

جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم المادة
قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي
مسار: رياضيات وإعلام آلي
فرع: رياضيات
تخصص: نمذجة وتحليل عددي

من إعداد الطالبة : شيبة مسعودة

دراسة مقارنة لدقة الحل التقريبي لمعادلة تفاضلية كسرية باستعمال جاكوبي

تناقش يوم 2022/06/08 من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	الرتبة أستاذ محاضر "أ"	معمري محمد
مناقشا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	الرتبة أستاذ مساعد "ب"	عباسي حسين
مشرفا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	بن الشيخ عبد الكريم

السنة الجامعية: 2022/2021

شكر و عرفان

نحمد الله ونشكره شكرا جزيلاً فهو المستحق للحمد والثناء . هو خالقنا ومعيننا في السراء والضراء
وتوكل عليه في جميع حالاتنا ونصلي ونسلم على الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين .
فالحمد لله على أن وفقنا لإتمام هذا العمل وعلى تسهيله لنا طريقاً جديداً لثمرة جهودنا ، نسأله أن يجعل هذا كله
خالصاً لوجهه الكريم وأن ينفعنا به وينتفع به من بعدنا .

ثم انه من لم يشكر الناس لا يشكر الله فاعترافاً منا لأهل الفضل من بعد فضل الله عز وجل . أتقدم بالشكر
والعرفان الجميل :

إلى الأستاذ المشرف بن الشيخ عبد الكريم الذي مرافقني طيلة فترة هذا الإنجاز هذا العمل بتوجيهاته ونصائحه، لك مني
كل معاني التقدير والعرفان .

إلى كل من ساهم من قريب أو بعيد في تكويننا طيلة مسارنا الدراسي . وإلى كل من مد لنا يد العون والمساعدة
في هذا العمل المتواضع .

كما أتقدم بأسمى عبارات التقدير والاحترام للأساتذة أعضاء لجنة المناقشة لمساهمتهم في تصفح هذا العمل
من أجل إثرائه .

شكر خاص أوجه لكل أساتذة قسم الرياضيات الذين سهروا وتقاتلوا في صقل مهارتنا وقدراتنا
منذ التحاقنا بالجامعة .

أسأل الله ان يجازي الجميع كل خير

الاهداء

الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى وأما بعد
أول من أشكر وأحمد اناء الليل والنهار, هو العلي القهار, الأول والأخر والظاهر والباطن,
الذي أغرقنا بنعمة لا تحصى والذي وفقنا لتثمين هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية
بمذكرتنا التي مرّت بكثير من العوائق, وبفضل منه سبحانه وتعالى.
أهدي ثمرة هذا الجهد والنجاح إلى من أفضّلها على نفسي ،
إلى من لم تنسى تذكيرنا بطلب العلم,
فلقد ضحّت من أجلي ولم تدّخر جهداً في سبيل إسعادي على الدوام أُمّي الحبيبة.
وصاحب السيرة العطرة ، والفكر المُستنير, لقد كان له الفضل في بلوغي التعليم العالي
والذي الحبيب.
أطال الله في عمريهما وأدامهما نورا لدربي.
وإلى إخوتي وأخواتي من كان لهم بالغ الأثر في كثير من العقبات والصعاب
ولكل العائلة الكريمة التي ساندتني.
إلى جميع أساتذتي الكرام, ممن لم يتوانوا في مد يد العون لي.
وإلى كل من كان لهم أثر على حياتي.
وإلى كل من أحبهم قلبي ونسيهم قلبي.

الفهرس

1 مفاهيم أساسية

2	1.1	لمحة في الحساب الكسري
2	1.1.1	دوال خاصة
4	2.1.1	التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل
4	3.1.1	المشتق الكسري بمفهوم كابوتو
5	2.1	نظرة في المعادلات التفاضلية
5	1.2.1	المعادلات التفاضلية العادية
5	2.2.1	المعادلات التفاضلية الكسرية
6	3.1	كثيرات الحدود جاكوبي وتشيبشيف
6	1.3.1	كثيرات حدود جاكوبي
9	2.3.1	كثيرات حدود تشيبشيف

2 بناء مصفوفات العمليات لجاكوبي وتشيبشيف لحل معادلة تفاضلية

10	كسرية	
10	1.2	بناء مصفوفات العمليات
10	1.1.2	مصفوفة العمليات التكامل الكسري لجاكوبي
11	2.1.2	مصفوفة العمليات الاشتقاق الكسري لجاكوبي
11	3.1.2	مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لتشيبشيف
12	2.2	توظيف مصفوفة العمليات الكسرية لجاكوبي
12	1.2.2	حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية
13	2.2.2	حل المعادلات التفاضلية الكسرية الغير خطية
14	3.2	توظيف مصفوفة العمليات الكسرية لتشيبشيف
15	4.2	أمثلة عديدة مع المقارنة
15	1.4.2	تطبيقات عديدة لطريقة جاكوبي
19	2.4.2	تطبيقات عديدة لطريقة تشيبشيف

دليل الترميزات

الرمز	مدلوله
$\Gamma(x)$	الدالة غاما
$\beta(x, y)$	الدالة بيتا
J^v	التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل
D^v	المشتق الكسري بمفهوم كابوتو
$w(x)$	دالة الوزن
$P_i^{(\alpha, \beta)}(x)$	كثيرات حدود جاكوبي
δ_{ij}	دلتا كرونكر
I^α	مؤثر التكامل
$T_n(x)$	كثير حدود تشيبشيف من النوع الأول
$T_n^*(x)$	كثير حدود تشيبشيف المحول من النوع الأول
$U_n(x)$	كثير حدود تشيبشيف من النوع الثاني
$U_n^*(x)$	كثير حدود تشيبشيف المحول من النوع الثاني

قائمة الأشكال

3	تمثيل بياني للدالة غاما $-3D$	2.1
3	منحنى بياني للدالة غاما	1.1
16	انحطاً المطلق عند $m = 4$	1.2
18	مقارنة $u(x)$ و $u_m(x)$ من أجل $m = 9$ و $v = 0.5, 0.75, 0.95, 1$	2.2
19	مقارنة $u(x)$ و $u_m(x)$ من أجل $m = 9$ و $v = 1.5, 1.75, 1.95, 2$	3.2
22	انحطاً المطلق للمثال 2.2 في حالتين مختلفتين	4.2

مقدمة

في العقود القليلة الماضية كان لحساب التفاضل والتكامل الكسري مساهمات هائلة في المجالات العلمية [1, 3] كونها تلعب دور رئيسي في نمذجة العديد من المسائل على شكل معادلات تفاضلية ذات الرتب الكسرية. و لهذه المعادلات تطبيقات (انظر [31, 32]) في مختلف المجالات الهندسية والعلمية مثل البيولوجيا [33], الديناميات والفيزياء [11, 34] وغيرها [35, 36]. ونظرا لصعوبة إيجاد الحلول التحليلية للعديد من المسائل الا تحت شروط معينة لجأ العلماء الى تطوير طرق جديدة من أجل الحصول على حل عددي تقريبي والذي يتقارب الى الحل الصريح. [16, 43, 38, 24, 28, 44].

من جهة اخرى لاقت كثيرات الحدود المتعامدة اهتماما خاصا في معالجة هذه المسائل وذلك بتقديم طرق عديدة كون كثيرات الحدود بسيطة من ناحية التركيب والتحليل. وقد اخترنا لبحثنا هذا كثيري حدود جاكوبي وتشيبشيف لمعالجة عددية للمعادلات التفاضلية من رتب كسرية الخطية من الشكل:

$$D^v u(x) + \sum_{i=1}^k e_i D^{v_i} u(x) + u(x) = g(x) \quad (1)$$

$$u^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

والمعادلات التفاضلية من رتب كسرية الغير خطية من الشكل :

$$D^v u(x) = F(x, u(x), D^{\beta_1} u(x), \dots, D^{\beta_k} u(x)) \quad (2)$$

$$u^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

حيث استعملنا كثيري حدود جاكوبي وتشيبشيف المعدلة لتحويل المعادلات التفاضلية ذات رتب كسرية الى جملة معادلات جبرية قابلة للحل والبرمجة بسهولة. قسمت هذه المذكرة الى ثلاث فصول عرضنا في الفصل الاول بعض المفاهيم الأولية والتعاريف والمبادئ الضرورية لحساب التفاضل والتكامل الكسري بما في ذلك الدوال الخاصة كالادلة غاما والدالة بيتا كما تطرقنا الى مفهوم التكامل الكسري بمعنى ريمان ليوفيل والاشتقاق الكسري بمعنى كابوتو ثم كان لنا نظرة على المعادلات التفاضلية، كما قننا بتقديم تعريف كثيري حدود جاكوبي وتشيبشيف وخصائصهم بالاضافة الى تقريب تابع وفق اساسهم وتقدير دقة الخطأ. تضمن الفصل الثاني طرق انشاء مصفوفات العمليات للتكامل الكسري والاشتقاق الكسري لكل من جاكوبي وتشيبشيف. وناقشنا كيف يمكن تطبيق مصفوفة العمليات للتكامل والاشتقاق الكسري لحل العددي للمعادلات التفاضلية الكسرية من رتب مختلفة. واخيرا الفصل الثالث احتوى تطبيقات عددية ونتائج عددية التي تبين دقة وكفاءة الخوارزمية المعروضة وختمنا باستنتاج موجز للمقارنة بين الطريقتين من ناحية دقة الحل.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1.1 لمحة في الحساب الكسري

يعد حساب التفاضل و التكامل الكسري (التحليل الكسري) احدى اهم مجالات الرياضيات النظرية , فهو يعد تعميما لمفهومي التفاضل و التكامل التقليدي , ظهرت فكرته عام 1695 برسالة ارسلها l'hospital الى Leibniz يساله عن ملاحظة خاصة ببحثه المتعلق بحساب المشتق من الرتبة n و كان السؤال عن العبارة $\frac{d^n f}{dx^n}$ ماذا يحدث اذا كانت $n = \frac{1}{2}$ حيث كانت تلك اللحظة التي ولد فيها ما يعرف بالتفاضل الكسري [42] تمت دراسة هذا الموضوع من قبل العديد من العلماء Euler , Fourier , ثم و قد تم ادخال تعريفات مختلفة للمشتقات الكسرية من قبل Riemann-Liouville caputo , و أصبح في العقود الاخيرة هدفا للعديد من المؤتمرات التخصصية و البحوث [45] . حيث كان أول مؤتمر عن حساب التفاضل و التكامل الكسري و تطبيقاته عام 1974 بجامعة New Haven .

