République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ kASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Gurmit fatma zahra

Titre :

Estimation et Convergence des valeurs Extrêmes

Membres du Comité d'Examen :

Dr.Abdul Qader Emara	M.A.A	UMKBo	Président
Dr.Hanane Arbia	M.C.B	UMKBo	Examinateur
Dr.Fatima meddi	M.C.B	UMKo	Rapporteur

Juin 2022

Dédicace

A qui je la préfère à moi et pourquoi pas, elle s'est sacrifiée pour moi, et n'a ménagé aucun effort pour me rendre toujours heureuse (ma mère adorée).

Nous marchons sur les chemins de la vie, et quelqu'un qui contrôle nos esprits reste sur chaque chemin que nous empruntons.

Propriétaire d'un visage bienveillant et de bonnes actions, il ne m'a pas épargné toute sa vie (mon cher père).

D'amour et d'affection, le Très Miséricordieux t'a sauvé, et Dieu t'a donné un lien pour moi (mon fiancé)

A mes sœurs, ma bien-aimée, mon soutien et mon pilier dans ma vie

À mon professeur dans toutes les étapes éducatives et de base et à tous ceux qui m'ont appris une lettre

A mes amis, mes bien-aimés et mes sœurs, que Dieu vous accorde ce qui vous sera bénéfique

Je vous dédie ma thèse...

Prier Dieu Tout-Puissant de prolonger votre vie et de vous bénir avec de bonnes choses.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu le Tout-Puissant pour mon succès et de m'avoir accordé la volonté, la force et le courage d'accomplir ce mémoire. Mes sincères remerciements et gratitude à mon encadreur M FATIMA MEDDI,

pour les précieux conseils et l'assistance tout au long de la période de travail. Mes vifs remerciement vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je suis reconnaissante à tous mes professeurs pendant les années d'études et à ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragée dans la voie que je m'étais fixée. Mes remerciements particuliers à mes parents qui m'ont soutenu, ont cru en moi et m'ont encouragé à atteindre Ce jour. Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction général

La modélisation des événements extrêmes (ouragan, tremblement de terre ou inondation, crues, crises financières, krachs, chocs pétroliers) est aujourd'hui un champ de recherches particulièrement actif, notamment par l'importance de leurs impacts économiques et sociaux. En particulier, depuis quelques années, on note un intérêt croissant pour l'application de la Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE) pour la modélisation de tels événements. Pour une présentation assez complète du sujet, nous renvoyons à l'ouvrage de référence d'Embrechts, Klüppelberg et Mikosch [1997] rappelant les principaux résultats théoriques sur la TVE et à Reiss et Thomas [2001] qui proposent un certain nombre d'exemples pratiques, en finance, en assurance et en sciences environnementale.

L'estimation de l'indice des valeurs extrêmes conditionnel et quantiles extrêmes conditionnels avec covariables fixes (ou aléatoires) a été étudiée assez largement dans la littérature récente de la statistique des valeurs extrêmes, nous citons quelques un à titre d'exemples ; Gardes et Girard (2010,) ont proposé un estimateur de l'indice de queue conditionnel et son quantile extrême conditionnel. En suivant la même logique, Ferrez et al. (2011,) ont fait l'analyse des températures extrêmes avec des paramètres topologiques et Pisarenko et Sornette (2003,) ont étudié les séismes extrêmes avec comme covariables leurs emplacements.

Notre mémoire est réparti comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons les concepts de base des types de convergence Ainsi que les Théorèmes limite.

Le deuxième chapitre est réservé à la définition du théorème des valeurs Extrêmes (Théorème

Fisher et Tippet (1928) ; Gnedenko (1943) et l'estimateur de Hill 1975).

Dans le troisième chapitre, non définissons l'estimateur de l'indice de queue de moment harmonique ainsi son adaptation dans le cas conditionnel par sélectionner l'échantillon conditionnel et donner enfin sa forme finale.

Chapitre 1

Définitions et concepts de base

Proof.

Convergence de suite et des séries de fonctions

■

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans k

1.0.1 Convergence simple

Définition 1.1 *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I si et seulement si, pour tout élément x de I, la suite de scalaires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Définition 1.2 *On dit que la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum U_n(x)$ converge. Cette notion est assez simple de conception, mais peu utile en pratique car ne conservant pas les propriétés des fonctions finies.*

1.0.2 Convergence uniforme

Définition 1.3 *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si, pour tout élément x de I, la suite de scalaires $|f_n - f|_\infty$ converge vers 0.*

Définition 1.4 *sur I pour tout entier n. On dit que la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in N}$ converge uniformément* *vers S sur I. Ceci signifie encore que la suite de fonctions des restes partiels converge uniformément vers* 0 *sur I*

Proposition 1.1 $CVU \Rightarrow CVS$

Remarque 1.1 *1.Cette notion n'a de sens que si la fonction $f_n - f$ est bornée*

2.

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \rangle 0 \exists N \in N \forall n \geq N \forall x \in I \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Remarque 1.2 *3.En pratique, pour prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, on cherche une suite $(u_n)_{n\in N}$ de limite nulle telle que*

$$\forall x \in I \forall n \in N |fn(x) - f(x)| < u_{n,}$$

où u_n est indépendant de x. Pour ce faire, on est souvent amené à étudier les variations de $f_n - f$ sur I.

1.0.3 Cas des séries de fonctions : convergence normale.

Définition 1.5 *On dit que la série de fonctions Σu_n converge normalement sur I si et seulement si, pour tout entier n, la fonction un est bornée sur I et que $\Sigma \|u_n\|_\infty$ converge. Méthode pratique Pour montrer qu'une série de fonction converge normalement sur I il suffit de retrouver une suite $(\alpha_n)_{n\in N}$ telle queue*

$$\forall x \in I \forall n \in N \left| u_n(x) \right| \leq \alpha_n$$

et $\Sigma\alpha_n$ converge ; on peut donc être amené à étudier les variations de la fonction u_n.

Proposition 1.2 $CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$

Remarque 1.3 *: Les réciproques des deux dernières implications sont fausses.*

1.1 Convergence des variables aléatoires

Nous présentons les notions des types de convergence d'une suite de variable aléatoire

1.1.1 Inégalités utiles

Inégalité de Markov simplifiée

Soit Y une v.a.r, g une fonction croissante et positive où nulle sur l'ensemble des réels, vérifiant $g(a) \neq 0$ alors

$$\forall a > 0 . \mathbb{P}(\mid Y \mid \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(Y))}{g(a)}$$

Proof. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(Y)) &= \int_R g(Y) f(Y) \, dy = \int_{\{Y>a\}} g(y) f(y) \, dy + \int_{\{y \leq a\}} g(y) f(y) \, dy \\
&\geq \int_{\{Y>a\}} g(y) f(y) \, dy \text{ Car } g \text{ est positive on nulle} \\
&\geq g(a) \int_{\{y>a\}} f(y) \, dy \text{ Car } g \text{ est croissante}
\end{aligned}$$

Ainis

$$\mathbb{E}(g(y)) \geq g(a) \mathbb{P}(Y \geq a) \Longrightarrow \mathbb{P}(Ya) \leq \frac{\mathbb{E}(g(y))}{g(a)} \text{ car } g(a) > 0.$$

Rappel : Inégalité de Bienaymé-Chebyshev, Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $E(X)$ et de variance finie σ^2 (l'hypothèse de variance finie garantit l'existance de l'espérance). L'inégalité de Bienaymé-Chebychev s'énonce de la façon suivante : pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathbb{P}(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon},$$

preuve où prendre

$$Y = |X - \mathbb{E}(X)|, a = \varepsilon \text{ et } g(t) = t^2,$$

dans l'inégalité de Markov. ■

1.1.2 Convergence en probabilité

Définition 1.6 *On considère une suite* (X_n) *d'une v.a définie sur* Ω. X *une autre v.a définie sur* Ω *on dit que la suite* (X_n) *converge en probabilité vers une constante réelle* l*,si*

$$\forall\varepsilon > 0 \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega\diagup\left|X_n(\omega) - l\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

On dit que la suite (Xn) *converge en probabilité vers* X *sur* Ω *si*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega\diagup\left|X_n(\omega) - X(\omega)\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

On note

$$X_n(\omega) \xrightarrow{p} X.$$

Théorème 1.1 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$ *admettant des espérances et des variances vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = l \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0,$$

alors les (X_n) *convergent en probabilité vers* l*.*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\mathbb{E}(X_n) = l + u_n$ avec $\lim u_n = 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon/2,$$

on a

$$|X_n - l| = |X_n - \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) - l| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + |\mathbb{E}(X_n) - l|,$$

donc à partir du rang $N_\varepsilon \epsilon\ \mathbb{N}$,

$$|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon/2 \Rightarrow |X_n - l| < \varepsilon,$$

qu'implique,

$$|X_n - l| \geq \varepsilon \Rightarrow |X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon/2,$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev,

$$\mathbb{P}(|X_n - l| \geq \varepsilon) \Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon/2) \leq \frac{V(X_n)}{(\varepsilon/2)^2},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. ■

Conclusion 1 *Pour que (X_n) converge en probabilité vers X, il suffit que $\mathbb{E}(X_n - X) \to 0$ et $\mathbb{V}(X_n - X) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (la démonstration passe par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev)*

1.1.3 Convergence en loi

Définition 1.7 *Soient (X_n) et X des variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathbb{P})$ de fonction de répartition respectives F_n et F ; on dit que les (X_n) convergent vers X en loi $\left(\text{et on note} X_n \xrightarrow{\mathrm{L}} X\right)$ si en tout point x où F est continue, les $F_n(x)$ convergent vers $F(x)$.*

