



République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de  
l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

# MASTER EN MATHÉMATIQUES

*Spécialité : Algèbre et géométrie*

## Thème

---

Espaces de modules de connexions plates

---

PAR

FEDEL FATIMA

Devant le jury :

- Mr. Salim Badidja Université Kasdi Merbah- Ouargla Président
- Mr. Mohamed Tayeb Benmoussa Université Kasdi Merbah - Ouargla Examineur
- Mr. Yassine Guerboussa Université Kasdi Merbah - Ouargla Examineur
- Mohamed Amine BAHAYOU M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla Rapporteur

2021/2022



## Dédicace

À la personne la plus précieuse qui soit, à celle qui m'a aimé sans restriction, à la princesse de mon cœur, à la source de chaleur et de tendresse, « ma mère », que Dieu la protège et lui accorde une vie de santé et de prospérité.

À qui je porte fièrement son nom, À qui Dieu m'a choisi à ses côtés, À qui ma langue ne cesse de mentionner, Au bien-aimé de mon cœur « Mon Père » que Dieu ait pitié de lui et le fasse habiter dans les plus hauts paradis.

À mes chers frères et à tous les membres de ma famille,

À mon meilleur ami, À la bénédiction que Dieu m'a donnée sous la forme d'un "Shuaib", que Dieu le protège et le soutienne.

À tous ceux à qui ma mémoire s'est élargie mais que mon journal n'a pas pu

Fatima Fedel.

## Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, l'Exalté, car Il nous a guidés et a facilité le chemin à travers notre humble travail

Nous tenons à remercier sincèrement le superviseur, Monsieur Mohamed Amine Bahayou, qui était le père avant de superviser notre travail. Il était un bon guide avec ses conseils et ses critiques constructives, il nous a donc aidés dans notre cheminement, que Dieu le bénisse, une aide aux universitaires et aux chercheurs.

Nous n'oublions pas d'adresser nos remerciements au vertueux Monsieur Mohamed Tayeb Benmoussa et aussi Monsieur Yassine Guerboussa qui ne nous a pas épargné l'information, que Dieu les récompense bien.

---

---

# Table des matières

---

Introduction	4
<b>1 Fibrés principaux et connexions</b>	<b>5</b>
1.1 Fibrés localement triviaux . . . . .	5
1.2 Fibrés principaux . . . . .	8
1.3 Espace de modules de connexions plates . . . . .	14
<b>2 Géométrie de l'espace de modules</b>	<b>16</b>
2.1 Théorème d'isomorphisme . . . . .	18
Bibliographie	22

---

# Introduction

---

La motivation principale à l'étude de l'espace de modules de connexions plates trouve son origine dans un article de Atiyah et Bott [?]. Considérons l'espace  $\mathcal{A}$  des connexions sur un  $G$ -fibré principal au dessus d'une surface fermée  $S$ . L'espace  $\mathcal{A}$  possède une structure d'espace affine de dimension infinie naturelle et possède aussi une forme symplectique à coefficients constants. De plus, l'action du groupe de jauge  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{A}$  est hamiltonienne dont l'application moment associée à toute connexion  $A$  sa courbure  $F_A$ . Par conséquent, le quotient symplectique  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  est (formellement) l'espace des modules des connexions plates.

Le Théorème qui nous intéresse, s'énonce comme suit :

## Théorème d'isomorphisme

Il y a une bijection naturelle entre l'espace de modules des connexions plates  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  (modulo l'action du groupe de jauge) et la variété de caractères  $\text{Hom}(\pi, G)/G$

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre d'introduction à la théorie des fibrés et connexions. Nous développons les notions importantes de  $G$ -fibrés principaux, connexions principales, courbures et holonomie.
2. Deuxième chapitre, consacré à l'étude de la structure symplectique de l'espace de modules de connexions plates sur un  $G$ -fibré au dessus d'une surface fermée. Nous développons une preuve d'isomorphisme entre l'espace de modules dit de « de Rham » et l'espace de modules dit de « Betti ».

Nous terminons par une petite bibliographie de la littérature qui traite ce thème plus en détail.

# FIBRÉS PRINCIPAUX ET CONNEXIONS

## 1.1 Fibrés localement triviaux

Soient  $E, B, F$  trois variétés différentielles. On dit que  $E$  est un espace fibré de base  $B$  et de fibre  $F$ , s'il existe une application différentiable (notée verticalement) :

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$$

telle que, pour tout  $x \in B$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un difféomorphisme

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & & U \end{array}$$

où la flèche oblique de droite est la première projection  $pr_1(x, u) = x$ .

### Remarque 1.1.1.

1. Pour tout  $x \in B$ ,  $\pi^{-1}(\{x\})$  est difféomorphe à  $F$  (puisque  $pr_1^{-1}(\{x\})$  l'est clairement) et s'appelle la « fibre au dessus de  $x$  ». L'application  $\pi : E \rightarrow B$  est une submersion, donc une application ouverte.
2. Si on peut choisir  $U = B$ , on dit que le fibré est trivial. Dans ce cas  $E$  s'identifie au produit  $B \times F$ .

Si  $C$  est une sous-variété de  $B$ , « la restriction de  $E$  à  $C$  est simplement la restriction de l'application différentiable  $\pi$  à  $\pi^{-1}(C)$  ; c'est un fibré de base  $C$ .

Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert de  $B$  tel que la restriction de  $E$  à chaque  $U_i$  soit un fibré trivial (le recouvrement est alors dit « trivialisant ». On a donc des difféomorphismes

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$$

d'où des « données de recollement »

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F &\longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F \\ (x, u) &\longmapsto (x, g_{ij}(x)(u)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $g_{ij}$  est une application de  $U_i \cap U_j$  dans  $\text{Diff}(F)$  le groupe des difféomorphismes de  $F$ .

Un  $G$ -fibré est la donnée d'un sous-groupe  $G$  (de Lie) de  $\text{Diff}(F)$  et de trivialisations  $(\varphi_i)$  comme ci-dessus tels que les  $g_{ij}$  définissent des applications différentiables de  $U_i \cap U_j$  dans  $G$ . On dit alors que  $G$  est le *groupe structural* du fibré  $E$ .

### Remarque 1.1.2.

1. La continuité et la différentiabilité des  $g_{ij}$  n'est pas automatique, sauf dans des cas particuliers. Par exemple, si  $E$  est un fibré vectoriel (voir ci-dessous), il est naturel de prendre pour  $G$  le groupe linéaire  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Dans ce cas, la condition de continuité est automatique.
2. On montre que les fonctions de transition  $g_{ij}$  caractérisent le  $G$ -fibré  $E$ . De manière précise, on vérifie d'abord la condition de cocycle

$$g_{ij} = g_{ik} \circ g_{kj}$$

au-dessus de chaque point  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ .

Réciproquement, la donnée d'un tel cocycle permet de reconstruire le fibré  $E$  comme quotient de la réunion disjointe des  $U_i \times F$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(x, u)$  à  $(x, g_{ij}(x)(u))$  pour  $x \in U_i \cap U_j$ . Voir [?].

### Exemple 1.1.1.

1. Un revêtement est un fibré localement trivial dont la fibre est discrète.
2. Un fibré vectoriel est un espace fibré localement trivial dont la fibre est un espace vectoriel et le groupe de structure est le groupe linéaire. C'est le cas, par exemple, des fibrés tangent et cotangent sur une variété différentielle.
3. Un fibré principal est un fibré localement trivial pour lequel le groupe structural agit librement et transitivement sur la fibre, autrement dit si la fibre peut s'identifier au groupe structural muni de l'action à droite. C'est le cas du fibré de Hopf, ainsi que du fibré des repères d'une variété différentielle.
4. La première projection  $\pi$  de  $E = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  à  $B = \mathbb{R}$  est une submersion surjective, mais  $(E, \pi, B)$  n'est pas un fibré localement trivial,  $0$  ne possède aucun voisinage  $U$  tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit homéomorphe à  $U \times \pi^{-1}(0)$ . En effet, pour tout  $r > 0$ , si  $U = ]-r, r[$  alors  $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$  est connexe (car connexe par arcs) alors que  $U \times \pi^{-1}(0) = U \times \{0\} \times \mathbb{R}^*$  possède deux composantes connexes.

## Morphismes de fibrés

Soient  $\pi_E : E \rightarrow M$  et  $\pi_F : F \rightarrow N$  des espaces fibrés de bases respectivement  $M$  et  $N$ . Alors une application différentiable  $\Phi : E \rightarrow F$  est un « morphisme de fibrés » de  $E$  à  $F$  s'il existe une application différentiable  $\varphi : M \rightarrow N$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

c'est-à-dire  $\pi_F \circ \Phi = \varphi \circ \pi_E$ .

En d'autres termes,  $\Phi$  « préserve les fibres », et  $\varphi$  est l'application induite sur l'espace des fibres de  $E$ ; puisque  $\pi_E$  est surjective,  $\varphi$  est uniquement déterminé par  $\Phi$ .

**Définition 1.1.1** (réciproque). *Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré localement trivial et soit  $f : M \rightarrow B$  une application continue. Soit*

$$f^*E = \{(m, x) \in M \times E, \pi(x) = f(m)\}.$$

*Le triplet  $(f^*E, p, M)$ , où  $p$  est l'application  $p(m, x) = m$ , est un fibré localement trivial, image réciproque.*

*Démonstration.* Si  $\{U_i\}$  est un recouvrement de  $B$  tel que  $E|_{U_i}$  est trivial et si  $\varphi_{ij}$  sont les applications de transition, alors  $\{f^{-1}(U_i)\}$  est un recouvrement de  $M$  qui trivialise  $f^*E$ .  $\square$

L'utilité de la définition ci-dessus réside dans le théorème important suivant :

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré localement trivial et soient  $f, g : M \rightarrow B$  deux applications continues homotopes. Alors  $f^*E \cong g^*E$ .*

Pour une preuve, voir [?]. Une conséquence importante est la suivante :

**Corollaire 1.1.1.** *Tout fibré de base contractile est un fibré trivial.*

*Démonstration.* Si  $\pi : E \rightarrow B$  est un fibré localement trivial avec  $B$  contractile, alors  $f_0, \text{Id} : B \rightarrow B$  sont homotopes ( $f_0$  est l'application constante  $f_0(x) = x_0$ , pour tout  $x \in B$ ). Le fibré de départ  $E = \text{Id}^*E$  est isomorphe au fibré trivial

$$f_0^*E = \{(m, x) \in B \times E, \pi(x) = x_0\} = B \times \pi^{-1}(x_0) \cong B \times F.$$

$\square$

**Théorème 1.1.2.** *Soit  $(E, \pi, B)$  un fibré localement trivial de fibre type  $F$ . Si  $B$  et  $F$  sont compacts alors  $E$  est lui aussi compact.*

**Définition 1.1.2** (Section). *C'est le choix, dans chaque fibre, d'un point variant différentiablement avec la fibre. En d'autres termes, une section du fibré  $E$  est une application différentiable  $s : B \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s = \text{Id}_B$ . On peut parler de sections locales au dessus d'un ouvert  $U$  de  $B$ , c'est-à-dire les applications  $s : U \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s = \text{Id}_U$ . On note  $\Gamma(B, E)$  ou  $\Gamma(E)$  l'espace des sections de  $E$  et par  $\Gamma(U, E)$  l'espace des sections locales au dessus de  $U$ .*

## 1.2 Fibrés principaux

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $B$  une variété. Un  $G$ -fibré principal au dessus de  $B$  est une fibration  $\pi : P \rightarrow B$  avec une action (à droite) libre du groupe structural  $G$  sur l'espace total  $P$ , tel que la base  $B$  soit l'espace d'orbite,  $\pi$  est la projection et les trivialisations locales sont de la forme

$$\varphi_U = (\pi, s_U) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

avec  $s_U(g \cdot p) = g \cdot s_U(p)$  pour tout  $g \in G$  et tout  $p \in \pi^{-1}(U)$ .

Un  $G$ -fibré principal est souvent représenté par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

Par exemple, la fibration de Hopf est un  $S^1$ -fibré principal au dessus de la sphère  $S^2 (= \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ . L'espace total étant la sphère  $S^3$  considérée comme l'ensemble des vecteurs unitaires de  $\mathbb{C}^2$  où les éléments de cercle agissent par multiplication complexe.

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2).$$

**Théorème 1.2.1.** *Pour qu'un fibré principal soit trivial, il faut et il suffit qu'il admette une section.*

*Démonstration.* La nécessité est évidente. Pour voir la suffisance soit  $x \in E$  et soit  $x_0$  l'intersection de la fibre de  $x$  et de la section. En désignant par  $g$  l'élément bien déterminé de  $G$  tel que  $x = x_0 \cdot g$ . Si  $b$  est l'unique point de  $B$ , tel que  $s(b) = x_0$ , alors l'application  $\Phi(x) = (b, g)$  définit un difféomorphisme de  $E$  sur  $B \times G$ , d'inverse  $\Phi^{-1}(b, g) = s(b) \cdot g$ .