1.1.1 دوال خاصة

في هذا الجزء نعرف تابع غاما و تابع بيتا حيث يلعبان دورا هاما في الحساب الكسري .

الدالة غاما:

تعرف الدالة غاما بالشكل التالي [46] : $x \in \mathbb{R} : \Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$

خواص 1.1.1 [46]

① خاصية التتابع : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \forall n \neq 0$

② خاصية التسلسل : إذا كان n عددا صحيحا موجبا فان : $\Gamma(n+1) = n!$

③ خاصية التكرار : $\Gamma(n)\Gamma(n + \frac{1}{2}) = 2^{1-2n} \sqrt{\pi} \Gamma(2n)$

④ $\Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$

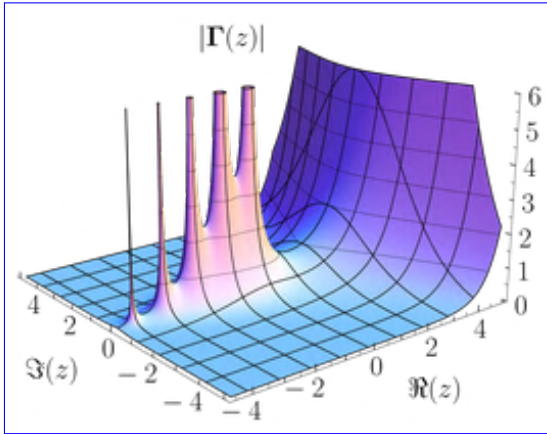
$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2^{(1-n)}(n-1)!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \quad \text{⑤}$$

⑥ $\Gamma(n)$ دالة متناقصة من أجل $0 < n \leq 1$.

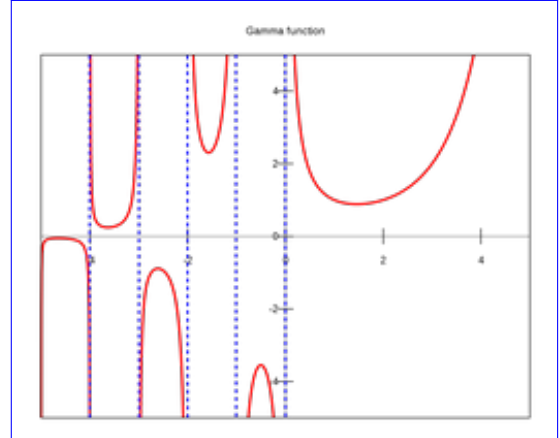
$$\Gamma(0) = +\infty, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1 \quad \text{⑥}$$

مثال 1.1.1

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{2-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{-M}{e^M} - \frac{1}{e^M} + 0 + e^0 \right) = 1 \end{aligned}$$



شكل 2.1: تمثيل بياني للدالة غاما -3D-



شكل 1.1: منحنى بياني للدالة غاما

الدالة بيتا:

تعريف 1.1.1 تعرف الدالة بيتا كالتالي [46]: $x \in \mathbb{R}$.

$$\beta(m, n) := \int_0^\infty [x^{m-1} - x^{n-1}] dx$$

ملاحظات 1.1.1 .

$$1. \beta(m, n) = \beta(n, m)$$

$$2. \text{علاقة الدالة بيتا بالدالة غاما هي } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{، فمثلا } \beta(2, 3) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} = \frac{1}{12}$$

3. تكاملات كثيرة يمكن ايجادها باستعمال الدالتين بيتا و غاما مثل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) \quad \blacktriangleleft$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p); \quad 0 < p < 1. \quad \blacktriangleleft$$

2.1.1 التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل

تعريف 2.1.1 [46, 47] هناك عدة تعاريف للتكامل الكسري من الرتبة $v > 0$ وليست بالضرورة متكافئة مع بعضها البعض. في هذه الدراسة نهم بمؤثر التكامل الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة v ويعرف بالعلاقة:

$$\begin{cases} J^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt & v > 0, x > 0. \\ J^0 f(x) = f(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

خواص 2.1.1 .

$$J^v x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+v)} x^{\beta+v} \quad 1.$$

$$J^\beta J^v f(x) = J^{\beta+v} f(x) = J^v J^\beta f(x) \quad 2.$$

3. λ, μ ثابت. المؤثر J^v خطي اي

$$J^v(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda J^v f(x) + \mu J^v g(x)$$

3.1.1 المشتق الكسري بمفهوم كابوتو

تعريف 3.1.1 [51] مشتقات كابوتو الكسرية ذات الرتبة v تعرف بالعلاقة:

$$D^v f(x) = J^{m-v} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-v)} \int_0^x (x-t)^{m-v-1} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt \quad (2.1)$$

حيث $m-1 < v < m, m \in \mathbb{N}$ و D^m هو المؤثر التفاضلي الكلاسيكي من الدرجة m .

خواص 3.1.1 .

$$D^v x^\beta = \begin{cases} 0 & \beta < v \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-v)} x^{\beta-v} & \beta \geq v \end{cases} \quad 1. \text{ لدينا:}$$

2. λ, μ ثابت. ان المؤثر D^v تطبيق خطي اي:

$$D^v(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^v f(x) + \mu D^v g(x)$$

3. اذا كانت $n \in \mathbb{N}, n-1 < v < n$ فان:

$$D^v J^v = f(x) \quad \blacktriangleleft$$

\blacktriangleleft

$$J^v D^v f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!} \quad x > 0 \quad (3.1)$$

2.1 نظرة في المعادلات التفاضلية

1.2.1 المعادلات التفاضلية العادية

[49, 50] المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة بين المتغير التابع و المتغير المستقل تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ويمكن أن تصنف الى معادلات تفاضلية عادية أو جزئية و الى خطية أو غير خطية. حيث أن المعادلات التفاضلية الخطية هي المعادلات الخطية في المتغير التابع و مشتقاته جميعا و تحقق :

1. اذا كانت معاملات المتغير التابع و المشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثابت.
 2. اذا كان المتغير التابع و المشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الاولى.
- و تكون غير خطية فيما عدا ذلك.

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الدرجة الاولى، بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى هي خطية، لان الدرجة تحدد حسب أس التفاضل الاعلى، و من الممكن أن تكون التفاضلات الأقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون أن يؤثر ذلك على الدرجة، و هذا يخل بشرط المعادلة الخطية. حيث الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي [48] :

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x)$$

حيث المتغير y و جميع مشتقاته مرفوعة لأس واحد و لا توجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها. و المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية أم غير خطية و كذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$

2.2.1 المعادلات التفاضلية الكسرية

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية ذات رتب صحيحة حيث أن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الكسرية متعددة الترتيب تعرف بالشكل التالي [47] :

المعادلات التفاضلية من رتب كسرية خطية من الشكل:

$$D^v u(x) + \sum_{i=1}^k e_i D^{v_i} u(x) + u(x) = g(x), \quad (4.1)$$

$$u^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

حيث $e_{ii} = 0, 1, \dots, k$ معاملات حقيقية ثابتة و المعادلات التفاضلية من رتب كسرية الغير خطية من الشكل :

$$D^v u(x) = F(x, u(x), D^{\beta_1} u(x), \dots, D^{\beta_k} u(x)), \quad (5.1)$$

$$u^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

D^α تدل على المشتقات الكسرية بمفهوم كاييتو من الدرجة α

3.1 كثيرات الحدود جاكوبي و تشيبيشاف

كثيرات الحدود تعتبر من أبرز الدوال التي جلبت الإنتباه إليها حيث تم دراستها بشكل مفصل , ولا يعتبر ذلك شئ غريب كون كثيرات الحدود هي الأبسط من ناحية التركيب فالعمليات عليها سهلة البرمجة و التطبيق على الحاسوب هذا بالإضافة إلى إستمرارها و وجود مشتقاتها من رتب عليا و خصائصها الأخرى .