Proposition 1.3 *(admises)*

1. La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.

$$(X_n \xrightarrow{p} X) \Longrightarrow (X_n \xrightarrow{\mathrm{L}} X)$$

2.Si les (X_n) et X sont des variables aléatoires discrètes, alors X_n converge en loi vers X si et seulement si

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}, \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Proof. Il s'agit de montrer que si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers suite $(F_{X_n})_n$ converge vers F_X (respectivement préalablement notées F_n et F). On utilise le lemme suivant : soient A, B des variables aléatoires réelles, c un réel et $\varepsilon > 0$. Alors on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(A \leq c) \leq B(c+\varepsilon) + \mathbb{P}(|A-B| > \varepsilon),$$

car

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \leq C) &= \mathbb{P}(A \leq c \cap B \leq c+\varepsilon) + \mathbb{P}(A \leq c \cap B > c+\varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(A \leq c / B \leq c+\varepsilon).\mathbb{P}(B \leq c+\varepsilon) + \mathbb{P}(A \leq c \cap B - \varepsilon > c)\\ &< \mathbb{P}(B \leq c+\varepsilon) + \mathbb{P}(A - B > \varepsilon) \text{car } \mathbb{P}(./.) \leq 1\\ &< \mathbb{P}(B \leq c+\varepsilon) + \mathbb{P}(|A-B| > \varepsilon),\end{aligned}$$

car

$$\mathbb{P}(|A-B| > \varepsilon) = \mathbb{P}(A-B > \varepsilon) + \mathbb{P}(A-B < -\varepsilon) \geq \mathbb{P}(A-B < -\varepsilon)$$

De ce lemme, il vient respectivement pour $(A = X_n; c = x; B = X)$ puis $(A = X; c = x-\varepsilon; B = X_n)$

$$\mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \tag{1.1}$$

$$\mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x-\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon), \tag{1.2}$$

Passons à la démonstration proprement dite. Soit x un point où F est continue. Soit $\eta > 0$. Par continuité de F_X en x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F_X(x+\varepsilon) - F_X(x) < \eta/2$ et $|F_X(x-\varepsilon) - F_X(x)| < \eta/2$. Pour cet ε, de part la convergence de $(X_n)_n$ vers X, il existe n_0 tel que, pour tout $n \leq n_0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \eta/2.$$

Ainsi par (1.1),

$$\begin{aligned}&\leq F_{X_n}(x) - F_X(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) - F_X(x)\\ &\leq F_X(x+\varepsilon) - F_X(x) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \eta/2 + \eta/2 = \eta,\end{aligned}$$

et par (1.2),

$$\geq F_{X_n}(x) - F_X(x) \geq F_X(x-\varepsilon) - F_X(x) - \mathbb{P}(|Xn - X| > \varepsilon)$$
$$\geq -\eta/2 - \eta/2 = -\eta.$$

Donc $\forall \eta > 0; \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0; |F_{Xn}(x) - F_X(x)| < \eta.$ ■

1.1.4 Convergence en norme p (Lp)

Théorème 1.2 *Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$ .On note L^P l'espace $L^P_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ .Soit $(f_n)_{n\epsilon N}$ une suite d'éléments L^P telle que :*

1. $f_n \to f$ p.p.,

2. $\exists F \in L^P$ telle que $|f_n| \leq F$ p.p.pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f_n \to f$ dans L^P (c'est -à-dire $\int |f_n - f|^p \, dm \to 0$ quand $n \to +\infty$).

Proof. On se ramène au cas $p = 1$

On peut choisir des représentants des f_n(encore notés f_n) de manière à ce que la suite $(f_n(x))_{n\epsilon\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ pour tout $x\epsilon E$. On pose $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. On a donc $g\epsilon M$ et $|g| \leq F$ *p.p.*, ce qui montre que $g\epsilon L_p$. On a donc $f\epsilon L^P$(au sens $f = g$ p.p. avec $g\epsilon L_P$). Puis, on remarque que

$$0 \leq h_n = |f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p F^p \text{p.p.},$$

pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$. Comme $F^P \epsilon L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne $h_n \to 0$ dans L^1, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans L^P. ■

1.1.5 Convergence en moyenne quadratique

Définition 1.8 *Une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\epsilon N}$ converge en moyenne quadratique vers une v.a.r. X si*

$$\lim_{n\to+\infty} E\left((X_n - X)^2\right) = 0.$$

Proposition 1.4 *1. La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité.*
2. Pour les (X_n) sont des variables aléatoires d'espérance et de variance finies, si $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mu$ et $\mathbb{V}ar(X_n) \longrightarrow 0$ alors X_n converge en moyenne quadratique vers μ.

Proof. 1. On applique l'inégalité de Markov avec

$$Y = |X_n \ - X|$$

$a = \varepsilon^2$et $g\,(t) = t^2$ il suffit ensuite de remarquer que

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X|^2\right) > \varepsilon^2 = \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

et utiliser l'hypothèse que

$$\lim \mathbb{E}((X_n - X)^2) = 0$$

2.

$$\lim \mathbb{E}((X_n - \mu)^2) = \lim \mathbb{E}(X_n^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 = \lim \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \lim \mathbb{V}(X_n) = 0$$

■

1.1.6 Convergence presque sûre

Définition 1.9 *La suit de variables aléatoires $(X_n)_{n>1}$ converge vers X un autre variables aléatoires, en presque sûre si :*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n\,(\omega) = X\,(\omega)\right\}\right) = 1$$

Théorème 1.3 *Soient X et $(X_n)_{n \in N}$des variables aléatoires réelles définies sur le même* *espace probabilité* $(\Omega\ F\ \mathbb{P})$ *et vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) < +\infty$$

Alors X_n *converge presque sûrement vers* X*.*

Proof. *lemmes de Borel-Cantelli*

Soient $(\Omega, F, \mathbb{P})$*un espace probabilisé et* $(A_n)_n$*une suite d'événements de* A *telle que la somme*

i) Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ *(converge). Alors* $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \sup_n A_n\right) = 0.$

ii) Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ *(diverge). Alors* $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \sup_n A_n\right) = 1$

Preuve : On applique le lemme de Borel Cantelli (i) ■

Remarque 1.4 *(la convergence presque sûre n'implique pas la convergence en moyenne)*

Contre-exemple : Soit $(X_n)_{n>1}$une suite des variables aléatoires de Bernoulli telles que $\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}; \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Cette suite converge presque sure vers 0, car $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\sum_{n>1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n>1} \mathbb{P}\left(X_n = n^2\right) = \sum_{n>1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

et d'prés lemme de Borel-Cantelli. D'autre part on a

$$\mathbb{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathbb{E}\left(X_n\right) = 1$$

la suite $(X_n)_{n>1}$ne peut pas converger vers 0 en moyenne

Remarque 1.5 *(La convergence en moyenne n'implique pas la convergence presque sûre)*

Contre-exemple :Soit $(X_n)_{n>1}$une suite des variables aléatoires de Bernoulli telles que et $\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n}$; $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ Cette suite converge en moyenne vers 0 car

$$\mathbb{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathbb{E}\left(X_n\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

D'autre coté pour $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\sum_{n>1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n>1} \mathbb{P}\left(X_n = \sqrt{n}\right) = \sum_{n>1} \frac{1}{n} = +\infty,$$

et d'prés lemme de Borel-Cantelli, la suite $(X_n)_{n>1}$ ne peut pas converger vers 0 presque surement.

Remarque 1.6 *(La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité).*

On applique la théorème de Markov

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\left|X_n - |X|^2\right|\right)}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

Alors (X_n) converge en moyen quadratique vers $X \Longrightarrow (X_n)$ converge en probabilité vers 0
Remarque : On peut généraliser pour la convergence dans L^P (X_n) converge en p L^Pvers

$$X \Longrightarrow (X_n)$$

converge en probabilité vers L.

Remarque 1.7 *(Convergence en probabilité entraîne la convergence en loi)*

Il s'agit de montrer que si $(X_n)_{n\epsilon N}$converge en probabilité vers X, la suite $\left(F_{X_n}\right)_{n\epsilon N}$ converge vers F_X.On utilise le lemme suivant :

Lemme : Soit A et B deux variables aléatoires réel,c un réel et $\varepsilon > 0$ Alors on a l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(A \leq c\right) \leq \mathbb{P}\left(B \leq c + \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(|A - B| > -\varepsilon\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A \leq c\right) &= \mathbb{P}\left(\{A \leq c\} \cap \{B \leq c + \varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{A \leq c\} \cap \{B \geq c + \varepsilon\}\right) \\
&= \mathbb{P}_{B \leq c+\varepsilon}\left(\{A \leq c\}\right) \cap \mathbb{P}\left(\{B \leq c + \varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{A \leq c\} \cap \{B > c + \varepsilon\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\{B \leq c + \varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{A \leq c\} \cap \{B > c + \varepsilon\}\right),
\end{aligned}$$

car

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{P}_{B \leq c+\varepsilon}\left(\{A \leq c\}\right) > 1 \\
\leq \mathbb{P}\left(\{B \leq c+\varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{A - B - \varepsilon\}\right) \\
\leq \mathbb{P}\left(\{B \leq c+\varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{A - B < -\varepsilon\}\right),
\end{aligned}
$$

car

$$\mathbb{P}\left(\{A - B < -\varepsilon\}\right) = \mathbb{P}\left(\{A - B > -\varepsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{A - B < -\varepsilon\}\right),$$

Preuve : De ce lemme, il vient respectivement $(A = X_n; B = X; C = x)$ puis $A = X$;$B = X_n$;$c = x - \varepsilon$

$$\mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \tag{1.3}$$

$$\mathbb{P}(X_n < x) \leq (\mathbb{P}(X < x - \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \tag{1.4}$$

