \mathcal{T}_h, \mathbb{P}_1(T)$ désigne l'ensemble des polynômes de degré total ≤ 1(de degré ≤ 1 dans chaque direction d'espace si le maillage est quadrangulaire) et $\mathbb{E}_T$ est constitué des noeuds de Lagrange qui sont les sommets des éléments et les milieux de leurs cotés, on pose $\mathbb{E}_h = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} \mathbb{E}_T$. On note $\mathcal{T}_h^C$ la «trace» de la triangulation $\mathcal{T}_h$ sur la zone de contact Γ_c qui est caractérisée par la subdivision $(x_i^C)_{0\leq i\leq i^*}, (t_i =]x_i^C, x_{i+1}^C[)_{0\leq i\leq i^*-1}$ et le milieu de t_i est $x_{i+1/2}^C$. Une première modélisation numérique de la condition de Signorini consiste à considérer une solution discrète positive aux noeuds $(x_i^C)_i$ et dont les moments sur les $(t_i)_i$ sont positifs, de sorte que le cône convexe discrète $K_h(\Omega)$ est donné par :

$$K_h(\Omega) := \{v_h \in V_h \quad | \quad v_h \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c\}, \tag{2.1}$$

et

$$V_h := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \quad | \; v_{h|T} \in \mathbb{P}_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad v_h = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0\}. \tag{2.2}$$

Alors nous pouvons définir les inégalités variationnelles discrètes par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h), \quad \forall\, v_h \in K_h(\Omega) \end{cases} \tag{2.3}$$

Un test sur l'admissibilité de $v_h \in \mathbb{E}_T$ n'implique que des évaluation de v_h aux noeuds en $\mathbb{E}_T$ au prix de $K_h(\Omega)$ n'étant plus une approximation intérieure de $K(\Omega)$. C'est pourquoi l'analyse de la convergence de la solution discrète vers la solution de le problème continue devient plus difficile.

En utilisant les termes définis ci-dessus, l'approximation par éléments finis suivante de l'inégalité variationnelle (1.12) peut être définie :

$$a_h(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h), \quad \forall\, v_h \in K_h(\Omega), \tag{2.4}$$

où u_h désigne la solution de(2.1) avec

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \hat{u}_h \hat{v}_h \; dx, \tag{2.5}$$

et

$$L(v_h) = \int_{\Omega_h} f v_h \; dx + \int_{\Gamma_{g_h}} g v_h \; ds. \tag{2.6}$$

L'existance et l'unicité d'une solution seront traitées dans la section suivante.

2.2 Existence et unicité pour le problème discret

Dans cette section, l'existence et l'unicité d'une solution discrète de l'inégalité variationnelle (2.4) est montrée en utilisant les résultats de la section 2.2 et la section 2.3. Comme $V_h \subseteq H^1(\Omega_h)$ et Ω_h ont une liaison linéaire par morceaux, l'ellipticité de la forme bilinéaire(2.4) peut être montrée en utilisant le preuve et est héritée à V_h. Similaire à la condition de théorème 2.7 suivant peut être déduit de corollaire 2.4 .

Théorème 2.1 *Soit Ω un domaine borné de bord régulier, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ avec mesure positive. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω en utilisant un élément triangulaire linéaire, Ω_h étant l'union à tous les triangles de $\mathcal{T}_h$. de plus soit $K_h(\Omega)$ comme dans (2.1) avec un espace d'éléments finis V_h dans la section 3.1. De plus soit $f \in L^2(\Omega), g \in H^{-1/2}(\Gamma_g)$.*

Alors l'inégalité variationnelle (2.4) avec $a_h(\cdot,\cdot)$ définie dans(2.5) et L(.) définie en (2.6) admet une solution unique en $K_h(\Omega)$.

2.3 Analyse d'erreur a priori

Afin de compléter l'analyse du problème discret, un résultat montrant la convergence de la solution discrète u_h vers la solution du problème continu(1.12) est présenté.

