République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MASTER EN

MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algeber et géométré

Thème

CALCUL DE FOX ET APPLICATION

PAR

ABIDI SAAD Soumia

Devant le jury :

- Mr. Salim Badidja Université Kasdi Merbah- Ouargla Président
- Mr. Mohamed Tayeb Benmoussa Université Kasdi Merbah - Ouargla Examinateur
- Mr. Yassine Guerboussa Université Kasdi Merbah - Ouargla Examinateur
- Mohamed Amine BAHAYOU M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla Rapporteur

2021/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont élevé et ont veillé sur moi, par leur droiture : Mon père et ma mère qui me sont très chers

À mes frères et sœurs et à tous les membres de ma famille qui ont joué un grand rôle pour me motiver et me remonter le moral

À mes amies de mon chemin qui m'ont accompagné dans mon voyage

À mon encadreur, Monsieur Mohamed Amine Bahayou

À tout les profs qui m'ont enseigné, pour m'avoir guidé et dirigé pour atteindre ce que je suis et à chaque âme qui a partagé ses prières avec moi.

Soumia Abidi Saad.

Remerciements

Par-dessus tout, ma plus grande gratitude va à Dieu Tout-Puissant, qui m'a permis de mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon superviseur, Monsieur Mohamed Amine Bahayou, pour son travail sincère avec moi, sa patience, sa gentillesse et sa patience avec moi et son bon traitement.

Je voudrais remercier également : Monsieur Salim Badidja pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire et je tiens également à remercier le Monsieur Mohamed Tayeb Benmoussa.

Je voudrais également adresser mes remerciements particuliers à Monsieur Yassine Guerboussa, pour sa gentillesse à mon égard.

Je remercie tous mes professeurs.

Table des matières

Introduction **4**

1 Introduction au calcul de Fox **5**

1.1 Anneau de groupe 5

1.1.1 Propriété universelle 6

1.1.2 Augmentation 7

1.2 Dérivation 7

1.3 Calcul de Fox 9

1.3.1 Augmentations et extension 9

2 Représentations de groupes de surfaces **11**

2.1 Structure géométrique 11

2.2 Dimension de l'espace tangent de Zariski 15

3 Annexe **22**

3.1 Groupes algébriques 22

3.2 Cohomologie des groupes et des algèbres de Lie 24

Bibliographie **26**

Introduction

Le Théorème qui nous intéresse, s'énonce comme suit :

Structure de l'espace des représentations

1. Si G est un groupe algébrique, alors Hom(π, G) est une variété différentielle avec des singularités.

2. L'espace tangent à Hom(π, G) en un point non singulier ρ, s'identifie à $Z^1\left(\pi, \mathfrak{g}_\rho\right)$ l'espace vectoriel des 1-cocyles à valeur dans l'algèbre de Lie de G pour la représentation linéaire :
$$\pi \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

3. Les points réguliers de Hom(π, G), sont les représentations dont les images ont des centralisateurs égaux au centre de G.

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre sur le calcul de Fox. Nous introduisons les exemples et les notions préliminaires nécessaires pour la suite.

2. Deuxième chapitre, consacré à l'étude de la structure géométrique de l'espace des représentations d'un groupe de surface à valeur dans un groupe, ainsi qu'a l'étude de l'espace de modules associé.

3. Une annexe qui regroupe des notions de géométrie algébrique, de topologie et éléments de cohomologie de groupes et des algèbres de Lie ; notions nécessaires à l'étude de l'espace de modules associé a un groupe de surface.

Nous terminons par une petite bibliographie de la littérature qui traite ce thème plus en détail.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AU CALCUL DE FOX

1.1 Anneau de groupe

Un anneau de groupe est un module libre et en même temps un anneau, construit de façon naturelle à partir de n'importe quel anneau et de n'importe quel groupe donné. En tant que module libre, l'anneau des scalaires est l'anneau donné et sa base est l'ensemble des éléments du groupe donné. Comme un anneau, sa loi d'addition est celle du module libre et sa multiplication étend «par linéarité» la loi de groupe donnée sur la base.

Si l'anneau est commutatif, l'anneau de groupe est également appelé algèbre de groupe, car il s'agit bien d'une algèbre sur l'anneau donné. La notion d'anneaux de groupe est nécessaire pour développer le calcul de Fox.

Définition 1.1.1. *Soit G un groupe, noté multiplicativement, et soit R un anneau unifère (i.e. possédant un élément neutre 1_R pour le produit). L'anneau de groupe de G sur R, que nous noterons $R[G]$, est l'ensemble des applications $f : G \to R$ à support fini, i.e.*

$$R[G] = \{f : G \to R,\ \text{Supp} f \text{ est fini}\},$$

où $\text{Supp} f = \{g \in G,\ f(g) \neq 0\}$.

L'ensemble $R[G]$ est muni de la structure de R-module suivante :

- *La somme qui fait de $R[G]$ un groupe abélien est définie par*

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),\ \forall x \in G.$$

- *Le produit d'un élément de $R[G]$, par un scalaire de R est définie par*

$$(r \cdot f)(x) := rf(x),\ \forall x \in G.$$

Pour munir le groupe additif $R[G]$ d'une structure d'anneau, on considère le produit «de convolution» suivant :

$$(f \cdot g)(x) := \sum_{uv=x} f(u)g(v) = \sum_{u \in G} f(u)g\left(u^{-1}x\right).$$

On peut vérifier que les opérations ci-dessus sont bien définies et que $R[G]$ est à la fois un anneau et un module sur R.

Une autre façon équivalente pour définir l'anneau de groupe $R[G]$ est de considérer ses éléments comme des combinaisons linéaires formelles (à coefficients dans R) des éléments de G et dont la multiplication est donnée sur ces éléments de base par la multiplication dans G. Plus précisément, un élément de $R[G]$ est de la forme

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g$$

avec $\lambda_g \in R$ est à support fini.