Passant à la démonstration proprement dite. Soit x un point où F_X est continue. Soit $\eta > 0$ Par continuité de F_X en x il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\left|F_X\left(x+\varepsilon\right) - F_X\left(x\right)\right| < \frac{\eta}{2},$$

et

$$\left|F_X\left(x-\varepsilon\right) - F_X\left(x\right)\right| < \frac{\eta}{2},$$

Pour cet ε , de part la convergence de (X_n) vers X il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) < \frac{\eta}{2}.$$

Ainsi par (1.3)

$$\begin{aligned}
|F_{X_n}(x) - F_X(x)| &\leq |F_X(x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) - F_X(x)| \\
&\leq |F_X(x+\varepsilon) - F_X(x)| + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \\
&< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,
\end{aligned}$$

et par (1.4)

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) - F_X(x) &\geq |F_X(x-\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon) - F_X(x)| \\
&\geq |F_X(x-\varepsilon) - F_X(x)| + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \\
&> -\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} = -\eta,
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall \eta > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0; |F_{X_n}(x) - F_X(x)| < \eta$$

Alors la suite $(F_{X_n})_{n\epsilon N}$converge vers donc $(X_n)_{n\epsilon N}$ converge en loi vers X.On résulte $(X_n)_{n\epsilon N}$ converge en probabilité vers $X \Longrightarrow (X_n)_{n\epsilon N}$converge en loi vers X

Remarque 1.8 *(La convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité)*

Contre-exemple : Soient $X, \rightarrow N(0,1), Y = -X$ et posons pour $n \geq 1$ Une variable de loi $N(0,1)$ est symétrique, ainsi X et Y ont la même loi, $X_n = X$. Il est évident que X_n converge en loi vers X donc vers Y aussi. Mais comme

$$Z := X - Y, \rightarrow N(0,2),$$

on peut voir que

$$\mathbb{P}((|X_n - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}|Z| > \varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{\delta}} dz > 0$$

Alors, la suite $(X_n)_{n\epsilon N}$ ne converge pas en probabilité vers Y.

Remarque 1.9 *(La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre)*

Contre-exemple :Soit $(X_n)_{n>1}$une suite des variables aléatoires de Bernoulli telles que c $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}; \mathbb{P}(X_n = \ 0) = 1 - \frac{1}{n}$ Cette suite converge en probabilité vers 0, car

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} p(X_n = 0) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

Ce pendant si $0 < \varepsilon < 1$, alors

$$\sum_{n \geq 1} p(|X_n = 0| > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} P(X_n = 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, la suite $(X_n)_{n>1}$ ne peut pas converger vers 0 presque sûrement.

Remarque 1.10 *(La converge en presque sûrement implique la converge en probabilité)*

Preuve :Pour $\varepsilon > 0$ fixé . L'hypothèse de convergence presque sure de $(\ X_n)$ vers X signifie que l'évènement

$$\Omega' = \left\{ w \in \Omega; \lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n(w) = X(w) \right\},$$

a pour probabilité 1 (convergence presque sure)

$$\Omega' = \{w \in \Omega; \exists k \forall n > k, \ |X_n(w) - X(w)|\} < \varepsilon$$
$$= \cup_{k \geq 1} \cap_{n \geq k} \{|X_n - X| \ < \varepsilon\}.$$

Définissons :

De plus Ω_t contient Ω, donc $P(\Omega\prime_t) = 1$ .Pour tout $k \geq 1$, posons :

$$A_k = \{w \in \Omega; \forall n \succ k, \ |X_n(w) - X(w)|\} \prec \varepsilon = \cap_{n \geq k} |X_n - X| < \varepsilon.$$

La suite $(A_k)_{k\geq 1}$est croissante pour l'inclusion et sa réunion est Ω'_t. Par continuité séquentielle croissante de P, on a donc

$$P(A_k.) \longrightarrow P(\Omega'_t.) = 1,$$

De plus Ω_t contient Ω, donc $P(\Omega\prime_t) = 1$ .Pour tout $k \geq 1$, pos . Par conséquent,

$$\forall \delta \ > 0, \exists k_0; P(A_0) \ 1 - \delta,$$

Pour tout $n \geq k_0$, l'évènement $|X_n - X| < \varepsilon$ contient A_{k_0}, d'où

$$n \geq k_0, P(|X_n - X| < \varepsilon) \ > 1 - \delta,$$

Ceci établit la convergence vers 0 de $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ et en passant a l'évènement complémentaire

$$n \geq k_0, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \delta \longrightarrow 0$$

Alors, on a la convergence en probabilité de (X_n) vers X .

Remarque 1.11 *(Convergence uniforme des fonctions de répartitions et convergence en loi). On suppose $X_n \longrightarrow X$ et que la fonction de répartition de X est continue. Alors*

$$\sup |\mathbb{P}(X_n \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)| \longrightarrow 0$$

Remarque 1.12 *(Convergence uniforme des fonctions de répartitions et convergence en loi). On suppose $X_n \longrightarrow X$ et que la fonction de répartition de X est continue. Alors*

$$\sup |\mathbb{P}(X_n \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)| \longrightarrow 0$$

Preuve : On se place en dimension 1, en dimension supérieure l'idée de la preuve est la même. On note F et F_n les fonctions de répartitions de X et X_n. Soien $t > 0$ et un entier k tels que

$\frac{1}{k} \leq \epsilon$ Comme F est continue, il existe $x_1, ..., x_k$ tels que

$$F(x_i) = \frac{i}{K}$$

Soit $x_{i-1} \leq x \leq x_i$,par monotonie on a

$$F_n(x) - F(x) \leq F_n(x_i) - F(x_{i-1}) \leq F_n(x_i) - F(x_i) + \frac{1}{k}$$
$$F_n(x) - F(x) \leq F_n(x_i) - F(x_{i-1}) \leq F_n\left(x_{_{i-1}}\right) - F\left(x_{_{i-1}}\right) + \frac{1}{k}$$

Ainsi :

$$F_n(x) - F(x) \leq \sup_i |F_n(x_i) - F(x_i)| + \frac{1}{k}$$

On conclut en notant que le premier terme tend vers 0 (le sup est pris sur un ensemble fini).

1.2 Théorèmes limites

1.2.1 Loi faible des grands nombres

Théorème 1.4 *Soit* $(X_n)_{n\in N}$ *une suite de variable aléatoire vérifiant* $\mathbb{E}(X_n) = \mu \ < +\infty$ *et* $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$ *et* $cov(X_n \ ; X) = 0; n \neq m$ *Alors*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow \mu.$$

Proof. On a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mu$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{V}\left(\overline{X}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$.d'après le théorème précédente on résulte

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mu.$$

■

Proposition 1.5 *Soit* f *une fonction continue sur* $I \subset \mathrm{R}$ *à valeurs réelles .Soit* $(X_n)_{n\in N}$ *une suite de variable aléatoire réelle à valeurs* r *dans* I *et* x *un point de* I*. Alors :*

$$X_n(\omega) \xrightarrow{\mathcal{L}} x \Rightarrow f(X_n(\omega)) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(x)$$

Proposition 1.6 *Soient* $(X_n)_{n\in N}$ $(Y_n)_{n\in N}$ *deux suites de variable aléatoire réelle ,*X *une variable aléatoire réelle et* $y \in \mathrm{R}$ *:*

$\cdot$ Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *et* $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ *alors*: $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$

$\cdot$ Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *et* $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ *alors* : $X_nY_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY$

1.2.2 Loi fort des grands nombres

Théorème 1.5 *Soit* $(X_n)_{n\in N}$ *une suite de variable aléatoire vérifiant* $E(X_n) = \mu < +\infty$*.*

Alors

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mu$$

Proof. Soit $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$une suite de v.a.r. indépendantes.

1. On suppose ici que les X_n sont de carré intégrable, que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ pour tout $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et que

$$\sum \frac{\mathbb{E}\left(X_n^2\right)}{n^2} < +\infty$$

On a alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{p.s}{\to} 0, \text{ quand } n \to +\infty$$

2. On suppose ici que la suite $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.i.i.d et que $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$.

Alors,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}(X_1) \text{ p.s., quand } n \to +\infty$$

3. On suppose ici simplement que la suite $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$est une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées. Alors, pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) \overset{p.s}{\to} \mathbb{E}(\varphi(X_1)), \text{ quand } n \to +\infty$$

■

1.2.3 Convergence de Bernoulli vers Normale

Corollaire (Théorème de Moivre-Laplace) : Soit $(X_n)_{n\in N}$une suite de variables aléatoires suit la loi $B(n;p)$.Alors

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$$

converge en loi vers $N(0,1)$.