Supposons que $\Omega_h \subseteq \Omega$ et notons $\hat{v}_h$ une extension au domaine Ω de la fonction v_h définie sur $\bar{\Omega}_h$ construite de sorte que la valeur de $\hat{v}_h$ dans $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_h$ est défini par une extension constante dans les directions normales au bord Γ_h. De plus, soit $\hat{K}_h$ l'ensemble de toutes ces extensions de fonctions dans $K_h(\Omega)$. Par définition il est clair que les identités suivantes sont valables pour tout $\hat{u}_h, \hat{v}_h \in \hat{K}_h$

$$a_h(u_h, v_h) = a_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h), \tag{2.7}$$

$$L_h(v_h) = L_h(\hat{v}_h). \tag{2.8}$$

Proposition 2.2 *Le théorème de stampacchia donne l'existance et l'unicité de solution $u_h \in K_h(\Omega)$ qui dépend continument des données (f,g). L'analyse de la qualité de l'approximation est basée sur le lemme abstrait suivant :*

Lemme 2.3 (de Falk) *[3] les solutions u du problème (1.12) et u_h du problème approché (2.5) (2.6) vérifient :*

$$\| u - u_h \|^2_{H^1(\Omega)} \leq C[\inf_{v_h \in K_h(\Omega)} (\| u - v_h \|^2_{H^1(\Omega)} + < \frac{\partial u}{\partial n}, v_h - u >_{1/2,\partial\Omega}$$

$$- \int_{\Gamma_g} g(v_h - u) d\Gamma) + \inf_{v \in K(\Omega)} (< \frac{\partial u}{\partial n}, v - u_h >_{1/2,\partial\Omega} - \int_{\Gamma_g} g(v - u_h) d\Gamma)]^{1/2}, \tag{2.9}$$

où $< \cdot, \cdot >_{1/2,\partial\Omega}$ désigne le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et son dual $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Le premier terme intégrale de (2.9) est lié à la discrétisations d'inéquations variationnelles et contribue toujours à la majoration de l'erreur global même dans le cas d'une approximation conforme. En revanche, le deuxième terme est spécifiquement lié à la non-conformité de la méthode et disparait pour les techniques conformes, c'est l'erreur de consistance. L'analyse de ces deux erreurs repose sur l'utilisation de l'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_h$ caractérisé par les degrés de liberté

$$(v_h(x))_{x \in \mathbb{E}_h \setminus \Gamma_c}, \quad (v_h(x_i^C))_{0 \leq i \leq i^*}, \quad (\int_{t_i} v_h d\Gamma)_{0 \leq i \leq i^*_- 1}.$$

Cet opérateur satisfait les majorations suivantes : pour tout $v \in H^{\nu+1}(\Omega)$

$$\| v - \mathcal{I}_h v \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\nu} \| v \|_{H^{\nu+1}(\Omega)}, \quad \| v - \mathcal{I}_h v \|_{H^1(\Gamma_c)} \leq Ch^{\nu+3/2} \| v \|_{H^{\nu+1}(\Omega)} . \quad (2.10)$$

En outre, dés que $v \in K(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ l'interpolé $\mathcal{I}_h v \in K_h(\Omega)$. En s'appuyant sur ces observations, l'étude menée dans [1] permet de conclure par les résultats suivants :

Théorème 2.4 *[1] Soit $u \in K(\Omega)$ la solution de problème de Signorini(1.12)*

(i) On suppose que $u \in H^{\nu}(\Omega)$ avec $1 < \nu \leq 3/2$, alors la solution approchée u_h est telle que

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\nu-1}(\| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)} + \| g \|_{L^2(\Gamma_g)}).$$

(ii) On suppose que $u \in H^{\nu}(\Omega)$ avec $2 < \nu \leq 5/2$, alors la solution approchée u_h est telle que

$$\| u - u_h \|_{H^1} (\Omega) \leq Ch^{\nu-1} \| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} .$$