□

On peut se restreindre aux  $G$ -fibrés principaux trivialisables (isomorphes aux fibré trivial), lorsque  $G$  est simplement connexe. En effet, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.2.2.** *Si  $G$  est un groupe de Lie simplement connexe, alors tout  $G$ -fibré principal est trivialisable.*

*Démonstration.* Voir [?].

□

## Connexions

Une action  $\psi : G \rightarrow \text{Diff}(P)$  induit une action (infinitésimale)  $d\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \chi(P)$  qui envoie un champ de vecteurs invariant à gauche  $X \in \mathfrak{g}$  vers le champ fondamental  $X^\#$  généré par le groupe à un paramètre  $\{\exp X(e) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$ .

Fixons une base  $X_1, \dots, X_k$  de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $P$  un  $G$ -fibré principal au dessus de  $B$ . Comme l'action de  $G$  est libre, les champs de vecteurs  $X_1^\#, \dots, X_k^\#$  sont linéairement indépendants en tout point  $p \in P$ . Le sous-fibré vertical  $V$  est le sous-espace de rang  $k$  de  $TP$  engendré par  $X_1^\#, \dots, X_k^\#$ . Alternativement,  $V$  est l'ensemble des vecteurs tangente à  $P$  qui se trouve dans le noyau de la différentielle de la projection  $\pi$ , donc  $V$  est bien indépendant du choix de la base de  $\mathfrak{g}$ . Une connexion (d'Ehresmann) sur  $P$  est un

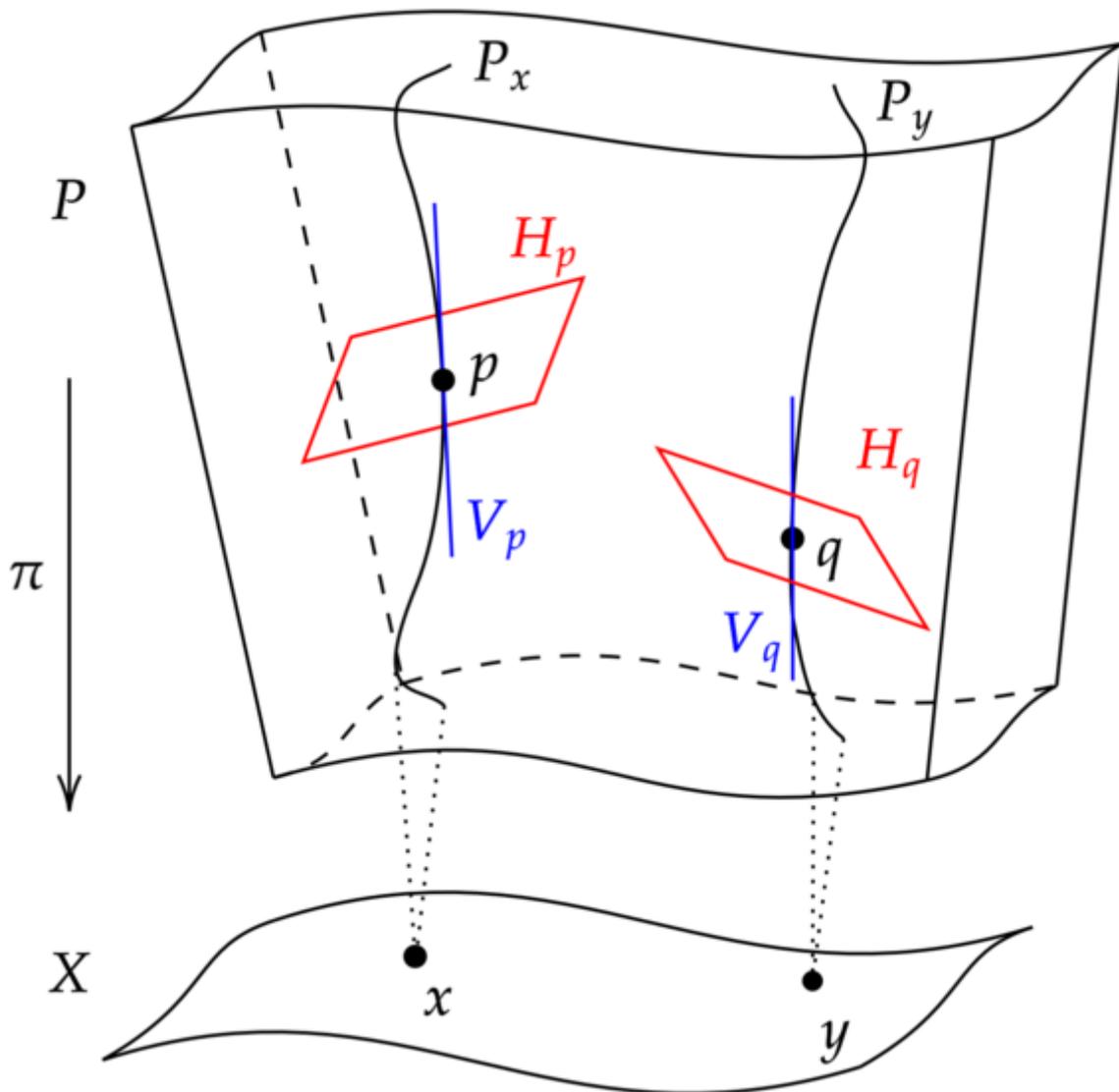


FIG. 1.1 : Connexion d'Ehresmann.

choix d'une décomposition en somme directe  $TP = V \oplus H$ , où  $H$  (appelé le sous-fibré horizontal)