Proof. Méth 1 : On rappelle que l'on a dé.ni une variable de Bernoulli comme une variable qui prends la valeur 1 avec la probabilité p, et la valeur 0 avec la probabilité $(1-p)$, et montré que sa moyenne est égale à p et sa variance à $p(1-p)$. Or on peut considérer une variable binomiale comme la somme de n variables de Bernoulli. Il résulte du théorème central limite que, si n est suffisamment grand (en pratique à partir de $n = 50$), la loi binomiale peut être approximée par une loi normale de moyenne np et de variance $np(1-p)$.C'est pourquoi les tables de la loi binomiale s'arrêtent généralement à $n = 50$

Méth2 : On a la fonction caractéristique de la loi de binomiale

$$B\,(n;p) : \varphi_X\,(t) = (1 - p + p\exp\,(t))^n\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) &= e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\varphi(\frac{t}{\sqrt{np\,(1-p)}})\\ &= e^{\frac{-inp}{\sqrt{np(1-p)}}}\left(1-p+pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln\varphi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}\,(t) &= \ln e^{\frac{-inp}{\sqrt{np(1-p)}}} + \ln\left(\left(pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}1-p+\right)^n\right)\\ &= \frac{-inp}{\sqrt{np(1-p)}} + n\ln\left(1-p+pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)\\ &= \frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}} + n\ln\left(1-p+pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)\end{aligned}$$

Or lorsque n tend vers l'infini, $\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}$ est au voisinage de 0 et d'prés le développement limité on a

$$\begin{aligned}
\ln \varphi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) &= \frac{-itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}} + n\ln\left(1+p\left(\left(1+\frac{it}{\sqrt{np\,(1-p)}}-\frac{t^2}{2np\,(1-p)}\right)-1\right)\right) \\
&= \frac{-itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}} + n\ln\left(1+p\left(\frac{it}{\sqrt{np\,(1-p)}}-\frac{t^2}{2np\,(1-p)}\right)\right) \\
&= \frac{-itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}} + n\left(\frac{ipt}{\sqrt{np\,(1-p)}}-\frac{pt^2}{2np\,(1-p)}-\frac{1}{2}\left(\frac{ipt}{\sqrt{np\,(1-p)}}\right)^2\right) \\
&= \frac{-itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}} + n\left(\frac{ipt}{\sqrt{np\,(1-p)}}-\frac{pt^2}{2np\,(1-p)}+\frac{p^2t^2}{2np\,(1-p)}\right) \\
&= \frac{-itnp}{\sqrt{np\,(1-p)}} + \frac{inpt}{\sqrt{np\,(1-p)}} - \frac{np^2}{2np\,(1-p)} + \frac{np^2t^2}{2np\,(1-p)} \\
&= -\frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Alors

$$\lambda_n\left(\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}+i\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}-1\right)-it\sqrt{\lambda_n}\sim-\frac{t^2}{2}$$

Donc $\varphi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t)\sim e^{-\frac{t^2}{2}}$, fonction caractéristique de $N\,(0,1)$. ■

1.2.4 Convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale

Théorème 1.6 *Soit (X_N) une suite de variables aléatoires sur un même espace probabilisé, de loi hypergéométrique : $X_N \hookrightarrow H(N;n;p)$ où n et p sont supposés constants. Alors (X_N) convergent en loi, quand N tend vers l'infini, vers X de loi binomiale $B(n;p)$(mêmes valeur de paramètres).*

Proof. La probabilité ponctuelle de X_N es

$$\mathbb{P}(X_N=k)=\frac{C_{Np}^{k}C_{Nq}^{n\ -k}}{C_N^n}.$$

Lorsque N tend vers l'infini avec n constant,

$$\begin{aligned} C_N^n &= \frac{N(N-1)...(N-n+1)}{n!} \\ &= N^n(1-\frac{1}{N})...(1-\frac{n-1}{N})\frac{1}{n!} \equiv \frac{N^n}{n!}, \end{aligned}$$

car $(1-\frac{m}{N}) \equiv 1$ lorsque N tend vers l'infini. De même, lorsque N tend vers l'infini avec p et k fixes, alors

$$\begin{aligned} C_{Np}^k &\equiv \frac{(Np)^k}{k!} \\ \text{et } C_{N(1-p)}^{n-k} &\equiv \frac{(N(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &\equiv \frac{p^k(1-p)^{n-k}n!}{k!(n-k)!} \\ &= C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la probabilité ponctuelle d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$. C'est pour cela que lorsque la population (de taille N) est très grande, on peut assimiler la loi d'une variable aléatoire comptant le nombre de réussite sur un tirage sans remise (loi hypergéométrique) à une loi binomiale (tirage avec remise) ■

1.2.5 Convergence la loi binomiale vers une loi de Poisson

Théorème 1.7 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires binoles sur un même espace probabilisé : pour tout n, X_n suit $B(n;p_n)$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Alors (X_n) convergent en loi, quand n tend versl'infini, vers une loi de Poisson de paramètre λ .*

Proof. Pour k fixé,

$$\begin{aligned}P(Xn = k) &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{(np_n)^k}{k!}(1-p_n)^n(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})(1-p_n)^{-k}\end{aligned}$$

On cherche la limite de

$$\begin{aligned}(1-p_n)^n &= exp(n\ln(1-p_n)) \\ &= exp(n\ln(1-np_n/n))\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} np_n = \lambda,$$

on pose

$$np_n = \lambda + \varepsilon_n$$

avec

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \varepsilon_n = 0$$

et ainsi

$$ln(1-np_n/n) \sim_\infty -\lambda/n$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(1-p_n)^n = e^{-\lambda}$$

Comme k est fixé

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})(1-p_n)^{-k} = 1$$

Ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(Xn = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui correspond à la probabilité ponctuelle d'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson $P(\lambda)$. ■

1.2.6 Convergence de loi Poisson vers la loi Normal

Théorème 1.8 *Soit* $(X_n)_{n\epsilon N}$ *une suite de variable aléatoire suivante des lois de Poisson de paramètres* λ_n *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$$

Alors $\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ *converge en loi vers* $N(0,1)$.

Proof. On utilise la fonction caractéristique de la loi de poisson de paramètre λ_n telle que

$$\varphi(t) = e^{\lambda_n(\cos t+i\sin t-1)}.$$

En utilisant les propriétés de la fonction caractéristique

$$\varphi_{\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}}(t) = e^{\frac{it(-\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}}}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = e^{-it\sqrt{\lambda_n}}e^{\lambda_n\left(\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}+i\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}-1\right)-it\sqrt{\lambda_n}}.$$

Or lorsqueλ_n tend vers l'infini, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ est au voisinage de 0 et d'prés le développement limité on a

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) &= 1-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^2}{2}+\varepsilon\left(\lambda_n^2\right); \lim_{n\longrightarrow+\infty}\varepsilon\left(\lambda_n^2\right)=0 \\
\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) &= \frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}+\varepsilon(\lambda); \lim_{n\longrightarrow+\infty}\varepsilon(\lambda_n)=0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lambda_n\left(\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}+i\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}-1\right)-it\sqrt{\lambda_n} \sim -\frac{t^2}{2}.$$

Donc $\varphi_{\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, fonction caractéristique de $N(0,1)$ ■

1.2.7 Théorème de l'image continue

Théorème 1.9 *Soit* g *une fonction* R^K*dans* R^m *continue en tout point d'un ensemble* C *vérifiant* $\mathbf{p}(X\epsilon C)=1$. *Alors*

1 .Si $X_n \underset{n}{\overset{l}{\rightarrow}} X$ *Alors* $g(X_n) \underset{n}{\overset{l}{\rightarrow}} g(X)$.

2 .Si $X_n \underset{n}{\overset{p}{\rightarrow}} X$ *Alors* $g(X_n) \underset{n}{\overset{p}{\rightarrow}} g(X)$

3 . Si $X_n \underset{n}{\overset{p.s}{\rightarrow}} X$ *Alors* $g(X_n) \underset{n}{\overset{p.s}{\rightarrow}} g(X)$

Proof. 1. Evident

2. Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$

$$p(\|g(X_n) - g(X)\| \geq \epsilon) \leq p(\|g(X_n) - g(X)\| \geq \epsilon), \|Xn - X\| \leq \delta) + p(\|X_n - X\| \geq \delta).$$

Le deuxième terme du membre de droite tend vers zéro par hypothèse. Soit

$$B_\delta = \{x, \exists y; \|x - y\| \leq \delta; \|g(x) - g(y)\| \geq \epsilon\}$$

alors (3) devient

$$\limsup \mathbb{P}(\ \|g(X_n) - g(X)\| \geq \epsilon \leq \mathbb{P}(X \in B_\delta).$$

Or

$$\mathbb{P}(X \in B_\delta) \leq \mathbb{P}(X \in B_\delta \cap C) + \mathbb{P}(X \in C^c)$$

Le premier terme tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro par continuité (i)) On va appliquer (vi) du Lemme de Port manteau. Soit F un fermé de R^m.

$$\{g(X_n) \in F\} = \left\{X_n \in g^{-1}(F)\right\}$$

Comme n cons par montrer que

$$g^{-1}(F) \subset \overline{g^{-1}(F)} \subset g^{-1}(F) \cup C^c\ .$$

La première inclusion est triviale. Soit $x \in g^{-1}(F)$ alors il existe une suite x_n de points de $g^{-1}(F)$ convergent vers x, si $x \in C$ alors par continuité $g(x_n)$ converge vers $g(x)$ comme F

est fermé $g(x) \in F$. Sinon $x \ \in C^c$.On en déduit que

$$\limsup \mathbb{P}\left(g(X_n) \in F\right) \leq \limsup \mathbb{P}\left(X_n \in \overline{g^{-1}(F)}\right)$$

par Port manteau on a

$$\limsup \mathbb{P}\left(g(X_n) \in F\right) \leq \limsup \mathbb{P}\left(X_n \in \overline{g^{-1}(F)}\right)$$
$$\text{Or } \mathbb{P}\left(X \in \overline{g^{-1}(F)}\ \right) \leq \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}(F)\ \right) + \mathbf{P}\left(X \in C^c\right)$$

■

1.2.8 Théorème Paul Levy

Théorème 1.10 *Soient $(X_n)_n$ et X des vecteurs aléatoires de R_k. Alors il y a équivalence entre*

(a)

$$X_n \to X$$

(b)

$$\phi X_n(t) \to \phi X(t), \forall t \in \mathbb{R}^k$$

2.

$$\phi X_n(t) \to \phi X(t), \forall t \in \mathbb{R}^k$$

et si ϕ est continue en 0, *alors est la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X et $X_n \to X$.*

Proof. 1. $(a) \Longrightarrow (b)$ Il suffit de constater que pour tout $t, x \ \mapsto \exp(i < t, x >)$ est continue bornée.

$(b) \ \Longrightarrow (a)$ Il suffit de montrer 2 car la fonction caractéristique est continue en 0.