Théorème 2.5 *[2] Soit $u \in K(\Omega)$ la solution du problème de Signorini(1.12). On suppose que l'ensemble des points de Γ_c pour lesquels on passe de $u > 0$ à $u = 0$, soit fini.*

(i) On suppose que $u \in H^{\nu}(\Omega)$ avec $3/2 < \nu < 2$, alors la solution approchée u_h est telle que

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{v-1} \| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} .$$

(ii) On suppose que $u \in H^2(\Omega)$, alors la solution approchée u_h est telle que

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch| \log(h)|^{1/4} \| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} .$$

Remarque 2.6 *Du point de vue de la mécanique des solides, l'hypothèse fait dans le théorème(3.5), à savoir que l'ensemble des points de Γ_c pour lesquels on passe de $u > 0$ à $u = 0$ soit fini, n'est pas contraignante ; elle est pratiquement toujours remplie pour des situations qui intéressent les ingénieurs. Elle a été employée pour la première fois dans [2] retrouver l'optimalité dans le cas des éléments finis $\mathcal{P}_1$ en supposant une plus forte régularité sur u au voisinage de $\Gamma_c(u \in W^{1,\infty})$*

2.3.1 Analyse d'erreur a priori pour une solution H^2-régulière

On se propose dans cette partie d'estimer l'erreur basée sur l'approche Hager-Thoms-Brezzi [2]. Nous mentionnons le théorème suivante.

Théorème 2.7 ***(Brezis, Hager, Raviart)***

Si $u \in H^2(\Omega)$ *la solution de (1.8),* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $\psi \in H^2(\Omega)$

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C\ h(|u|_{2,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{2,\Omega}). \tag{2.11}$$

Preuve.

On a ;

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} &= a(u-u_h, u-u_h)\\ &= a(u-u_h, u-\mathcal{I}_h u) + a(u-u_h, \mathcal{I}_h u - u_h).\end{aligned}$$

1) On a, pour utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}a^2b^2$ donnent :

$$\begin{aligned}a(u-u_h, u-\mathcal{I}_h u) &= (\nabla(u-u_h); \nabla(u-\mathcal{I}_h u)\\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla(u-\mathcal{I}_h u)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} + Cte\ h^2|u|^2_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

2) Ecriver comme suite :

$$\begin{aligned}a(u-u_h, \mathcal{I}_h u - u_h) &= a(u, \mathcal{I}_h u - u_h) - a(u_h, \mathcal{I}_h u - u_h)\\ &= a(\nabla u, \nabla(\mathcal{I}_h u - u_h)) - (\nabla u_h, \nabla(\mathcal{I}_h u - u_h))\\ &\leq -(\Delta u, \mathcal{I}_h u - u_h) - (f, \mathcal{I}_h u - u_h)\\ &\leq (-(\Delta u + f), \mathcal{I}_h u - u_h),\\ &\leq (-\lambda, \mathcal{I}_h u - u_h), \qquad (\text{ prendre } \lambda = \Delta u + f \leq 0)\\ &= -(\lambda, \mathcal{I}_h(u-\psi) - (u-\psi)) - (\lambda, u-\psi) - (\lambda, \mathcal{I}_h(\psi - u_h)),\\ &\leq (\lambda, \mathcal{I}_h(u-\psi) - (u-\psi)), \qquad (\text{ car } (\lambda, u-\psi) = 0, \text{ et } u_h \geq \psi)\\ &\leq \|\lambda\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{I}_h w - w\|_{L^2(\Omega)}, \qquad (\text{ prendre } w = u - \psi)\\ &\leq Cte\ \|\lambda\|_{0,\Omega} h^2 |w|_{2,\Omega}\\ &= Cte\ h\ \|\lambda\|_{0,\Omega} h|u-\psi|_{2,\Omega}\\ &\leq Cte\ (\frac{1}{2}h^2\|\lambda\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}h^2|u-\psi|_{2,\Omega}).\end{aligned}$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u-u_h|^2_{1,\Omega} &\leq a(u-u_h, u-\mathcal{I}_h u) + a(u-u_h, \mathcal{I}_h u - u_h),\\ &\leq Cte\ (\frac{1}{2}h^2\|\lambda\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}h^2|u-\psi|_{2,\Omega}).\end{aligned}$$

donc :

$$|u-u_h|_{1,\Omega} \leq C\ h(|u|_{2,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{2,\Omega}).$$