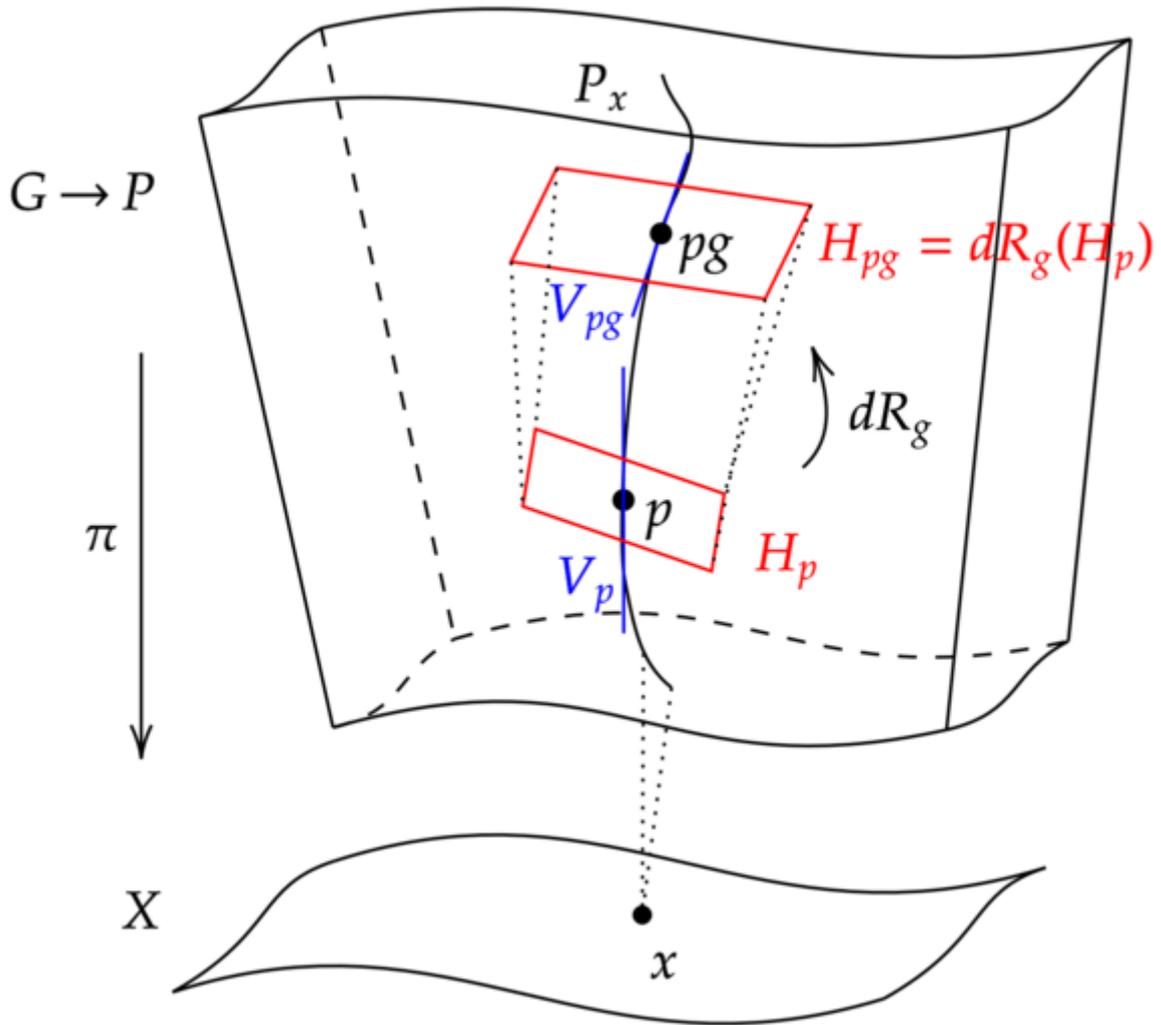


FIG. 1.2 : Équivariance de la connexion.

est un sous-ensemble  $G$ -invariant de  $TP$  complémentaire au sous-fibré vertical  $V$ . Une forme de connexion sur  $P$  est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  :

$$A = \sum_{i=1}^k A_i \otimes X_i, \text{ élément de } \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$$

tel que  $A$  est  $G$ -invariante, par rapport à l'action produit de  $G$  sur  $\Omega^1(P)$  (action à droite sur  $P$ ) et l'action adjointe sur  $\mathfrak{g}$ . De plus,  $A$  est vertical en ce sens que

$$i_{X\#} A = X, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Une connexion  $TP = V \oplus H$  détermine une forme de connexion  $A$  et vice-versa par la formule

$$H = \ker A = \{v \in TP, i_v A = 0\}.$$

Étant donnée une connexion sur  $P$ , la décomposition en somme directe  $TP = V \oplus H$  induit une

décomposition en sous-fibrés

$$\begin{aligned} T^*P &= V^* \oplus H^* \\ \wedge^2 T^*P &= (\wedge^2 V^*) \oplus (V^* \wedge H^*) \oplus (\wedge^2 H^*) \end{aligned}$$

et pour leurs sections :

$$\begin{aligned} \Omega^1(P) &= \Omega_{\text{vert}}^1 \oplus \Omega_{\text{horiz}}^1 \\ \Omega^2(P) &= \Omega_{\text{vert}}^2 \oplus \Omega_{\text{mix}}^2 \oplus \Omega_{\text{horiz}}^2 \end{aligned}$$

La forme de connexion correspondante  $A$  est dans  $\Omega_{\text{vert}}^1 \otimes \mathfrak{g}$ .

Soit  $A$  une forme de connexion sur  $P$ . Si  $a \in \Omega_{\text{horiz}}^1 \otimes \mathfrak{g}$  est  $G$ -invariante pour l'action produit, alors  $A + a$  est aussi une forme de connexion sur  $P$ . Réciproquement, deux connexions quelconques sur  $P$  diffèrent par un  $a \in (\Omega_{\text{horiz}}^1 \otimes \mathfrak{g})^G$ .

Nous concluons que l'ensemble  $\mathcal{A}$  de toutes les connexions sur le  $G$ -fibré principal  $P$  est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel  $\mathfrak{a} = (\Omega_{\text{horiz}}^1 \otimes \mathfrak{g})^G$ .

## Courbure

Soient  $\pi : P \rightarrow B$  un  $G$ -fibré principal et  $A$  une forme de connexion sur  $P$ . Pour tout  $p \in P$  on a la décomposition  $T_p P = V_p \oplus H_p$ . Considérons la projection horizontale  $h : TP \rightarrow TP$  tel que  $h \circ h = h$  et  $\ker h = V$ .

**Définition 1.2.1.** La 2-forme  $F_A \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$  donnée par

$$F_A(u, v) = dA(h(u), h(v))$$

est appelée la forme de courbure de  $A$ .

Une connexion principale est dite *plate* si sa courbure est nulle.

**Proposition 1.2.1** (Équation de structure). Soit  $P$  un  $G$ -fibré muni d'une forme de connexion  $A$ . Alors la courbure vérifie

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$$

avec  $[A, A](u, v) = 2[A(u), A(v)]$ ,  $\forall u, v \in \chi(P)$ .