2. Admettons momentanèment que X_n est uniformément tendue. Alors par Prohorov, il existe une sous-suite de X_n qui converge en loi vers une variable aléatoire Y. C'est a dire que

$$\phi_{X_{n_k}}(t) \longrightarrow \phi_{Y(t)};\ \forall t \in R^k$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\phi Y = \phi$ .De plus ceci implique que toute sous-suite de X_n convergeant en loi, converge vers Y. Ainsi, il existe un et un seul point d'accumulation au sens de la convergence en loi. Ceci implique que X_n converge en loi vers Y . En et supposons par l'absurde que X_n ne converge pas en loi vers Y , il existe donc un point x de continuité de la fonction de répartition de Y , tel que

$$\mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) \nrightarrow \mathbb{P}\left(Y \leq x\right).$$

Il existe donc $\epsilon > 0$ et une sous-suite n_k tels que

$$\left|\mathbb{P}\left(X_{n_k} \leq x\right) - \mathbb{P}\left(Y \leq x\right)\right| \geq \epsilon.$$

Mais comme (X_n) est uniformement tendue X_{nk} l'est aussi, on peut donc par Prohorov en extraire une sous-suite qui converge en loi vers Y , ce qui est contradictoire. Montrons maintenant que X_n est uniformement tendue. Cela va découler de la continuité de ϕ en 0. On peut supposer que $X_n \in \mathbb{R}$, car la tension composante par composante entraine la tension d'un vecteur. Soient x et $\delta > 0$,

$$1_{|\delta x|>2} \leq 2\left(1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x}\right) = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1 - \cos(tx)\right)dt.$$

On remplace x par X_n et on prend l'espérance

$$p\left(\left|\delta X_n\right| > 2\right) \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} E\left(1 - \cos(tx)\right)dt \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}\left(1 - E\left(\exp\left(itX_n\right)\right)\right)dt.$$

Par hypothèse l'intégrale converge ponctuellement vers $Re(1-\phi(t))$, par convergence dominée l'intégrale converge vers

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} Re(1-\phi(t))dt.$$

Soit $\epsilon > 0$ par continuité de ϕ en zèro, il existe $\delta > 0$, tel que $|t|$ implique $|1-\phi(t)|$. Pour ce δ, l'intégrale limite est plus petite que 2ϵ . Il existe N tel que pour tout $n \geq N$;

$$p\left(|\delta X_n| > 2\right) \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} Re(1-\phi(t))dt + \epsilon.$$

Ce qui achève la preuve. ■

1.2.9 Théorème central limite

Théorème 1.11 *Soit une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi D et dont l'espérance μ et l'écart-type σ communes existent et soient finis $(\sigma \neq 0)$. On suppose que les (X_n) sont indépendantes. Considérons la somme*

$$S_n = X_1 + ... + Xn$$

Alors l'espérance de S_n est $n\mu$ et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$ et

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée réduite..

Proof. Posons $Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ Alors

$$\varphi_{Y_i(t)} = \varphi\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\,(t) = \varphi X_i - \mu\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Pour t fixé, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est infiniment petit. Ecrivons le développement limité, au voisinage de 0, de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire W :

$$\begin{aligned}\varphi_W(u) &= \varphi_W(0) + u\varphi\prime_W(0) + \frac{u^2}{2}\varphi\prime\prime_W(0) + u^2\varepsilon(u) \\ &= 1 + iuE(W) - \frac{u^2}{2}E(W^2) + u^2\varepsilon(u)\end{aligned}$$

En posant

$$W = Xi - \mu$$

$$u = t \diagup \left(\sigma\sqrt{n}\right)$$

on a

$$E(W) = E(Xi - \mu) = 0$$

et

$$E(W^2) = E((Xi - \mu\ )^2) = V(X_i) = \sigma^2$$

d'où

$$\varphi_{X_i} - \mu\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2\sigma^2 n}\sigma^2 + \frac{1}{n}\varepsilon(t^3 \diagup \sigma^3\sqrt{n}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_i(u)$$

avec

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \varepsilon_i\ (n) = 0$$

Maintenant, posons

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \Sigma_{i=1}^n Y_i$$

L'indépendance des X_n entraîne celle des Y_i et ainsi

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= \Pi_{i-1}^n \varphi Y_i\,(t) \\ &= \exp\left(\Sigma_{i=1}^n \ln n\left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_i(u)\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\lim n \longrightarrow +\infty\varphi_{Z_n(t)} = e^{-t^2/2}$$

qui est la fonction caractéristique de $N(0;1)$.

Ce théorème établit une propriété générale, qui va justifier l'importance considérable de la loi normale, à la fois comme modèle pour décrire des situations pratiques, mais aussi comme outil théorique. Il s'énonce ainsi :« Soit $X_1; ...; X_i; ...; X_n$, une suite de n variables aléatoires indépendantes, de moyennes μ_1 ; μ_i ; μ_n,et de variances δ_1^2 ; δ_i^2 ; δ_n^2, et de lois de probabilité quelconques, leur somme suit une loi qui, lorsque n augmente, tend vers une loi normale de moyenne $\mu = \Sigma_{i=1}^n \mu_i$ et de variance $\delta_1^2 = \Sigma_{i=1}^n \delta_i^2$. Il y a une seule condition restrictive, c'est que les variances soient finies et qu'aucune ne soit prépondérante devant les autres » ■

1.2.10 Théorème Prohorov

Théorème 1.12 *Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires.*
1.Si $X_n \xrightarrow[n]{1} X$, alors la famille$\{X_n \ , n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément tendue.
2.Si la famille $\{X_n \ , n \in \mathbb{N}\}$est uniformément tendue alors il existe une sous-suite qui converge en loi vers X.

1. **Proof.** 1.Fixons $\epsilon > 0$, soit $M > 0$ tel que

$$P\left(\|X\| > \ M \leq \epsilon\right)$$

Quitte a augmenter un peu M on peut supposer que la fonction de répartition de $\|X\|$ est continue en M. Par Portmanteau, on sait qu'il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$;

$$P\left(\|X_n\| > M\right) \leq P\left(\|X\| > M\right) + \epsilon \leq 2\epsilon$$

Pour $i \leq N$ il existe $M_i > 0$ tel que

$$P\left(\|X_i\| > M_i\right) \leq 2\epsilon$$

Alors si

$$K = sup_i \{M; (M_i)_i\}$$

on a

$$\sup_n P(\|X_n\| > k) \leq 2\epsilon$$

2.C'est un corollaire du lemme de Helly.On note Fn la fonction de répartition de X_n.Par Helly on sait qu'il existe une sous-suite F_{nj} qui converge vers une fonction F qui ressemble a une fonction de répartition.Il reste a montrer que F est bien une fonction de répartition, c'est a dire que

$$\lim_{-\infty} F(x) = 0$$

et

$$\lim_{\infty} F(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, comme les X_n sont uniformément tendues on peut trouver $M > 0$ (point de continuité de F) vérifiant ;

$$F_n(M) \geq 1 - \epsilon$$

pour tout n. Par passage a la limite on a

$$F(M) \geq 1 - \epsilon$$

pour tout $\epsilon > 0$. Ce qui prouve

$$\lim_{\infty} F(x) = 1$$

Un argument similaire donne la limite en $-\infty$. ∎

1.2.11 Théorème de Glivenko-Cantelli

Définition 1.10 *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes réelles et identiquement distribuées, on appelle fonction de répartition empirique d'ordre n la fonction dé-*

finie

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_{i \leq t}}.$$

Théorème 1.13 *Soit* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires de loi* μ. *On note* F_n *la fonction de répartition empirique et* F *la fonction de répartition de* μ. *Alors* $\|F - F_n\|_\infty \longrightarrow 0et$ *ce, presque sûrement.*

Proof. Etape 1 :$\|F - F_n\|_\infty$ est une variable aléatoire mesurable

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $(X^{(i)})i \in \{1, ..., n\}$ la statistique d'ordre (on ordonne les Xi dans l'ordre croissant).Fest croissante sur $\mathbb{R}$, F_n est constante et vaut i/nsur les intervalles $[X^{(i)}, X^{(i+1)}[$ $F - F_n$ est monotone sur les intervalles on a

$$\|F - F_n\|_\infty = max_i = 1...n(|\frac{i}{n} - F(X^i)\Bigg\|, |\frac{i}{n} - F^-(X^{i+1})\Bigg\|$$

où F^- est la limite à gauche de la fonction F. Ainsi, comme le max de variables aléatoires est une variable aléatoire, $\|F - F_n\|_\infty$est mesurable.

Etape2 : $\mathbb{P}(\|F - F_n\|_\infty \longrightarrow 0)$ ne dépend que de la loi μ.

En effet

$$\|F - F_n\|_\infty = \psi_n(X_1, ..., X_n)$$

où

$$\psi_n : (x_1, ..., x_n) sup_{t\in\mathbb{R}}|F(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_{i \leq t}}|$$

est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, via le raisonnement qui précède. La question de la convergence presque certaine revient donc à étudier la probabilité$\mathbb{P}(\|F - F_n\|_\infty \longrightarrow 0) = \mathbb{P}_\mu(\psi_n(\pi_1, ..., \pi_2) \rightarrow 0)$Ainsi la convergence presque sûre est une propriété de la mesure image de μ.

Etape 3 : on peut choisir l'espace probabilisé qui nous arrange.

On sait que si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires , suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ alors les variables aléatoires $Q(U_i)$ où Q est la pseudo inverse

$$(Q(y) = inf_{t\in R} F(x) \geq u)$$

suit la loi μ. Il vient alors que

$$\|F - F_n\|_\infty = sup_{t\in\mathbb{R}}|F(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{Q(U_i)\leq t}| \leq sup_{t\in\mathbb{R}}|y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{U_i\leq y}|$$

Ainsi il suffit de montrer le théorème dans le cas réel.