■

Remarque 2.8 *Par l'hypothèse de régularité H^2 de la solution, nous avons une analyse d'erreur a priori, mais nous n'avons pas d'estimation d'erreur a priori optimale pour aucun hypothèse régulière.*

2.3.2 Analyse d'erreur a priori pour une solution peu réguilière

Dans cette sou-section on s'intéresse à l'obtention d'une estimation d'erreur a priori lorsque la solution n'est pas forcément de classe H^2. Cette analyse est basée sur les résultats de F. Ben Belgacem [1].

Lemme 2.9 *:Soit u la solution de l'inégalité de Signorini variationnelle (1.8) et u_h la solution de l'inégalité variationnelle discrète (2.3) alors :*

$$|u-u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \epsilon K_h(\Omega)} (|u-v_h|_{H^1(\Omega)} + |\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v_h\rangle_{\frac{1}{2},d\Omega} - \langle g, v_h\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g}|^{\frac{1}{2}}). \tag{2.12}$$

Remarque 2.10 *: L'intégrale impliquée dans (2.12) est spécifiquement engendrée par la discrétisation des inégalités variationnelles. Jusqu'à présent, l'analyse numérique de ce terme faite dans plusieurs articles n'a pas permis de retrouver l'optimalité attendue par les résultats d'approximation générale par éléments finis de Lagrange.*

En utilisant le lemme, avec les résultats de l'approximation par éléments finis, nous sommes en mesure de fournir le taux de convergence optimal

Théorème 2.11 *: soit $u \in K(\Omega)$ la solution du problème de Signorini variationnel (1.8).*

(i) supposons $u \in H^\nu(\Omega)$ avec $1 < \nu \leq \frac{3}{2}$ et $g \in H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_g)$. alors l'approximation linéaire continue par morceaux de u_h à u est telle que :

$$|u-u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\nu-1}(\| u \|_{H^\nu(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)} + \| g \|_{\nu-\frac{3}{2}(\Gamma_g)}).$$

(ii) supposons $u \in H^\nu(\Omega)$ *avec* $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ *et que le nombre de points dans* Γ_c*, où la contrainte passe de contraignante à non contraignante, est fini. alors l'approximation linéaire continue par morceaux de* u_h *à* u *est telle que :*

$$|u-u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\nu-1} \| u \|_{H^\nu(\Omega)} .$$

(iii) supposons $u \in H^2(\Omega)$ *et que le nombre de points dans* Γ_c*, ou la contrainte passe de contraignante a non contraignante, est fini. alors l'approximation linéaire continue par morceaux de* u_h *à* u *est telle que :*

$$|u-u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|\log(h)|^{\frac{1}{2}} \| u \|_{H^2(\Omega)} .$$

Remarque 2.12 *:*

(i). les hypothèses de régularité faites sur la solution exacte méritent quelques commentaires, notamment les points (i) et (ii). si Γ_0 *et* Γ_g *partagent un point commun, la solution exacte* u *devrait contenir une partie singulière qui n'appartient pas à* $H^{\frac{3}{2}}$*. cependant, puisque notre objectif est uniquement de nous concentrer sur le comportement d'approximation autour de* Γ_c*, nous pouvons supposer que le coefficient singulier est nul.*

Lemme 2.13 *: supposons que* $u \in H^\nu(\Omega)$ *avec* $1 < \nu \leq \frac{3}{2}$ *et* $g \in H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_g)$ *;*

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega} - \langle g, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g}|^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\nu-1}(\| u \|_{H^\nu(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)} + \| g \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_g)}).$$

Preuve.