1.3.1 كثيرات حدود جاكوبي

تعريف 1.3.1 كثير حدود جاكوبي يرمز له بـ: $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ و كثيرات الحدود المتعامدة مرفقة بتابع الوزن $w^{(\alpha,\beta)}(z) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ تعطى من خلال العلاقة التراجعية التالية :

$$P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(z) = A(\alpha, \beta, i) P_i^{(\alpha,\beta)}(z) + zA(\alpha, \beta, i) P_i^{(\alpha,\beta)}(z) - D(\alpha, \beta, i) P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(z)$$

حيث $i = 0, 1, \dots$ و صيغة كلا من $A(\alpha, \beta, i)$, $B(\alpha, \beta, i)$, $D(\alpha, \beta, i)$ هي :

$$A(\alpha, \beta, i) = \frac{(2i + \alpha + \beta + 1)(\alpha^2 - \beta^2)}{2(i + 1)(i + \alpha + \beta + 1)(2i + \alpha + \beta)}$$

$$B(\alpha, \beta, i) = \frac{(2i + \alpha + \beta + 2)(2i + \alpha + \beta + 1)}{2(i + 1)(i + \alpha + \beta + 1)}$$

$$D(\alpha, \beta, i) = \frac{(\alpha + i)(i + \beta)(2i + \alpha + \beta + 2)}{(i + 1)(i + \alpha + \beta + 1)(2i + \alpha + \beta)}$$

مع : $P_0^{(\alpha,\beta)}(z) = 1$ و $P_1^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(\alpha+\beta+1)}{2}z + \frac{\alpha-\beta}{2}$

كما ان كثيرات حدود جاكوبي تتمتع بالخواص التالية :

1. متعامدة على المجال $[-1, 1]$, بالنسبة لتابع الوزن $w^{(\alpha,\beta)}(z) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, اي انها تحقق علاقة التعامد التالية :

$$\int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(z) P_k^{(\alpha,\beta)}(z) w^{(\alpha,\beta)}(z) dz = h_k \delta_{jk}$$

حيث

$$h_k = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(k + \alpha + 1) \Gamma(k + \beta + 1)}{(2k + \alpha + \beta + 1) k! \Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}$$

2. يمكن إعطاء حدوديات جاكوبي اعتمادا على المشتق وفق العلاقة التالية:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2^n n!} D^n [(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}], \quad x \in [-1, 1]$$

3. يمكننا التعبير عن حدوديات جاكوبي كذلك بالشكل

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \frac{\Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + r + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + r + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) (n-r)!} \left(\frac{x+1}{2}\right)^r$$

عن طريق تبديل المتغير التالي:

$$z = 2x - 1, \quad x \in [0, 1]$$

يتم الحصول على كثيرات حدود جاكوبي المعدلة $SJPs$ المعرف على المجال $x \in [0, 1]$.

تعريف 2.3.1 كثيرات حدود جاكوبي المعدلة معرفة على $[0, 1]$ و مرفقة بتابع الوزن المعدل $w^{(\alpha, \beta)}(z) = (1-x)^\alpha x^\beta$ تصاغ من خلال العلاقة التراجعية التالية:

$$P_{i+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = A(\alpha, \beta, i)P_i^{(\alpha, \beta)}(x) + (2x-1)B(\alpha, \beta, i)P_i^{(\alpha, \beta)}(x) - D(\alpha, \beta, i)P_{i-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

حيث:

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1, \quad P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + \beta + 2)(2x - 1)}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

و بذلك يصبح شرط التعامد على المجال $[0, 1]$, بالنسبة لتابع الوزن المعدل $w^{(\alpha, \beta)}(z) = (1-x)^\alpha x^\beta$ كالآتي:

$$\int_0^1 P_i^{(\alpha, \beta)}(x)P_j^{(\alpha, \beta)}(x)\omega^{(\alpha, \beta)}(x)dx = \theta_i\delta_{ij}$$

حيث:

$$\theta_i = \frac{\Gamma(i + \alpha + 1)\Gamma(i + \beta + 1)}{(2i + \alpha + \beta + 1)i!\Gamma(i + \alpha + \beta + 1)}$$

و سلسلة القوى لكثيرات حدود جاكوبي المعدلة تأخذ الصيغة الموالية:

$$P_i^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{(i-k)}\Gamma(i + \beta + 1)\Gamma(i + k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k + \beta + 1)\Gamma(i + \alpha + \beta + 1)(i - k)!k!} x^k, \quad i = 0, 1, \dots$$

خواص 1.3.1 على المجال $[0, 1]$ كثيرات حدود جاكوبي المعدلة تحقق:

$$P_i^{(\alpha, \beta)}(0) = (-1)^i \frac{\Gamma(i + \beta + 1)}{i!\Gamma(\beta + 1)} \quad .1$$

$$P_i^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{\Gamma(i + \alpha + 1)}{i!\Gamma(\alpha + 1)} \quad .2$$

$$\frac{d^n}{dx^n} P_i^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(i + \alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(i + \alpha + \beta + 1)} P_{i-n}^{(\alpha + n, \beta + n)}(x) \quad .3$$

تعريف 3.3.1 ليكن $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$ سلسلة دوال كثيرات حدود جاكوبي المعدلة بمتغير واحد $D = [0, 1]$. كثيرات حدود جاكوبي بمتغيرين $2D-JPs$ معرف على المساحة $D^2 = [0, 1][0, 1]$ بالعلاقة:

$$P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = P_m^{(\alpha, \beta)}(x)P_n^{(\alpha, \beta)}(y), \quad (x, y) \in D^2$$

وهي متعامد على النطاق D^2 وفق تابع الوزن $w^{(\alpha, \beta)}(x, y) = w^{(\alpha, \beta)}(x)w^{(\alpha, \beta)}(y)$

البرهان 3.1.1 لدينا:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) P_{k,l}^{(\alpha, \beta)}(x, y) w^{(\alpha, \beta)}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(y) w^{(\alpha, \beta)}(x) dx \times \int_0^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_l^{(\alpha, \beta)}(y) w^{(\alpha, \beta)}(y) dy \\ &= \begin{cases} \theta_m \theta_n & (m, n) = (k, l) \\ 0, & (m, n) \neq (k, l) \text{ or } m \neq k, n \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

1.1.3.1 تقريب تابع وفق اساس جاكوبي

ليكن الفضاء الهلبرتي $L^2_{w(\alpha,\beta)} [0, 1]$ المزود بالجداء السلمي و التنظيم المواليين :

$$(u, v)_{w(\alpha,\beta)} = \int_0^1 u(x) v(x) w^{(\alpha,\beta)} dx, \quad \|u\| = (u, u)_{w(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}}$$

ليكن $f(x) \in L^2_{w(\alpha,\beta)} [0, 1]$ و $P_n^{(\alpha,\beta)} = \text{Span} \{P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$:
بما أن $P_n^{(\alpha,\beta)}$ فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق ، فإنه يوجد أحسن تقريب f_m للدالة f في $P_n^{(\alpha,\beta)}$ ويكون وحيد أي :

$$\forall u \in P_n^{(\alpha,\beta)}, \exists! f_m \in P_n^{(\alpha,\beta)} : \|f - f_m\| \leq \|f - u\|$$

• و بما أن $f_m \in P_n^{(\alpha,\beta)}$ فإن :

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{j=0}^n c_j P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (6.1)$$

$$= C^T \Phi(x) \quad (7.1)$$

حيث $C^T = [c_0, c_1, \dots, c_n]$ و $\Phi(x) = [P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]$
المعاملات c_j تحسب من خلال العلاقة :

$$c_j = \frac{1}{\theta_j} \int_0^1 w^{(\alpha,\beta)} f(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) dx \quad (8.1)$$

و اذا فرضنا ان : $f \in C^{(n+1)}[0, 1]$ فان :

$$\|f - f_m\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{\gamma}{(n+1)! \sqrt{2n+3}}, \quad \gamma = \max_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (9.1)$$

تقريب تابع بمتغيرين $k(x, y)$ من $L^2_{w(\alpha,\beta)} [0, 1] * [0, 1]$ وفق اساس $2B - JPs$ يعطى بالصيغة التالية :

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m g_{ij} P_i^{(\alpha,\beta)}(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (10.1)$$

$$= \Phi^T(x) \mathbf{G} \Phi(t). \quad (11.1)$$

حيث \mathbf{G} مصفوفة من البعد $(n+1) * (m+1)$ عناصرها k_{ij} معرفة بـ :

$$k_{ij} = \frac{1}{\theta_i \theta_j} \int_0^1 \int_0^1 g(x, t) P_i^{(\alpha,\beta)}(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \omega^{(\alpha,\beta)}(x) dx \quad (12.1)$$

حيث : $j=0, 1, \dots, m \quad i=0, 1, \dots, m,$

2.3.1 كثيرات حدود تشبيشيف

من اكثر كثيرات الحدود المتعامدة شيوعا كثيرات حدود تشبيشيف من النوع الاول TPs و تشبيشيف من النوع الثاني UPs و التي تعتبر حالة خاصة من كثيرات حدود جاكوبي JPs و ترتبط معها من خلال العلاقات التالية :

$$T_i = (x) \frac{i! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right)} P_i^{\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)}(x), \quad U_i = (x) \frac{(i+1)! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right)} P_i^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)$$

و منه ينتج لنا ان كثيرات حدود تشبيشيف من النوع الاول معرف على المجال $[0, 1]$ بالشكل :

$$T_n(x) = 2(2x-1)T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (13.1)$$

حيث :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 2x - 1$$

و متعامدة وفق تابع الوزن $w(x) = (x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ اي ان :

$$\int_0^1 T_j(x) T_k(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \pi, & j = k = 0, \quad 0 \leq j, k \leq i \\ \frac{\pi}{2}, & j = k \neq 0 \end{cases} \quad (14.1)$$

يمكننا كتابة TPs على شكل سلسلة قوى كما يلي :

$$T_i(x) = i \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{2^{2k} (i+k-1)!}{(2k)! (i-k)!} x^k, \quad i > 0 \quad (15.1)$$

اما بالنسبة لتشبيشيف من النوع الثاني UPs تكون معرفة على المجال $[0, 1]$ بالعلاقة التراجعية :

$$U_{i+1}(x) = 2(2x-1)U_i(x) - U_{i-1}(x) \quad (16.1)$$

حيث :

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 4x - 2$$

و متعامدة وفق تابع الوزن $w(x) = \sqrt{x-x^2}$ اي ان :

$$\int_0^1 U_j(x) U_k(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \frac{\pi}{8}, & j = k \end{cases}$$

يمكننا كتابة UPs على شكل سلسلة قوى كما يلي :

$$U_i(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{2^{2i-2k} \Gamma(i+k-1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(2i-2k+2)} x^{i-k}, \quad i > 0$$

الفصل الثاني

بناء مصفوفات العمليات لجاكوبي و تشيبيشيف لحل معادلة تفاضلية كسرية

1.2 بناء مصفوفات العمليات

إنشاء مصفوفات العمليات OM لعب دورا حيويا في تطوير تقنيات جديدة لحل المسائل من خلال خوارزميات مناسبة للحواسيب الرقمية. تكمن أهمية OM في إزالة تعقيدات عبارات المسائل من تكاملات و تفاضلات و المحافظة على أساس التقريب المستخدم

بصفة عامة مصفوفة العمليات للتكامل P و للتفاضل D اساس OBS معرفة كما يلي :

$$\int_0^x \phi(t) dt \simeq P \times \phi(x) \quad , \quad \frac{d}{dx} \phi(x) \simeq D \times \phi(x) ,$$

حيث : $\phi(x) = [\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)]^T$ و c شعاع معاملات التحليل وفق اساس كثيرات الحدود المستعمل. و D, P مصفوفات من البعد $(m+1) \times (m+1)$.