Etape 4 : On conclut avec le théorème de Dini.

On considère une énumération des rationnels, par la loi des grands nombres, on a convergence ponctuelle de $F_n(q)$ pour tout rationnel vers F sauf sur un ensemble A_q de mesure nulle. Soit A l'intersection des A_q. Comme F_n est croissante, par on a en fait convergence ponctuelle pour tout $\omega \in A_q$. On peut alors appliquer le théorème de Dini car on a une suite de fonctions croissantes sur un compact (le support de la loi uniforme est $[0, 1]$). Cela permet de conclure.

■

1.2.12 Théorème central limite multidimensionnel

Théorème 1.14 *Soient $Y_{1,}Y_{2,}$... des vecteurs aléatoires i.i.d. de $\mathbb{R}^K$ d'espérance μ et de matrice de covariance$\sum = \mathbb{E}\left((Y1-\mu)(Y1-\mu)^*\right)$. Alors*

$$\sqrt{n}(\overline{Y}n - \mu) \longrightarrow N_k\left(0, \Sigma\right)$$

1.2.13 La mèthode Delta ou Δ mèthod

Théorème 1.15 *Soit ϕ une application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^m$ différentiable en θ .Soit T_n des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^k$ (à valeurs dans le domaine de définition de ϕ) et $(r_n)_n$une suite de nombres réels tendant vers ∞. Alors*

$$r_n(\phi(T_n) - \phi\left(\theta\right)) \longrightarrow D\phi\left(\theta\right)\left(T\right),$$

dés que

$$r_n(T_n - \theta) \xrightarrow{l} T$$

De plus la différence entre

$$r_n(\phi(T_n) - \phi(\theta)),$$

et

$$D\phi(\theta)(rn(T_n - \theta),$$

converge vers zéro en probabilité.

Proof. Comme la suite

$$r_n(T_n - \theta) \xrightarrow{l} T$$

par Prohorov, elle est uniformément tendue. De plus parle théorème de Slutsky

$$T_n - \theta \xrightarrow{p} 0$$

Soit

$$R(h) = \phi(\theta + h) - \phi(\theta) - D\phi(\theta)(h)$$

par définition de la diffèrentielle

$$R(h) = o(\|h\|)$$

$$\phi(T_n) - \phi(\theta) - D\phi(\theta)(T_n - \theta) = R(T_n - \theta) = o_p(\|T_n - \theta\|)$$

On multiplie les deux membres de l'égalité par r_n,

$$r_n\phi(T_n) - r_n\phi(\theta) - r_n D\phi(\theta)(T_n - \theta) = r_n R(T_n - \theta) = r_n o_p(\|T_n - \theta\|)$$

$$r_n o_P(\|Tn - \theta\|) = o_P(r_n \ \|Tn - \theta\|)$$

De plus, comme $r_n(T_n - \theta)$ est uniformément tendue, on en déduit que

$$o_P(r_n \ \|Tn - \theta\|) = o_P(1)^2$$

Ceci achève la preuve de la deuxième partie du théorème. De plus $D\phi\left(\theta\right)$ est linéaire donc continue, donc par le théorème de l'image continue, on a

$$r_n D\phi\left(\theta\right)\left(T_n-\theta\right)\xrightarrow{l} D\phi\left(\theta\right)\left(T\right)$$

■

Chapitre 2

Théorie des Valeurs Extrêmes

La Théorie des valeurs extrêmes (TVE) concerne les questions probabilistes et statistiques des valeurs très élevées ou très faibles dans des suites des variables aléatoires et dans les processus stochastiques. La TVE a permet de modéliser la queue de distribution des pertes d'un portefeuille d'investissement.

La théorie des valeurs extrêmes est appliquée en hydrologie pour prévoir les crues, en démographie pour prévoir la distribution de probabilité de l'âge maximum que l'être humain, en assurance pour prévoir les grands sinistres en finance ou encoure en météorologie.

L'objectif essentiel de cette théorie est d'estimer des petites probabilités ou des quantités dont la probabilité d'observation est très faible, c'est-à-dire proche de zéro. Ces quantités sont appelées quantiles, on parle de quantile extrême lorsque l'ordre du quantile (probabilité d'observation) converge vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Ces quantiles extrêmes situent dans les queues de distributions des lois de probabilité.

2.1 Loi des valeurs extrêmes

2.1.1 Théorème de Fisher et Tippet (1928) ; Gnedenko (1943).

Théorème 2.1 *Soit* $(X_i, i \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Supposons qu'il existe une suite* $((a_n, b_n), n \geq 1)$ *telle que* $a_n > 0$ *et la suite* $\left(a_n^{-1}\left(\max\limits_{1\leq\ i\ \leq n} X_i - b_n\right), n\right.$

converge en loi vers une limite non triviale. Alors á une translation et un changement d'échelle prés la fonction de répartition de la limite est de la forme suivante :

$$H_\gamma(x)=\begin{cases} si\ \gamma>0, \begin{cases} 0 \ si\ x<0 \\ \exp\left[-(x)^{-1/\gamma}\right] \ si\ x\geq 0 \end{cases}, \ Fréchet \\ si\ \gamma<0, \begin{cases} \exp\left[-(-x)^{-1/\gamma}\right] \ si\ x<0 \\ 1 \ si\ x\geq 0 \end{cases}, \ Weibull \\ si\ \gamma=0, \exp\left[-\exp(-x)\right], x\in\mathbb{R}, \qquad Gumbel \end{cases}$$

L'ensemble des lois limites s'obtient donc en considérant les lois de $cW+d$, où W suit une loi de Weibull, de Gumbel ou de Frèchet. L'exercice suivant permet de vèrifier que les lois de Weibull, Gumbel et Frèchet sont max-stables.

Proof. *Supposons qu'il existe une suite $((a_n;b_n);n\geq 1)$ telle que $a_n>0$ et la suite de terme $a_n^{-1}(M_n-b_n)$ converge en loi vers une limite W non constante. Pour toute fonction g continue bornée, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[g(a_n^{-1}(M_n-b_n))]=\mathbb{E}[g(W)]$$

Supposons par simplicité que la loi de X_1 possède densitè $f>0$. Alors la loi de M_n possède la densité $nF(x)^{n\ -1}f(x)$. On a donc,

$$\begin{aligned} In &= \mathbb{E}[g(a_n^{-1}(M_n-b_n))] \\ &= \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) nF(x)^{n\ -1}f(x)dx. \end{aligned}$$

Comme $f>0$, la fonction F est inversible et d'inverse continue. On pose pour $t>1$

$$U(t)=F^{-1}\left(1-\frac{1}{t}\right).$$

En particulier, on a $U(t)=x\Leftrightarrow 1-\frac{1}{t}=F(x)\Leftrightarrow\ \mathbb{P}(X>x)=\frac{1}{t}$. On effectue le changement de variable $F(x)=1-\frac{v}{n},i.e.x=U\left(\frac{n}{v}\right)$. On obtient

$$I_n=\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{U\left(\frac{n}{v}\right)-b_n}{a_n}\right)\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1}\mathbf{1}_{]0,n]}(v)\,dv.$$

Remarquons que $\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1}\mathbf{1}_{]0,n]}(v)$ *converge en croissant vers* $e^{-v}\mathbf{1}_{\{v>0\}}$*.Comme par hypothèse* I_n *converge pour tout* g*, il est naturel, mais erroné a priori, de penser que pour tout* $v>0$*, la suite de terme* $J_n(v)=\left(\frac{U\left(\frac{n}{v}\right)-b_n}{a_n}\right)$ *converge. Supposons malgré tout que cette convergence ait lieu. On en déduit en considérant* $J_n(1/w)-J_n(1)$ *que pour tout* $w>0,\frac{U(wn)-U(n)}{a_n}$ *converge quand* n *tend vers l'infini, vers une limite que l'on note* $h(w)$*. Comme la variable aléatoire* W *est non triviale, cela implique que la fonction* h *n'est pas égale a une constante. Comme la fonction* U *est croissante, la fonction* h *est également croissante. Supposons que plus généralement, on ait pour tout* $w>0$*,*

$$\frac{U(wx)-U(x)}{a(x)}\rightarrow_{x\longrightarrow\infty} h\left(w\right),$$

où $a(x)=a_{[x]}$ *pour* $x\geq 1$*,* $[x]$ *désignant la partie entière de* x*. Soit* $w_1;w_2>0$*. On a*

$$\frac{U(xw_1w_2)-U(x)}{a(x)}=\frac{U(xw_1w_2)-U(xw_1)}{a(xw_1)}\frac{a(xw_1)}{a(x)}+\frac{U(xw_1)-U(x)}{a(x)}$$

En faisant tendre x *vers l'infini dans l'égalité ci-dessus, on obtient que* $\frac{a(xw_1)}{a(x)}$ *converge pour tout* $w_1>0$*. On note* $l(w_1)$ *la limite, et il vient*

$$h(w_1w_2)=h(w_2)l(w_1)+h(w_1) \tag{2.1}$$

La fonction l *est mesurable et localement bornée. Comme la fonction* h *est croissante et non constante, on en déduit que* l *est strictement positive. De plus en posant* $yw'=x$*, on a pour* $w'>0$

$$l(w)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{a(xw)}{a(x)}=\lim_{y\rightarrow\infty}\frac{a(yw'w)}{a(y)}\frac{a(y)}{a(yw')}=\frac{l(w'w)}{l(w')}.$$