$$\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega} - \langle g, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g} = \langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u - u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega} + \langle g, (u-\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g},$$

par dualité on peut écrire

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u - u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega}| \leq \| \frac{\partial u}{\partial n} \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \| u - \mathcal{I}_h u \|_{H^{\frac{3}{2}-\nu}(\partial\Omega)},$$

observant que

$$\| u - \mathcal{I}_h u \|_{\frac{3}{2}-\nu(\partial\Omega)} \leq Ch^{2(\nu-1)} \| u \|_{\nu-\frac{1}{2}(\partial\Omega)} \leq Ch^{2(\nu-1)} \| u \|_{H^\nu(\Omega)}, \tag{2.13}$$

avec (duo à la stabilité de l'opérateur trace)

$$\| \frac{\partial u}{\partial n} \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \leq C(\| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)}),$$

donner l'estimation

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u - u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega}|^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\nu-1}(\| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)}),$$

d'autre part

$$\begin{aligned} |\langle g, (u - \mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g}| &\leq \| g \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_g)} \| u - \mathcal{I}_h u \|_{H^{\frac{3}{2}-\nu}(\Gamma_g)} \\ &\leq Ch^{2(\nu-1)} \| g \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\varGamma_g)} \| u \|_{H^{\nu-\frac{1}{2}}(\varGamma_g)} \\ &\leq Ch^{2(\nu-1)} \| g \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\varGamma_g)} \| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} . \end{aligned}$$

On a donc la preuve du lemme. ■

Que la preuve précédente n'est pas valable pour v, car (2.13) ne tient plus, est bien connu. Une alternative doit être trouvée.

Lemme 2.14 *: Supposons que $u \in H^{\nu}(\Omega)$ avec ν, $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et que le nombre de points dans Γ_c, où la contrainte passe de contraignante à non contraignante , soit fini. alors, l'estimation suivante vaut :*

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega} - \langle g, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g}|^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\nu-1} \| u \|_{H^{\nu}(\Omega)} .$$

Preuve.

Tout d'abord, notez que la régularité de u implique que

$$\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega} - \langle g, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g} = \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma.$$

Considérons Γ_0 et Γ_g les portions de Γ_c caractérisées, respectivement, par $u_{|\Gamma_0} = 0$ et $u_{|\Gamma_g} > 0$. puis, choisir parmi les triangles $k \in T_h$, ayant une arête complète contenue dans Γ_c, ceux pour lesquels $k \cap \Gamma_0 \neq 0$ et $k \cap \Gamma_g \neq 0$. Notons que leur nombre est uniformément borné dans h, l'ensemble de ces éléments est noté S_h. En regardant le produit $(\dfrac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u))_{K\cap\Gamma_c}$, à cause de la condition de saturation, il disparaît clairement sauf pour $K(\Omega) \in S_h$ donc

$$|\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| \leq \sum_{k\in S_h} |\int_{k\cap\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma|.$$

En définissant $p = (\nu-1)^{-1}$ et $p' = (2-\nu)^{-1}$, nous avons clairement $p, p' \geq 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. puis, comme par le théorème de la trace $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_c)$ et $u \in H^{\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, invoquant les plongements continus de Sobolev et de Sobolev-Morrey

$$H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_c) \subset L^{p'}(\Gamma_c), \qquad H^{\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \subset C^{0,\nu-1}(\Gamma_c) \subset L_p(\Gamma_c). \tag{2.14}$$

Il en ressort que $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma_c} \in L^{p'}(\Gamma_c)$ et $u_{|\Gamma_c} \in C^{0,\nu-1}(\Gamma_c)$ .En utilisant l'inégalité de Hölder donne

$$|\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| \leq \sum_{k\in S_h} \| \frac{\partial u}{\partial n} \|_{L^{p'}(\bar{k}\cap\Gamma_c)} \| \mathcal{I}_h u \|_{L^p(\bar{k}\cap\Gamma_c)} . \tag{2.15}$$