La somme et le produit sont alors définis comme suit

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} \beta_g g\right) := \sum_{g\in G} \left(\alpha_g + \beta_g\right) g$$

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) := \sum_{u\in G} \left(\sum_{gh=u} \alpha_g \beta_h\right) u.$$

Exemple 1.1.1. *Soit $G = C_3 = \{1, a, a^2\}$ le groupe cyclique d'ordre 3 et soit $R = \mathbb{C}$ le corp des nombres complexes. Les éléments de $\mathbb{C}[G]$ sont de la forme $r = z_0 1 + z_1 a + z_2 a^2$, où z_0, z_1 et z_2 sont dans $\mathbb{C}$. La somme de deux éléments de $\mathbb{C}[G]$ est donnée par*

$$(z_0 1 + z_1 a + z_2 a^2) + (w_0 1 + w_1 a + w_2 a^2) = (z_0 + w_0)1 + (z_1 + w_1)a + (z_2 + w_2)a^2$$

et leur produit est

$$\begin{aligned}(z_0 1 + z_1 a + z_2 a^2)(w_0 1 + w_1 a + w_2 a^2) &= (z_0 w_0 + z_1 w_2 + z_2 w_1)\, 1 \\ &\quad + (z_0 w_1 + z_1 w_0 + z_2 w_2)\, a + (z_0 w_2 + z_2 w_0 + z_1 w_1)\, a^2.\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1. *Le groupe G et l'anneau R sont considérés comme des parties de $R[G]$ par les plongements :*

$$\begin{array}{rccc} i_G : & G & \hookrightarrow & R[G] \\ & g & \longmapsto & 1_R \cdot g \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} i_R : & R & \hookrightarrow & R[G] \\ & r & \longmapsto & r \cdot 1_G \end{array}$$

1.1.1 Propriété universelle

Soit R un anneau unifère, soit G un groupe et soit A un anneau unifère dont le groupe de ses éléments inversibles est noté A^*. Pour tout homomorphisme de groupes $\varphi : G \to A^*$ il existe un unique morphisme d'anneaux $\tilde{\varphi} : R[G] \to A$ qui prolonge φ, i.e. on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i_G"'] & A \\ R[G] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Explicitement, $\tilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) = \sum_{g\in G}\alpha_g\varphi(g)$.

Remarque 1.1.2. *De façon similaire, tout morphisme d'anneaux $\varphi : R \to A$, possède un unique prolongement (comme morphisme d'anneaux $\tilde{\varphi} : R[G] \to A$) en posant :*

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) = \sum_{g\in G}\varphi(\alpha_g)g.$$

1.1.2 Augmentation

À tout anneau de groupe $R[G]$ est associé un morphisme d'annaux dit *augmentation*, défini par

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon : & R[G] & \longrightarrow & R \\ & \sum_{g\in G}\lambda_g g & \longmapsto & \sum_{g\in G}\lambda_g \end{array}$$

Le noyau de ε, noté I_ε, est un idéal de $R[G]$ appelé *idéal d'augmentation*. Il est engendré par les éléments de $\{g - 1_G,\ g \in G\}$.

1.2 Dérivation

Soient G un groupe et M un G-module. Une dérivation de G à valeur dans M est une application $\phi : G \longrightarrow M$ tell que, pour tout $g, h \in G$,

$$\phi(gh) = \phi(g) + g\cdot\phi(h).$$

Les dérivations sont aussi parfois appelées homomorphismes croisés.

Exemples 1.2.1.

1. *Si l'action de G sur M est trivial, i.e. $g\cdot m = m$ pour tout $g \in G$ et tout $m \in M$, alors une dérivation est simplement un homomorphisme de G dans M.*

2. *Pour tout $m \in M$ l'application $\varphi_m : G \to M$ définie par*

$$\varphi_m(g) = g\cdot m - m$$

est une dérivation. En effet, une dérivation n'est autre qu'un 1-cocyle pour la cohomologie de G à valeur dans M et φ_m est un 1-cobord.

Le lemme suivant donne une définition équivalente d'une dérivation et justifie l'appellation *homomorphisme croisé*

Lemme 1.2.1. *Soient G un groupe et M un G-module. Une application $\varphi : G \to M$ est une dérivation, si et seulement si, l'application*

$$(\mathsf{Id}, \varphi) : G \longrightarrow G \ltimes M,$$

est un homomorphisme de groupes.

Démonstration. Rappelons la structure de groupe du produit semi-direct $G \ltimes M$. C'est la structure de groupe sur $G \times M$ définie par le produit

$$(g, x) \cdot (h, y) := (gh, x + g \cdot y)\,.$$

L'application (Id, φ) est un homomorphisme de groupes, si et seulement si, pour tout $g, h \in G$ on a

$$(gh, \varphi(gh)) = (g, \varphi(g)) \cdot (h, \varphi(h)) = (gh, \varphi(g) + g \cdot \varphi(h))\,.$$

□

On déduit de ce lemme la proposition importante suivante

Proposition 1.2.1. *Soit F_n le groupe libre à n générateurs $\{x_1, ..., x_n\}$. Soit M un F_n-module et soient $m_1, ..., m_n \in M$. Alors il existe une unique dérivation $\varphi : F_n \to M$, telles que $\varphi(x_i) = m_i$, pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Démonstration. L'application $\phi : \{x_1, ..., x_n\} \to F_n \ltimes M$ définie par $\phi(x_i) = (x_i, m_i)$, pour tout $i = 1, ..., n$ possède un unique prolongement en un homomorphisme de groupes φ de F_n dans $F_n \ltimes M$ grâce à la propriété universelle du groupe libre F_n :

$$\begin{tikzcd}
\{x_1, ..., x_n\} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook, "i"'] & F_n \ltimes M \\
F_n \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Si on note $\alpha = \mathsf{proj} \circ \varphi$, où $\mathsf{proj} \circ \varphi : F_n \times M \to M$ est la deuxième projection, alors on déduit du lemme ci-dessus que $\alpha : F_n \to M$ est une dérivation telle que $\alpha(x_i) = \mathsf{proj}(x_i, m_i) = m_i$, pour tout $i = 1, .., n$. □

1.3 Calcul de Fox

Dérivée libre

Soit F_n le groupe libre à n générateurs $\{x_1, ..., x_n\}$ et soit $\mathbb{Z}[F_n]$ sont anneau intégral.

Une *dérivée libre* sur F_n est une dérivation $\phi : F_n \longrightarrow \mathbb{Z}[F_n]$. Dénotons l'ensemble de toutes les dérivées libres sur F_n par Der_n. Il est clair que Der_n est stable par addition. De plus, si $\phi \in \mathrm{Der}_n$ et $\tau \in \mathbb{Z}[F_n]$, alors l'application $\phi^{(\tau)} : F_n \longrightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ définie par la formule

$$\phi^{(\tau)}(g) = \phi(g) \cdot \tau$$

est une dérivée libre. Ainsi Der_n est un $\mathbb{Z}[F_n]$-module à droite. Ses éléments les plus importants sont les dérivées libres $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ pour $1 \leq i \leq n$ défini par la formule

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme suivant résume quelques propriétés importantes des dérivés libres.