*Démonstration.* On va montrer que

$$dA(h(u), h(v)) = dA(u, v) + [A(u), A(v)] \quad (1.2)$$

pour tout  $u, v \in \chi(P)$

- Si  $u, v$  sont verticaux, posons  $u = X^\#$  et  $v = Y^\#$  où  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , i.e.  $A(X^\#) = X$  et  $A(Y^\#) = Y$ . il en résulte que  $F_A(u, v) = dA(h(X^\#), h(Y^\#)) = 0$  car  $h(X^\#) = 0$  et  $h(Y^\#) = 0$ , en d'autre terme on a

$$\begin{aligned} [A, A](u, v) &= [A(X^\#), A(Y^\#)] - [A(Y^\#), A(X^\#)] \\ &= 2[A(X^\#), A(Y^\#)] \\ &= 2[X, Y] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dA(X^\#, Y^\#) &= X^\#A(Y^\#) - Y^\#A(X^\#) - A([X^\#, Y^\#]) \\ &= -[X, Y] \\ &= -\frac{1}{2}[A, A](X^\#, Y^\#) \end{aligned}$$

- Si  $u, v$  sont horizontaux, i.e.  $h(u) = u$  et  $h(v) = v$  et  $A(u) = A(v) = 0$  alors

$$F_A(u, v) = dA(u, v).$$

- Si  $u$  est vertical, i.e.  $u = X^\#$  et  $v$  est horizontal alors l'équation (1.2) devient  $dA(0, v) = 0$  on a  $[A, A](X^\#, v) = 0$  car  $A(v) = 0$ .

□

## Connexion et holonomie

Soit  $\pi : P \rightarrow S$  un  $G$ -fibré principal au dessus d'une surface fermée  $S$ . Soit  $A$  une connexion principale sur  $P$ .

**Définition 1.2.2.** *Un chemin différentiable  $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$  de  $x$  vers  $y$  est dit horizontal pour  $A$  si les vecteurs tangents  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}P$  sont horizontaux, i.e.  $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .*

**Définition 1.2.3.** *Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  un chemin différentiable. Soit  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Le relèvement horizontal de  $\gamma$  est l'unique chemin horizontal  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = p$  et  $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ , pour tout  $0 \leq t \leq 1$ .*

**Définition 1.2.4** (Transport parallèle). *Le transport parallèle le long du chemin  $\gamma$  pour la connexion  $A$  est le difféomorphisme*

$$\begin{aligned} P_\gamma^A : \pi^{-1}(x) &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ p &\longmapsto \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

Où  $\tilde{\gamma}$  est la relèvement horizontal de  $\gamma$ .

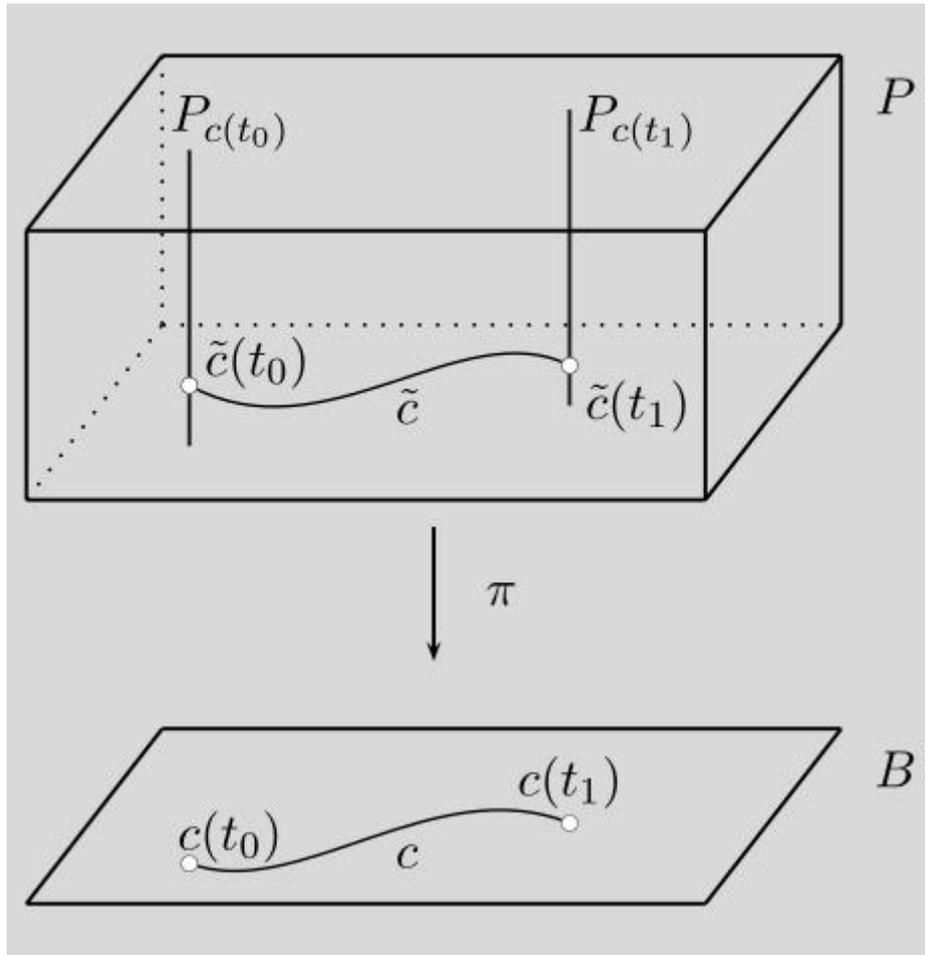


FIG. 1.3 : Relèvement horizontal.

### Holonomie

Soient  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un lacet basé en  $x$ ,  $p \in \pi^{-1}(x)$  et  $\tilde{\gamma}$  le relèvement de  $\gamma$  qui est égal à  $p$  en 0. Le point  $\tilde{\gamma}(1)$  est dans la fibre  $\pi^{-1}(x)$  car il se projette sur  $\gamma(1) = x$ , mais il n'a aucune raison de coïncider avec  $p$ . Il existe donc un unique élément  $g \in G$  vérifiant  $P_\gamma^A(p) = \tilde{\gamma}(1) = p \cdot g$ .

L'existence est assurée car les deux points  $p = \tilde{\gamma}(0)$  et  $\tilde{\gamma}(1)$  appartiennent à la même orbite; la fibre  $\pi^{-1}(x)$ . Comme l'action est libre, on a l'unicité. Cet élément est appelé l'*holonomie* et est noté  $\text{Hol}_p(A, \gamma)$ . C'est-à-dire

$$P_\gamma^A(p) = p \cdot \text{Hol}_p(A, \gamma).$$

La proposition suivante résume les propriétés importantes de l'holonomie d'une connexion  $A$  sur un  $G$ -fibré principal  $(P, \pi, B)$ , (pour une preuve, voir [?], pages).

**Proposition 1.2.2.** Soient  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow B$  deux lacets basés en  $x \in B$  et  $\delta : [0, 1] \rightarrow B$  un chemin de  $x$  à  $y \in B$ . Alors

1.  $\text{Hol}_{p \cdot g}(A, \gamma) = g^{-1} \text{Hol}_p(A, \gamma) g$ .

