

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Kasdi Merbah Ouargla

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Étude d'un modèle de files d'attente $M/M/c$ avec vacances et clients impatientes

Présenté par: | Sekher Abla

Soutenu le : 18/06/2022 devant le jury composé par :

Meflah Mabrok,	Pr,	U. KASDI Merbah (Ouargla),	President
Bouchentouf Amina Angelika,	Pr,	U. Djillali Liabès (Sidi bel Abbès),	Encadreur
Ramdani Hayat,	PhD,	U. KASDI Merbah (Ouargla),	Co-Encadreur
Mansoul Ibrahim,	MC,	U. KASDI Merbah (Ouargla),	Examineur

Année universitaire : 2021/2022



Remerciements



Je dédie ce travail à ma chère mère et à mon cher père, qui n'ont cessé de me soutenir et de m'encourager durant mes années d'études. Je remercie mon cher mari. Puissent-ils trouver ici un témoignage de ma profonde gratitude et de ma reconnaissance envers mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent amour et vitalité. A tous ceux qui m'ont aidé-de près ou de loin-et ceux qui ont partagé avec moi des moments d'émotion lors de la réalisation de cette œuvre et qui m'ont soutenu et encouragé de tout cœur tout au long de mon parcours. A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès. Et à mon superviseur qui m'a aidé à terminer ce travail. Merci !.



❖ *Abla*



Table des matières

Introduction	5
1 Introduction à la théorie des files d'attente	7
1.1 Introduction	7
1.2 Structure de base d'un système de files d'attente	7
1.3 Notation de Kendall	8
1.4 Paramètres de performance d'un système d'attente	9
1.5 Files d'attente markoviennes	10
1.5.1 Modèle $M/M/1$	10
1.6 Modèle $M/M/1/K$	12
1.6.1 La file d'attente $M/M/c$	14
2 Etude d'un modèle de files d'attente $M/M/c$ avec vacances et clients impatients.	17
2.1 Introduction	17
2.2 Formulation mathématique du modèle	18
2.3 Analyse du modèle I : Système d'attente avec vacance simple : $M/M/c/SV$	19
2.3.1 Analyse stationnaire	19
2.3.2 Mesures de performance	22
2.4 Analyse du modèle de type II : $M/M/c/MV$	24
2.4.1 Analyse stationnaire	24
2.4.2 Mesures de performance	27
3 Analyse économique du modèle de files d'attente $M/M/c/MV$	29
3.1 Modèle de coût	29
3.2 Analyse numérique	30
Bibliographie	40

Table des figures

1.1	Structure d'un système de files d'attente	8
2.1	Diagramme de transition d'état pour le modèle I	19
2.2	Diagramme de transition pour le modèle II	24
3.1	Courbes de variation du profit total attendu vs. λ	31
3.3	N_s vs. λ	31
3.2	$E(L)$ vs. λ	32
3.4	Courbes de variation du profit total attendu par rapport à μ	33
3.5	$E(L)$ vs. μ	34
3.6	N_s vs. μ	34
3.7	Total expected profit variation curves vs. ξ_1	35
3.8	P_{ser} vs. ξ_1	36
3.9	P_{vac} vs. ξ_1	36
3.10	Courbes de variation du profit total attendu vs. σ	37
3.11	$E(L)$ vs. σ	38
3.12	N_s vs. σ	38

Liste des tableaux

3.1	Coût-revenu-profit vs. λ et β	31
3.2	Coût-revenu-profit vs. μ et ϕ	33
3.3	Total cost variation vs. ξ_1 et c	35
3.4	Coût-revenu-profit vs. σ et ϕ	37

Introduction

La théorie des files d'attente est une branche des mathématiques, généralement concernée par la modélisation mathématique et l'analyse des systèmes qui traitent des demandes aléatoires. Le but ultime de l'analyse des systèmes de files d'attente est de comprendre le comportement de leurs processus sous-jacents afin que des décisions claires puissent être prises pour les gérer. Ensuite, l'analyse mathématique des modèles donne des formules qui présentent probablement les paramètres physiques et stochastiques de certaines mesures de performance, telles que l'utilisation du serveur, le débit, le temps d'attente moyen, le nombre moyen de clients dans la file d'attente et/ou dans le système, périodes d'occupation et de vacances du serveur, etc. L'art de la théorie appliquée des files d'attente consiste à construire un modèle suffisamment simple, permettant une analyse mathématique, mais contenant suffisamment de détails pour que ses mesures de performance reflètent le comportement réel du système. Les modèles de files d'attente sont largement utilisés dans divers domaines tels que l'informatique, l'ingénierie industrielle, les services d'urgence, les télécommunications, la finance, la logistique militaire et plusieurs autres domaines impliquant des systèmes de service dont les demandes sont aléatoires.

Les systèmes d'attente avec vacances du serveur et impatience des clients sont considérés comme des outils très appropriés pour analyser divers systèmes de services complexes et des industries importantes. Dans la littérature, les études sur le comportement des clients ont toujours été basées sur l'hypothèse que l'impatience du client ne se produit que lorsque le serveur est en vacance. C'est le cas où les clients peuvent voir l'état du serveur. Cependant, dans de nombreuses situations réelles, y compris les centres d'appels et les systèmes de production, il peut ne pas être possible d'obtenir des informations sur l'état du serveur. De plus, une longue attente dans la file d'attente est un autre facteur qui entraîne l'impatience des clients quel que soit l'état du système (actif ou en vacance). Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'un système de files d'attente multi-serveurs avec Bernoulli feedback, vacances simples et multiples, dérobade, abandon des clients dépendant des états des serveurs, et rétention des

clients abandonnés.

Le mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons une introduction à la théorie des files d'attente. Dans le deuxième chapitre, nous analysons le système d'attente $M/M/c/SV + MV$. Le troisième chapitre est consacré à l'étude économique du système $M/M/c/MV$.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES FILES D'ATTENTE

1.1 Introduction

La théorie des files d'attente est un outil analytique très puissant pour la modélisation de la dynamique des systèmes logistiques et de communications. Le but de cette théorie est d'étudier différents modèles d'attente et évaluer les résultats mathématiques en termes de différentes mesures de performance.

Les files d'attente sont des phénomènes que l'on rencontre dans différentes situations telles que les banques, les aéroports, les bureaux de poste, les centres d'appels, les services d'urgence des hôpitaux, les systèmes de communication et de télécommunication, les réseaux informatiques, les systèmes de fabrication flexibles, la modélisation des performances, etc. La modélisation mathématique des files d'attente est un outil de la logistique. Elle relève du calcul des probabilités : les arrivés et les départs des clients de la file sont analysés comme un processus stochastique typique ; un processus de naissance et de mort. L'objectif de la modélisation est la recherche des solutions optimales de gestion des files d'attente, telles que la recherche d'une gestion de priorité (ou discipline) donnant un temps d'attente moyen minimum, en fonction de la loi de probabilité des arrivées et de la loi donnant le temps de traitement. L'analyse des systèmes de files d'attente s'appuie généralement sur les outils de la théorie des chaînes de Markov en temps continu et à temps discret.

Dans ce chapitre, nous fournissons un vocabulaire fondamental et les résultats de différents systèmes de files d'attente classique.

1.2 Structure de base d'un système de files d'attente

Un système d'attente est caractérisé par un espace d'attente (fini ou infini) et un espace de service composé d'un ou plusieurs serveurs. Les clients arrivent de l'extérieur à des instants aléatoires, ils attendent que l'un des serveurs soit libre afin d'être servi puis quittent le système

(Voir la figure 1.1).

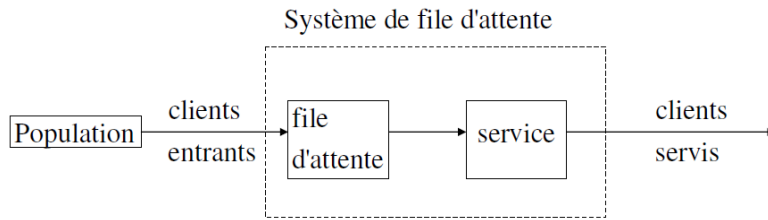


FIGURE 1.1 – Structure d'un système de files d'attente

1.3 Notation de Kendall

En théorie des files d'attente, la notation de Kendall nous permet de décrire un système à l'aide de six paramètres. Elle porte le nom du mathématicien David George Kendall, qui l'a introduite en 1953. La notation de Kendall est définie comme suit :

$$T/Y/C/K/m/Z$$

avec

- T : indique le processus d'arrivée des clients. Les codes utilisés sont :
 - M (Markov) : Interarrivées des clients sont indépendamment, identiquement distribuées selon une loi exponentielle. Il correspond à un processus de Poisson ponctuel (propriété sans mémoire).
 - D (Répartition déterministe) : les temps des interarrivées des clients ou les temps de service sont constants et toujours les même.
 - GI (général indépendant) : Interarrivées des clients ont une distribution générale (il n'y a aucune hypothèse sur la distribution mais les interarrivées sont indépendantes et identiquement distribuées).
 - G (général) : Interarrivées des clients ont une distribution générale et peuvent être dépendantes.
 - E_k : Ce symbole désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'Erlang d'ordre k.
- Y : décrit la distribution des temps de service d'un client. les codes sont les mêmes que T.

- C : nombre de serveurs
- K : capacité de la file (c'est le nombre de places dans le système en d'autre terme c'est le nombre maximal de clients permis dans le système y compris ceux en service).
- m : population des usagers
- Z : discipline de service (c'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi).

Les codes utilisés sont les suivants :

1. FIFO (First In, First Out) ou FCFS (First Come First Served) : les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que dans la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui.
2. LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served) : le dernier client arrivé sera le premier traité. Les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur.
3. SIRO (Served In Random Order), les clients sont servis aléatoirement.
4. PNP (Priority service), les clients sont servis par priorité. Tous les clients de la plus haute priorité sont servis en premier lieu.
5. PS (Processor Sharing), les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagé entre les clients

1.4 Paramètres de performance d'un système d'attente

Les paramètres de performance les plus importants dans une file d'attente sont :

1. Le processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ qui représente le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant t , incluant à la fois ceux qui sont servis et ceux qui attendent d'être servis.
2. les probabilités d'état $P_n(t) = P(X_t = n)$ qui définissent le régime transitoire du processus $(X_t)_{t \geq 0}$;
3. le régime stationnaire du processus, défini par

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = n).$$

La distribution stationnaire du processus $(X_t)_{t \geq 0}$, permet de calculer d'autres paramètres de performances du système telles que :

- le nombre moyen de clients dans le système d'attente ;
- le nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- la durée d'attente moyenne d'un client ;
- la durée de séjour moyenne dans le système (attente + service) ;
- le taux d'occupation des postes de service ;
- le pourcentage de clients n'ayant pu être servis ;
- la durée d'une période d'activité ; l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système...

1.5 Files d'attente markoviennes

Les modèles markoviennes sont caractérisés par des interarrivées ainsi que les durées de service exponentielles. Leur notation de Kendall est de la forme $M/M/...$. Dans ce qui suit nous présentons quelques modèles de files d'attente markoviennes, à savoir, La file d'attente $M/M/1$, $M/M/1/K$, et $M/M/c$.

1.5.1 Modèle $M/M/1$

La file d'attente $M/M/1$ se caractérise par :

- Les clients se présentent au système aléatoirement selon un processus de Poisson de taux λ .
- Le temps de service suit une loi exponentielle de taux μ .
- La file d'attente peut s'étendre à l'infini.

Remarque 1.5.1 *Le processus de Poisson d'intensité λ (réel strictement positif) est un processus de comptage d'occurrences qui vérifie les conditions suivantes :*

- *Le nombre $A(t)$ d'arrivées dans l'intervalle de temps $[0;t]$ suit une loi de Poisson de paramètre λt .*
- *Les arrivées dans deux intervalles de temps disjoints sont indépendantes.*
- *Le temps qui s'écoule entre deux arrivées suit une loi exponentielle de taux μ .*

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t . En raison de la distribution exponentielle des temps interarrivée et des temps de service, le processus $(X(t); t \geq 0)$ est un processus de Markov. Soit $P_i, i \geq 0$, la fonction de distribution du nombre de clients dans le

système à l'état d'équilibre.