Lemme 1.3.1. *Soit D une dérivée libre.*

1. $D(1) = 0$.

2. *Pour $x \in F_n$, $D(x) = -x^{-1}D(x)$. En particulier, pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j^{-1}) = \begin{cases} -x_j^{-1} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On a $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$, d'où $D(1) = 0$. Pour le deuxième point, il suffit de remarquer que

$$0 = D(x^{-1}x) = D(x^{-1}) + x^{-1}D(x),$$

donc $D(x^{-1}) = -x^{-1}D(x)$. □

1.3.1 Augmentations et extension

Soit $\varepsilon : \mathbb{Z}[F_n] \to \mathbb{Z}$ l'homomorphisme d'augmentation. Toute dérivation $d \in \mathrm{Der}_\mathrm{n}$, possède un unique prolongement linéaire à une application $D : \mathbb{Z}[F_n] \to \mathbb{Z}[F_n]$. En effet, comme $\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in F_n$, alors il suffit de définir le prolongement D telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[F_n]$:

$$D(xy) = D(x)\varepsilon(y) + xD(y).$$

Remarque 1.3.1. *L'application $D : \mathbb{Z}[F_n] \to \mathbb{Z}[F_n]$ définie par $D(x) = x - \varepsilon(x)$ est une dérivation. En effet, $D(xy) = xy - \varepsilon(x)\varepsilon(y) = (x - \varepsilon(x))\varepsilon(y) + x(y - \varepsilon(y)) = D(x)\varepsilon(y) + xD(y)$.*

Formule fondamentale de Fox

On déduit de la proposition (1.2.1) *la formule fondamentale de Fox*

Proposition 1.3.1. *Pour tout $w \in \mathbb{Z}[F_n]$, on a*

$$w = \varepsilon(w) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot (x_i - 1) \tag{1.1}$$

Démonstration. Les deux dérivations D_1 et D_2 définies, pour tout $w \in \mathbb{Z}[F_n]$, par

$$D_1(w) = w - \varepsilon(w) \quad D_2(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot (x_i - 1)$$

coïncident sur F_n, car $D_1(x_i) = x_i - 1 = D_2(x_i)$ pour tout $i = 1, ..., n$. D'où $D_1 = D_2$, par l'unicité donnée dans la proposition (1.2.1). □

Le lemme suivant montre comment associer à toute dérivation de Fox un homomorphisme de groupes qui compte le nombre d'occurrence d'une lettre dans mot donné dans F_n.

Lemme 1.3.2. *Pour toute dérivation d de F_n, l'application $\varepsilon \circ d : F_n \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme.*

Démonstration. Pour $x, y \in F_n$ on a

$$\varepsilon\left(d(xy)\right) = \varepsilon(d(x) + xd(y)) = \varepsilon(d(x)) + \varepsilon(x)\varepsilon(d(y)) = \varepsilon(d(x)) + \varepsilon(d(y)).$$

L'homomorphisme $\varepsilon \circ \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ appliqué à tout mot w de F_n donne la somme totale des exposants de la lettre x_i dans w. □

On résume ici quelques calculs utiles pour de la démonstration du Théorème de Goldman. Pour toutes lettres A, B dans le groupe libre F_n on a :

$$\begin{aligned}
&(\partial/\partial A)(A^{-1}) = -A^{-1}, \qquad (\partial/\partial A)(AB) = I, \qquad (\partial/\partial B)(AB) = A,\\
&(\partial/\partial A)(ABA^{-1}) = I - ABA^{-1}, \qquad (\partial/\partial B)(ABA^{-1}) = A,\\
&(\partial/\partial A)(ABA^{-1}B^{-1}) = I - ABA^{-1}, \quad (\partial/\partial B)(ABA^{-1}B^{-1}) = A - ABA^{-1}B^{-1}.
\end{aligned}$$

REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE SURFACES

2.1 Structure géométrique

Soit S une surface fermée orientée de genre $g \geq 1$. Son groupe fondamental, noté par π, est appelé *groupe de surface* et possède la présentation à $2g$ générateurs suivante :

$$\pi = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g] = 1 \rangle , \tag{2.1}$$

où $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ est le commutateur de x et de y. Voir [3] (page 264).

Représentations d'un groupe de surface

Soit G un groupe et soit S une surface fermée orientée de genre $g \geq 1$. L'ensemble de toutes les représentations de π dans G est l'ensemble des homomorphismes de π vers G. On notera cet ensemble par Hom(π, G).

Exemple 2.1.1.

1. *Le groupe de surface de la sphère* S^2 *est réduit à un point, puisque* S^2 *est simplement connexe. Donc* Hom$(\pi_1(\mathrm{S}^2), G)$ *est réduit à un point.*

2. *Si G est abélien alors* Hom$(\pi, G) \cong G^{2g}$*. En particulier, si $G = \mathbb{R}$ alors* Hom(π, G) *est une variété différentielle de dimension $2g$.*

Nous allons voir que Hom(π, G) n'est pas toujours une variété. On a cependant le résultat important suivant :

Structure géométrique

Si G est un groupe algébrique linéaire alors Hom(π, G) est une variété algébrique.

Démonstration. Rappelons qu'un groupe algébrique linéaire est un sous-groupe fermé du groupe linéaire GL$(n, \mathbb{C})$, pour la topologie de Zariski, (voir annexe).

Si $\pi = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_d \mid R(\gamma_1, \dots, \gamma_d) \rangle$, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}(\pi, G) \to \quad & G^d \\ \rho \mapsto & \left(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_d)\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

est injective, puisque deux homomorphismes qui coïncident sur une partie génératrice sont identiques. L'image de Φ est constituée des d-uplets $(g_1, \dots, g_d)$ vérifiant dans G, les équations

$$R(g_1, \dots, g_d) = 1.$$

Ce sont des équations polynomiales en les variables $(g_1, \dots, g_d)$. Il en résulte que $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ s'identifie à un sous ensemble algébrique (fermé pour la topologie de Zariski) de G^d. La structure algébrique est indépendante de l'ensemble des générateurs.

En terme de la présentation standard (2.1) $R = [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]$ détermine l'application

$$\begin{array}{cccc} R : & G^{2g} & \longrightarrow & G \\ & (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) & \longmapsto & x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1} \end{array} \tag{2.3}$$

de sorte que $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ s'identifie au sous ensemble $R^{-1}(1_G)$ de G^{2g}. □

Exemple 2.1.2.