Ainsi on a pour tous $w;w\prime>0$*,*

$$l(w'w)=l(w)l(w'), \tag{2.2}$$

où l *est une fonction strictement positive mesurable localement bornée. Vérifions que les solutions non nulles de cette équation fonctionnelle sont :* $l(w)=w^{\gamma}$ *, où* $\gamma\in\mathbb{R}$*. En intégrant* (2.2) *pour* w'*entre* 1*et* 2*, il vient en éectuant le changement de variable* $ww'=u$ $\blacksquare$

Proof.

$$\frac{1}{w}\int_{w}^{2w} l(u)du = l(w)\int_{1}^{2} l(w')dw'.$$

On en déduit que l est continu puis dérivable. On obtient alors en dérivant I_n par rapport a w' et en évaluant en $w' = 1$ que

$$wl'(w) = \gamma l(w)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ .Ceci implique que

$$l(w) = cw$$

Comme d'aprés

$$l(1) = l(1)^2$$

et que l est strictement positive, on en déduit que

$$l(1) = 1$$

et que

$$l(w) = w$$

pour $w > 0$.On retrouve l'indice de la loi des valeurs extrêmes généralisèe. L'équation se recrit(2.1)

$$h(w_1w_2) = h(w_2)w_1^{\gamma} + h(w_1) \text{ pour tous } w_1; w_2 > 0$$

Pour $\gamma = 0$ on obtient l'équation fonctionnelle

$$h(w_1w_2) = h(w_2) + h(w_1)$$

Un raisonnement semblable a celui éffectuè a partir de l'équation fonctionnelle (2.2) assure que les solutions mesurables localement bornées sur $]0;\infty[$ de cette équation fonctionnelle sont

$$h(w) = c\log w$$

avec $c > 0$.Pour $\gamma = 0$, par symétrie, on a

$$\begin{aligned} h(w_1 w_2) &= h(w_2) w_1^{\gamma} + h(w_1) \\ &= h(w_1) w_2^{\gamma} + h(w_2). \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$h(w1)(1 - w_2^{\gamma}) = h(w_2)(1 - w_1^{\gamma})$$

Cela implique $h(w) = 0$ si $w = 1$, et sinon $\frac{h(w)}{w^{\gamma}-1}$ est constant. Donc on obtient

$$h(w) = c(w^{\gamma} - 1)$$

A un changement d'échelle près, on peut choisir $c = \frac{1}{\gamma}$ A une translation prés, on peut choisir $U(n) = b_n$. En définitive, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(n/v) - b_n}{a_n} = h\left(\frac{1}{v}\right) = \{ {}^{\frac{v^{-\gamma}-1}{\gamma} \text{si } \gamma \neq 0}_{-\log(v) \text{si } \gamma = 0}.$$

On peut maintenant calculer la limite de $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[g(a_n^{-1}(M_n - b_n))]$. Il vient par convergence dominée

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_n &= \int g\left(\frac{v^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}\right) e^{-v} \mathbf{1}_{\{v>0\}} dv \\ &= \int g\left(y\right) \mathbf{1}_{\{1+\gamma y>0\}} de^{-(1+\gamma y)^{-1/\gamma}}, \end{aligned}$$

où on a posé $y = \frac{v^{-\gamma}-1}{\gamma}$ si $\gamma \neq 0$ et $y = log(v)$ si $\gamma = 0$. La fonction de répartition de la loi limite est donc $H(\gamma)$. ■

2.2 Estimateur de Hill 1975

Cet estimateur est le plus utilisé en théorie des valeurs extrêmes et a été largement étudie dans le cas de variables aléatoires i :i :d. Mason(1982) et Deheuvels et al(1988) ont montré respectivement la consistance faible et forte qui ne dépend que du comportement de la suite k. Pour établir la normalité asymptotique, on a besoin de supposer que la fonction de répartition F est a variation régulière du second ordre. Plusieurs auteurs ont obtenu cette normalité notamment Dekkers(1985), Csörgő et Mason(1985), Davis et Resnick(1984), Geluk et De Haan(1987), Haeusler et Teugels(1987).

2.2.1 Construction de l'estimateur de Hill

a *Première approche :* Une première approche pour construire l'estimateur de Hil est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Si $F\epsilon D(\Phi_\beta)$, alors*

$$\frac{1}{\overline{\overline{F(t)}}}E\left[(\log X - \log t)\mathbf{1}_{(X>t)}\right] \longrightarrow_{t\to+\infty} \frac{1}{\beta} = \gamma$$

Pour construire l'estimateur de Hill, il faut trouver des estimateurs respectivement pour $\overline{F}$ et pour $E\left[(\log X - \log t)\mathbf{1}_{(X>t)}\right]$ Le meilleur estimateur de F est la fonction de répartition empirique

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\left(X_{i\leq x}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\left(X_{(i)\leq x}\right)}$$

D'apres la loi forte des grands nombres, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\left(X_{i\leq t}\right)} \longrightarrow E\left(1_{(X\rangle t)}\right) = p\left(X > t\right) = \overline{F}\left(t\right) \tag{2.3}$$

D'autre part, pour une suite intermédiaire k, on a $X_{(k)} \overset{p.s}{\longrightarrow} x_F = \infty$ (Haan et Ferreira (2006)*,). Si l'on suppose que F est continue, la statistique d'ordre est strictement croissante presque surement. En remplaçant t par $X_{(k)}$ dans* (2.3)*, on obtient une estimation de $\overline{F}(X_{(k)})$:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\left(X_i\ >X_{(k)}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\left(X_{(i)}>X_{(k)}\right)} = \frac{k-1}{n}$$

En utilisant la loi des grands nombres, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log X-\log t)\mathbf{1}_{(X_i>t)}\xrightarrow{p.s} g\left(t\right)=E\left[(\log X_i-\log t)\mathbf{1}_{(X_i>t)}\right]$$

On remplace de nouveau t *par* $X_{(k)}$, *on obtient comme estimateur de* $g(X_{(k)})$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i-\log t_{(k)})\mathbf{1}_{(X_i>X_{(k)})}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\log X_i-(k-1)\log X_{(k)}$$

On déduit que l'estimateur de $\overline{F}(t)$ *est* $\frac{k-1}{n}$ *et l'estimateur de* $E\left[(\log X-\log t)1_{(X>t)}\right]$ *est*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\log X_i-(k-1)\log X_{(k)}$$

L'estimateur de $\frac{1}{\overline{F}(t)}E\left[(\log X-\log t)1_{(X>t)}\right]$ *est donc*

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\log X_{(i)}-\log X_{(k)}$$

En remplaçant $k-1$ *par* k, *on obtient*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log X_{(i)}-\log X_{(k+1)}$$

D'autre par Embrechts et al (1997),*si la distribution* F *est a variation régulière et* k *est une suite intermédiaire on a*

$$\frac{X_{(k)}}{X_{(k+1)}}\xrightarrow{p}1$$

Donc

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log X_{(i)}-\log X_{(k)}$$

est un estimateur de $\frac{1}{\beta}$.

b *Deuxième approche :* Une deuxième approche est celle où l'on utilise l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnel. On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F telle que, pour $\beta > 0$

$$\overline{F}(x) = x^{-\beta}; x \geq 1$$

Si on pose $Y = \log X$, la fonction de répartition de Y est définie par :

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= P(X > \exp y) \\ &= 1 - F(\exp y) \\ &= \exp(-\beta y); y \geq 0 \end{aligned}$$

Y suit donc une loi exponentielle de paramètre β de densité

$$f(y) = \beta \exp(-\beta y); y \geq 0,$$

la fonction de vraisemblance L est

$$\begin{aligned} L(y_1; y_2; ...y_n; \beta) &= \prod_{i=1}^{n} \beta \exp(-\beta y_i) \\ &= \beta^n \exp(-\beta \sum_{i=1}^{n} y_i) \\ \frac{\partial \log L(y_1; y_2; ...y_n; \beta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \frac{\partial^2 \log L(y_1; y_2; ...y_n; \beta)}{\partial \beta^2} &= -\frac{n}{\beta^2} \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de β est

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_{(i)} \right)^{-1}$$

Une généralisation triviale concerne la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = 1 - Cx^{-\beta}, x \geq u > 0, u \text{ fixé}$$

On pose $C = u^{\beta}$, l'EMV de β est

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{X_i}{u}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i - \log u\right)^{-1}$$

Dans le domaine d'attraction de Fréchet et pour x très grand, la fonction F suit la loi de Pareto. Posons $K = card\left\{i : X_{(i)} > u, i = 1, ..., n\right\}$ Conditionnellement a l'événement $\{K = k\}$; la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer β et C consiste a maximiser la densité conjointe de $(X_{(k)}, ..., X_{(1)})$ définie par :

$$f_{x_{(k)},....x(1)}(x_k, ..., x_1) = \frac{n!}{(n-k)!}(1 - Cx_k^{-\beta})^{n-k}C^k\beta^k\prod_{i=1}^{k}x_i^{-(\beta+1)}, u < x_k < ... < x_1$$

L'EMV conditionnel du paramètre β^{-1} est :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{X_{(i)}}{X_{(k)}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log X_{(i)} - \log X_{(k)}$$

Définition 2.1 *L'estimateur de Hill de $\gamma > 0$, note $\hat{\gamma}_k^H$ est défini par*

$$\hat{\gamma}_k^H = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log X_{(i)} - \log X_{(k)} \tag{2.4}$$

Une particularité de l'estimateur de Hill est qu'il est possible de l'interpréter graphiquement. Ceci est particulièrement important pour les praticiens qui préfèrent souvent des interprétations graphiques a des formulations mathématiques. Plus précisément, si l'on considère le graphe de coordonnées

$$\left(-\log\left(1 - \frac{i}{n+1}, \log X_{(i)}\right)\right), i = 1, ..., n$$

appelé Pareto Quantile Plot, dans le cas d'une distribution de type Pareto ce graphe est approximativement linéaire, dans les points extrêmes, avec une pente $\gamma = \frac{1}{\beta}$ L'estimateur de Hill n'est que l'estimateur de cette pente.