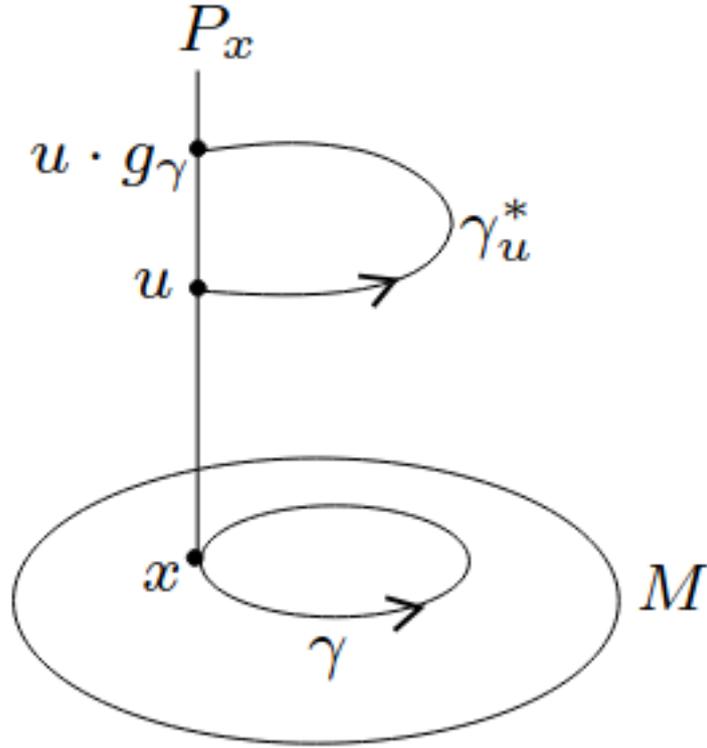


FIG. 1.4 : Holonomie.

2.  $\text{Hol}_p(A, \gamma) = \text{Hol}_q(A, \delta \star \gamma \star \delta^{-1})$ , où  $q = P_\delta^A(p)$  et  $\star$  désigne la concaténation des chemins.
3.  $\text{Hol}_p(A, \gamma \star \gamma') = \text{Hol}_p(A, \gamma')\text{Hol}_p(A, \gamma)$ .

## 1.3 Espace de modules de connexions plates

### Groupe de Jauge et son action

Pour un  $G$ -fibré principal  $P$ , le groupe d'automorphismes

$$\mathcal{G} = \{f : P \rightarrow P \text{ difféomorphisme, } \pi \circ f = \pi, \forall p \in P, \forall g \in G, f(p \cdot g) = f(p) \cdot g\}$$

est appelé le *groupe de jauge* et les éléments de  $\mathcal{G}$  sont appelés transformations de jauge.

On peut identifier les transformations de jauge avec les applications

$$F : P \rightarrow G, \text{ telles que } F(p \cdot g) = g^{-1}F(p)g,$$

c'est-à-dire des applications équivariantes par rapport à l'action conjuguée de  $G$  sur lui-même. Le groupe de jauge agit sur l'espace de connexion  $\mathcal{A}$  par

$$f \cdot A = f^* A.$$

En effet, on vérifie que pour toute connexion  $A \in \mathcal{A}$  et pour tout  $f \in \mathcal{G}$  l'image réciproque  $f^*A$  est aussi une forme de connexion. De plus, pour tout  $g \in G$  on a

$$\begin{aligned} R_g^*(f^*A) &= (f \circ R_g)^*A \\ &= (R_g \circ f)^*A \\ &= f^*(R_g^*A) \\ &= f^*(\text{Ad}_{g^{-1}} \circ A) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (f^*A) \end{aligned}$$

**Définition 1.3.1.** *On définit l'espace de modules des connexions plates par le quotient  $\mathcal{A}_p/\mathcal{G}$ .*

Nous allons voir que l'holonomie d'une connexion **plate** le long d'un lacet  $\gamma$  ne dépend que de la classe d'homotopie de ce lacet qui fixe le point  $x \in B$ . C'est-à-dire dans un  $G$ -fibré plat on peut construire un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(S) &\longrightarrow G \\ [\gamma] &\longmapsto \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1} \end{aligned}$$

où  $\pi_1(S)$  est le groupe fondamental de la surface  $S$ .

# GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE DE MODULES

## G-fibrés au dessus d'une surface fermée

Soit  $G$  un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  admet une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et Ad-invariante. Cela signifie une forme bilinéaire symétrique :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R},$$

non dégénérée et vérifie, pour tous  $X, Y \in \mathfrak{g}$  et tout  $g \in G$  :

$$\langle \text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

### Exemple 2.0.1.

1. L'algèbre de Lie du groupe linéaire avec sa forme :

$$\langle X, Y \rangle := \text{tr}(XY).$$

2. La forme de Killing d'une algèbre de Lie semi-simple (ou généralement, une algèbre de Lie réductive).

Soit  $P$  un  $G$ -fibré au dessus d'une surface compacte  $S$ . Supposons que le groupe  $G$  soit compact ou semi-simple, de sorte que son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  possède une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et Ad-invariant notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Comme  $\mathcal{A}$  est un espace affine, son espace tangent en tout point  $A$  est identifié avec son espace vectoriel associé  $\mathfrak{a}$ . Par rapport à une base  $X_1, \dots, X_k$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , les éléments  $a, b \in \mathfrak{a}$  sont de la forme

$$a = \sum a_i \otimes X_i \text{ et } b = \sum b_i \otimes X_i.$$

Si nous prenons le produit extérieur de  $a$  et  $b$ , puis en intégrant sur  $S$ , nous obtenons un nombre réel :

$$\begin{aligned} \omega : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} &\longrightarrow (\Omega_{\text{horiz}}^2(P))^G \simeq \Omega^2(S) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{i,j} a_i \wedge b_j \langle X_i, X_j \rangle \longmapsto \int_S \sum_{i,j} a_i \wedge b_j \langle X_i, X_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nous avons utilisé le fait que l'image réciproque  $\pi^* : \Omega^2(B) \rightarrow \Omega^2(P)$  est un isomorphisme sur son image  $(\Omega_{\text{horiz}}^2(P))^G$ . Si pour tout  $b \in \mathfrak{a}$ ,  $\omega(a, b) = 0$  alors  $a$  doit être nul.

La forme bilinéaire  $\omega$  est non dégénérée, antisymétrique et constante dans le sens où elle ne dépend pas du point de base  $A$ . Par conséquent, on peut qualifier  $\omega$  de forme symplectique sur l'espace affine (de dimension infinie)  $\mathcal{A}$ . Donc la paire  $(\mathcal{A}, \omega)$  est une variété symplectique de dimension infinie.