Comme pour tout $k(\Omega)$ dans S_h, la restriction $u_{|\bar{k}\cap\Gamma_c}$ s'annule au moins

$$\| \mathcal{I}_h u \|_{L^\infty(\bar{k}\cap\Gamma_c)} \leq h^{\nu-1} \| u \|_{C^{0,\nu-1}(\bar{k}\cap\Gamma_c)} .$$

Par conséquent, on obtient

$$\| \mathcal{I}_h u \|_{L^p(\bar{k}\cap\Gamma_c)} \leq h^{\nu-1} h^{\frac{1}{p}} \| u \|_{C^{0,\nu-1}(k\cap\Gamma_c)} \leq h^{2(\nu-1)} \| u \|_{C^{0,\nu-1}(k\cap\Gamma_c)} .$$

Retour à(2.15), nous pouvons écrire

$$|\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| \leq \| \frac{\partial u}{\partial n} \|_{L^{p'}(\Gamma_c)} \sum_{k\in S_h} h^{2(\nu-1)} \| u \|_{C^{0,\nu-1}(\bar{k}\cap\Gamma_c)} .$$

Ou encore, puisque le cardinal de S est fini indépendamment de h,

$$|\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| \leq C h^{2(\nu-1)} \| \frac{\partial u}{\partial n} \|_{L^{p'}(\Gamma_c)} \| u \|_{C^{0,\nu-1}(\Gamma_c)},$$

avec $C = card(S_h)$. Enfin, puisque les encastrements (2.14) sont continus,

$$|\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| \leq C h^{2(\nu-1)} \| \frac{\partial u}{\partial n} \|_{H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} \| u \|_{H^{\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} . \tag{2.16}$$

. ■

D'où le résultat en sautant à la racine carrée et par le théorème de la trace.

Lemme 2.15 *: Supposons que $u \in H^2(\Omega)$ et que le nombre de points dans Γ_c, où la contrainte passe de contraignante à non contraignante, est fini. Alors, l'estimation suivante vaut :*

$$|\langle \frac{\partial u}{\partial n}, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\partial\Omega} - \langle g, (\mathcal{I}_h u)\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_g}|^{\frac{1}{2}} \leq Ch|\log(h)|^{\frac{1}{2}} \parallel u \parallel_{H^2(\Omega)} .$$

Preuve.

Considérons p, un nombre réel arbitraire dans]1,2] et $p' \in [2, +\infty[$ son nombre conjugué, c'est-à-dire $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. En rappelant la preuve précédente, l'inégalité (2.15) tient toujours. alors, par le théorème de Sobolev- Morrey, pour tout $\alpha \in [0, 1[, u_{|\Gamma_c} \in C^{0,\alpha}(\Gamma_c)$ et donc on a :

$$\parallel \mathcal{I}_h u \parallel_{L^\infty(\bar{k}\cap\Gamma_c)} \leq h^\alpha \parallel u \parallel_{C^{0,\alpha}(\bar{k}\cap\Gamma_c)} .$$

D'où l'on déduit que

$$\parallel \mathcal{I}_h u \parallel_{L^p(\bar{k}\cap\Gamma_c)} \leq h^{\alpha+\frac{1}{p}} \parallel u \parallel_{C^{0,\alpha}(\bar{k}\cap\Gamma_c)},$$

en insérant ce résultat dans l'estimation (2.16), on obtient

$$|\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| \leq Ch^{\alpha+\frac{1}{p}} \parallel \frac{\partial u}{\partial n} \parallel_{L^{p'}(\Gamma_c)} \parallel u \parallel_{C^{0,\alpha}(\bar{\Gamma_c})} .$$

La constante C ne dépend ni de p ni de α.

$$\begin{aligned} |\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathcal{I}_h u) d\Gamma| &\leq C\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{1-\alpha}} h^{\alpha+\frac{1}{p}} \parallel \frac{\partial u}{\partial n} \parallel_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \parallel u \parallel_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} \\ &\leq C(\sqrt{p'} h^{-\frac{1}{p'}})(\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{1-\alpha}}) h^2 \parallel \frac{\partial u}{\partial n} \parallel_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \parallel u \parallel_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} . \end{aligned}$$