Les équations d'équilibre pour ce processus sont :

$$\begin{aligned}\lambda P_0 &= \mu P_1, \\ (\lambda + \mu)P_n &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \quad \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

Soit

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{1.1}$$

l'intensité du trafic.

Les probabilités d'état pour un régime stationnaire du processus est donnée par :

$$\begin{cases} P_n = P_0 \rho^n, \\ P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n} = 1 - \rho. \end{cases}$$

D'où

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \quad \forall n \geq 0.$$

Quelques mesure de performance

Tous les paramètres de performance sont sonnées ssi la file d'attente est stable ($\rho < 1$).

Le débit d :

le débit du système est la probabilité que la file ne soit pas vide :

$$d = \mathbb{P}(\text{file non vide})\mu = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \mu = [1 - P_0]\mu = \lambda.$$

Le taux d'utilisation du serveur U :

Le taux d'utilisation du serveur est la probabilité que le serveur de la file soit occupé :

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = 1 - P_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Le nombre moyen de clients $E(L)$:

$$\begin{aligned}E(L) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n P_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n (1 - \rho) \rho^n \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho}.\end{aligned}$$

Le temps moyen de séjour W :

Le temps moyen de séjour W se calcule en utilisant la loi de Little :

$$W = \frac{E(L)}{d} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

qui peut se décomposer en :

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

On en déduit le temps moyen passé dans la file d'attente W_q :

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Le nombre moyen de clients dans la file d'attente $E(L_q)$:

$$E(L_q) = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

1.6 Modèle $M/M/1/K$

Pour un système de capacité K (taille maximale de la file de $K - 1$) avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1$, on peut montrer que pour $n = 0, 1, \dots, K$:

— Si $\rho < 1$:

$$P_n = P(Y = n + 1 \mid Y \leq K + 1) = \frac{P(Y = n + 1)}{P(Y \leq K + 1)} = \frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}},$$

avec $Y \sim \text{Geom}(1-\rho)$.

— Si $\rho > 1$:

$$\begin{aligned} P_n &= P(Y = K - n + 1 \mid Y \leq K + 1) = \frac{P(Y = K - n + 1)}{P(Y \leq K + 1)} \\ &= \frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \text{ avec } Y \sim \text{Geom}(1-1/\rho). \end{aligned}$$

— L'équilibre est atteint pour tout ρ :

— Si $\rho \neq 1$, $P_n = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$.

— Si $\rho = 1$, on considère des états équiprobables : $P_n = \frac{1}{K+1}$ pour $n = 0, 1, \dots, K$.

— Le système est à pleine capacité avec probabilité P_K .

— Taux d'entrée : $\lambda_e = \lambda(1 - P_K)$.

Quelques mesures de performances**Le débit :**

On peut calculer le débit du système de deux manières équivalentes : soit par le calcul du taux de départ des clients en sortie du serveur, d_s , soit par le calcul du taux d'arrivée effectif des clients acceptés dans le système d_e .

La première manière

Le débit en sortie du système est égal à μ (le débit du sortie du service) donc :

$$d_s = P(\text{[file non vide]})\mu = \sum_{n=1}^K P_n \mu = (1 - P_0)\mu = \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} \mu.$$

La deuxième manière

Le débit d'entrée dans la file est égal au taux d'arrivée à la station λ :

$$\begin{aligned} d_e &= P(\text{[file non pleine aux instants d'arrivée]})\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} P_n \lambda = (1 - P_K)\lambda = \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}} \lambda. \end{aligned}$$

Comme $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ donc $d_e = d_s = d$.

Le taux d'utilisation du serveur $U(K)$:

$$\begin{aligned} U(K) &= \sum_{n=1}^K P_n = 1 - P_0 \\ &= \rho \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}} \end{aligned}$$

Remarque 1.6.1

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} U(K) = \begin{cases} \rho & \text{pour } \rho < 1 \\ 1 & \text{pour } \rho > 1 \end{cases}$$

représente le taux d'utilisation du serveur Dans le cas de la file $M/M/1$

Le nombre moyen de clients $E(L)$:

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{n=0}^K n P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \sum_{n=0}^K n \rho^n \\ &= \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{K+1}} \sum_{n=1}^K n \rho^{n-1} \\ &= \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{K+1}} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}. \end{aligned}$$

Lorsque $K \rightarrow +\infty$ on obtient

$$E(L) = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

qui représente le nombre moyen de clients pour la file $M/M/1$

Le temps moyen de séjour W :

$$W = \frac{L}{d}.$$

1.6.1 La file d'attente $M/M/c$

On considère un système identique à la file $M/M/1$ excepté qu'il comporte c serveurs identiques et indépendants les uns des autres. On conserve les hypothèses : le processus d'arrivée des clients poissonien de taux λ et temps de service exponentiel de taux μ (pour chacun des serveurs). Ce système est connu sous le nom de file $M/M/c$. On a un processus de naissance et de mort de taux :

$$\lambda_n = \lambda,$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ n\mu, & \text{si } 0 < n < c \\ c\mu, & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

En effet, lorsque le processus est dans un état $n < c$, tous les clients sont en service et sont donc susceptibles de quitter la file. Pour passer de n clients à $n - 1$ clients en un temps dt , il faut qu'un des n clients termine son service et que les autres ne terminent pas le leur, ceci pouvant se produire pour le premier, le deuxième, ..., ou le n -ième client. Pour être précis, il faut également rajouter qu'aucun client n'arrive pendant ce temps dt . La propriété caractéristique de la loi exponentielle nous dit que la probabilité pour qu'un client termine son service en un temps dt est $\mu dt + o(dt)$, la probabilité pour qu'un client ne termine pas son service est donc $1 - \mu dt + o(dt)$ et la probabilité pour qu'aucun client n'arrive est $1 - \lambda dt + o(dt)$. La probabilité recherchée se calcule donc de la façon suivante :

$$p_{n,n-1}(dt) = \left(\sum_{j=1}^n (\mu dt + o(dt)) (1 - \mu dt + o(dt))^{n-1} \right) (1 - \lambda dt + o(dt)).$$

Un développement limité au premier ordre nous donne :

$$p_{n,n-1}(dt) = n\mu dt + o(dt).$$

Le taux de transition de l'état n vers l'état $n - 1$ est donc égal à $n\mu$. De la même façon, lorsque $n \geq c$, seuls c clients sont en service et sont donc susceptibles de quitter la file, donc de faire passer le processus de l'état n à l'état $n - 1$. Le taux de transition correspondant est donc égal à $c\mu$. Dans tous les cas, une transition d'un état n vers un état $n + 1$ correspond à une arrivée

de client, soit en un temps dt , à une probabilité $\lambda dt + o(dt)$. Le taux de transition est donc égal à λ .

La condition de stabilité est ici $\lambda < c\mu$ et exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps doit être inférieur au nombre moyen de clients que les serveurs de la file sont capables de traiter par unité de temps. On peut calculer P_n comme suit : On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de P_0 :

$$\begin{cases} P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0; & \text{pour } n = 1, \dots, c-1 \\ P_n = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0, & \text{pour } n = c, c+1, \dots \end{cases}$$

La condition de normalisation nous permet de calculer la probabilité P_0 , à condition bien sûr que cette série converge. On peut aisément vérifier que la condition de convergence de cette série est identique à la condition de stabilité de la file, soit $\lambda < c\mu$.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}}$$

Lorsque $c = 1$, on retrouve bien les résultats de la file $M/M/1$:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n.$$

Tous les paramètres de performances peuvent se calculer dans le cas où la file est stable ($\lambda < c\mu$) donc $\rho < c$). Le service s'effectue avec un taux $n\mu$ dans chaque état où le système contient moins de c clients et avec un taux $c\mu$ dans chaque état où le système contient plus de c clients :

$$d = \sum_{n=1}^{c-1} P_n n\mu + \sum_{n=c}^{+\infty} P_n c\mu.$$

En remplaçant les expressions obtenues pour les probabilités P_n et P_0 , on retrouve bien que la file est stable, le débit moyen de sortie est égal au débit moyen d'entrée :

$$d = \lambda.$$

Pour la file $M/M/c$, il est plus simple (au niveau des calculs mis en jeu) de calculer d'abord le temps moyen de séjour et d'en déduire le nombre moyen de clients.

Quelques mesures de performamnce**Le temps moyen de séjour W :**

Le temps moyen de séjour d'un client se décompose en un temps moyen dans la file d'attente, plus un temps moyen de service. Il suffit alors d'appliquer la loi de Little à la seule file :

$$W = W_q + S = \frac{E(L_q)}{d} + \frac{1}{\mu} = \frac{E(L_q)}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

Il reste à trouver le nombre moyen de clients en attente dans la file, $E(L_q)$:

$$\begin{aligned} E(L)_q &= \sum_{n=c}^{+\infty} (n-c) P_n = \sum_{n=c}^{+\infty} (n-c) \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0 = \frac{\rho^{c+1}}{c!c} \sum_{n=c}^{+\infty} (n-c) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c-1} P_0 \\ &= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)^2} P_0 = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0. \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du temps moyen de séjour

$$W = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}.$$

Le nombre moyen de clients $E(L)$:

Le nombre moyen de clients s'obtient alors par application de la loi de Little :

$$E(L) = W \times d = W \times \lambda = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 + \rho.$$

ETUDE D'UN MODÈLE DE FILES D'ATTENTE

$M/M/c$ AVEC VACANCES ET CLIENTS

IMPATIENTS.

2.1 Introduction

Les modèles de files d'attente avec vacances du serveur ont trouvé une large applicabilité dans de nombreux systèmes à temps réel (réseau informatique et système de communication,...). Depuis les trois dernières décennies, les systèmes d'attente multi-serveurs avec vacances ont été bien étudiés (Zhang et Tian [30, 31], Tian et Zhang [26], Gharbi et Ioualalen [16]).

Les files d'attente avec vacances et clients impatients ont joué un rôle important dans les situations de congestion quotidienne et industrielle des systèmes informatiques. Un grand nombre de travaux de recherche traitaient ce genre de modèles. Nous citons par exemple, Arumuganthan et Jeyakumar [9], Zhang et al. [32], Altman et Yechiali [3], Padmavathy et al. [21], Antonis et al. [8], Selvaraju et Goswami [23], Yue et al. [28], Goswami [17], Ammar [6, 7], Panda et Goswami [22], Sun et al. [24].

Les systèmes de files d'attente avec vacances du serveur et impatience dépendant de l'état du serveur ont été présenté dans Yue et al. [29], Bouchentouf et Guendouzi [11, 12, 13], Bouchentouf, Guendouzi et Kandouci [14], Bouchentouf, Cherfaoui et Boualem [10]).

Dans ce chapitre, Nous analysons un modèle de files d'attente avec plusieurs serveurs, Bernoulli feedback, vacances simples et multiples ($M/M/c/SV$ et $M/M/c/MV$), dérobage, abandon des clients dépendant des états des serveurs, et rétention des clients abandonnés. Ce système était présenté par Kadi et al. [13]. Nous obtenons les solutions stationnaires pour le système considéré en utilisant la fonction génératrice des probabilités (PGFs). Ensuite, nous dérivons différentes mesures de performances du système. De plus, nous présentons l'analyse économique du modèle $M/M/c/MV$. En outre, certains résultats numériques sontt présentés afin de montrer l'impact de différents paramètres du système sur les mesures de performance du modèle présenté.

2.2 Formulation mathématique du modèle

Nous considérons un système de files d'attente $M/M/c/\infty$.