Le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  admet comme algèbre de Lie l'espace des applications différentiables de  $S$  dans  $\mathfrak{g}$ , i.e.  $\text{Lie}(\mathcal{L}) = C^\infty(S, \mathfrak{g})$ .

Pour tout  $\xi \in C^\infty(S, \mathfrak{g})$ , le champ de vecteur  $X_\xi : \mathcal{A} \rightarrow T_A\mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  défini par  $X_\xi(A) = d_A\xi$  Structure Symplectique sur  $\mathcal{A}$  L'espace des connexions  $\mathcal{A}$  est un espace affine de dimension infinie et son espace tangent est donné par  $T_A\mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ . L'espace  $\mathcal{A}$  admet une structure symplectique définie par la 2-forme  $\omega$  :

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_S \langle \alpha, \beta \rangle$$

pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $T_A\mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et le produit extérieur définissent un application bilinéaire anti-symétrique :

$$\langle \cdot \wedge \cdot \rangle : \Omega^1(S, \mathfrak{g}) \times \Omega^1(S, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(S)$$

la composition avec l'intégration  $\Omega^2(S) \rightarrow \mathbb{R}$  définit la 2-forme  $\omega$ . la 2-forme  $\omega$  est constante ( $\omega$  ne dépend pas de  $A$ ) et non dégénéré, car définie par la forme bilinéaire non dégénéré  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Lemme 2.0.1.** *L'action de  $\mathcal{G}$  sur l'espace  $\mathcal{A}$  est hamiltonienne avec l'application moment :*

$$\begin{aligned} \mu &:= \mathcal{A} \rightarrow \text{Lie}(\mathcal{F})^* \\ A &\mapsto -F_A \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $\text{Lie}(\mathcal{L})^* = \Omega^2(S, \mathfrak{g})$

*Démonstration.* Considérons la fonction  $\mu_\xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mu_\xi(A) = - \int_S \langle F_A \wedge \xi \rangle$  avec  $\xi \in \Omega^0(S, \mathfrak{g})$ .

On va montrer la condition

$$d_A\mu_\xi(\beta) = \omega(X_\xi(A), \beta).$$

avec  $\beta \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  On a :

$$\begin{aligned} d_A\mu(\beta) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu(A + t\beta) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (-F_A - td_A)\beta \\ &= -d_A\beta \end{aligned}$$

On obtient que  $d_A\mu_\xi(\beta) = - \int_S \langle d_A\beta \wedge \xi \rangle$  comme  $d\langle \beta \wedge \xi \rangle = \langle d_A\beta \wedge \xi \rangle - \langle \beta \wedge d_A\xi \rangle$ .

$$\int_S d\langle \beta \wedge \xi \rangle = \int_S \langle d_A\beta \wedge \xi \rangle - \int_S \langle \beta \wedge d_A\xi \rangle.$$

Par la théorème de Stokes et que  $S$  est un surface sans bord, il résulte que :

$$0 = \int_S d\langle \beta \wedge \xi \rangle = \int_S \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle - \int_S \langle \beta \wedge d_A \xi \rangle.$$

et

$$\int_S \langle d_A \beta \wedge \xi \rangle = \int_S \langle \beta \wedge d_A \xi \rangle.$$

Alors

$$d_A \mu_\xi(\beta) = \int_S \langle d_A \xi \wedge \beta \rangle = \omega(X_\xi(A), \beta).$$

□

Par la théorème de Marsden-Weinstein, le quotient  $\mu^{-1}(0)/\mathfrak{g} = \text{Hom}(\pi, G)/G$  possède une structure symplectique naturelle.

## 2.1 Théorème d'isomorphisme

Avant d'énoncer et de revoir la démonstration du théorème d'isomorphisme, on a besoin de la proposition importante suivante :

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $(P, \pi, B)$  un  $G$ -fibré principal muni d'une connexion plate. Alors, l'holonomie d'un lacet ne dépend que la classe d'homotopie de ce lacet.*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que si un lacet basé en un point donné  $x \in B$  est homotope au lacet constant, alors l'holonomie est triviale. Alors si  $B$  est connexe (donc connexe par arcs), l'holonomie peut définir un homomorphisme

$$\rho : \pi_1(B) \rightarrow G.$$

$p_0 \in B$  comme point de référence et choisissez un point  $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ . Soit  $L_{u_0}$  la variété intégrale maximale de  $H$  à  $u_0$ . On note la restriction de  $\pi$  à  $L_{u_0}$  par  $\pi_0$ . Pour tout point de  $L_{u_0}$ ,  $\pi_0$  est un difféomorphisme sur un certain voisinage. En effet,

$$D\pi_0 : H_u \rightarrow T_{\pi(u)}B \text{ est un isomorphisme, pour tout } u \in L_{u_0}.$$

$\pi_0$  est donc un difféomorphisme local (d'après le théorème d'inversion locale). Comme, de plus, les fibres et  $L_{u_0}$  sont d'intersections transverses alors  $\pi_0$  est un revêtement. Ainsi, pour tout lacet  $\alpha$  dans  $B$  basé en  $p_0$ , il existe un relèvement unique  $\alpha$  commençant à  $u_0$  et se trouvant dans la variété intégrale  $L_{u_0}$ . Le point final de  $\alpha$  se trouve dans la même fibre  $\pi^{-1}(p_0)$  que  $u_0$ . Il existe donc un unique élément  $g \in G$  tel que le point final de  $\alpha$  soit de la forme  $u_0 g$ . Par les propriétés générales de relèvements des lacets en théorie de revêtement (voir [4]), on déduit que le point final de  $\alpha$  ne varie pas si on déforme

continuellement  $\alpha$  tout en fixant  $p_0$ . Donc l'élément  $g$  ci-dessus ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\alpha$  (noté aussi  $\alpha$ , pour simplifier). Ainsi, en notant  $\rho(\gamma) = g^{-1}$  nous pouvons définir une application

$$\rho : \pi_1(B) \mapsto G.$$

Pour plus de détail, voir [5]. □

On peut maintenant montrer le théorème important suivant :

**Théorème d'isomorphisme**

Il y a une bijection entre l'espace de modules des connexions plates et l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  modulo la conjugaison :

$$\mathcal{A}_p/\mathcal{G} \simeq \text{Hom}(\pi_1(S), G)/G.$$

*Démonstration.* Fixons  $x \in S$  et  $p \in \pi^{-1}(x)$ . On considère l'application

$$\Phi : \mathcal{A}_p/\mathcal{G} \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(S), G)/G$$

définie par  $\Phi([P, A]) = [\rho]$ , où

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(S) &\longrightarrow G \\ [\gamma] &\longmapsto \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Cette application est indépendante du choix de  $x$  et de  $p$  et elle est bien définie, puisque l'holonomie de  $A$  ne dépend que de la classe d'homotopie d'un lacet  $\gamma$  basé en  $x$ .