1.1.2 مصفوفة العمليات التكامل الكسري لجاكوبي

مما سبق قلنا ان اي تابع يمكن تقريبه وفق اساس جاكوبي بالشكل :

$$f(x) = C^T \Phi(x) \quad (1.2)$$

حيث $C^T = [c_0, \dots, c_n]$ معاملات و $\Phi(x) = [P_0^{(\alpha, \beta)}(x), P_1^{(\alpha, \beta)}(x), \dots, P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]$ شعاع جاكوبي . من أجل $v \geq 0$ نعرف $I^{(v)}$ مصفوفة العمليات للتكامل الكسري وفق اساس جاكوبي بالشكل التالي [21]:

$$J^v \phi(x) \simeq I^{(v)} \phi(x) \quad (2.2)$$

حيث $I^{(v)}$ مصفوفة من البعد $(m \times m)$ عناصرها من الشكل : [21]:

$$\{I_{ij}^{(v)}\}_{ij=0}^{m-1} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j P_k^{(i)} P_l^{(j)} \frac{\Gamma(k+1) B(k+l+v+\beta+1, \alpha+1)}{\Gamma(k+v+1) h_k}$$

2.1.2 مصفوفة العمليات الاشتقاق الكسري لجاكوبي

تعرف D^v مصفوفة العمليات التفاضل الكسري لكثيرات حدود جاكوبي بالشكل $D^v \phi(x) \simeq D^{(v)} \phi(x)$ حيث $D^{(v)}$ مصفوفة من البعد $(m+1) \times (m+1)$ شكلها العام :

$$D^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_v([v], 0) & \Delta_v([v], 1) & \Delta_v([v], 2) & \cdots & \Delta_v([v], m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_v(i, 0) & \Delta_v(i, 1) & \Delta_v(i, 2) & \cdots & \Delta_v(i, m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_v(m, 0) & \Delta_v(m, 1) & \Delta_v(m, 2) & \cdots & \Delta_v(m, m) \end{pmatrix}$$

حيث $\Delta_v(i, j) = \sum_{k=[v]}^i \delta_{ijk}$ و δ_{ijk} يعطى بالعلاقة :

$$\delta_{ijk} = \frac{(-1)^{i-k} L^{\alpha+\beta-v+1} \Gamma(j+\beta+1) \Gamma(i+\beta+1) \Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{h_j \Gamma(j+\alpha+\beta+1) \Gamma(k+\beta+1) \Gamma(i+\alpha+\beta+1) \Gamma(k-v+1) (i-k)!} \times$$

$$\sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-1} \Gamma(j+l+\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(l+k+\beta-v+1)}{\Gamma(l+\beta+1) \Gamma(l+k+\alpha+\beta-v+2) (j-l)! l!}$$

3.1.2 مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لتشبيشيف

مصفوفة العمليات $P_{M \times M}^\alpha$ للتكامل الكسري للنوع الثاني لتشبيشيف يعطى بـ :

$$I^\alpha \Psi(t) \approx P_{M \times M}^\alpha \Psi(t). \quad (3.2)$$

مع شعاع تشبيشيف و

$$P_{M \times M}^\alpha = \begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \cdots & \eta_{0, M-1} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \cdots & \eta_{1, M-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{M-1, 0} & \eta_{M-1, 1} & \cdots & \eta_{M-1, M-1} \end{bmatrix}$$

حيث :

$$\eta_{mn} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^m \left((-1)^{m-k} 2^{2k} \frac{(m+k+1)! k!}{(m-k)! (2k+1)! \Gamma(\alpha+k+1)} \right) \times$$

$$\sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} 2^{2l} \frac{(n+l+1)! \Gamma(3/2+k+l+\alpha)}{(n-l)! (2l+1)! \Gamma(3+k+l+\alpha)}, \quad m, n = 0, 1, \dots, M-1$$

2.2 توظيف مصفوفة العمليات الكسرية لجاكوبي

إظهارا للأهمية الكبيرة لمصفوفات العمليات للتكامل و التفاضل الكسري لجاكوبي و تشيبيشيف قنا بتوظيفها لايجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و الغير خطية من رتب مختلفة.

1.2.2 حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية

لتكن المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية التالية :

$$D^v u(x) + \sum_{i=1}^k e_i D^{v_i} u(x) + u(x) = g(x) \quad (4.2)$$

و الشروط الابتدائية

$$u^i(0) = d_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.2)$$

حيث $e_{ii=0,1,\dots,k}$ معاملات ثابتة حقيقية و $n < v \leq n+1$ و $v_k < v_{k-1} < \dots < v_1 < v$ و D^v يدل على مشتق كابوتو الكسري من الدرجة v .

لحل المسألة (4.2) بداية ، نحاول إجراء تغييرات في المسألة بتحويلها الى ذات شروط ابتدائية صفرية. و ذلك بوضع

$$z(x) = u(x) - \hat{u}(x) \quad (6.2)$$

حيث $\hat{u}(0) = d_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ يمكن بسهولة ملاحظة أن $z^{(i)}(0) = 0$ من أجل كل $i = 0, 1, \dots, n-1$ و منه يتم الحصول على المعادلة التفاضلية الكسرية المعدلة الآتية:

$$D^v z(x) + \sum_{i=1}^k \hat{e}_i D^{v_i} z(x) + z(x) + \hat{u}(x) = \hat{g}(x) \quad (7.2)$$

$$z^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (8.2)$$

لنفرض أن $s(x) = \hat{g}(x) - \hat{u}(x)$. يمكننا إعادة كتابة المعادلة (7.2) كما يلي :

$$D^v z(x) + \sum_{i=1}^k \hat{e}_i D^{v_i} z(x) + z(x) = s(x) \quad (9.2)$$

من أجل ايجاد حل تقريبي للمسألة (9.2) نقوم بتقريب $D^v z(x)$ و $s(x)$ وفق اساس جاكوبي بالشكل :

$$D^v z(x) \simeq \sum_{i=0}^n c_i P_i^{*(\alpha, \beta)}(x) = C^T \phi(x) \quad (10.2)$$

$$s(x) \simeq \sum_{i=0}^n s_i P_i^{*(\alpha, \beta)}(x) = S^T \phi(x) \quad (11.2)$$

حيث $S^T = [s_0, s_1, \dots, s_n]$ و $C^T = [c_0, c_1, \dots, c_n]$ و الشروط الابتدائية (8.2) لدينا :

$$z(x) = J^v D^v z(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z^{(i)}(0)}{i!} x^i = J^v D^v z(x) \quad (12.2)$$

بالتعويض نحصل على :

$$z(x) = J^v D^v z(x) \simeq C^T J^v \phi(x) \simeq C^T I^{(v)} \phi(x) \quad (13.2)$$

عن طريق (13.2) و مصفوفات العمليات لدينا

$$D^{v_i} z(x) \simeq C^T I^{(v-v_i)} \phi(x), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (14.2)$$

نعوض العبارات (10.2), (11.2), (13.2) و (14.2) في (9.2) نحصل دالة الباقي $R_m(x)$ تكتب بالشكل التالي

$$R_m(x) = (C^T + \sum_{i=1}^k \hat{e}_i C^T I^{(v-v_i)} + C^T I^{(v)} - S^T) \phi(x)$$

اخيرا نتولد لنا $(m+1)$ معادلة جبرية خطية، من خلال تطبيق طريقة التجميع . يمكن العثور على معاملات الشعاع الغير معروف C عن طريق حل جملة المعادلات الجبرية الخطية . وبالتالي ، لدينا من المعادلة (13.2)

$$z(x) = C^T I^{(v)} \phi(x)$$

من المعادلة (13.2) يتم الحصول على الحل التقريبي $u(x)$ حيث

$$u(x) = \hat{u}(x) + C^T I^{(v)} \phi(x).$$

2.2.2 حل المعادلات التفاضلية الكسرية الغير خطية

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية التالية :

$$D^v u(x) = F(x, u(x), D^{\beta_1} u(x), \dots, D^{\beta_k} u(x)), \quad (15.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$u^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

حيث $n-1 < v \leq n$ و $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots, \beta_k < v$ و D^v يدل على مشتق كابوتو من الدرجة v . كما أن الدالة F دالة غير خطية.