- Les clients arrivent au système selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée λ .
- Le temps de service est supposé être distribué de manière exponentielle avec un taux μ .
La discipline de service est FCFS.
- Les c serveurs prennent des vacances synchrones une fois que le système devient vide, et ils reviennent également au système comme une seule station en même temps.
- Pour ce modèle, nous considérons deux types de vacances :

I. Vacances simple (SV) : Lorsque le système est vide les serveurs sortent en vacances. S'ils reviennent du vacances et trouvent le système vide, ils restent inactifs jusqu'à ce que le premier client arrive.

II. Vacances multiple (MV) : si les serveurs reviennent du vacances trouvant la file d'attente vide, ils partent immédiatement tous ensemble pour de nouvelles vacances.

- Pour les deux modèles, la durée des vacances est distribuée exponentiellement avec une moyenne $1/\phi$.
- Chaque fois qu'un client arrive au système et trouve les serveurs en vacances (resp. occupés), il active un minuteur d'impatience T_0 (resp. T_1) qui est exponentiellement distribué avec le paramètre ξ_0 (resp. ξ_1). Si le service du client n'est pas terminé avant l'expiration de la minuterie du client, le client peut abandonner la file d'attente. Nous supposons que les temps d'impatience sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes du nombre de clients en attente.
- Les clients peuvent quitter le système sans obtenir de service avec la probabilité σ et peuvent être retenus dans la file d'attente, via une certaine stratégie, avec la probabilité $\bar{\sigma} = (1 - \sigma)$.
- Un client qui à son arrivée trouve au moins un client (resp. c clients) dans le système, alors que les serveurs sont en période de vacances (resp. période d'occupation) décide soit d'entrer dans le système avec probabilité θ soit de dérober avec probabilité $\bar{\theta} = 1 - \theta$.
- Après l'achèvement de chaque service, le client peut soit quitter le système avec probabilité β , soit revenir au système et rejoindre la fin de la file d'attente avec probabilité β' , où $\beta + \beta' = 1$.
- Les temps entre les arrivées, les périodes de vacances, les temps de service et les temps d'impatience sont mutuellement indépendants.

Soit $L(t)$ le nombre de clients du système à l'instant t , et $J(t)$ représente l'état du serveur à l'instant t , tel que

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{tous les serveurs sont en vacance} \\ 1, & \text{les serveurs sont occupés.} \end{cases}$$

2.3 Analyse du modèle I : Système d'attente avec vacance simple : M/M/c/SV

Dans cette partie, nous analysons le modèle de files d'attente $M/M/c/SV$, le diagramme de transition est présenté dans la figure 2.1.

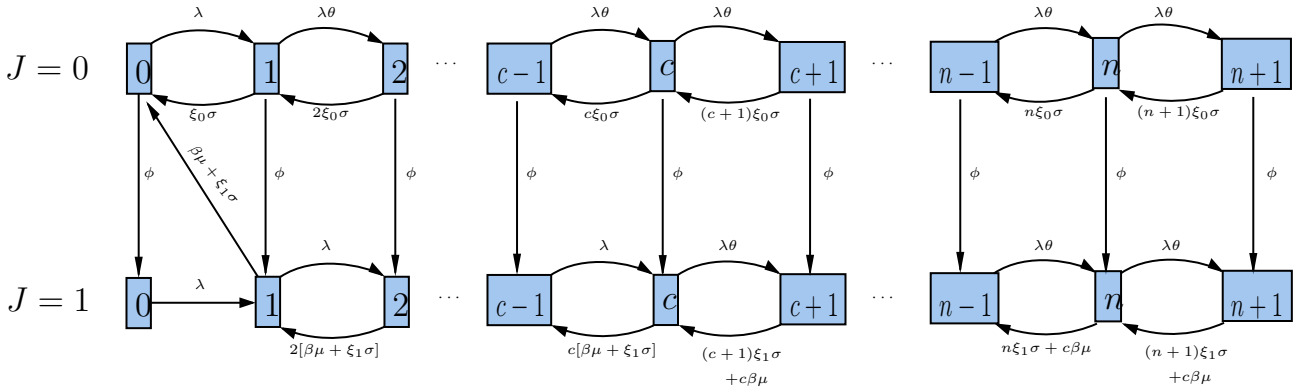


FIGURE 2.1 – Diagramme de transition d'état pour le modèle I

2.3.1 Analyse stationnaire

Le processus $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$ est défini comme un processus de Markov en temps continu avec un espace d'état $\Omega = \{(j, n) : j = 0, 1, n = 0, 1, \dots\}$. Soit

$$P_{j,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[J(t) = j, L(t) = n], \quad n \geq 0, \quad j = 0, 1,$$

la probabilité qu'il y ait n clients dans le système et que les serveurs soient à l'état 0 ou 1. Les fonctions génératrices partielles, $G_0(z)$ et $G_1(z)$, pour $0 < z < 1$ sont données par

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} z^n, \quad G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n} z^n, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (2.1)$$

L'ensemble des équations d'équilibre est donné comme suit :

$$(\lambda + \phi)P_{0,0} = \sigma\xi_0 P_{0,1} + (\beta\mu + \sigma\xi_1) P_{1,1}, \quad n = 0, \quad (2.2)$$

$$(\theta\lambda + \sigma\xi_0 + \phi) P_{0,1} = \lambda P_{0,0} + 2\sigma\xi_0 P_{0,2}, \quad n = 1, \quad (2.3)$$

$$(\theta\lambda + n\sigma\xi_0 + \phi) P_{0,n} = \theta\lambda P_{0,n-1} + (n+1)\sigma\xi_0 P_{0,n+1}, \quad n \geq 2, \quad (2.4)$$

$$\lambda P_{1,0} = \phi P_{0,0}, \quad (2.5)$$

$$(\lambda + \beta\mu + \sigma\xi_1) P_{1,1} = \lambda P_{1,0} + 2(\beta\mu + \sigma\xi_1) P_{1,2} + \phi P_{0,1}, \quad n = 1, \quad (2.6)$$

$$(\lambda + n(\beta\mu + \sigma\xi_1)) P_{1,n} = \lambda P_{1,n-1} + (n+1)(\beta\mu + \sigma\xi_1) P_{1,n+1} + \phi P_{0,n}, \quad 2 \leq n \leq c-1, \quad (2.7)$$

$$(\theta\lambda + n(\beta\mu + \sigma\xi_1)) P_{1,n} = \lambda P_{1,n-1} + [c\beta\mu + (n+1)\sigma\xi_1] P_{1,n+1} + \phi P_{0,n}, \quad n = c, \quad (2.8)$$

$$(\theta\lambda + c\beta\mu + n\sigma\xi_1) P_{1,n} = \theta\lambda P_{1,n-1} + [c\beta\mu + (n+1)\sigma\xi_1] P_{1,n+1} + \phi P_{0,n}, \quad n > c. \quad (2.9)$$

La condition de normalisation est la suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n} = 1. \quad (2.10)$$

En multipliant l'équation (2.4) par z^n , en additionnant toutes les valeurs possibles de n , et en utilisant les équations (2.2)-(2.3), nous obtenons

$$\xi_0\sigma(1-z)G'_0(z) = [\theta\lambda(1-z) + \phi]G_0(z) - \lambda\bar{\theta}(z-1)P_{0,0} - (\beta\mu + \sigma\xi_1)P_{1,1}. \quad (2.11)$$

De même, en multipliant les équations (2.5)-(2.8) par z^n , puis en additionnant toutes les valeurs possibles de n , on a

$$(1-z)[(\theta\lambda z - c\beta\mu)G_1(z) - \xi_1\sigma z G'_1(z)] = z\phi G_0(z) - (\beta\mu + \sigma\xi_1)P_{1,1}z + z\lambda\bar{\theta}(z-1)Q_2(z) + \beta\mu(1-z)Q_1(z) - c\beta\mu(1-z)P_{1,0}, \quad (2.12)$$

avec

$$Q_1(z) = \sum_{n=1}^{c-1} (n-c)P_{1,n}z^n, \quad Q_2(z) = \sum_{n=0}^{c-1} P_{1,n}z^n. \quad (2.13)$$

Ensuite, nous résolvons l'équation différentielle (2.11) et obtenons $G_0(z)$ comme suit,

$$G_0(z) = \exp\left\{\frac{\theta\lambda z - \phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_0}\right\} [G_0(0) - K_0(z)], \quad (2.14)$$

où

$$K_0(z) = \int_0^z \frac{\lambda\bar{\theta}(x-1)P_{0,0} + (\beta\mu + \sigma\xi_1)P_{1,1}}{\xi_0\sigma(1-x)} \exp\left\{-\frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0}\right\} dx.$$

De la même manière, nous résolvons l'équation différentielle (2.12) et obtenons $G_1(z)$ comme suit,

$$G_1(z) = \exp\left\{\frac{\theta\lambda z - c\beta\mu \ln z}{\sigma\xi_1}\right\} K_1(z), \quad (2.15)$$

où

$$K_1(z) = \int_0^z \left[\frac{\phi G_0(x) - (\beta\mu + \sigma\xi_1)P_{1,1} + \lambda\bar{\theta}(x-1)Q_2(x)}{\xi_1\sigma(x-1)} - \frac{\beta\mu Q_1(x) + c\beta\mu P_{1,0}}{\xi_1\sigma x} \right] \times \exp\left\{-\frac{\theta\lambda x - c\beta\mu \ln x}{\sigma\xi_1}\right\} dx.$$

Maintenant, en utilisant Altman et Yechiali (2006), cela donne

$$G_0(1) = \exp \left\{ \frac{\theta\lambda}{\sigma\xi_1} \right\} [G_0(0) - K_0(1)] \times \lim_{z \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{-\phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_1} \right\}. \quad (2.16)$$

Puisque $G_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} > 0$ et $\lim_{z \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{-\phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_1} \right\} = \infty$, on a

$$P_{0,0} = G_0(0) = \Gamma_1 P_{0,0} + \Gamma_2 P_{1,1}, \quad (2.17)$$

où

$$\Gamma_1 = \int_0^1 \frac{-\lambda\bar{\theta}}{\sigma\xi_0} \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0} \right\} dx, \quad (2.18)$$

et

$$\Gamma_2 = \int_0^1 \frac{\beta\mu + \sigma\xi_1}{\sigma\xi_0(1-x)} \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0} \right\} dx. \quad (2.19)$$

A partir de l'équation (2.17) nous obtenons

$$P_{1,1} = T_1 P_{0,0}, \quad \text{où} \quad T_1 = (1 - \Gamma_1) \Gamma_2^{-1}. \quad (2.20)$$

Maintenant, en substituant l'équation (2.20) dans l'équation (2.14) et en notant que $P_{0,0} = G_0(0)$, nous trouvons

$$G_0(z) = g_0(z) P_{0,0}, \quad (2.21)$$

où

$$g_0(z) = \exp \left\{ \frac{\theta\lambda z - \phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_0} \right\} \times \left[1 - \int_0^z \left[\frac{-\lambda\bar{\theta}}{\xi_0\sigma} + \frac{(\beta\mu + \sigma\xi_1) T_1}{\xi_0\sigma(1-x)} \right] \times \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0} \right\} dx \right]. \quad (2.22)$$