1. *Soient $\pi = \pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ et $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$, le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}$:*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ x > 0, \ y \in \mathbb{R} \right\} \cong]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

   Comme $\pi = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\pi, G) &\cong \{(A, B) \in G \times G, AB = BA\} \\ &\cong \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \ x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_2 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

   C'est une variété algébrique de dimension 3 (ensemble des zéros du polynôme $P = x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_2 - x_4$) quit n'est pas une variété, à cause du point singulier $(1, 0, 1, 0)$ (qui correspond au point $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ de G^2).

2. *Si $\pi = \pi_1(S_g) = \langle x_1, \dots, x_{2g} \mid [x_1, x_2] \dots [x_{2g-1}, x_{2g}] = 1 \rangle$, et G est le groupe de Heisenberg de dimension 3*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3,$$

alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\pi, G) &\cong \left\{(A_1, \ldots, A_{2g}) \in G^{2g}, [A_1, A_2] \ldots [A_{2g-1}, A_{2g}] = 1\right\} \\
&\cong \left\{(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{2g}, y_{2g}, z_{2g}) \in \mathbb{R}^{6g}, \sum_{i=1}^{2g} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i = 0\right\} \\
&\cong \mathbb{R}^{2g} \times Z(Q)
\end{aligned}$$

où $Z(Q)$ est l'ensemble des zéros de la forme quadratique

$$Q = \sum_{i=1}^{2g} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i.$$

On déduit dans ce cas que l'ensemble des points singuliers de la variété algébrique $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ *est précisément* $\mathbb{R}^{2g} \times \{0_{\mathbb{R}^{4g}}\}$ *(qui est d'intérieur vide).*

Comme on vient de le voir, la variété algébrique $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ n'est pas toujours une variété différentielle (à cause de possibles points singuliers). Pour comprendre sa structure locale, on va étudier ses points non singuliers.

Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ un homomorphisme fixé et considérons l'action de π sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G définie pour $\gamma \in \pi$ et $v \in \mathfrak{g}$ par :

$$\gamma \cdot v := \mathrm{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot v, \tag{2.4}$$

où Ad est l'action adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. En d'autre termes, on considère la représentation linéaire de π dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (si $\dim \mathfrak{g} = n$), i.e. l'homomorphisme composé :

$$\pi \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

L'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ avec sa structure de π-module, ainsi définie, sera noté $\mathfrak{g}_\rho$.

Proposition 2.1.1. *Soit ρ_t une famille d'homomorphismes au voisinage de ρ telle que pour la fonction $u : \pi \to \mathfrak{g}$ et pour tout $x \in \pi$, ρ_t est donné par :*

$$\rho_t(x) = \exp\left(tu(x) + \mathrm{O}(t^2)\right) \rho(x).$$

Alors u vérifie, pour tout $x, y \in \pi$:

$$u(xy) = u(x) + \mathrm{Ad}(\rho(x)) \cdot u(y) \tag{2.5}$$

*(**??**) signifie que u est un 1-cocycle.*

Démonstration. Pour montrer que u est un 1-cocycle on utilise le fait que ρ_t est un homomorphisme de groupes, c'est-à-dire

$$\rho_t(xy) = \rho_t(x)\rho_t(y). \tag{2.6}$$

On a

$$\rho_t(xy) = \exp\left(tu(xy) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(xy) = \exp\left(tu(xy) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(x)\rho(y)$$

et

$$\rho_t(x)\rho_t(y) = \exp\left(tu(x) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(x)\exp\left(tu(y) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(y).$$

Alors

$$\begin{aligned}\exp\left(tu(xy) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(xy) = \rho_t(xy) &= \rho_t(x)\rho_t(y)\\ &= \exp\left(tu(x) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(x)\exp\left(tu(y) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(y)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp\left(tu(xy) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(x)\rho(y) &= \exp\left(tu(x) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(x)\exp\left(tu(y) + \mathsf{O}(t^2)\right)\rho(y)\\ \exp(t(u(xy) - u(x)) + \mathsf{O}(t^2)) &= \rho(x)\exp(tu(y) + \mathsf{O}(t^2))\rho(x)^{-1}\\ &= \exp\left[\mathsf{Ad}(\rho(x))(tu(y) + \mathsf{O}(t^2))\right]\end{aligned}$$

Car par naturalité de l'application exponentielle, si $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes de Lie, alors $\varphi_* := D_e\varphi$ est un morphisme d'algèbres de Lie et, pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$\varphi(\exp X) = \exp(\varphi_* X).$$

Ce qu'on peut résumer dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ {\scriptstyle \exp_G}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp_H} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{h} \end{array}$$

Donc pour tout $g \in G$ et tout $v \in \mathfrak{g}$, $g \exp g^{-1} = \exp(\mathsf{Ad}(g)(v))$. Comme l'application exponentielle est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un voisinage du neutre alors, pour tout t petit, $t(u(xy) - u(x)) + O(t^2)$ est dans un voisinage de 0 et donc

$$\exp(t(u(xy) - u(x)) + \mathsf{O}(t^2)) = \exp\left[\mathsf{Ad}(\rho(x))(tu(y + \mathsf{O}(t^2))\right]$$

et par suite,

$$t(u(xy) - u(x)) + \mathsf{O}(t^2) = \mathsf{Ad}(\rho(x))\left(tu(y) + \mathsf{O}(t^2)\right) = t\mathsf{Ad}(\phi(x)) \cdot u(y) + \mathsf{O}(t^2).$$

Il en résulte que u est un 1-cocycle

$$u(xy) = u(x) + \mathsf{Ad}(\phi(x)) \cdot u(y). \tag{2.7}$$

Inversement, si $u : \pi \to \mathfrak{g}$ est un 1-cocycle, c'est-à-dire satisfait (2.7), alors tout ϕ_t satisfaisant (2.6) satisfait (2.5) au premier ordre, donc l'espace tangent de Zariski de Hom(π, G) au point ρ s'identifie à l'espace vectoriel $Z^1(\pi, \mathfrak{g})$ des 1-cocycles de la cohomologie du groupe π à valeur dans $\mathfrak{g}$. □

2.2 Dimension de l'espace tangent de Zariski

Soit $\phi : F_n \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire du groupe libre à n générateurs $x_1, ..., x_n$ sur un espace vectoriel V. Une telle représentation est entièrement déterminée par le choix de n automorphismes linéaires $\phi(x_1), ..., \phi(x_n)$ de V.