من أجل حل المشكل (15.2) عدديا قنا بتحويل المسألة (15.2) باستخدام الطريقة المعروضة في القسم (4.2) و العبارة (6.2)

$$D^v z(x) = \hat{F}(x, z(x) + \hat{u}(x), D^{\beta_1} z(x), \dots, D^{\beta_k} z(x)) \quad (16.2)$$

$$z^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

وفق اساس كثيرات حدود جاكوبي تقرب أولا $z(x)$, $D^v z(x)$ و $D^{\beta_j} z(x)$ ($j = 1, \dots, k$) بواسطة المعادلات (13.2); (10.2) و (14.2) على التوالي. عن طريق استبدال هذه المعادلات في المعادلة (16.2) ، تكتب الدالة الباقي $R(x)$ على النحو التالي

$$R(x) = -C^T \phi(x) + \hat{F}(x, C^T I^{(v)} \phi(x) + \hat{u}(x), C^T I^{(v-\beta_1)} \phi(x), \dots, C^T I^{(v-\beta_k)} \phi(x)). \quad (17.2)$$

للعثور على المجهول C نستعمل طريقة التجميع للمعادلة (17.2) في $(m+1)$ نقطة تتحول المسألة الى جمل معادلات جبرية غير خطية و يمكن حل الجملة الغير خطية الذي تم الحصول عليها بالحاسوب (على سبيل المثال باستخدام $Mathematica^{TM}$) . وبالتالي يكون لدينا

$$z(x) = C^T I^{(v)} \phi(x); \quad u(x) = \hat{u}(x) + C^T I^{(v)} \phi(x).$$

3.2 توظيف مصفوفة العمليات الكسرية لتشبيشيف

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية الغير خطية التالية

$$D_*^\alpha y(t) = F(t, y(t), D_*^{\beta_1} y(t), \dots, D_*^{\beta_k} y(t)) \quad 0 \leq t < 1 \quad (18.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(j)}(0) = d_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (19.2)$$

حيث $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots, \beta_k < v$ و أيضا $n-1 < \alpha \leq n$ ، تدل على المشتقات الكسرية لكابوتو من الدرجة α لحل هذه المشكلة عن طريق التقريب وفق أساس تشبيشيف من النوع الثاني ، تقرب $D_*^\alpha y(t)$ بالعلاقة (7.1) مثل

$$D_*^\alpha y(t) = C^T \Psi(t)$$

حيث $C = [c_0, c_1, \dots, c_{M-1}]^T$ شعاع مجهول. ثم ندخل مؤثر التكامل الكسري I^α على طرفي المعادلة أعلاه، ووفقا للمعادلات (3.1) و (3.2) نحصل على

$$I^\alpha D_*^\alpha y(t) \approx C^T I^\alpha \Psi(t) \implies y(t) \approx C^T P_{M \times M}^\alpha \Psi(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!} t^j, \quad (20.2)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, k$

$$D_*^{\beta_i} y(t) \approx C^T P_{M \times M}^{\alpha-\beta_i} \Psi(t) + \sum_{j=n_i}^{n-1} \frac{d_j}{(j-n_i)!} t^{j-n_i}$$

بأخذ نقاط نيوتن-كوتس $q = 1, 2, \dots, M$, $t_q = \frac{q}{M}$ كنقاط التجميع واستبدال المعادلات أعلاه في المعادلة (18.2) نحصل على

$$C^T \Psi(t_q) = F \left(t_q, C^T P_{M \times M}^\alpha \Psi(t_q) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!} t_q^j, C^T P_{M \times M}^{\alpha-\beta_1} \Psi(t_q) \right)$$

$$+ \sum_{j=n_1}^{n-1} \frac{d_j}{(j-n_1)!} t_q^{j-n_1}, \dots, C^T P_{M \times M}^{\alpha-\beta_k} \Psi(t_q) + \sum_{j=n_k}^{n-1} \frac{d_j}{(j-n_k)!} t_q^{j-n_k} \quad (21.2)$$

وهو جملة من المعادلات الجبرية التي يمكن حلها للعثور على الشعاع C . لذلك يتم الحصول على حل تقريبي للمعادلة (18.2) بالعلاقة (20.2).

4.2 أمثلة عددية مع المقارنة

لتوضيح فعالية الطرق المقترحة في هذه البحث ، تم إجراء العديد من أمثلة الاختبار في هذا القسم.

1.4.2 تطبيقات عددية لطريقة جاكوبي

مثال 1.4.2 نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية [38, 10, 7]

$$D^2 u(x) + D^{\frac{3}{2}} u(x) + u(x) = g(x) \quad (22.2)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

حيث $g(x) = 1 + x$. الحل الدقيق لهذه المشكلة هو $u(x) = 1 + x$ نعتبر أن

$$u(x) = z(x) + 1 + x \quad (23.2)$$

ثم (22.2) المعادلة تكافئ

$$D^2 z(x) + D^{\frac{3}{2}} z(x) + z(x) = 0. \quad z(0) = z'(0) = 0 \quad (24.2)$$

الآن ، يتم تقريب المجهول $D^2 z(x)$ ك

$$D^2 z(x) = C^T \Phi(x)$$

ومن خلال المعادلات (3.1) و (4.1) يتم الحصول على المعادلات التالية

$$D^{\frac{3}{2}} z(x) = C^T I^{(\frac{1}{2})} \Phi(x)$$

$$z(x) = C^T I^{(2)} \Phi(x). \quad (25.2)$$

باستخدام المعادلات أعلاه ، نعيد كتابة المعادلة (24.2) كما يلي

$$C^T [I + I^{(\frac{1}{2})} + I^{(2)}] \Phi(x) = 0$$

باستخدام الطريقة المعروضة مع $m = 2$ ، حل الجملة أعلاه هو

$$C^T = 0$$

وباستخدام المعادلات (25.2) و (23.2) نحصل على تقريبي مطابق للحل الدقيق.

مثال 2.4.2 نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية [30, 10]

$$D^2 u(x) + D^{\frac{3}{2}} u(x) + u(x) = g(x) \quad (26.2)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

حيث $g(x) = x^2 + 2 + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ والحل الدقيق هو $u(x) = x^2$ في البداية ، يمكننا تحويل المعادلة (26.2) إلى

$$D^2 z(x) + D^{\frac{3}{2}} z(x) + z(x) = \hat{g}, \quad (27.2)$$

$$z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

حيث $z(x) = u(x) - x$ و $\hat{g}(x) = x^2 - x + 2 + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ الآن ، نقوم بتقريب وفق اساس جاكوبي بالشكل :

$$D^1 z(x) = C^T \Phi(x), \quad z(x) = C^T I^{(1)} \Phi(x)$$

$$D^2 z(x) = C^T D^1 \Phi(x), \quad D^{\frac{3}{2}} z(x) = C^T D^{(\frac{1}{2})} \Phi(x)$$

$$\hat{g} = G^T \Phi(x),$$

حيث D^1 و $D^{(\frac{1}{2})}$ هي المصفوفة التشغيلية للمشتق بمعنى كابوتو الدالة المتبقية في المعادلة (27.2) تكتب من الشكل

$$R(x) = [C^T D^1 + C^T D^{(\frac{1}{2})} + C^T I^{(1)} - G^T] \Phi(x)$$

باستخدام طريقة التجميع مع الشرط

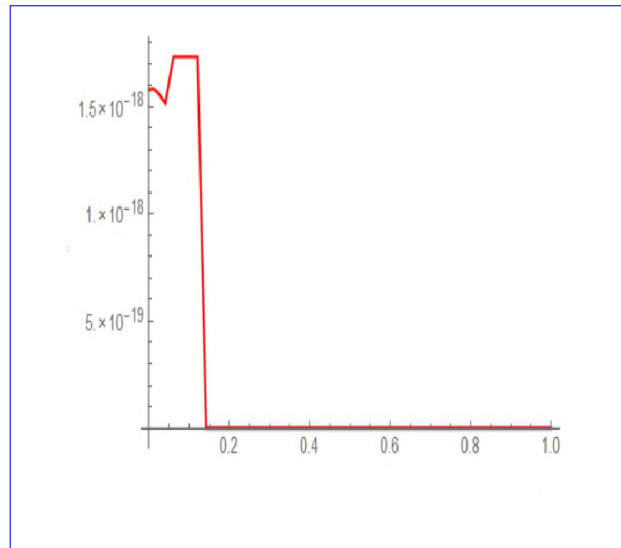
$$z(1) = C^T I^{(1)} \Phi(1) = 0$$

حل الجملة من أجل $m = 4$ هو

$$C^T = [0, 1, -1.16209 \times 10^{-17}, 1.59492 \times 10^{-18}, 5.48351 \times 10^{-18}]$$

$$z(x) = C^T I^{(1)} \Phi(x)$$

في شكل 1، يوضح الخطأ المطلق مع اجل $m = 4$ ويظهر الأداء الجيد ودقة التقنية المقدمة.



شكل 1.2: الخطأ المطلق عند $m = 4$

مثال 3.4.2 نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية : [38 ,21 ,16 ,10]

$$D^v u(x) + u(x) = 0, \quad 0 < v < 2, \quad I = (0, 1)$$

$$u(0) = 1, u'(0) = 0$$

الحل الدقيق هو

$$u(x) = E_{v,1}(-x^v)$$

حيث

$$E_{\delta,\epsilon}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{\Gamma(\delta r + \epsilon)}$$

هي دالة ميتاغ-ليفلر المعممة.