L'équation (2.21) montre que $G_0(z)$ peut être exprimé en termes de $P_{0,0}$. L'équation (2.15) montre que $G_1(z)$ peut être exprimé en termes de $G_0(x)$, Γ_1 , Γ_2 , $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$. Ainsi, une fois que $P_{0,0}$ et $P_{1,j}$ ($j = 1, 2, \dots, c-1$) sont obtenus, $G_0(z)$ et $G_1(z)$ sont complètement déterminés. Les probabilités d'état stationnaire $P_{0,n}$ ($1 \leq n \leq c-1$), $P_{1,n}$ ($0 \leq n \leq c-1$) sont calculées récursivement en résolvant le système (2.2)-(2.8). Par conséquent, en résolvant les équations (2.2) à (2.4) de manière récursive, cela donne

$$P_{0,n} = \omega_n P_{0,0}, \quad n \geq 1, \quad (2.23)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_1 &= [\lambda + \phi - (\beta\mu + \sigma\xi_1) T_1] (\sigma\xi_0)^{-1}, \\ \omega_2 &= [(\theta\lambda + \sigma\xi_0 + \phi) \omega_1 - \lambda] (2\sigma\xi_0)^{-1}, \\ \omega_n &= [(\theta\lambda + (n-1)\sigma\xi_0 + \phi) \omega_{n-1} - \theta\lambda\omega_{n-2}] (n\sigma\xi_0)^{-1}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Ensuite, en remplaçant l'équation (2.23) dans les équations (2.6)-(2.7), nous obtenons facilement

$$P_{1,n} = T_n P_{0,0}, \quad 0 \leq n \leq c-1, \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\phi}{\lambda}, \\ T_2 &= \frac{(\lambda + \beta\mu + \sigma\xi_1) T_1 - (\omega_1 + 1) \phi}{2(\beta\mu + \sigma\xi_1)}, \\ T_n &= \frac{(\lambda + (n-1)(\beta\mu + \sigma\xi_1)) T_{n-1} - \lambda T_{n-2} - \phi\omega_n}{n(\beta\mu + \sigma\xi_1)}, \quad 3 \leq n \leq c-1. \end{aligned}$$

En remplaçant l'équation (2.24) dans l'équation (2.13), on a

$$Q_1(z) = P_{0,0} \sum_{n=1}^{c-1} (n-c) T_n z^n, \quad Q_2(z) = P_{0,0} \sum_{n=0}^{c-1} T_n z^n. \quad (2.25)$$

En mettant $z = 1$ dans l'équation (2.11), on obtient

$$G_0(1) = \frac{(\beta\mu + \sigma\xi_1) T_1}{\phi} P_{0,0}, \quad (2.26)$$

ou équivalent,

$$g_0(1) = \frac{(\beta\mu + \sigma\xi_1) T_1}{\phi}. \quad (2.27)$$

En substituant les équations (2.21), (2.20) et (2.25) dans l'équation (2.15), on obtient

$$G_1(z) = g_1(z) P_{0,0}, \quad (2.28)$$

où

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \exp \left\{ \frac{\theta\lambda z - c\beta\mu \ln z}{\sigma\xi_1} \right\} \times \\ &\int_0^z \left[\frac{\phi g_0(x) - (\beta\mu + \sigma\xi_1) T_1 + \lambda\bar{\theta}(x-1) (\sum_{n=1}^{c-1} T_n x^n + (\phi/\lambda))}{\xi_1 \sigma (x-1)} - \frac{\beta\mu (\sum_{n=1}^{c-1} (n-c) T_n x^n - (c\phi/\lambda))}{\xi_1 \sigma x} \right] \\ &\times \exp \left\{ - \frac{\theta\lambda x - c\beta\mu \ln x}{\sigma\xi_1} \right\} dx \end{aligned}$$

Enfin, la seule inconnue $P_{0,0}$ est obtenue à partir de la condition de normalisation (2.10) et est donnée par

$$P_{0,0} = [g_0(1) + g_1(1)]^{-1}. \quad (2.29)$$

2.3.2 Mesures de performance

- Le nombre moyen de clients dans le système :

Soit $E[L_0]$ la taille moyenne du système lorsque les serveurs sont en vacance, et $E[L_1]$ désigne la taille moyenne du système lorsque les serveurs sont occupés. Nous dérivons d'abord les tailles

moyennes du système $E[L_0]$ et $E[L_1]$. En dérivant l'équation (2.11) et en prenant $z = 1$, on obtient,

$$\begin{aligned} E[L_0] &= G'_0(1) \\ &= \frac{\theta\lambda G_0(1) + \lambda\bar{\theta}P_{0,0}}{\xi_0\sigma + \phi}, \end{aligned}$$

où $G_0(1)$ est donné par l'équation (2.26) et $P_{0,0}$ par l'équation (2.29). À partir de l'équation (2.28), on a

$$\begin{aligned} E[L_1] &= G'_1(1) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} G'_1(z) \\ &= \frac{1}{\sigma\xi_1} [(\theta\lambda - c\beta\mu)G_1(1) + \phi E[L_0] + \lambda\bar{\theta}Q_2(1) \\ &\quad - \beta\mu Q_1(1) + c\beta\mu(\phi/\lambda)P_{0,0}]. \end{aligned}$$

- La probabilité que les serveurs soient en vacances :

$$\begin{aligned} P_{vac} &= \mathbb{P}(J = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} \\ &= G_0(1), \end{aligned}$$

où $G_0(1)$ est donné par l'équation (2.26).

- La probabilité que les serveurs soient en période d'occupation :

$$\begin{aligned} P_{ser} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n} \\ &= 1 - P_{vac} \\ &= 1 - G_0(1). \end{aligned}$$

- Le nombre moyen de clients servis :

$$\begin{aligned} N_s &= \beta\mu \sum_{n=1}^{c-1} nP_{1,n} + c\beta\mu \sum_{n=c}^{\infty} P_{1,n} \\ &= \beta\mu [cG_1(1) + Q_1(1) - cP_{1,0}] \end{aligned}$$

-Le taux moyen d'abandon :

Soit R_a le taux moyen d'abandon due au renegeing et au dérobage,

$$R_a = R_r + R_b,$$

où R_r est le taux moyen de renegeing et R_b indique le taux moyen de dérobage. Ainsi, le taux

moyen de renegeing d'un client est donné par

$$\begin{aligned} R_r &= \sigma \left[\xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} nP_{0,n} + \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} nP_{1,n} \right] \\ &= \sigma (\xi_0 E[L_0] + \xi_1 E[L_1]). \end{aligned}$$

Et le taux de dérobade instantané d'un client est $\lambda(1 - \theta)$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} R_b &= \lambda(1 - \theta) \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,n} + \sum_{n=c}^{\infty} P_{1,n} \right] \\ &= \lambda(1 - \theta) \left(1 - P_{0,0} - \sum_{n=0}^{c-1} P_{1,n} \right) \\ &= \lambda(1 - \theta) \left(1 - P_{0,0} - \sum_{n=0}^{c-1} T_n P_{0,0} \right). \end{aligned}$$

- Le taux moyen de rétention :

$$\begin{aligned} R_{\text{ret}} &= (1 - \sigma) \left[\xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} nP_{0,n} + \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} nP_{1,n} \right] \\ &= (1 - \sigma) (\xi_0 E[L_0] + \xi_1 E[L_1]). \end{aligned}$$

2.4 Analyse du modèle de type II : M/M/c/MV

Dans cette section, nous étudions le modèle de files d'attente $M/M/c/MV$, le diagramme de transition est présenté dans la figure 2.2.

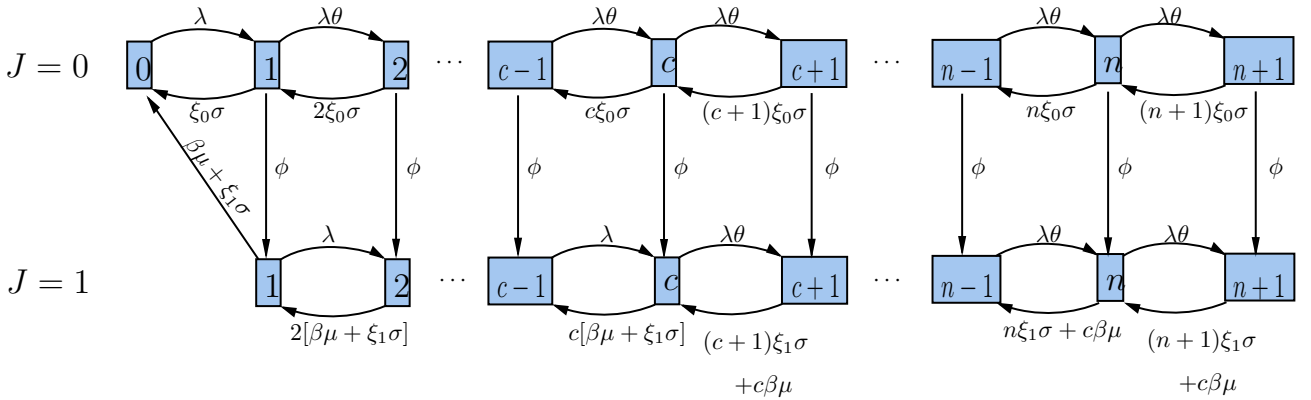


FIGURE 2.2 – Diagramme de transition pour le modèle II

2.4.1 Analyse stationnaire

Le processus $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$ est défini comme précédemment, un processus de Markov en temps continu avec un espace d'état $\Delta = \{(0, n) : n = 0, 1, \dots\} \cup \{(1, n) : n = 1, 2, \dots\}$.

Soit

$$P_{j,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(J(t) = j, L(t) = n), j = 0, 1, n = 0, 1, \dots,$$

les probabilités d'état du système (état stable). Les fonctions génératrices partielles, $G_0(z)$ et $G_1(z)$, pour $0 < z < 1$ sont données par

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} z^n, \quad G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{1,n} z^n, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (2.30)$$

L'ensemble des équations d'équilibre est donné comme suit

$$\lambda P_{0,0} = \sigma \xi_0 P_{0,1} + (\beta \mu + \sigma \xi_1) P_{1,1}, \quad n = 0, \quad (2.31)$$

$$(\theta \lambda + \sigma \xi_0 + \phi) P_{0,1} = \lambda P_{0,0} + 2\sigma \xi_0 P_{0,2}, \quad n = 1, \quad (2.32)$$

$$(\theta \lambda + n\sigma \xi_0 + \phi) P_{0,n} = \theta \lambda P_{0,n-1} + (n+1)\sigma \xi_0 P_{0,n+1}, \quad n \geq 2, \quad (2.33)$$

$$(\lambda + \beta \mu + \sigma \xi_1) P_{1,1} = 2(\beta \mu + \sigma \xi_1) P_{1,2} + \phi P_{0,1}, \quad n = 1, \quad (2.34)$$

$$(\lambda + n(\beta \mu + \sigma \xi_1)) P_{1,n} = \lambda P_{1,n-1} + (n+1)(\beta \mu + \sigma \xi_1) P_{1,n+1} + \phi P_{0,n}, \quad 2 \leq n \leq c-1, \quad (2.35)$$

$$(\theta \lambda + n(\beta \mu + \sigma \xi_1)) P_{1,n} = \lambda P_{1,n-1} + [c\beta \mu + (n+1)\sigma \xi_1] P_{1,n+1} + \phi P_{0,n}, \quad n = c, \quad (2.36)$$

$$(\theta \lambda + c\beta \mu + n\sigma \xi_1) P_{1,n} = \theta \lambda P_{1,n-1} + [c\beta \mu + (n+1)\sigma \xi_1] P_{1,n+1} + \phi P_{0,n}, \quad n > c. \quad (2.37)$$

La condition de normalisation est la suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{1,n} = 1. \quad (2.38)$$

Ensuite, en multipliant l'équation (2.33) par z^n , en additionnant toutes les valeurs possibles de n et en utilisant les équations (2.31) et (2.32), on obtient

$$\xi_0 \sigma (1-z) G_0'(z) = [\theta \lambda (1-z) + \phi] G_0(z) - [\lambda \bar{\theta} (z-1) + \phi] P_{0,0} - (\beta \mu + \sigma \xi_1) P_{1,1}. \quad (2.39)$$

De même, en multipliant les équations (2.34)-(2.37) par z^n , puis en additionnant toutes les valeurs possibles de n , on a

$$(1-z) [(\theta \lambda z - c\beta \mu) G_1(z) - \xi_1 \sigma z G_1'(z)] = z \phi G_0(z) - (\phi P_{0,0} + (\beta \mu + \sigma \xi_1) P_{1,1}) z + z \lambda \bar{\theta} (z-1) R_2(z) + \beta \mu (1-z) R_1(z), \quad (2.40)$$

avec

$$R_1(z) = \sum_{n=1}^{c-1} (n-c) P_{1,n} z^n, \quad R_2(z) = \sum_{n=1}^{c-1} P_{1,n} z^n. \quad (2.41)$$