On peut étendre (par linéarité) ϕ en un unique morphisme d'anneaux $\Phi : \mathbb{Z}[F_n] \to \mathrm{End}(V)$ par

$$\Phi\left(\sum_{\sigma \in F_n} n_\sigma \, \sigma\right) := \sum_{\sigma \in F_n} n_\sigma \, \phi(\sigma).$$

Soit $u : F_n \to V$ un 1-cocycle. Par linéarité, u s'étend en une application linéaire $U : \mathbb{Z}[F_n] \to V$ qui vérifie, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}[F_n]$, l'identité :

$$U(ab) = U(a)\varepsilon(b) + \Phi(a)\,(U(b))\,.$$

En appliquant la formule fondamentale de Fox (1.1), on obtient pour tout $w \in \mathbb{Z}[F_n]$

$$\begin{aligned} U(w) = U(w - \varepsilon(w)) &= U\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_i - 1)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} U\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\varepsilon(x_i - 1) + \Phi\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)(U(x_i - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)(U(x_i))\,. \end{aligned}$$

Réciproquement, pour tout $(u_1, ..., u_n) \in V^n$, l'application $u : F_n \to V$ définie par

$$u(w) = \sum_{i=1}^{n} u\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) u_i \tag{2.8}$$

est un 1-cocycle. Ce qui donne un isomorphisme d'espaces vectoriels entre V^n et $Z^1(F_n, V_\phi)$.

ON peut utiliser (2.8) pour calculer la dérivée de Fox de l'*application mot*. Soit dans F_n un mot $w(x_1, ..., x_n)$ en les variables $x_1, ..., x_n$ et soit G un groupe de Lie. On définit l'application mot $w : G^n \to G$ par substitution. Par exemple, si $w = x_1 x_2^3 x_5^{-2}$, l'application est

$$\begin{array}{rccc} w : & G \times \cdots \times G & \longrightarrow & G \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 x_2^3 x_5^{-2}. \end{array}$$

Identifions l'espace tangent à G en tout point g à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs invariants à gauche, en étendant chaque vecteur tangent v à G en g à l'unique champ de vecteurs invariant à gauche égale à v au point g. En d'autres termes, en utilise l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} L_g^* : & T_g G & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & v & \longmapsto & \left(D_e L_g\right)^{-1}(v) \end{array}$$

où L_g est la translation à gauche de G. Avec cette identification, la différentielle dw en un point $(g_1, ..., g_n)$ de l'application mot est une application linéaire $dw : \mathfrak{g}^n \to \mathfrak{g}$. Plus précisément, on utilise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_{g_1}G \times ... \times T_{g_n}G & \xrightarrow{D_{(g_1,\dots,g_n)}w} & T_{w(g_1,\dots,g_n)}G \\ {\scriptstyle L^*_{g_1}\times\ldots\times L^*_{g_n}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle L^*_{w(g_1,\dots,g_n)}} \\ \mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad dw \quad} & \mathfrak{g} \end{array}$$

C'est-à-dire

$$dw(u_1, ..., u_n) = L^*_{w(g_1,\dots,g_n)} \circ D_{(g_1,\dots,g_n)} w \left(L_{g_1 *} u_1, ..., L_{g_n *} u_n \right),$$

de sorte que si $w = x_i$, alors $dw(u_1, ..., u_n) = u_i$.

Tout point $(g_1, ..., g_n)$ de G^n détermine un unique homomorphisme $\rho : F_n \to G$. Comme

$$T_\rho \mathsf{Hom}(F_n, G) = Z^1(F_n, \mathfrak{g}_{\mathsf{Ad}_\rho}) \cong \mathfrak{g}^n,$$

alors, pour tout $(u_1, ..., u_n) \in \mathfrak{g}^n$, l'application linéaire $u : F_n \to \mathfrak{g}_{\mathsf{Ad}_\rho}$ définie par $u(w) = dw(u_1, ..., u_n)$ est un cocycle qui associe à tout x_i le vecteur $u_i \in \mathfrak{g}$. Par la formule fondamentale de Fox (1.1), $dw(u_1, ..., u_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right) u_i$. Nous pouvons réécrire cela sous une forme plus suggestive. Pour tout $i = 1, ..., n$ soit dx_i la projection $\mathfrak{g}^n \to \mathfrak{g}$ sur la $i^{\text{ème}}$ composante, qui est aussi la différentielle de l'application mot x_i. On peut donc écrire :

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i \tag{2.9}$$

Soit G un groupe de Lie et soit π un groupe à n générateurs, qui admet donc une présentation $F_n/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est un sous-groupe normal du groupe libre à n générateurs F_n, composé de relations entre les générateurs de π.

Tout homomorphisme $\rho : \pi \to G$ correspond à l'homomorphisme $\varphi : F_n \to G$ qui envoie $\mathcal{R}$ sur l'identité de G. En effet, la propriété universelle du groupe quotient donne

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\text{proj}"'] & G \\ \pi = F_n / \ker \varphi \arrow[ur, hook, dashed, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

De la même manière si V est un π-module (et donc un F_n-module) les cocycles $\pi \longrightarrow V$ correspondent bijectivement aux cocycles $F_n \longrightarrow V$ qui sont nuls sur $\mathcal{R}$. Il s'ensuit que l'espace tangent de Zariski à Hom$(\pi, G) \subset G^n$ en $\rho \in$ Hom(π, G) est le sous-espace

$$Z^1(\pi, \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) = \left\{ (u_1, ..., u_n) \in \mathfrak{g} \mid \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ad}\left(\rho(\partial_i R)\right) \cdot u_i = 0, \quad \text{pour tout } R \in \mathcal{R} \right\}.$$

Nous allons utiliser le calcul de Fox pour calculer la dimension de l'espace tangent de Zariski de Hom(π, G), pour les groupes de Lie G qui admettent des métriques (pseudo riemanniennes) Ad-invariantes.

Définition 2.2.1. *Soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et* Ad*-invariante. Cela signifie une forme bilinéaire symétrique :*

$$\langle ., . \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R},$$

non dégénérée et vérifie, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ et tout $g \in G$:

$$\left\langle \mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y \right\rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Exemple 2.2.1.

1. *L'algèbre de Lie du groupe linéaire avec sa forme :*

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}(XY).$$

2. *La forme de Killing d'une algèbre de Lie semi-simple (ou généralement, une algèbre de Lie réductive).*

Avant d'énoncer et de re-démontrer le théorème de Goldman, on a besoin d'un certain nombre de lemmes.

Lemme 2.2.1. *Soit A une partie (non vide) d'un groupe de Lie G. Alors*

1. *Le centralisateur de A dans G défini par :*

$$C_G A = \{g \in G, \; ga = ag, \; \text{pour tout } a \in A\}$$

est un sous-groupe de Lie de G.