نجعل المعادلة متجانسة بالشكل الموالي :

$$D^v z(x) + z(x) + 1 = 0, \quad 0 < v < 2, \quad I = (0, 1)$$

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 0$$

الآن ، نقوم بتقرب الدوال وفق اساس جاكوبي كالتالي :

• (1) من أجل $v < 1$

$$D^1 z(x) = C^T \Phi(x), \quad z(x) = C^T I^1 \Phi(x)$$

$$D^v z(x) = C^T I^{(1-v)} \Phi(x), \quad 1 = G^T \Phi(x)$$

• (2) من أجل $v > 1$

$$D^2 z(x) = C^T \Phi(x), \quad z(x) = C^T I^{(2)} \Phi(x)$$

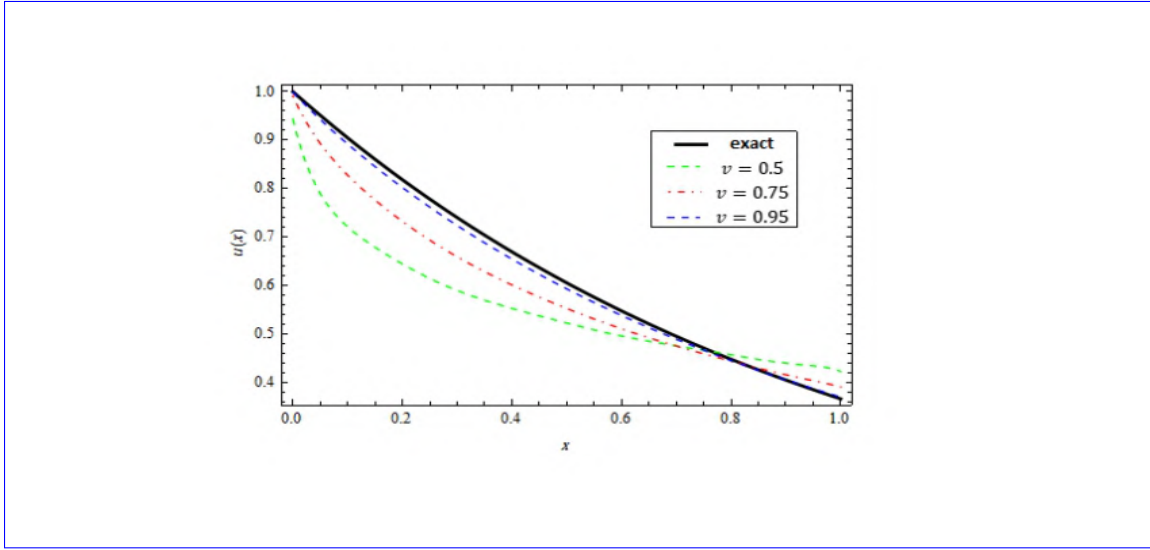
$$D^v z(x) = C^T I^{(2-v)} \Phi(x), \quad 1 = G^T \Phi(x)$$

جدول 1 بوضخ الخطأ المطلق من أجل $v = 0.85$ و $m = 2, 5, 8, 9$. من خلال جدول 1 يمكن ملاحظة أنه يمكن تحقيق تقريب جيد باستخدام بضعة حدود من كثيرات حدود جاكوبي .

يعرض شكل 2 النتائج العددية لـ $u(x)$ مع $m = 9$ و $v = 0.5, 0.75, 0.95, 1$. حيث من أجل $v = 1$ الحل الدقيق هو $u(x) = \exp^{-x}$ يمكن ملاحظة من شكل 2 أن الحلول التقريبية للقيم المختلفة v تقترب بشكل سريع من \exp^{-x} بدقة عالية.

$x = 0.9$	$x = 0.7$	$x = 0.5$	$x = 0.3$	$x = 0.1$	m
3.5×10^{-3}	7.7×10^{-3}	3.0×10^{-3}	7.8×10^{-3}	3.0×10^{-3}	2
6.1×10^{-4}	5.3×10^{-4}	4.8×10^{-4}	3.1×10^{-4}	7.8×10^{-4}	5
4.5×10^{-5}	1.3×10^{-4}	8.9×10^{-5}	1.0×10^{-6}	3.6×10^{-4}	8
8.5×10^{-5}	1.2×10^{-5}	8.2×10^{-5}	1.2×10^{-4}	2.2×10^{-4}	9

جدول 1.2: الخطأ المطلق لقيم مختلفة لـ m من أجل $v = 0.85$



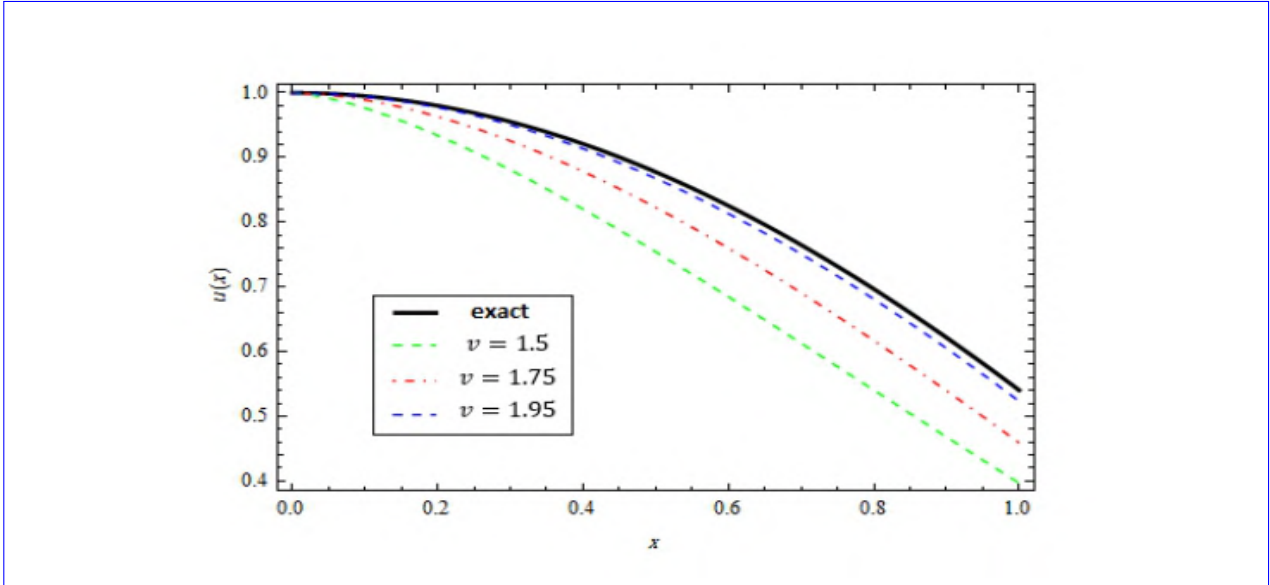
شكل 2.2: مقارنة $u(x)$ و $u_m(x)$ من أجل $m = 9$ و $\nu = 0.5, 0.75, 0.95, 1$

$x = 0.9$	$x = 0.7$	$x = 0.5$	$x = 0.3$	$x = 0.1$	ν
1.1×10^{-3}	2.6×10^{-4}	1.0×10^{-3}	1.8×10^{-3}	2.8×10^{-3}	0.2
3.6×10^{-3}	3.8×10^{-3}	4.7×10^{-3}	8.6×10^{-3}	3.8×10^{-2}	0.4
5.2×10^{-4}	1.0×10^{-4}	4.9×10^{-4}	7.8×10^{-4}	1.3×10^{-3}	0.6
1.4×10^{-4}	2.0×10^{-5}	1.3×10^{-4}	2.0×10^{-4}	3.6×10^{-4}	0.8
2.8×10^{-13}	7.9×10^{-14}	2.2×10^{-13}	9.8×10^{-14}	2.7×10^{-13}	1
2.4×10^{-5}	1.4×10^{-6}	2.4×10^{-5}	3.4×10^{-5}	6.6×10^{-5}	1.2
1.9×10^{-5}	1.8×10^{-6}	1.8×10^{-5}	2.5×10^{-5}	4.7×10^{-5}	1.4
2.6×10^{-6}	4.0×10^{-7}	2.4×10^{-6}	3.4×10^{-6}	5.9×10^{-6}	1.8
3.9×10^{-13}	1.2×10^{-13}	3.2×10^{-13}	1.3×10^{-13}	4.0×10^{-13}	2

جدول 2.2: الخطأ المطلق لقيم مختلفة لـ ν و $m = 9$

1	0.8	0.6	0.4	0.2	ν
10^{-14}	0.0018	0.0100	0.0363	0.1684	Error
2	1.8	1.6	1.4	1.2	ν
1.9×10^{-14}	7.3×10^{-5}	3.8×10^{-4}	0.0014	0.0046	Error

جدول 3.2: أقصى خطأ مطلق لـ $m = 10$ وقيم مختلفة لـ ν مع $\alpha = \beta = 0$ في [10]



شكل 3.2: مقارنة $u(x)$ و $u_m(x)$ من أجل $m = 9$ و $v = 1.5, 1.75, 1.95, 2$

يوضح الشكل 3 النتائج العددية لـ $u(x)$ لـ $m = 9$ و $v = 1.5, 1.75, 1.95, 2$ ، بالنسبة إلى $v = 2$ ، يكون الحل الدقيق هو $u(x) = \cos(x)$. من الشكل 3 نرى أنه عندما تقترب القيم v من 2، تتقارب الحلول التقريبية من $u(x) = \cos(x)$. يظهر الخطأ المطلق لقيم مختلفة لـ v و $m = 9$ في الجدول 2. من الجدول 2، نرى أنه عندما يقترب v من القيم الصحيحة ($v = 1, 2$) يتم تقليل الخطأ، وهو أمر متوقع. من أجل إجراء مقارنة، نعرض الحد الأقصى للخطأ المطلق البالغ [10] الجدول 3.

2.4.2 تطبيقات عددية لطريقة تشيبيشيف

خلال هذا القسم سوف نستخدم الترميز التالي:

$$\varepsilon_h = \max_{j=1,2,\dots,M} |y(t_j) - y_M(t_j)|, \quad h = \frac{1}{M}, \quad t_j = \frac{j}{M}, \quad \rho = \log\left(\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_h/2}\right) / \log 2$$

حيث يشير y_M إلى الحل التقريبي لـ y وفق أساس كثير حدود تشيبيشيف.