Ensuite, nous résolvons l'équation (2.39) et obtenons $G_0(z)$ comme

$$G_0(z) = \exp \left\{ \frac{\theta \lambda z - \phi \ln(1-z)}{\sigma \xi_0} \right\} [G_0(0) - K_0'(z)], \quad (2.42)$$

où

$$K'_0(z) = \int_0^z \frac{[\lambda\bar{\theta}(x-1) + \phi]P_{0,0} + (\beta\mu + \sigma\xi_1)P_{1,1}}{\xi_0\sigma(1-x)} \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0} \right\} dx.$$

En résolvant l'équation différentielle (2.40), on obtient $G_1(z)$ comme suit :

$$G_1(z) = \exp \left\{ \frac{\theta\lambda z c \beta \mu \ln z}{\sigma\xi_1} \right\} K'_1(z), \quad (2.43)$$

où

$$K'_1(z) = \int_0^z \left[\frac{\phi G_0(x) - (\phi P_{0,0} + (\beta\mu + \sigma\xi_1)P_{1,1}) + \lambda\bar{\theta}(x-1)R_2(x)}{\xi_1\sigma(x-1)} - \frac{\beta\mu R_1(x)}{\xi_1\sigma x} \right] \times \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - c\beta\mu \ln x}{\sigma\xi_1} \right\} dx.$$

Via Altman et Yechiali [3], on a

$$G_0(1) = \exp \left\{ \frac{\theta\lambda}{\sigma\xi_1} \right\} [G_0(0) - K'_0(1)] \times \lim_{z \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{-\phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_1} \right\}. \quad (2.44)$$

Puisque $G_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} > 0$ et $\lim_{z \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{-\phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_1} \right\} = \infty$, cela donne

$$P_{0,0} = G_0(0) = \Gamma_2 P_{1,1} + \Gamma_3 P_{0,0}, \quad (2.45)$$

où Γ_2 a été défini dans l'équation (19), et

$$\Gamma_3 = \int_0^1 \frac{[\lambda\bar{\theta}(x-1) + \phi]}{\sigma\xi_0(1-x)} \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0} \right\} dx. \quad (2.46)$$

De l'équation (2.45) nous obtenons

$$P_{1,1} = T'_1 P_{0,0}, \quad \text{où} \quad T'_1 = (1 - \Gamma_3) \Gamma_2^{-1}. \quad (2.47)$$

En substituant l'équation (2.47) dans l'équation (2.42) et en notant que $P_{0,0} = G_0(0)$, on a

$$G_0(z) = g_0(z) P_{0,0}, \quad (2.48)$$

où

$$g_0(z) = \exp \left\{ \frac{\theta\lambda z - \phi \ln(1-z)}{\sigma\xi_0} \right\} \times \left[1 - \int_0^z \left[\frac{[\lambda\bar{\theta}(x-1) + \phi]}{\xi_0\sigma(1-x)} + \frac{(\beta\mu + \sigma\xi_1)T'_1}{\xi_0\sigma(1-x)} \right] \times \exp - \left\{ \frac{\theta\lambda x - \phi \ln(1-x)}{\sigma\xi_0} \right\} dx \right]. \quad (2.49)$$

Les probabilités d'état stationnaire $P_{0,n}, P_{1,n} (1 \leq n \leq c-1)$ sont calculées récursivement en résolvant les équations (2.31)-(2.37). Ainsi, via les équations (2.31)-(2.33) nous obtenons

$$P_{0,n} = \omega'_n P_{0,0}, \quad n \geq 1, \quad (2.50)$$

où

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= [\lambda - (\beta\mu + \sigma\xi_1) T'_1] (\sigma\xi_0)^{-1}, \\ \omega'_2 &= [(\theta\lambda + \sigma\xi_0 + \phi) \omega'_1 - \lambda] (2\sigma\xi_0)^{-1}, \\ \omega'_n &= [(\theta\lambda + (n-1)\sigma\xi_0 + \phi) \omega'_{n-1} - \theta\lambda\omega'_{n-2}] (n\sigma\xi_0)^{-1}, n \geq 3.\end{aligned}$$

En remplaçant l'équation (2.50) dans les équations (2.34)-(2.36), cela donne

$$P_{1,n} = T'_n P_{0,0}, \quad 1 \leq n \leq c-1, \quad (2.51)$$

où

$$\begin{aligned}T'_2 &= \frac{(\lambda + \beta\mu + \sigma\xi_1) T'_1 - \phi\omega'_1}{2(\beta\mu + \sigma\xi_1)}, \\ T'_n &= \frac{(\lambda + (n-1)(\beta\mu + \sigma\xi_1)) T'_{n-1} - \lambda T'_{n-2} - \phi\omega'_n}{n(\beta\mu + \sigma\xi_1)}, \quad 3 \leq n \leq c-1.\end{aligned}$$

En substituant l'équation (2.51) dans l'équation (2.41), on a

$$R_1(z) = P_{0,0} \sum_{n=1}^{c-1} (n-c) T'_n z^n, \quad R_2(z) = P_{0,0} \sum_{n=1}^{c-1} T'_n z^n. \quad (2.52)$$

En prenant $z = 1$ dans l'équation (2.39), on obtient

$$G_0(1) = \frac{\phi + (\beta\mu + \sigma\xi_1) T'_1}{\phi} P_{0,0}, \quad (2.53)$$

ou équivalent,

$$g_0(1) = \frac{\phi + (\beta\mu + \sigma\xi_1) T'_1}{\phi}. \quad (2.54)$$

En remplaçant les équations (2.47)-(2.48) et (2.52) dans l'équation (2.43), on a

$$G_1(z) = g_1(z) P_{0,0}, \quad (2.55)$$

où

$$\begin{aligned}g_1(z) &= \int_0^z \left[\frac{\phi g_0(x) - (\phi + (\beta\mu + \sigma\xi_1) T'_1) + \bar{\theta}\lambda(x-1) \sum_{n=1}^{c-1} T'_n x^n}{\xi_1 \sigma (x-1)} - \frac{\beta\mu \sum_{n=1}^{c-1} (n-c) T'_n x^n}{\xi_1 \sigma x} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{\theta\lambda x - c\beta\mu \ln x}{\sigma\xi_1} \right\} dx \exp \left\{ \frac{\theta\lambda z - c\beta\mu \ln z}{\sigma\xi_1} \right\}.\end{aligned}$$

Enfin, $P_{0,0}$ est obtenue à partir de la condition de normalisation (2.38). Ainsi

$$P_{0,0} = [g_0(1) + g_1(1)]^{-1}. \quad (2.56)$$

2.4.2 Mesures de performance

- Le nombre moyen de clients dans le système :

En dérivant l'équation (2.39) et en prenant $z = 1$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}E[L_0] &= G'_0(1) \\ &= \frac{\theta\lambda G_0(1) + \lambda\bar{\theta}P_{0,0}}{\xi_0\sigma + \phi},\end{aligned}$$

où $G_0(1)$ est donné par l'équation (2.53) et $P_{0,0}$ par l'équation (2.56). À partir de l'équation (2.55), nous obtenons

$$\begin{aligned} E[L_1] &= G'_1(1) \\ &= \frac{1}{\sigma\xi_1} [(\theta\lambda - c\beta\mu)G_1(1) + \phi E[L_0] + \bar{\theta}\lambda R_2(1) - \beta\mu R_1(1)]. \end{aligned}$$

- Les probabilité que les serveurs soient en période de vacances :

$$P_{vac} = G_0(1),$$

où $G_0(1)$ est donné par l'équation (2.53).

- Les probabilité que les serveurs soient en période d'occupation :

$$P_{ser} = 1 - G_0(1).$$

- Le nombre moyen de clients servis par unité de temps :

$$N_s = \beta\mu [cG_1(1) + R_2(1)].$$

- Le taux moyen d'abandon :

$$R_a = R_r + R_b,$$

où

$$R_r = \sigma (\xi_0 E[L_0] + \xi_1 E[L_1]),$$

et

$$R_b = \lambda(1 - \theta) \left(1 - P_{0,0} - \sum_{n=1}^{c-1} T'_n P_{0,0} \right).$$

- Le taux moyen de rétention :

$$R_{ret} = (1 - \sigma) (\xi_0 E[L_0] + \xi_1 E[L_1]).$$

ANALYSE ÉCONOMIQUE DU MODÈLE DE FILES D'ATTENTE $M/M/c/MV$

3.1 Modèle de coût

Dans cette section, nous développons un modèle de coûts encourus dans le système de files d'attente $M/M/c/MV$. À cette fin, nous considérons les symboles et notations suivants.

- C_{busy} : Coût par unité de temps lorsque les serveurs sont occupés.
- C_{vac} : Coût par unité de temps lorsque les serveurs sont en vacances.
- C_q : Coût par unité de temps lorsqu'un client rejoint la file d'attente et attend le service.
- C_b : Coût par unité de temps lorsqu'un client dérobe.
- C_s : Coût par service par unité de temps.
- C_r : Coût par unité de temps lorsqu'un client abandonne le système, soit en période d'occupation, soit en période de vacances.
- C_{ret} : Coût par unité de temps lorsqu'un client est retenu, soit en période de pointe, soit en période de vacances.
- C_F : Coût d'achat fixe du serveur par unité.
- C_{s-f} : coût par unité de temps lorsqu'un client revient au système pour un autre service (feedback client).

Soit R le revenu gagné en fournissant un service à un client.

Soit $\mathcal{T}_{\text{e.cost}}$ le coût total attendu par unité de temps du système.

Soit $\mathcal{T}_{\text{e.rev}}$ le revenu total attendu par unité de temps du système.

Soit $\mathcal{T}_{\text{e.pro}}$ le profit total attendu par unité de temps du système.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{e.cost}} = & C_{\text{busy}} P_{\text{busy}} + C_{\text{vac}} P_{\text{vac}} + C_q E(L_q) + C_b R_b + C_r R_r \\ & + C_{\text{ret}} R_{\text{ret}} + c\mu (C_s + \bar{\beta} C_{s-f}) + cC_F, \end{aligned}$$

avec $E(L_q)$ désigne le nombre moyen de clients dans la file d'attente telle que

$$\begin{aligned} E(L_q) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP_{0,n} + \sum_{n=c}^{+\infty} (n-c)P_{1,n} \\ &= E(L_0) + E(L_1) - (c \times G_1(1)) - R_1(1). \end{aligned}$$

Le revenu total attendu par unité de temps du système est donné par :

$$\mathcal{T}_{e.rev} = R \times N_s.$$

Maintenant, le profit total attendu est présenté comme suite

$$\mathcal{T}_{e.pro} = \mathcal{T}_{e.rev} - \mathcal{T}_{e.cost}.$$

Après avoir obtenu le coût attendu par unité de temps $\mathcal{T}_{e.cost}$, le revenu total attendu $\mathcal{T}_{e.rev}$ et le profit total attendu $\mathcal{T}_{e.pro}$ en termes de divers paramètres impliqués, l'analyse économique du modèle sera effectuée numériquement en utilisant ces fonctions et les résultats seront discutés.