2. *L'algèbre de Lie du centralisateur $C_G A$ est donnée par :*

$$\text{Lie}\,(C_G A) = \{\xi \in \mathfrak{g},\ \text{Ad}_a \xi = \xi,\ \textit{pour tout } a \in A\} = \bigcap_{a \in A} \ker(\text{Ad}_a - I).$$

Démonstration.

1. Le centralisateur $C_G A$ est un sous-groupe fermé, donc un sous-groupe de Lie de G.

2. À partir de la caractérisation des sous algèbres de Lie, on a

$$\begin{aligned}\text{Lie}\,(C_G A) &= \{\xi \in \mathfrak{g},\ \exp t\xi \in C_G A\} \\ &= \left\{\xi \in \mathfrak{g},\ a \exp t\xi\, a^{-1} = \exp t\xi,\ \text{pour tout } a \in A\right\} \\ &= \{\xi \in \mathfrak{g},\ \text{Ad}_a \xi = \xi,\ \text{pour tout } a \in A\},\end{aligned}$$

Où on a dérivé en $t = 0$ l'égalité : $a \exp t\xi\, a^{-1} = \exp t\xi$.

□

Lemme 2.2.2. *Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire $\langle\,,\rangle$ symétrique et non dégénérée. Soient T et S deux isomorphismes orthogonaux. Alors*

$$(\text{Im}(I - T))^{\perp} = \ker(I - T),\ \textit{et}$$

$$(\text{Im}\, S(I - T))^{\perp} = S\left(\text{Im}(I - T)\right)^{\perp} = S(\ker(I - T)) = \ker\left(I - STS^{-1}\right).$$

Démonstration. Pour tout T orthogonal, on a

$$\begin{aligned}x \in (\text{Im}(I - T))^{\perp} &\Longleftrightarrow \langle x, (I - T)y\rangle = 0,\ \text{pour tout } y \in V. \\ &\Longleftrightarrow \langle (I - T^{-1})x, y\rangle = 0,\ \text{pour tout } y \in V. \\ &\Longleftrightarrow x \in \ker(I - T^{-1})\ (\langle\,,\rangle \text{ est non dégénérée}). \\ &\Longleftrightarrow x \in \ker(I - T)\ (x = T^{-1}(x) \Leftrightarrow x = T(x)).\end{aligned}$$

Si S est aussi orthogonal, alors

$$\begin{aligned}x \in (\text{Im}\, S(I - T))^{\perp} &\Longleftrightarrow \langle x, S(I - T)y\rangle = 0,\ \text{pour tout } y \in V. \\ &\Longleftrightarrow \langle S^{-1}x, (I - T)y\rangle = 0,\ \text{pour tout } y \in V.\end{aligned}$$

Comme S est un isomorphisme, on peut écrire $x = S(z)$ et on a

$$\begin{aligned}\langle S^{-1}x, (I - T)y\rangle = 0,\ \text{pour tout } y \in V &\Longleftrightarrow \langle z, (I - T)y\rangle = 0, \text{pour tout } y \in V. \\ &\Longleftrightarrow z \in (\text{Im}\,(I - T))^{\perp} \\ &\Longleftrightarrow x \in S(\text{Im}\,(I - T))^{\perp}.\end{aligned}$$

D'où l'égalité : $(\text{Im}\, S(I-T))^{\perp} = S\left(\text{Im}(I-T)\right)^{\perp}$.

Montrons la dernière égalité :

$$\begin{aligned} x \in \ker(I - STS^{-1}) &\Longleftrightarrow x - STS^{-1}x = 0 \\ &\Longleftrightarrow S(S^{-1}x - TS^{-1}x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow S^{-1}x - TS^{-1}x = 0 \\ &\Longleftrightarrow (I-T)(S^{-1}(x)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow S^{-1}(x) \in \ker(I-T) \\ &\Longleftrightarrow x \in S(\ker(I-T)). \end{aligned}$$

□

On peut énoncer et démontrer le théorème de Goldman.

Dimension de l'espace tangent de Zariski

Si G est un groupe de Lie qui préserve une forme bilinéaire sur son algèbre de Lie alors. Alors, pour tout $\rho \in \text{Hom}(\pi, G)$,

$$\dim Z^1(\pi, \mathfrak{g}) = (2g-1)\dim G + \dim\ Z(\rho),$$

où $Z(\rho)$ est le centralisateur de $\rho(\pi)$ dans G. En particulier, la dimension de $Z^1(\pi, \mathfrak{g})$ est minimale pour les représentation ρ qui vérifiant :

$$\dim Z(\rho) = \dim Z(G).$$

Démonstration. Nous allons reprendre la preuve du théorème de Goldman (voir [2], pages 204 et 221). Supposons que π est le groupe fondamental d'une surface fermée orientable de genre g. Alors π est engendré par $2g$ générateurs $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ soumis à la relation $R = \prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i]$ où $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Donc $\pi = F_{2g}/\mathcal{R}$ où F_{2g} est le groupe libre sur $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ et $\mathcal{R}$ est le sous-groupe normal engendré par R.

Soit G un groupe de Lie avec une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Ad-invariante fixe sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous démontrons le résultat suivant, qui donnera aisément le théorème ci-dessus :

Proposition 2.2.1. *Le rang de la différentielle $dR : \mathfrak{g}^{2g} \to \mathfrak{g}$ en un point $(A_1, B_1, \ldots A_g, B_g)$ de G^{2g} est égal à la codimension du centralisateur de $\{A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g\}$.*

Démonstration. Par (2.9), l'image $dR\left(\mathfrak{g}^{2g}\right)$ est la somme

$$\sum_{j=1}^{g}\left(\mathrm{Ad}\left(\partial R/\partial A_j\right)(\mathfrak{g})+\mathrm{Ad}\left(\partial R/\partial B_j\right)(\mathfrak{g})\right)$$

donc son orthogonal $dR\left(\mathfrak{g}^{2g}\right)^{\perp}$ est une intersection

$$\bigcap_{j=1}^{g}\left(\mathrm{Ad}\left(\partial R/\partial A_j\right)(\mathfrak{g})^{\perp}\cap\mathrm{Ad}\left(\partial R/\partial B_j\right)(\mathfrak{g})^{\perp}\right).$$