La constante C est toujours indépendante de p et de α. Comme p et α sont arbitraires dans]1,2] et $[\frac{1}{2}, 1[$, en les choisissant tels que p'$= |\log(h)|$ et $1 - \alpha = \dfrac{1}{|\log(h)|}$ et en utilisant le théorème de la trace, la preuve est complète. ■

Preuve du théorème 3.9. Nous appliquons l'estimation (2.12) avec $v_h = (\mathcal{I}_h u) \in K_h(\Omega)$, jusqu'à (2.10), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|u - v_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\nu-1} \parallel u \parallel_{H^\nu(\Omega)} .$$

L'évaluation des termes intégraux est donnée par le lemme 3.8 pour (i) du théorème, par le lemme 3.12 pour (ii), et par le lemme 3.13 pour (iii).

2.3.3 Estimation d'erreur a priori optimale

Récemment, Luis Caffarelli a obtenu un résultat de régularité optimale pour le problème de Signorini. En utilisant ce résultat de régularité, une estimation d'erreur optimale peut être obtenue.

Théorème 2.16 *On suppose que la solution* $u \in \mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega)$

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\ h|u|_{2,\Omega}.$$

Preuve.

On a :

$$\begin{aligned}
a(u-u_h, \mathcal{I}_h u - u_h) &= a(u, \mathcal{I}_h u - u_h) - a(u_h, \mathcal{I}_h u - u_h) \\
&\leq a(u, \mathcal{I}_h u - u_h) - (f, \mathcal{I} u - u_h) \\
&= (\nabla u, \nabla(\mathcal{I}_h u - u_h)) - (f, \mathcal{I}_h u - u_h) \\
&= (-\Delta u - f, \mathcal{I}_h u - u_h) + \int_{\partial\Omega} \partial_n u\ (\mathcal{I}_h u - u_h), \\
&= \int_{\partial\Omega} \partial_n u\ (\mathcal{I}_h u - u_h) \\
&= \int_{\partial\Omega} \partial_n u\ (\mathcal{I}_h u - u_h) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u_h
\end{aligned}$$

mais

$$- \textstyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u_h \leq 0 \quad \text{et} \quad \textstyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u = 0\ ,$$

donc

$$a(u-u_h, \mathcal{I}_h u - u_h) \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, (\mathcal{I}_h u - u_h).$$

Lorsque $u > 0$ alors $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$, et si $u = 0$ alors $\mathcal{I}_h u = 0$.

Les seuls points intéressants sont les points tels que :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = u(x_0) = 0, \qquad x_0 \text{ n'est pas noeud.}$$

Mais on a $u \in \mathcal{C}^{1,1/2}$ donc $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \mathcal{C}^{0,1/2}$ donc ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} \leq C \; h^{1/2}, \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \mathcal{I}_h u - u \; ds \leq C \; h^{3/2},$$

puisque

$$\int_{[a,b]} \mathcal{I}_h u - u \; ds \leq C \; h^{1/2} \parallel \mathcal{I}_h u - u \parallel_{0,\partial T} \leq C \; h^{3/2},$$

donc

$$a(u-u_h, \mathcal{I}_h u - u_h) \leq C \; h.$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème de Signorini. L'existence et l'unicité de la solution du problème continue dans sa la formulation variationnelle peuvent être obtenues en utilisant le théorème de Stampacchia. En suite une méthode d'approximation par éléments finis du problème de Signorini sans frottement est considérée. L'existence et l'unicité de la solution du problème discret est une simple application du théorème de Stampacchia.

Dans la dernière partie nous avons étudié l'analyse a priori de l'erreur pour les différentes cas de régularité possibles. Une estimation d'erreur optimale peut être obtenue en utilisant la régularité optimale de la solution du problème continue démontré par L. Caffarelli.