3.2 Analyse numérique

Cette section est consacrée à l'étude numérique des différentes mesures de performance et des aspects coûts-profits associés au modèle de files d'attente $M/M/C/MV$. Plus précisément, nous présentons la variation des mesures de performance importantes et les différents types de coûts impliqués avec le changement de divers paramètres du système. En effet, à l'aide d'un programme implémenté sous R, nous présentons quelques exemples numériques pour illustrer l'effet de divers paramètres sur les mesures de performance du système. Pour l'ensemble de l'analyse, nous fixons les différents coûts comme suit :

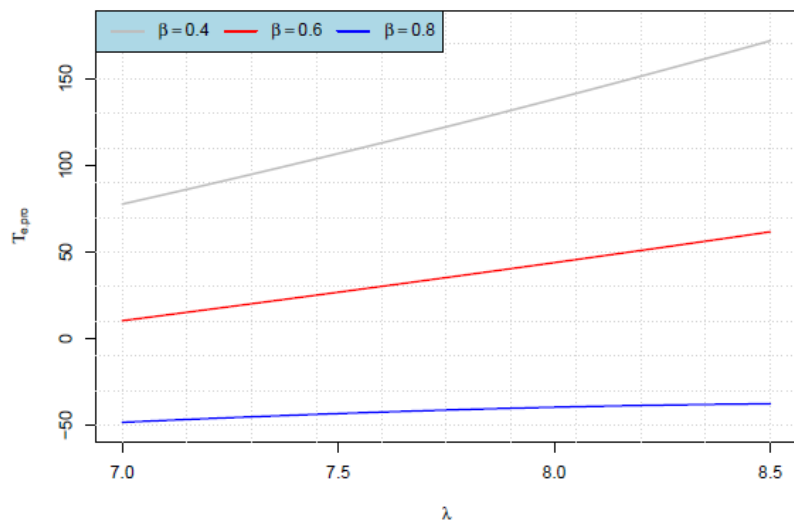
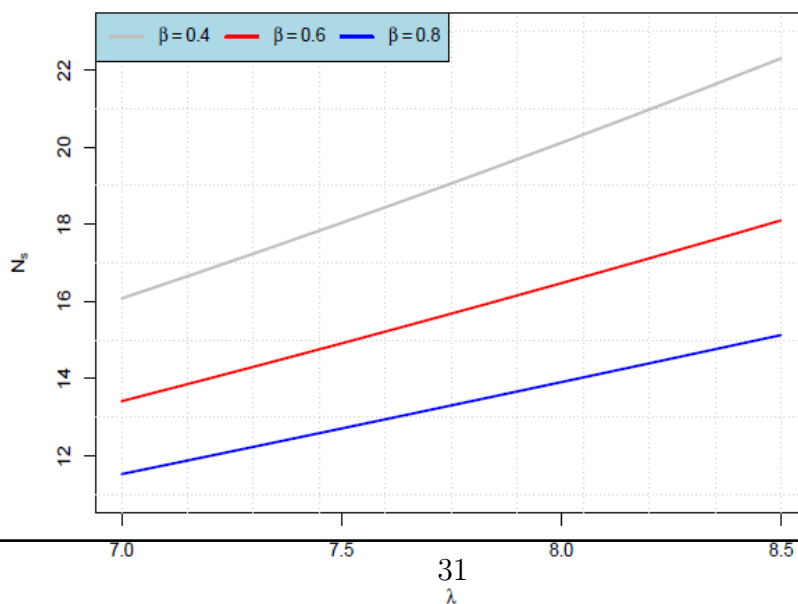
$$C_{busy} = 5, C_{vac} = 6, C_q = 5, C_b = 5, C_s = 4, C_{ren} = 5, C_{ret} = 5, C_{sf} = 5, C_F = 4 \text{ et } R = 50.$$

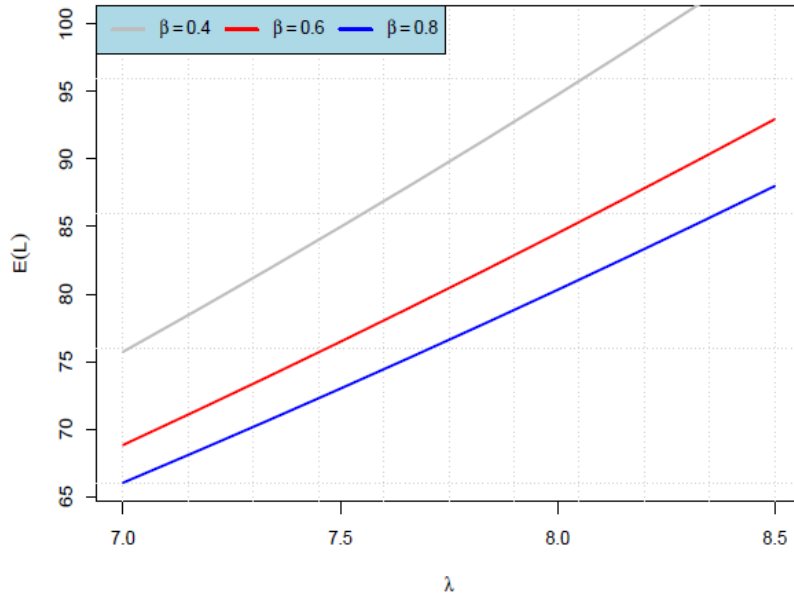
Cas 1 : Variation de λ et β .

Nous vérifions le comportement de certaines caractéristiques du système ainsi que le coût total, le revenu et le profit total pour différentes valeurs de λ et β en gardant toutes les autres variables fixes. Pour l'analyse, nous fixons les paramètres $c = 3, \theta = 0.8, \mu = 5, \phi = 0.1, \sigma = 0.8, \xi_0 = 0.5$ et $\xi_1 = 0.6$.

TABLE 3.1 – Coût-revenu-profit vs. λ et β

	β/λ	7	7.5	8	8.5
$\mathcal{T}_{e.cost}$		726.3430	795.0661	867.3303	943.2274
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.4	803.9488	901.8072	1005.4203	1114.9089
$\mathcal{T}_{e.pro}$		77.6058	106.7411	138.0901	171.6815
$\mathcal{T}_{e.cost}$		660.4133	718.789	779.7721	843.3918
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.6	670.8670	745.6624	823.6789	905.0529
$\mathcal{T}_{e.pro}$		10.4538	26.8734	43.9068	61.6611
$\mathcal{T}_{e.cost}$		624.4847	678.4826	734.9177	793.9311
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.8	576.4310	635.4586	695.5587	756.5159
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-48.0536	-43.0242	-39.3590	-37.4151

FIGURE 3.1 – Courbes de variation du profit total attendu vs. λ 

FIGURE 3.2 – $E(L)$ vs. λ

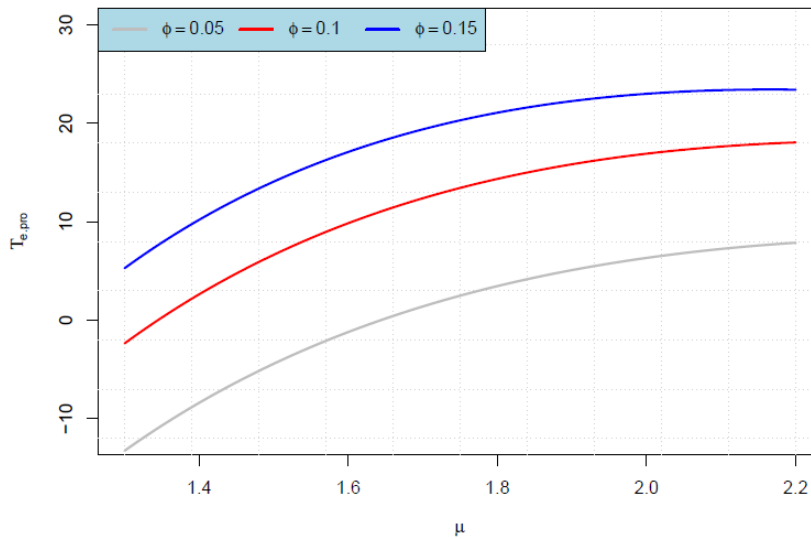
D'après les figures 3.1-3.3 et le tableau 3.1, nous constatons que, pour β fixe, le nombre moyen de clients dans le système $E(L)$ augmente avec l'augmentation du taux d'arrivée λ . Par conséquent, le nombre moyen de clients servis N_s est significatif, cela implique une augmentation significative du profit total attendu $\mathcal{T}_{e,pro}$. D'autre part, pour ϕ fixe, avec l'augmentation du non-feedback β , le nombre moyen de clients dans le système $E(L)$ diminue, cela implique une diminution du nombre moyen de clients servis N_s . Ainsi, le profit total attendu $\mathcal{T}_{e,pro}$ diminue significativement.

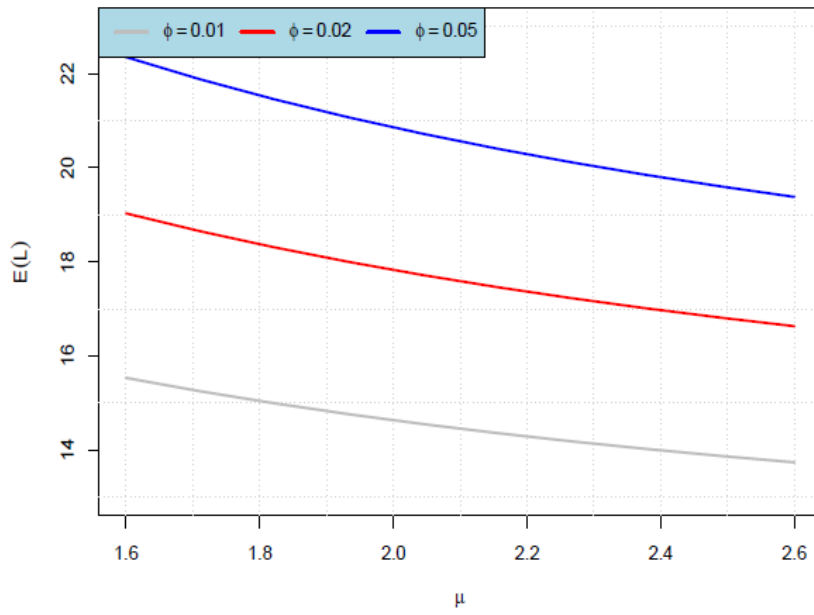
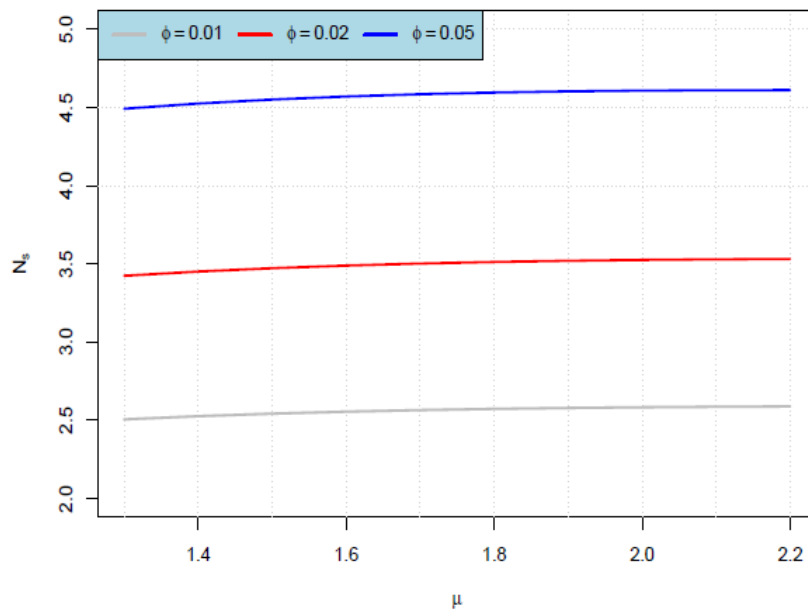
Cas 2 : Variation de μ et de ϕ .

Nous examinons le comportement de certaines caractéristiques du système ainsi que le coût total, le revenu et le profit total pour diverses valeurs de μ et ϕ en gardant toutes les autres variables fixes. Pour ce cas, nous fixons les paramètres $c = 3, \beta = 0.5, \lambda = 4, \theta = 0.8, \sigma = 0.8, \xi_0 = 0.5$ et $\xi_1 = 0.85$.