Ici $\partial R/\partial A_j=C_{j-1}\left(I-A_jB_jA_j^{-1}\right)$ et $\partial R/\partial B_j=C_{j-1}\left(A_j-A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1}\right)$ où C_j est le produit des commutateurs $C_j=\prod_{i=1}^{j}[A_i,B_i]$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et Ad-invariante. Ceci signifie que, pour tout $g\in G$, Ad_g est un isomorphisme orthogonal. Le lemme (2.2.2) appliqué à $S=\mathrm{Ad}(C_{j-1})$ et $T=\mathrm{Ad}(A_jB_jA_j^{-1})$ donne :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Im\,Ad}\left(\partial R/\partial A_j\right)\right)^{\perp}&=\left(\mathrm{Im\,Ad}(C_{j-1})\left(I-\mathrm{Ad}(A_jB_jA_j^{-1})\right)\right)^{\perp}\\&=\ker\left(I-\mathrm{Ad}(C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}C_{j-1}^{-1})\right)\end{aligned}$$

où on a noté aussi par Ad l'extension de l'action Adjointe à l'anneau intégral $\mathbb{Z}[F_n]$.

On déduit du lemme (2.2.1) que $\left(\mathrm{Im\,Ad}\left(\partial R/\partial A_j\right)\right)^{\perp}$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de l'élément $C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}C_{j-1}^{-1}$ dans G.

De façon similaire, on a

$$\left(\mathrm{Im\,Ad}\left(\partial R/\partial B_j\right)\right)^{\perp}=\ker\left(I-\mathrm{Ad}(C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1}A_j^{-1}C_{j-1}^{-1})\right),$$

i.e. $\left(\mathrm{Im\,Ad}\left(\partial R/\partial B_j\right)\right)^{\perp}$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de l'élément $C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1}A_j^{-1}C_{j-1}^{-1}$ dans G.

Comme $\left\{C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}C_{j-1}^{-1},C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1}A_j^{-1}C_{j-1}^{-1}\right\}$ engendre le même sous-groupe que $\left\{C_{j-1}A_jC_{j-1}^{-1},C_{j-1}B_jC_{j-1}^{-1}\right\}$, alors

$$\left(\mathrm{Ad}\left(\partial R/\partial A_j\right)(\mathfrak{g})\right)^{\perp}\cap\left(\mathrm{Ad}\left(\partial R/\partial B_j\right)(\mathfrak{g})\right)^{\perp}=\mathrm{Lie}\left(C_G\{C_{j-1}A_jC_{j-1}^{-1},C_{j-1}B_jC_{j-1}^{-1}\}\right).$$

Enfin comme $\left\{A_1,B_1,C_1A_2C_1^{-1},C_1B_2C_1^{-1},\ldots,C_{g-1}A_gC_{g-1}^{-1},C_{g-1}B_gC_{g-1}^{-1}\right\}$ engendre le même sous-groupe que $\left\{A_1,B_1,A_2,B_2,\ldots,A_g,B_g\right\}$ on trouve que

$$dR\left(\mathfrak{g}^{2g}\right)^{\perp}=\mathrm{Lie}\left(C_G\left\{A_1,B_1,A_2,B_2,\ldots,A_g,B_g\right\}\right).$$

Ainsi l'image de la différentielle dR et du centralisateur $C_G\left\{A_1,B_1,A_2,B_2,\ldots,A_g,B_g\right\}$ ont une dimension complémentaire. D'où a preuve de la proposition, et donc du Théorème de Goldman.

□

□

Exemples

Pour $\pi = \pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ (le groupe fondamental du tore), l'espace Hom(π, G) est l'ensemble des couples (A, B) de $G \times G$ qui commutent.

Supposons $G =$ SL$(2, \mathbb{R})$. La forme de Killing de son algèbre est non dégénérée, car elle est semi-simple et, comme toute forme de Killing, elle est Ad-invariante. Pour étudier le couple de matrices de SL$(2, \mathbb{R})$ qui commutent, i.e. Hom$(\mathbb{Z}^2,$ SL$(2, \mathbb{R}))$ on considère $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$

$$f(x_1, \dots, x_8) = (x_1x_4 - x_2x_3, x_5x_8 - x_6x_7, x_2x_7 - x_3x_6,$$
$$x_1x_6 + x_2(x_8 - x_5) - x_4x_6, x_1x_7 + x_3(x_8 - x_5) - x_4x_7)$$

En effet, $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 \end{pmatrix}$ commutent dans SL$(2, \mathbb{R})$ si et seulement si :

$$AB = BA \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_8) = (1, 1, 0, 0, 0).$$

$$D_{(x_1,\dots,x_8)}f = \begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 & -x_7 & -x_6 & x_5 \\ 0 & x_7 & -x_6 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 & 0 \\ x_6 & (x_8 - x_5) & 0 & -x_6 & -x_2 & (x_1 - x_4) & 0 & x_2 \\ x_7 & 0 & (x_8 - x_5) & -x_7 & -x_3 & 0 & (x_1 - x_4) & x_3 \end{pmatrix}.$$

$(x_1, \dots, x_8)$ est un point singulier de f si et seulement si rank$D_{(x_1,\dots,x_8)}f < 5$. Il y a $C_8^3 = 56$ déterminants à calculer. Pour cela, on peut utiliser un site de calcul comme https://matrixcalc.org/en/

On constate que l'étude de Hom$(\mathbb{Z}^2,$ SL$(2, \mathbb{R}))$ est difficile par calcul différentiel et plus facile par le calcul de Fox (par le théorème de Goldman, plus précisément). La thèse de Michiels [4] (pages 48 et 71) contient un nombre intéressants d'exemples.

ANNEXE

3.1 Groupes algébriques

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos et $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n], n \geq 1$ désigne l'algèbre des polynômes à n indéterminés.

Définition 3.1.1. *Soit S une partie de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. L'ensemble algébrique affine défini par S est l'ensemble des zéros de tout les polynômes de S :*

$$\mathcal{V}(S) = \{x \in \mathbb{K}^n, p(x) = 0, \text{ pour tout } p \in S\}.$$

Exemple 3.1.1.

- $\mathcal{V}(\{0\}) = \mathbb{K}^n$.
- $\mathcal{V}(\{1\}) = \emptyset$.
- $\mathcal{V}(\{(X_1 - x_1), \ldots, (X_n - x_n)\}) = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$.

Plus généralement, si I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ on défini

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{K}^n, p(x) = 0, \text{ pour tout } p \in I\}.$$

Proposition 3.1.1. *Soient I et J des idéaux de l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.*

1. *Si $I \subset J$ alors $\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I)$*[1].
2. *Si S une partie de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ et I est l'idéal engendré par S alors $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(S)$.*
3. *$\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I \cap J)$.*
4. *Si $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'idéaux de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ alors*

$$\mathcal{V}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda).$$

[1]Vrai pour tout $I \subset J$, pas forcément des idéaux.