مثال 4.4.2 نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية [12, 14]

$$aD_*^2 y(t) + b(t)D_*^{\beta_1} y(t) + c(t)D_* y(t) + e(t)D_*^{\beta_2} y(t) + k(t)y(t) = f(x) \quad (28.2)$$

$$0 < \beta_2 < 1, \quad 1 < \beta_1 < 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

حيث

$$f(t) = -a - \frac{b(t)}{\Gamma(3 - \beta_1)} t^{2-\beta_1} - c(t) \frac{e(t)}{\Gamma(3 - \beta_2)} t^{2-\beta_2} + k(t) \left(2 - \frac{t^2}{2}\right)$$

ρ	ε_h	h
-	6.88384×10^{-5}	0.2
4.51849	3.00351×10^{-6}	0.1
4.16152	1.67837×10^{-7}	0.05
4.03702	1.02241×10^{-8}	0.025

جدول 4.2: معايير الخطأ ومعدلات التقارب مع $M = 5, 10, 20, 40$ لمثال 2.1

الحل الدقيق لهذه المسألة هو

$$y(t) = 2 - \frac{t^2}{2}$$

بغية توظيف مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لحلها. نضع $D_*^2 y(t) = C^T \Psi(t)$ وفقاً للمعادلة (28.2) لدينا

$$y(t) = C^T P_{M \times M}^2 \Psi(t) + 2$$

وبالتالي

$$aC^T \Psi(t) + b(t) \left(C^T P_{M \times M}^{2-\beta_1} \Psi(t) \right) + c(t) \left(C^T P_{M \times M}^1 \Psi(t) \right) + e(t) \left(C^T P_{M \times M}^{2-\beta_2} \Psi(t) \right) + k(t) C^T P_{M \times M}^2 \Psi(t) + 2 = f(t)$$

نطبق طريقة التجميع عن طريق أخذ نقاط التجميع $t_j = \frac{j}{M}$, $j = 1, 2, \dots, M$ نحصل على جملة معادلات من خلال حل هذا النظام، يمكننا إيجاد الشعاع C وبالتالي، يتم الحصول على حل المعادلة التفاضلية الكسرية (28.2).

في جدول 4 دراسة لدقة الحل العددي للمعادلة (28.2) بطريقتنا من أجل $a = 1, b(t) = \sqrt{t}, c(t) = t^{\frac{1}{3}}, e(t) = t^{\frac{1}{4}}, k(t) = t^{\frac{1}{5}}, \beta_2 = 0.33, \beta_1 = 1.234$ من جدول 4، من الواضح أن الحل العددي الذي تم الحصول عليه بالطريقة المعروضة في الأقسام السابقة والذي يعتمد على مصفوفات العمليات يتقارب مع الحل الدقيق. و ننتق مع الطرق العددية الأخرى المذكورة [13, 12].

مثال 5.4.2 نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية الغير خطية

$$D_*^\eta y(t) + D_*^{\theta_1} y(t) + D_*^{\theta_2} y(t) + y^2(t) = h(t) \quad (29.2)$$

$$0 < \eta < 3, \quad 1 < \theta_1 < 2, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

$$h(t) = t^6 + \frac{6}{\Gamma(4-\eta)} t^{3-\eta} + \frac{36}{\Gamma(4-\theta_1)\Gamma(4-\theta_2)} t^{6-\theta_1-\theta_2}$$

تحت الشروط الابتدائية:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

الحل الدقيق هو $y(t) = t^3$

تم حل هذه المسألة في [10] بواسطة مصفوفة جاكوبي ونحن نستعمل اساس تشيبيشيف .
 نضع $D_*^\eta y(t) = y(t)\Psi(t)$
 وباستعمال نقاط التجميع $t_j = \frac{j}{M}, j = 1, 2, \dots, M$ نحصل على الجملة الجبرية

$$C^T \Psi(t_j) + \left(C^T P_{M \times M}^{\eta-\theta_1} \Psi(t_j) \right) \left(C^T P_{M \times M}^{\eta-\theta_2} \Psi(t_j) \right) + \left(C^T P_{M \times M}^\eta \Psi(t_j) \right)^2 = h(t_j)$$

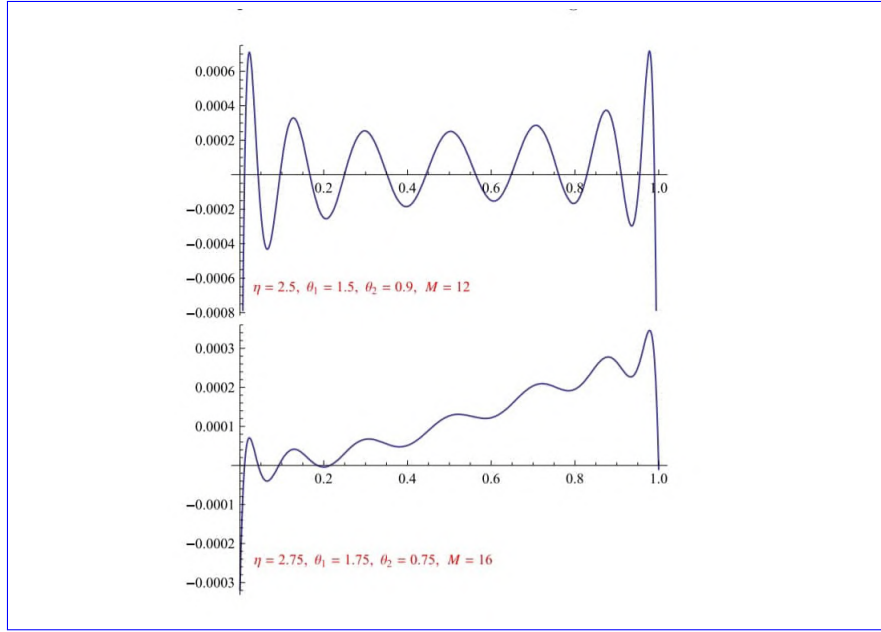
ρ	ε_h	h
-	1.96839×10^{-2}	0.25
2.65939	3.1157×10^{-3}	0.125
2.6129	5.09325×10^{-4}	0.0625
2.49135	9.05782×10^{-5}	0.03125

جدول 5.2: معايير الخطأ ومعدلات التقارب للمثال 2.2 مع $M = 4, 8, 16, 32, \theta_2 = 0.9, \theta_1 = 1.5, \eta = 2.5$

ρ	ε_h	h
-	2.15665×10^{-2}	0.25
2.35739	4.20858×10^{-3}	0.125
2.21995	9.03369×10^{-4}	0.0625
2.11728	2.08209×10^{-4}	0.03125

جدول 6.2: معايير الخطأ ومعدلات التقارب للمثال 2.2 مع $M = 4, 8, 16, 32, \theta_2 = 0.75, \theta_1 = 1.75, \eta = 2.75$

من خلال حل هذا النظام ، يمكننا إيجاد النتائج العددية لقيم مختلفة لـ M و η و θ_1 و θ_2 . توضيح النتائج العددية المعروضة في الجدولين جدول 5 و جدول 6 أداء الطريقة المقترحة عند تطبيقها على المشكلة (29.2) ، لـ $\eta = 2.5, \theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.9$ و $\eta = 2.75, \theta_1 = 1.75, \theta_2 = 0.75$ على التوالي. يظهر في شكل 4 الأخطاء المطلقة بقيم $M = 12, 16$ للمثال (3.5) في الحالتين أعلاه



شكل 4.2: الخطأ المطلق للمثال 2.2 في حالتين مختلفتين

الخلاصة

إستطعنا بناء مصفوفات العمليات الجديدة وفق أساس جاكوبي و تشيبيشاف استنتجنا كلا من مصفوفة العمليات للتكامل P ، و التفاضل D حيث تم إعطاء إجراء عام لتشكيل هذه المصفوفات. تلك المصفوفات يمكن إستخدامها لحل المسائل الرياضية مثل ما قدمنا في حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية. حيث كان دورها التخلص من العبارات المعقدة في المسائل من تكامل و تفاضل و جداءات. و تبين لنا أن هذه الطريقة سهلة التنفيذ، وتنتج نتائج دقيقة جدا. وعلاوة على ذلك هناك حاجة إلى عدد قليل من القواعد للحصول على نتيجة عديدة مرضية. تم تضمين هذه التقنية أمثلة تبين كيف تم تحويل المشكلة إلى جمل من المعادلات الجبرية التي من السهل حلها. النتائج التي تم الحصول عليها هي دقيقة جدا. تمت مقارنة النتائج العددية بشكل اجابي مع الحلول التحليلية. في الاخير تمت مقارنة الحل التقريبي بدقة للطريقتين المدرستين حيث كانت النتائج متوافقة تماما مع الحلول الدقيقة, كما لوحظ من خلال النتائج أن طريقة كثير حدود جاكوبي حققت تقريبا جيدا مقارنة بطريقة كثير حدود تشيبيشيف. وفي الأخير نأمل أننا وفقنا في دراسة هذا الموضوع, والله وبتوفيق منه تعالى تمكنت من اجتياز جملة من العراقيل و الصعوبات لاتمام هذا العمل و الذي لا يخلو من النقائص فله الكمال و التمام.