TABLE 3.2 – Coût-revenu-profit vs. μ et ϕ

	ϕ/μ	1.3	1.6	1.9	2.2
$\mathcal{T}_{e.cost}$		254.5262	246.4486	241.6383	238.9954
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.07	241.2788	245.2543	246.7307	246.8657
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-13.2474	-1.1943	5.0924	7.8703
$\mathcal{T}_{e.cost}$		259.5818	251.1900	246.2299	243.5346
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.1	257.2323	261.0472	262.0694	261.5931
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-2.3495	9.8572	15.8395	18.05844
$\mathcal{T}_{e.cost}$		262.3111	253.8694	248.9873	246.4428
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.13	267.5969	270.9617	271.2408	269.8559
$\mathcal{T}_{e.pro}$		5.2858	17.0923	22.2535	23.4131

FIGURE 3.4 – Courbes de variation du profit total attendu par rapport à μ

FIGURE 3.5 – $E(L)$ vs. μ FIGURE 3.6 – N_s vs. μ

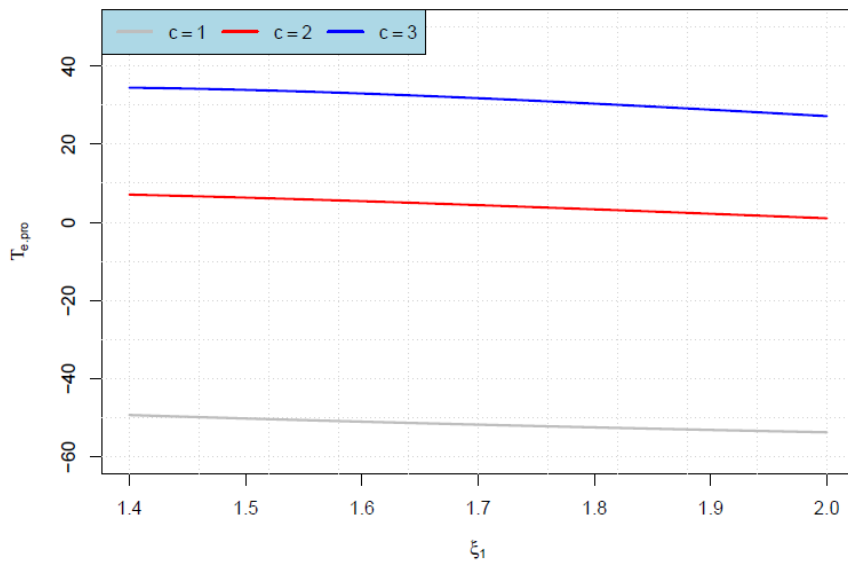
Via les figures 3.4-3.6 et le tableau 3.2, on voit clairement qu'au fur et à mesure de l'augmentation des taux de service et de vacances μ et ϕ , le nombre de clients servis N_s augmente, par conséquent, la taille du système $E(L)$ diminue. En conséquence, le profit total attendu $\mathcal{T}_{e,pro}$ augmente considérablement.

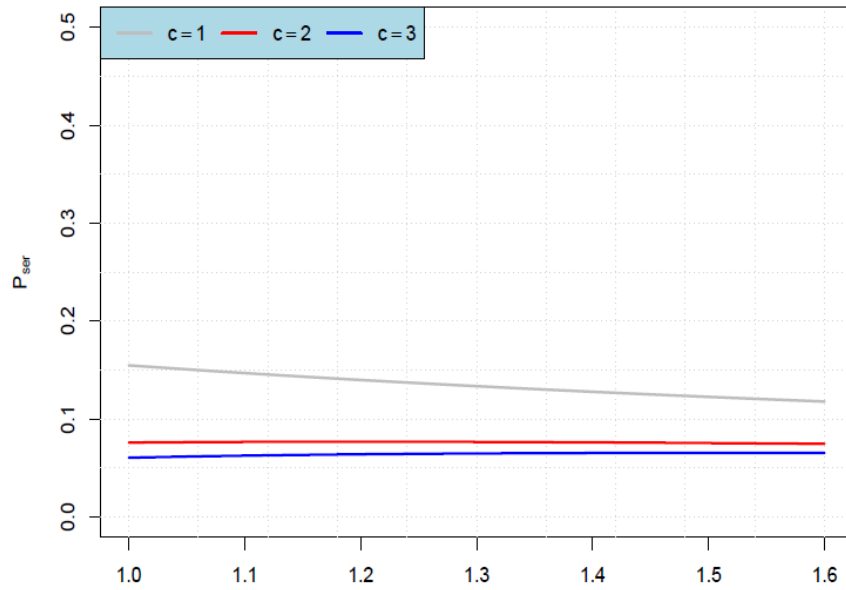
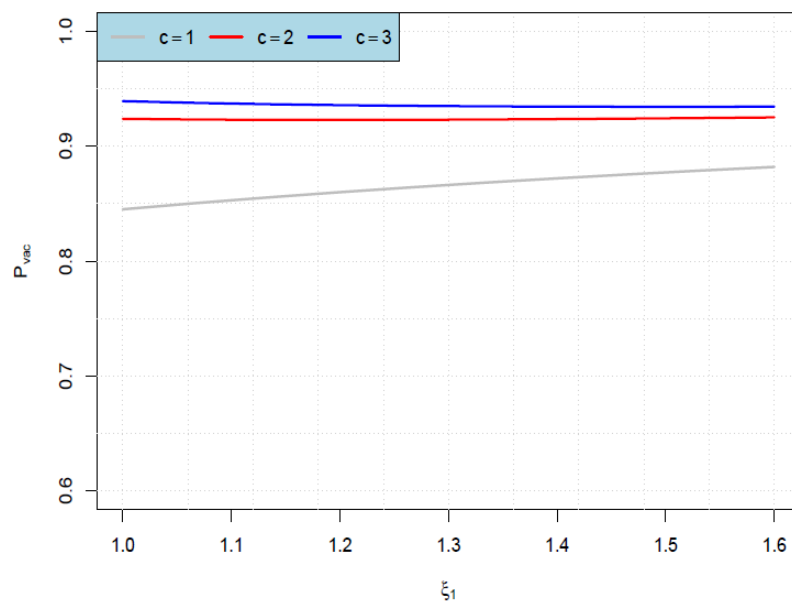
Cas 3 : Variation du taux d'impatience en période d'affluence ξ_1 et de c .

Nous analysons le comportement des caractéristiques du système en faisant varier ξ_1 et c , et en fixant les paramètres $\phi = 0.2, \theta = 0.8, \lambda = 4, \beta = 0.8, \mu = 4, \sigma = 0,8$ et $\xi_0 = 0,85$.

TABLE 3.3 – Total cost variation vs. ξ_1 et c

	c/ξ_1	1	1.4	1.6	1.8
$\mathcal{T}_{e.cost}$		69.7	69.8	69.9555	70.0636
$\mathcal{T}_{e.rev}$	1	20	19	17.524	16.3741
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-49	-51	-52.4315	-53.6895
$\mathcal{T}_{e.cost}$		122	119	117.3160	115.7033
$\mathcal{T}_{e.rev}$	2	129	125	120.6422	116.7341
$\mathcal{T}_{e.pro}$		7.08	5.41	3.3262	1.0308
$\mathcal{T}_{e.cost}$		196	188	182.7164	177.9936
$\mathcal{T}_{e.rev}$	3	230	221	213.0694	205.1455
$\mathcal{T}_{e.pro}$		34	33	30.3530	27.1518

FIGURE 3.7 – Total expected profit variation curves vs. ξ_1

FIGURE 3.8 – P_{ser} vs. ξ_1 FIGURE 3.9 – P_{vac} vs. ξ_1

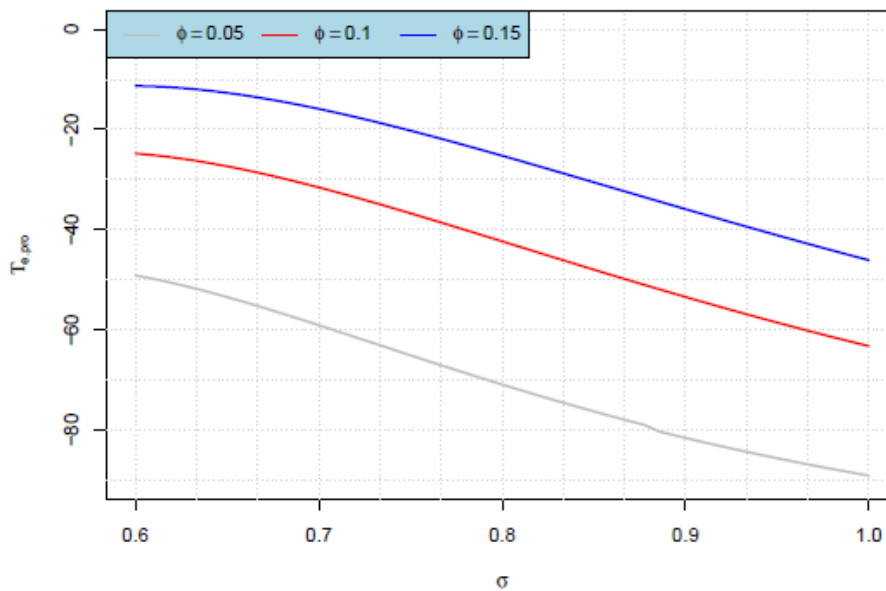
D'après les figures 3.7 à 3.9 et le tableau 3.3, nous voyons que l'augmentation de ξ_1 implique une diminution de P_{ser} . Ensuite, P_{vac} augmente. Cela se traduit par une diminution de la taille du système $\mathbb{E}(L)$. Par conséquent, le nombre moyen de clients servis N_s est réduit. L'augmentation du nombre de serveurs a un impact positif sur le comportement du système qui se traduit par une augmentation du profit total attendu $\mathcal{T}_{e.pro.}$.

Cas 4 : Variation du taux de non rétention σ .

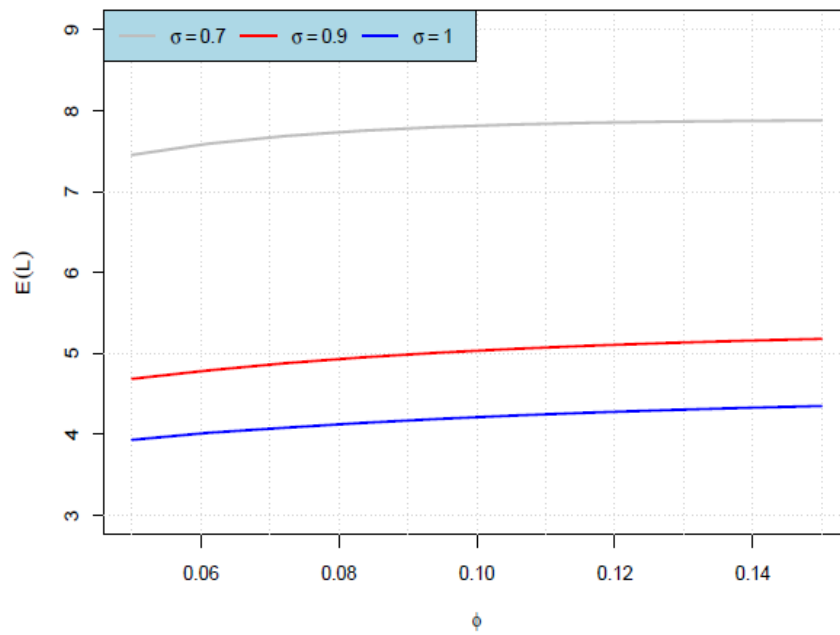
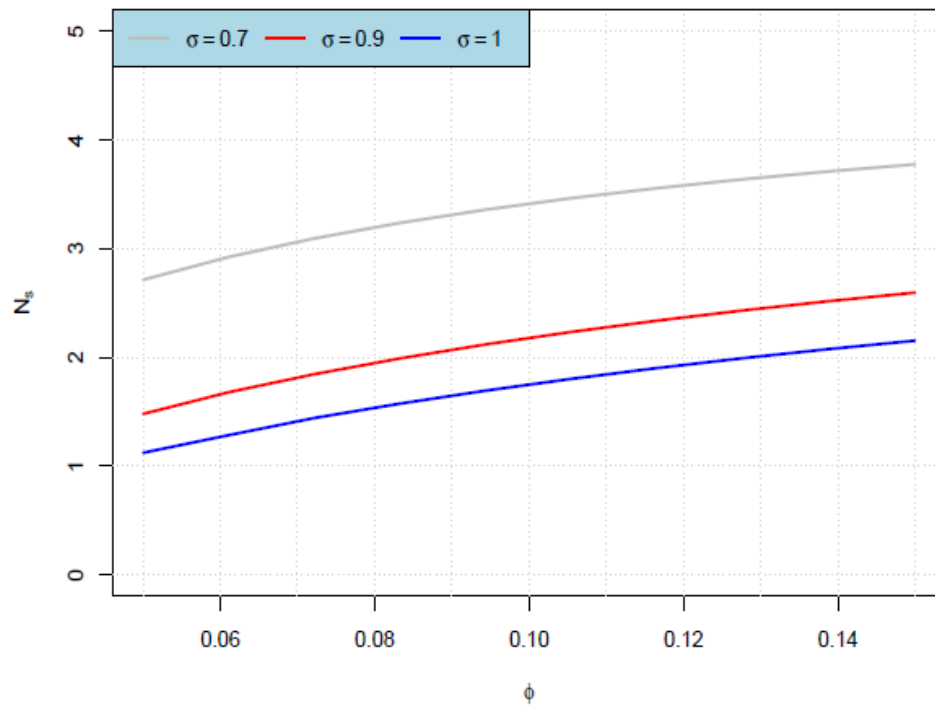
On fait varier σ et ϕ et on fixe les paramètres $c = 3, \theta = 0.8, \lambda = 4, \beta = 0.5, \mu = 4, \xi_0 = 1, \xi_0 = 2$.