Démonstration.

1. Si $x \in \mathcal{V}(J)$ alors, pour tout $p \in J, p(x) = 0$. En particulier, pour tout $p \in I, p(x) = 0$ et donc $x \in \mathcal{V}(I)$.

2. On a $S \subset \langle S \rangle = I$ et par la propriété précédente $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(S)$. Inversement, soit $x \in \mathcal{V}(S)$ et $p \in I$, Il suffit de montrer que $p(x) = 0$. On a $p = \sum_i p_i q_i$ avec $p_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $q_i \in S$. On a $p(x) = \sum_i p_i(x) q_i(x) = 0$, car tout les q_i sont nuls en x.

3. Comme $IJ \subset I$ et $IJ \subset J$ alors $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(IJ)$. Inversement, soit $x \in \mathcal{V}(IJ)$ supposons $x \notin \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$ alors il existe $p \in I$ et $q \in J$ telle que $p(x) \neq 0$ et $q(x) \neq 0$. Comme $pq \in IJ$ et $pq(x) = p(x)q(x) \neq 0$ alors $x \notin \mathcal{V}(IJ)$.

□

Définition 3.1.2 (Topologie de Zariski). *On défini sur $\mathbb{K}^n$ une topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques affines, appelée topologie de Zariski. En effet, ∅ et $\mathbb{K}^n$ sont fermés. Les points (3) et(4) de la proposition ci-dessus montrent que la réunion finie des fermés est fermés et l'intersection quelconque des fermés est fermés.*

Définition 3.1.3 (Variété Algébrique affine). *Une variété algébrique affine est une sous ensemble algébrique affine de $\mathbb{K}^n$ c'est à dire,un sous ensemble fermé pour la topologie de Zariski. Comme l'algèbre des polynômes est noethérien, alors tout idéal I est de type fini, c'est a dire I est engendré par une famille finie des polynômes $\{f_1, \dots, f_m\}$. Donc tout ensemble algébrique est défini par un nombre fini d'équations*

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_m)$$

tout fermé est intersection fini de $\mathcal{V}(f_i)$. Il revient à dire que toute variété affine est définie par un nombre fini d'équations.

Définition 3.1.4. *Si X et Y sont respectivement des sous-variétés de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, un morphisme de variétés $\varphi : X \to Y$ est une application polynomiale $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ telle que $\varphi(X) \subset Y$. De manière équivalente, il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tel que :*

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$$

avec $x \in X$.

Groupe algébrique

Définition 3.1.5. *Un groupe algébrique linéaire est une variété algébrique affine munie d'une structure de groupe telle que :*

- *la multiplication $G \times G \to G$ est un morphisme de variétés,*
- *l'inverse $G \to G$ est un morphisme de variétés.*

Exemple 3.1.2. *Le groupe additif $(\mathbb{K}, +)$.*

- *Le groupe multiplicatif $(\mathbb{K}^*, .)$.*
- *Le groupe des matrices inversibles $GL(n, \mathbb{K})$ et tout ses sous groupe fermées : le groupe linéaire spécial $SL(n, \mathbb{K})$,le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{K})$, le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n, \mathbb{K})$ sont des groupes algébriques linéaires.*

3.2 Cohomologie des groupes et des algèbres de Lie

Cohomologie des groupes Soient G un groupe qui agit sur un espace vectoriel V,

$$G \times V \longrightarrow V$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

Soit les espaces :

$$C^0(G, V) = V,$$
$$C^k(G, V) = \{ \text{ les applications } \omega : G \times \ldots \times G \longrightarrow V\}.$$

On définit un opérateur $\delta : C^k(G, V) \longrightarrow C^{k+1}(G, V)$, par :

$$(\delta\omega)(g_1, \ldots, g_{k+1}) = g_1 \cdot \omega(g_2, \ldots, g_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^k \omega(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{k+1})$$
$$+(-1)^{k+1}\omega(g_1, \ldots, g_k)$$

- $(\delta\omega)(g) = g \cdot \omega - \omega$, (pour $k = 0$).
- $(\delta\omega)(g, h) = g \cdot \omega(h) - \omega(gh) + \omega(g)$, (pour $k = 1$).

On peut vérifier que δ est un opérateur de cobord, c'est-à-dire $\delta \circ \delta = 0$, ceci permet de définir les espaces de cohomologie :

$$H^k(G, V) = \frac{\text{Ker}\{\delta : C^k(G, V) \to C^{k+1}(G, V)\}}{\text{Im}\{\delta : C^{k-1}(G, V) \to C^k(G, V)\}}$$

On dit que $\omega \in V$ est un 0 -cocycle, pour l'action du groupe G sur V, si

$$g \cdot \omega = \omega, \text{ pour tout } g \in G.$$

On dit qu'une application $\omega : G \to V$ est un 1-cocycle, pour l'action du groupe G sur V, si pour tout $g, h \in G$

$$\omega(gh) = \omega(g) + g \cdot \omega(h) \tag{3.1}$$

et $\omega \in C^k(G, V)$ est un k-cocycle, pour l'action du groupe G sur V, si $\delta\omega = 0$.

Bibliographie

[1] M. Atiyah & R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, 523-615, 1982.

[2] W. Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*. Advances in Mathematics. Vol 54, 200-225, 1984.

[3] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, 2011.

[4] D. Michiels, *Moduli Spaces of Flat Connections*. Master thesis, KU Leuven, 2013.

[5] F. Palesi, *Dynamique sur les espaces de représentations de surfaces non-orientables*. Thèse de Doctorat Grenoble, 2009.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'espace de représentations d'un groupe de surface à valeur dans un groupe de Lie et l'analyse d'un résultat de Goldman [2] qui montre que, sous certaines conditions sur G, l'espace tangent de Zariski de Hom(π, G) peut être étudié et sa dimension peut être calculée à l'aide du calcul de Fox.

Mots clefs : groupe de surface, espace tangent de Zariski, calcul de Fox.

Abstract

The object of this thesis is the study of the space of representations of a surface group with values in a Lie group and the analysis of a result of Goldman [2] which shows that, under certain conditions on G, the Zariski tangent space of Hom(π, G) can be studied and its dimension can be calculated using Fox's calculus.

Keywords : surface group, Zariski tangent space, Fox calculus.