المخلص

يهدف هذا البحث الى تقديم معالجات عددية لبعض أنواع المعادلات التفاضلية من رتب كسرية الخطية و غير الخطية إعتدنا في تلك التقنيات العددية على تقريب الحلول باستعمال كثيرات حدود جاكوبي و كثيرات حدود تشيبشيف . و عن طريق بناء مصفوفات العمليات الكسرية أمكن تحويل تلك المسائل إلى جمل معادلات جبرية سهلة البرمجة و الحل و من خلال تطبيقات عددية أثبتت تلك الطرائق كفاءة عالية في إيجاد حلول تقريبية و دقيقة مع عرض و تحليل لطرق عالجت الموضوع سابقا.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية كسرية , حدود جاكوبي , تشيبشيف , مصفوفات العمليات.

Abstract

The objective of this work is to find numerically the solution of some linear and nonlinear fractional differential equations For the approximation of the solutions we have used Jacobi polynomials, and Chebyshev . The operational matrix tool converts these problems to systems of algebraic equations whose solutions are simple and easy to compute. Numerical applications have proven the effectiveness of these methods to find approximate and precise solutions.

Key words: Fractional differential equation, Jacobi polynomials, Chebyshev polynomials operational matrices,

Résumé

L'objectif de cette thèse est de fournir des traitements numériques pour quelques types d'équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires. Pour l'approximation des solutions, nous avons utilisé les polynômes de Jacobi, et de Tchebychev. La construction de matrices opérationnelles a permis de transformer ces problèmes à des systèmes d'équations algébriques dont la résolution est simple. Des applications numériques ont prouvé l'efficacité de ces méthodes utilisées pour trouver des solutions approximatives et précises.

Mots clés: Équation différentielle fractionnaire, polynômes de Jacobi, polynômes de Chebyshev , matrices opérationnelles.

العلمية المراجع

- [1] Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and applications of fractional differential equations*. San Diego (CA): Elsevier; 2006.
- [2] *Bulletin of the Iranian Mathematical Society Comparative study on solving fractional differential equations via shifted Jacobi collocation method* M. Behroozifar and F. Ahmadpour Vol. 43 (2017), No. 2, pp. 535-560
- [3] Podlubny I. *Fractional differential equations*. New York (NY): Academic Press; 1999.
- [4] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] *Operational Matrix of Fractional Integration Based on the Shifted Second Kind Chebyshev Polynomials for Solving Fractional Differential Equations* *Mediterr. J. Math.* DOI 10.1007/s00009-015-0563-x c Springer Basel 2015
- [6] Baillie, R.T.: *Long memory processes and fractional integration in econometrics*. *J. Econom.* 7, 35–59 (1996)
- [7] K. Diethelm and N.J. Ford, *Numerical solution of the Bagley-Torvik equation*, *BIT* 42 (2002), no. 3, 490-507.
- [8] Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M.Y., Zang, T.A.: *Spectral Methods on Fluid Dynamics*. Springer, Berlin (1998)
- [9] E.H. Doha, A.H. Bhrawy and R.M. Hafez, *On shifted Jacobi spectral method for high order multi-point boundary value problems*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 17 (2012), no. 10, 3802-3810.
- [10] E.H. Doha and A.H. Bhrawy, S.S. Ezz-Eldien, *A new Jacobi operational matrix : an application for solving fractional differential equations*, *Appl. Math. Model.* 36 (2012), no. 10, 4931-4943.
- [11] Khan R, Ellahi R, Mohyud-Din ST, et al. *Exact traveling wave solutions of fractional order Boussinesq-like equations by applying exp-function method*. *Res Phys.* 2018; 8: 114–120.
- [12] El-Mesiry, A., El-Sayed, A., El-Saka, H.: *Numerical methods for multiterm fractional (arbitrary) orders differential equations*. *Appl. Math. Comput.* 160(3), 683–699 (2005)

-
- [13] M.R.Eslahchi and M.Deaghan, *Application of Taylor series in obtaining the orthogonal operational matrix*, *Comput. Math. Appl.* 61 (2011), no. 9, 2596-2604.
- [14] Li, Y., Zhao, W.: *Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations*. *Appl. Math. Comput.* 216(3), 2276–2285 (2010)
- [15] Mason, J.C., Handscomb, D.C.: *Chebyshev Polynomials*. Chapman Hall/CRC, Boca Raton (2003)
- [16] I.Hashim, O.Abdulaziz and S.Momani, *Homotopy analysis method for fractional IVPs*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14 (2009), no 3, 674-684.
- [17] Rostami, D., Alipour, M., Jafari, H., Baleanu, D.: *Solving multi-term orders fractional differential equations by operational mateices of BPs with convergence analysis*. *Romanian Rep. Phys.* 65(2), 334–349 (2013)
- [18] Stojanovic, M.: *Wave equation driven by fractional generalized stochastic processes*. *Mediterr. J. Math.* 10(4), 1813–1831 (2013)
- [19] Yan, Z., Jia, X.: *Impulsive problems for fractional partial neutral functional integro-differential inclusions with infinite delay and analytic resolvent resolvent*. *Mediterr. J. Math.* 11(2), 393–428 (2014)
- [20] H.Jafari, S.Das and H.Tajadodi, *Solving a multi-order fractional differential equation using homotopy analysis method*, *J. King Saud Univ. Sci.* 23 (2011), no. 2, 151-155.
- [21] S.Kazem, *An integral operational matrix based on Jacobi polynomials for solving fractional-order differential equations*, *Appl. Math. Model.* 37 (2013), no. 3, 1126-1136.
- [22] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, San Diego, 2006.
- [23] Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M.Y., Zang, T.A.: *Spectral Methods on Fluid Dynamics*. Springer, Berlin (1998)
- [24] P.Kumar and O.P.Agrawal, *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations*, *Signal Process.* 86 (2006), no. 10, 2602-2610.
- [25] Y.Li, *Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15 (2010), no. 9, 2284-2292.
- [26] J.H.He, *Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations*, *Bull. Sci. Technol.* 15 (1999), no. 2, 86-90.
- [27] J.H.He, *Approximate analytical solution for seepage ow with fractional derivatives in porous media*, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 167 (1998), no. 1-2, 57-68.

-
- [28] F.Liu, V.Anh and I.Turner, Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation, *J.Comput.Appl.Math.* 166 (2004), no.1, 209-219.
- [29] Doha, E.H., Bhrawy, A.H., Baleanu, D., Ezz-Eldien, S.S.: On shifted Jacobi spectral approximations for solving fractional differential equations. *Appl.Math.Comput.* 219(15), 8042–8056 (2013)
- [30] Q.M.Mdallal, M.I.Syam and M.N.Anwar, A collocation-shooting method for solving fractional boundary value problems, *Commun. Nonlinear Sci.Numer. Simul.* 15 (2010), no.12, 3814-3822.
- [31] Qureshi S, Yusuf A. Mathematical modeling for the impacts of deforestation on wildlife species using Caputo differential operator. *Chaos Solitons Fractals.* 2019; 126:32–40.
- [32] Qureshi S, Yusuf A. Fractional derivatives applied to MSEIR problems: comparative study with real world data. *Eur Phys J Plus.* 2019; 134:171.
- [33] Magin RL. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Comput Math Appl.* 2010; 59: 1586–1593.
- [34] Veselic'K. Damped oscillations of linear systems—a mathematical introduction. Heidelberg: Springer; 2011.
- [35] Pinto CMA, Carvalho ARM. Fractional modeling of typical stages in HIV epidemics with drug-resistance. *Progr Fract Differ Appl.* 2015; 1(2): 111–122.
- [36] Seadawy AR, Lu D, Yue C. Travelling wave solutions of the generalized nonlinear fifth-order KdV water wave equations and its stability. *J Taibah University Sci.* 2017; 11: 623–633
- [37] K.B.Oldham and J.Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, New York, 2006.
- [38] A.Saadatmandi and M.Deaghan, A new operational matrix for solving fractional order differential equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010), no.3, 1326-1336.
- [39] J.Shen and T.Tang, *High Order Numerical Methods and Algorithms*, Chinese Science Press, Beijing, 2005.
- [40] N.H.Sweilam, M.M.Khader and R.F.Al-Bar, Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, *Phys. Lett.A* 371 (2007), no.1, 26-33.
- [41] G.Szego, *Orthogonal Polynomials*, Amer.Math.Soc. Colloq.Publ.Providence, RI, 1975.
- [42] DAS, S. *Functional fractional calculus, Second*, Scientific Publishing Services Pvt.Ltd., India, 2011, 612.
- [43] S.Yang, A.Xiao and H.Su, Convergence of the variational iteration method for solving multi-order fractional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 60 (2010), no.10, 2871-2879.

-
- [44] S.B.Yuste, *Weighted average nite difference methods for fractional diffusion equations*, *J.Comput.Phys.* 216 (2006), no. 1, 264-274.
- [45] NISHIMOTO, K. *An essence of Nishimoto's Fractional Calculus*. Descartes Press Co, 1991.
- [46] Shantanu Das, *Functional Fractional Calculus*, DOI 10.1007/978-3-642-20545-3, ISBN 978-3-642-20544-6, 2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [47] M.H.Akrami, M.H.Atabakzadeh and G.H.Erjaee, "The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials" *Iranian Journal of Science Technology, IJST* (2013) 37A4: 439-444.
- [48] Lions, Jacques Louis. *Optimal control of systems governed by partial differential equations (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften)*. Vol. 170. Berlin: Springer, .1971
- [49] Pierre Grisvard , *calcul Differential of Equations Differential* , office des publications universitaires, 2 eme Edition, Alger, 1980.
- [50] Ross, *Introduction of Ordinary Differential Equations*, 1989.
- [51] Abbas Saadatmandi, *Bernstein operational matrix of fractional derivatives and its applications*, *Applied Mathematical Modelling*, Volume 38, Issue 4, 15 February 2014, Pages 1365-1372