**Injectivité.** Soient  $(P, A)$  et  $(Q, B)$  deux  $G$ -fibrés plats au dessus  $S$ . On suppose que  $\Phi([P, A])$  est égal à  $\Phi([Q, B])$ . On va montrer qu'il existe une transformation de jauge entre les deux fibrés plats, c'est-à-dire,  $[P, A] = [Q, B]$ .

Fixons  $p \in P$  et  $q \in Q$ . Par hypothèse, il existe  $g \in G$  tel que

$$\text{Hol}_p(A, \gamma) = g\text{Hol}_q(B, \gamma)g^{-1}.$$

Posons  $q = p \cdot g$ . On peut supposer  $\text{Hol}_p(A, \gamma) = \text{Hol}_q(A, \gamma)$ . On va construire une transformation de jauge  $f : P \rightarrow Q$ . Soient  $y \in S$  et  $\delta$  un chemin de  $x$  à  $y$ ,  $\delta_A$  son relèvement horizontal dans  $P$  et  $\delta_B$  son relèvement horizontal dans  $Q$ . L'idée est d'arriver à

$$f(\delta_A(1)) = \delta_B(1).$$

C'est l'unique possibilité pour  $f(\delta_A(1))$ , puisque la courbe  $f \circ \delta_A$  doit être horizontal suivant  $B$ . On doit avoir donc  $f \circ \delta_A = \delta_B$ . Ceci détermine complètement  $f$  sur toute la fibre au dessus de  $y$  (comme

morphisme de fibrés) et ceci indépendamment de la courbe  $\delta$ . En effet, si  $\gamma$  est un chemin de  $x$  à  $y$ . Les relèvements de  $\gamma$  suivant les connexions  $A$  et  $B$  sont notés respectivement  $\gamma_A$  et  $\gamma_B$ . On doit montrer que l'application  $f$  construite à partir de  $\delta$ , vérifie  $f(\gamma_A(1)) = \gamma_B(1)$ . Ceci provient du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 f(\gamma(1)) &= f(\delta_A(1) \cdot \text{Hol}_{\delta_A(1)}(A, \delta^{-1} \star \gamma)) \\
 &= f(\delta_A(1)) \cdot \text{Hol}_{\delta_A(1)}(A, \delta^{-1} \star \gamma) \\
 &= \delta_B(1) \cdot \text{Hol}_p(A, \gamma \star \delta^{-1}) \\
 &= \delta_B(1) \cdot \text{Hol}_q(B, \gamma \star \delta^{-1}) \\
 &= \delta_B(1) \cdot \text{Hol}_{\delta_B(1)}(B, \delta^{-1} \star \gamma) \\
 &= \gamma_B(1).
 \end{aligned}$$

Cela montre que nous pouvons définir  $f$  en utilisant la procédure ci-dessus sans se soucier sur quelle courbe choisir pour tout  $y \in B$ . En travaillant en coordonnées locales, on peut vérifier que  $f$  est différentiable et comme elle  $G$ -équivariante par construction, c'est alors un isomorphisme de fibrés principaux. Par construction, la différentielle de  $f$  envoie les vecteurs horizontaux en vecteurs horizontaux. On conclue que  $f$  est une transformation de jauge. Nous avons ainsi montré qu'un fibré principal plat est essentiellement déterminé par son holonomie.

**Surjectivité.** Pour la surjectivité, soit  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow G$ . On va construire un  $G$ -fibré  $P$  au dessus  $S$  tel que

$$\rho([\gamma]) = \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}$$

pour toute lacet  $\gamma$  dans  $S$  de point de base  $\pi(p)$  et  $A$  une connexion plate.

Soit  $\tilde{S}$  le revêtement universel de  $S$  avec la projection  $\tau : \tilde{S} \rightarrow S$ , fixons  $y \in \tilde{S}$ .

Rappelons que le groupe fondamental  $\pi_1(S)$  agit sur  $\tilde{S}$  par monodromie (c'est une action libre et propre) et sur  $G$  via la représentation  $\rho$ . Plus précisément, l'action sur le produit  $\tilde{S} \times G$  est définie par :

$$[\gamma] \cdot (y, g) = ([\gamma] \cdot y, \rho([\gamma])g).$$

Le quotient  $P = \tilde{S} \times G / \pi_1(S)$  est une variété différentielle (l'action de  $\pi_1(S)$  étant libre et propre) avec le submersion  $\tilde{S} \times G \rightarrow P$ . En fait,  $P$  est un  $G$ -fibré principal au dessus de  $S$ , pour la projection  $[(x, g)] \mapsto \tau(x)$  (qui est bien définie), et l'action de  $G$  sur  $P$  est donné par

$$[(x, g)] \cdot h = [(x, gh)]$$

qui est également bien défini et libre.

On montre alors que ce  $G$ -fibré possède une connexion plate  $A$  pour laquelle la représentation  $\rho$  est donnée par

$$\rho([\gamma]) = \text{Hol}_p(A, \gamma)^{-1}.$$

Voir [7], page 54, pour la construction de cette connexion. □

---

# Bibliographie

---

- [1] M. Atiyah & R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, 523-615, 1982.
- [2] W. Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. in Math. Vol 54, 200-225, 1984.
- [3] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Wiley Classics Library. Vol. 1, 1963.
- [4] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, 2011.
- [5] S. Morita, *The Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, 2001.
- [6] D. McDuff & D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 2017.
- [7] D. Michiels, *Moduli Spaces of Flat Connections*, Mémoire de Master, KU Leuven, 2013.
- [8] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 2016.

## Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'espace de modules des connexions plates de  $G$ -fibrés principaux au dessus d'une surface fermée et son isomorphisme avec le quotient de l'espace de représentations du groupe fondamental de la surface à valeur dans  $G$  (modulo l'action par conjugaison du groupe). La preuve de ce théorème nécessite une étude fine de la théorie des fibrés principaux et des notions connexes.

**Mots clefs :**  $G$ -fibrés, connexions, holonomie, groupe de jauge, espace de modules.

---

## Abstract

The object of this thesis is the study of the moduli space of flat connections of principal  $G$ -bundles over a closed surface and its isomorphism with the quotient of the representation space of the fundamental group of the surface with value in  $G$  (modulo the action by conjugation of the group). The proof of this theorem requires a detailed study of the theory of principal bundles and related notions.

**Keywords :**  $G$ -bundles, connections, holonomy, gauge group, moduli spaces