Bibliographie

[1] Belhachmi, Z. and Belgacem, F. (2003). Quadratic finite element approximation of the signorini problem. *Mathematics of computation*, 72(241) :83–104.

[2] Brezzi, F., Hager, W. W., and Raviart, P.-A. (1977). Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. *Numerische Mathematik*, 28(4) :431–443.

[3] Ciarlet, P. G. (2002). *The finite element method for elliptic problems.* SIAM.

[4] Duvant, G. and Lions, J. L. (2012). *Inequalities in mechanics and physics*, volume 219. Springer Science & Business Media.

[5] García, J. F., Han, W., Shillor, M., and Sofonea, M. (2001). Numerical analysis and simulations of quasistatic frictionless contact problems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, 11(1) :205–222.

[6] Glowinski, R., Lions, J., and Tremoliere, R. (1981). Numerical analysis of variational inequalities, north holland.

[7] Goering, H., Roos, H.-G., and Tobiska, L. (1985). *Finite-element-methode : eine Einführung.* Akademie Verlag.

[8] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., and Lovíšek, J. (1988). *Solution of variational inequalities in mechanics*, volume 66. Springer.

[9] Ionescu, I. R. and Sofonea, M. (1993). *Functional and numerical methods in viscoplasticity.* Clarendon Press.

[10] Jung, M. and Langer, U. (2001). *Methode der finiten Elemente für Ingenieure.* Springer.

[11] Kikuchi, N. and Oden, J. T. (1988). *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods.* SIAM.

[12] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G. (2000). *An introduction to variational inequalities and their applications.* SIAM.

[13] Křížek, M. and Neittaanmäki, P. (1990). *Finite element approximation of variational problems and applications*, volume 50. Longman Scientific & Technical.

[14] Necas, J. and Hlavácek, I. (2017). *Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies : an introduction.* Elsevier.

[15] Signorini, A. (1933). Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 2(2) :231–251.

[16] Teniou, B. (2000). Etude fonctionnelle des problèmes élasto-viscoplastiques de contact.

[17] Zienkiewicz, O. C. and Morice, P. (1971). *The finite element method in engineering science*, volume 1977. MCgraw-hill London.

ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو إعطاء طريقة تقريب لمسالة تلامس جسم مرن بدون احتكاك. النموذج الرياضي المرافق لهذه المسالة مصاغ بواسطة متراجحة تغيرية ناقصية. إن الشروط الحدية لهذا التلامس هي شروط *Signorini*. نذكر نتيجة الوجود و الوحدانية للحل التغيري للمسالة الميكانيكية ثم نقترح طريقة لتقريب الحل و نبين ان هذا الحل التقريبي يتقارب نحو الحل الضعيف للمسالة الميكانيكية. في الأخير نعطي تقريب نظريا للخطأ

Abstract

The aim of this work is to give a method of approximation by finite elements of the Signorini problem without friction. The mathematical model corresponding to the mechanical problem is formulated according to an elliptical variational inequation. The boundary conditions of contact are those of Signorini. We remind a result of existence and of unicity of the variational solution of the problem, then we propose an approximation scheme of the solution and we prove that this approximate solution converges towards the weak solution of mechanical problem. Finally we give an abstract estimate of the error.

Keywords: *Approximation, elasticity, contact, Signorini's conditions, Weak solution.*

Résumé

Le but de ce travail est de donner une méthode d'approximation par éléments finis du problème de Signorini sans frottement. Le modèle mathématique correspondant au problème mécanique est formulé en fonction d'une inéquation variationnelle elliptique. Les conditions aux limites de contact sont celles de Signorini. Nous rappelons un résultat d'existance et d'unicité de la solution variationnelle de problème, ensuite nous proposons un schéma d'approximation de la solution et on montre que cette solution approchée converge vers la solution faible du problème mécanique. En fin ont donne une estimation abstraite de l'erreur

Mots clés: *Approximation, élasticité, contact, condition de Signorini, solution faible.*