TABLE 3.4 – Coût-revenu-profit vs. σ et ϕ

	ϕ/σ	0.6	0.7	0.8	0.9
$\mathcal{T}_{e.cost}$		231	194.7085	171	155.4570
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.05	182	135.7	100	73.9758
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-49	-59.0087	-71	-81.4813
$\mathcal{T}_{e.cost}$		236	202.3086	179	162.3447
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.1	211	170.7674	137	108.9651
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-25	-31.5412	-42	-53.3796
$\mathcal{T}_{e.cost}$		237	204.7325	182	165.6776
$\mathcal{T}_{e.rev}$	0.15	225	188.8468	157	129.8103
$\mathcal{T}_{e.pro}$		-11	-15.8857	-25	-35.8673

FIGURE 3.10 – Courbes de variation du profit total attendu vs. σ

D'après les figures 3.10-3.12 et le tableau 3.4, nous voyons clairement que pour ϕ fixe, l'augmentation de la probabilité de non-rétention σ implique une diminution significative de la taille du système $E(L)$ et par conséquent dans le nombre moyen de clients servis N_s . Par

FIGURE 3.11 – $E(L)$ vs. σ FIGURE 3.12 – N_s vs. σ

conséquent, une perte dans le profit total attendu est considérable. Ensuite, nous concluons que la probabilité de rétention joue un rôle important dans l'économie de toute entreprise.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un système de files d'attente avec vacances simples et multiples, Bernoulli feedback, balking et abandon. Nous avons obtenu différentes des mesures de performance des deux modèles. Quelques exemples numériques concernant le modèle de files d'attente avec vacances multiples ont été réalisés. Les résultats théoriques présentés dans ce travail ont des applications potentielles dans de nombreux systèmes réels tels que les centres d'appels, les systèmes de communication, les systèmes de fabrication, etc. Les résultats trouvés dans ce travail pourront être étendus au cas d'un d'un modèle avec service pendant les vacances.

Bibliographie

- [1] Abou El-Ata, M.O. and Hariri, A.M.A. (1992). The $M/M/c/N$ queue with balking and renegeing, *Comput. Oper. Res.*, Vol. 19, No. 8, pp. 713-716.
- [2] Al-Seedy, R.O., El-Sherbiny, A.A., El-Shehawy, S.A. and Ammar, S.I. (2009). Transient solution of the $M/M/c$ queue with balking and renegeing, *Comput. Math. Appl.*, Vol. 57, No. 8, pp. 1280-1285.
- [3] Altman, E. and Yechiali, U. (2006). Analysis of customers' impatience in queues with server vacation, *Queueing Syst.*, Vol. 52, pp. 261-279.
- [4] Altman, E. and Yechiali, U. (2008). Infinite-server queues with system's additional tasks and impatient customers, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, Vol. 22, No. 4 , pp. 477-493.
- [5] Ammar, S.I. (2014). Transient analysis of a two-heterogeneous servers queue with impatient behavior, *J. Egypt. Math. Soc.*, Vol. 22, No. 1, pp. 90-95.
- [6] Ammar, S.I. (2015). Transient analysis of an $M/M/1$ queue with impatient behavior and multiple vacations, *Appl. Math. Comput.*, Vol. 260, pp. 97-105.
- [7] Ammar, S.I. (2017). Transient solution of an $M/M/1$ vacation queue with a waiting server and impatient customers, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, Vol. 25, No. 3, pp. 337-342 .
- [8] Antonis, C., Antonio, G. C. and Spyridoula, K. (2011). Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times, *Performance Evaluation*, Vol. 68, No. 10, pp. 967-982.
- [9] Arumuganthan, R. and Jeyakumar, S. (2005). Steady state analysis of a bulk queue with multiple vacations, set up times with N-policy and closedown times, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 29, No. 10, pp. 972-986.
- [10] Bouchentouf, A. A., Cherfaoui, M. and Boualem, M. (2019). Performance and economic analysis of a single server feedback queueing model with vacation and impatient customers, *OPSEARCH*, Vol. 56, No. 1, pp. 300-320.

- [11] Bouchentouf, A. A. and Guendouzi, A. (2018). Sensitivity analysis of multiple vacation feedback queueing system with differentiated vacations, vacation interruptions and impatient customers, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 57, No. 6, pp. 104121.
- [12] Bouchentouf, A. A. and Guendouzi, A. (2019). Cost optimization analysis for an $M^X/M/c$ vacation queueing system with waiting servers and impatient customers, *SeMA Journal*, Vol. 76, No. 2, pp. 309-341.
- [13] Bouchentouf, A. A. and Guendouzi, A. (2020). The $M^X/M/c$ Bernoulli feedback queue with variant multiple working vacations and impatient customers : Performance and economic analysis, *Arabian Journal of Mathematics*, Vol. 9, pp. 309-327.
- [14] Bouchentouf, A. A., Guendouzi, A. and Kandouci, A. (2018). Performance and economic analysis of Markovian Bernoulli feedback queueing system with vacations, waiting server and impatient customers, *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, Vol. 10, No. 2, pp. 218-241.
- [15] Doshi, B. T. (1986). Queueing systems with vacation-A survey, *Queueing Systems*, Vol. 1, pp. 29-66.
- [16] Gharbi, N. and Ioualalen, M. (2010). Numerical investigation of finite-source multiserver systems with different vacation policies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 234, No. 3, pp. 625-635.
- [17] Goswami V. (2014). Analysis of impatient customers in queues with Bernoulli schedule working vacations and vacation interruption, *Journal of Stochastics*, Vol. 2014, Article ID 207285, 10 pages.
- [18] Haghghi, A.M., Medhi, J and Mohanty, S. G. (1986). On a multi-server Markovian queueing system with balking and reneging, *Computers. and Ops. Res.*, Vol. 13, No. 4, pp. 421-425.
- [19] Haghghi, A.M. and Mishev, D.P. (2014). *Queueing Models in Industry and Business*, Second Edition, Nova Science Publishers, Inc., New York.
- [20] Kadi, M., Bouchentouf, AA., Yahiaoui, L. (2020). On a multiserver queueing system with customer' impatience until the end of service under single and multiple vacation policies, *Applications and Applied Mathematics : An International Journal (AAM)*, 15(2), 740-763.

- [21] Padmavathy R., Kalidass, K. and Ramanath, K. (2011). Vacation queues with impatient customers and a waiting server, *Int. J. Latest Trends Softw. Eng.*, Vol. 1, No. 1, pp. 10-19.
- [22] Panda, G. and Goswami, V. (2016). Equilibrium balking strategies in renewal input queue with Bernoulli-schedule controlled vacation and vacation interruption, *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol. 12, No. 3, pp. 851-878.
- [23] Selvaraju, N. and Goswami, C. (2013). Impatient customers in an $M/M/1$ queue with single and multiple working vacations, *Comput. Ind. Eng.*, Vol. 65, No. 2, pp. 207-215.
- [24] Sun, W., Li, S. and Guo, E. (2016). Equilibrium and optimal balking strategies of customers in Markovian queues with multiple vacations and N-policy, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 1, pp. 284-301.
- [25] Takagi, H. (1991). *Queueing Analysis, A Foundation of Performance Evaluation, Volume 1 : Vacation and Priority Systems*, Amsterdam, North-Holland.
- [26] Tian, N. and Zhang, Z. G. (2003). Stationary distribution of $GI/M/c$ queue with PH type vacations, *Queueing Systems*, Vol. 44, pp. 183-202.
- [27] Tian, N. and Zhang, Z.G. (2006). *Vacation Queueing Models : Theory and Applications*, SpringerVerlag, New York.
- [28] Yue, D., Yue, W. and G. Zhao. (2014). Analysis of an $M/M/c$ queueing system with impatient customers and synchronous vacations, *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2014, Article ID 893094, 11 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/893094>
- [29] Yue, D., Yue, W. and Zhao, G. (2016). Analysis of an $M/M/1$ queue with vacations and impatience timers which depends on the server's states, *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol. 12, No. 2, pp. 653-666.
- [30] Zhang, Z. G. and Tian, N. (2003a). Analysis of queueing system with synchronous single vacation for some servers, *Queueing Systems*, Vol. 45, pp. 161-175.
- [31] Zhang, Z. G. and Tian, N. (2003b). Analysis on queueing systems with synchronous vacations of partial servers, *Performance Evaluation*, Vol. 52, No. 4, pp. 269-282.
- [32] Zhang, Y., Yue, D. and Yue, W.(2005). Analysis of an $M/M/1/N$ queue with balking, reneging and server vacations, *International Symposium on OR and Its Applications*, pp. 37-47.

ملخص

في أطروحة الماستر هذه نقوم بتحليل نموذج قوائم الانتظار مع العديد من الخوادم، و ردود فعل Bernoulli، والعطلات، والتخلي عن العملاء المهجورين. نحصل على الحلول الثابتة للنظام المدروس باستخدام وظيفة توليد الاحتمالات (PGFs). بعد ذلك، نقدم التحليل الاقتصادي للنموذج. بالإضافة إلى ذلك، تم تقديم بعض النتائج العددية من أجل إظهار تأثير معلومات النظام المختلفة على مقاييس الأداء للنموذج المعروف.

الكلمات المفتاحية:

نماذج الطابور، الإجازات، العملاء غير الصبورين، مقاييس الأداء.

Résumé

Dans ce mémoire de Master, nous analysons un modèle de files d'attente avec plusieurs serveurs, Bernoulli feedback, vacances, dérobade, abandon des clients abandonnés. Nous obtenons les solutions stationnaires pour le système considéré en utilisant la fonction génératrice des probabilités (PGFs). Ensuite, nous dérivons différentes mesures de performances du système. De plus, nous présentons l'analyse économique du modèle. En outre, certains résultats numériques sont présentés afin de montrer l'impact de différents paramètres du système sur les mesures de performance du modèle présenté.

Mots-Clés:

Modèles de files d'attente, vacances, clients impatientes, mesures de performances.

Abstract

In this Master's thesis, we analyze a queuing model with multiple servers, Bernoulli feedback, vacation and impatient customers, abandonment of abandoned customers. We obtain the stationary solutions for the considered system using the probability generating function (PGFs). Next, We derive various system performance metrics. In addition, we present this economic analysis of the model. In addition, some numerical results are presented in order to show the impact of different system parameters on the performance measures of the presented model.

Key words:

Queueing models, vacation, impatient customers, performance measures.