FIG. 2.1 – Pareto quantile plot pour un échantillon de taille n,de distribution de Pa(1)

En effet, si la distribution F est dans le domaine d'attraction de Fréchet, la fonction de queue vérifie :

$$b(x) = x^{\frac{1}{\beta}} L(x)$$

ou L est une fonction a variation lente ; il découle que

$$\begin{aligned}
\log b(x) &= \frac{1}{\beta} \log(x) + \log L(x) \\
&= \frac{1}{\beta} \log x \left(1 + \frac{\log L(x)}{\frac{1}{\beta} \log x}\right)
\end{aligned}$$

on a :

$$\log b(x) \sim \frac{1}{\beta} \log(x), \ x \longrightarrow \infty$$

En remplaçant la fonction de queue par sa version empirique

$$\hat{b}_n(t) = F_n^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

et en remarquant que

$$\hat{b}_n\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) = F_n^{\leftarrow}\left(\frac{i}{n+1}\right) = X_{(i)}$$

on obtient

$$\log X\,(_i) \sim -\frac{1}{\beta} \log\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)_{,i=1,\ldots\ldots,n}$$

2.2.2 Consistance de l'estimateur de Hill

La consistance faible est démontrée par plusieurs auteurs ; De Haan et Ferreira (2006) proposent une démonstration en s'appuyant sur la représentation de Rènyi tandis que Mason(1987) ou Resnick (1987) utilisent la mesure empirique

Théorème 2.2 *Supposons que $F \in D(H_\gamma)$ avec $\gamma > 0$ et k est une suite intermédiaire, alors*

$$\hat{\gamma}_k^H \xrightarrow{p} \gamma$$

Le théorème suivant est réciproque du résultat précédent.

Théorème 2.3 *On suppose que k est une suite intermédiaire vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1$$

et

$$\hat{\gamma}_k^H \xrightarrow{p} \gamma > 0$$

alors $F \in D(H_\gamma)$. En ajoutant une condition supplémentaire sur la suite k, Deheuvels et al.(1989) *obtiennent la consistance forte de cet estimateur.*

Théorème 2.4 *Si $F \in D(H\gamma)$ avec $\gamma > 0$ et k est une suite intermédiaire vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{loglogn} = 1$$

alors,

$$\hat{\gamma}_K^H \xrightarrow{p.s} \gamma$$

2.2.3 Normalité asymptotique de l'estimateur de Hill

La normalité asymptotique de l'estimateur de Hill a été démontrée par Davis et Resnick (1985)en utilisant les propriétés des statistiques d'ordre d'un échantillon issu d'une loi exponentielle et les conditions de Von Mises. Csörgő et Mason (1985) l'on tmontré en introduisant l'approximation des processus empiriques par des ponts browniens. De même, en supposant la variation régulière au second ordre de la distribution, De Haan et Resnick (1997) ont aussi obtenu cette normalité asymptotique.

Théorème 2.5 *Supposons que $F \in D(H\gamma)$ $(\gamma > 0)$ satisfait la condition et sa fonction auxiliaire, alors*

$$\sqrt{k}\left(\hat{\gamma}_K^H - \gamma\right) \overset{d}{\to} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}.,\gamma^2\right)$$

ou k est une suite intermédiaire. Dans le cas où l'on a

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{\beta}\left(\frac{b(tx)}{b(t)} - x^{\gamma}\right) = 0 \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } \beta > 0$$

l'assertion du théorème précédent reste valable et le bais $\frac{\lambda}{1-\rho}$ vaut zéro.Si de plus

$$\sqrt{k}g\left(\frac{n}{k}\right) \to 0$$

alors

$$\sqrt{k}\left(\frac{\hat{\gamma}_K^H}{\gamma} - 1\right) \overset{\mathcal{L}}{\to} N(0,1)$$

On peut donc en déduire un intervalle de confiance pour $\hat{\gamma}$ au niveau $(1-\beta)$ donné par :

$$\left]\frac{\hat{\gamma}_K^H}{1+\frac{Q_{1-\beta/2}}{\sqrt{K}}}, \frac{\hat{\gamma}_K^H}{1-\frac{Q_{1-\beta/2}}{\sqrt{K}}}\right[$$

où, Q_β est le quantile d'une loi normale d'ordre β.

La précision de l'estimation dépend de la sélection de k, l'estimateur de Hill a un biais qui tend vers zéro quand k est relativement petit. La variance asymptotique de cet estimateur vaut $\frac{\gamma^2}{k}$ qui tend vers zéro quand k est grand. Par conséquent, il faut trouver un compromis entre le biais et la variance asymptotique. Beirlant et al. (1996) trouvent un intervalle de confiance de $\hat{\gamma}_{\hat{k}_{nopt}}^H$ ou $\hat{k}_{nopt}$ est une valeur optimale de k donnée par leur algorithme. Danielsson et al. (2001) proposent une autre méthode plus précise pour la construction d'un intervalle de confiance, basée sur le Bootstrap.

Pour la réduction du biais, d'autres estimateurs ont été donnés ; notamment celui proposée par Beirlant et al. (2001) qui utilisent un modèle de régression exponentielle. L'estimateur a noyau de Csörgro et al. (1989; 2002) est une extension de l'estimateur de Hill pour $\gamma \in \mathbb{R}$.

Une autre variante meilleure que les précédentes est celle de Falk et Morohn (1997)

Chapitre 3

Estimateur de l'indice de queue de moment harmonique et adaptation au cas conditionnel

:

3.1 Estimateur de l'indice de queue de moment harmonique

Rappelons qu'une distribution F est appelée à queue lourde, si $1-F$ est à variation régulière d'indice $-1/\gamma$, c'est-à-dire.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F\left(tx\right)}{1-F\left(t\right)}=x^{-1/\gamma} \tag{3.1}$$

Une caractérisation équivalente peut être donnée en termes de $U(t) = F^{\leftarrow}(1-t^{-1})$ (avec $F^{\leftarrow}(x) = inf\{y : F(y) \geq x\}$) par

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U\left(tx\right)}{U\left(t\right)}=x^{\gamma}\quad \text{(x>1)} \tag{3.2}$$

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution commune F satisfaisant (3.1) et notons $X_{1,n} \leq ... \leq X_{n,n}$ les statistiques d'ordre correspondantes. le meilleur estimateur connue de l'indice de queue γ est l'estimateur de Hill (Hill 1975). Une hypothèse de second ordre typique est (de Haan et Peng 1998 ; de Haan et Ferreira 2006)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{A(t)} \left(\frac{U(tx)}{U(t)} - x^\gamma \right) = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho} \tag{3.3}$$

où $\rho \leq 0$ est un paramètre de second ordre et $|A|$ est une fonction à variation régulière d'indice ρ.

3.1.1 Construction de l'estimateur de moment harmonique

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Pareto $X \geq 1$ et $F(x) = 1 - x^{-1/\gamma}$ pour un certain $\gamma > 0$. Pour un seuil arbitraire $x_0 > 1$ soit $Y = x_0^{-1} X \mathcal{I}_{\{X > x_0\}}$. Alors, conditionnellement à $X > x_0$, Y suit à nouveau la distribution de Pareto de paramètre γ, c'est-à-dire,

$$P(Y \leq y | X > x_0) = F_Y(y | X > x_0) = 1 - y^{-1/\gamma}$$

De plus, conditionnellement à $X > x_0$, on a

$$Y^{-1/\gamma} = 1 - F(Y) \stackrel{d}{=} U$$

où U est uniformément distribuée sur $[0,1]$. Notez que $E[U^p] = (p+1)^{-1}$. Étant donné une suite de variables aléatoires indépendante et identiquement distribuées $Y_1, ..., Y_k$ des dépassements au-delà du seuil $x_{0,}$ la loi forte de grands nombres implique que

$$k^{-1} \sum_{i=1}^{k} Y_i^{1-\beta} = k^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left(Y_i^{-1/\gamma} \right)^{\gamma(\beta-1)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} U_i^{\gamma(\beta-1)}$$

$$\xrightarrow{p.s} E\left[U_i^{\gamma(\beta-1)} \right] = 1/\left(\gamma(\beta - 1) + 1\right)$$

à condition que $\gamma(\beta-1)+1 \neq 0$. Par conséquent,

$$\frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{k^{-1}\sum_{i=1}^{k} Y_i^{1-\beta}}-1\right) \to \gamma$$

Supposons maintenant que la distribution de X n'est pas nécessairement de Pareto mais n'importe quelle autre distribution à queue lourde distribution définie par (3.1). L'idée est maintenant la même que pour l'estimateur de Hill, à savoir remplacer x_0 par une statistique d'ordre $X_{n-k,n}$. Ainsi, on obtient la définition suivante :

Définition 3.1 *(Estimateurs d'indice de queue des moments harmoniques). Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution F de la forme (3.1). L'estimateur des moments harmoniques de γ est défini par*

$$H_{n,k}^{(\beta)} = \frac{1}{\beta-1}\left\{\left[k^{-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{X_{n-k,n}}{X_{n-i+1,n}}\right)^{\beta-1}\right]^{-1}-1\right\} \tag{3.4}$$

où $1 \leq k \leq n-1$ et $\beta > 0$ est un paramètre de réglage. Pour $\beta = 1$, $H_{n,k}^{(\beta)}$ est interprété comme limite pour $\beta \to 1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H_{n,k}^{(1)} &= \lim_{\beta\to 1} H_{n,k}^{(\beta)} \\ &= k^{-1}\sum_{i=1}^{k}\log\left(X_{n-i+1,n}/X_{n-k,n}\right) \end{aligned}$$

est l'estimateur de Hill $\gamma_{n,k}^{(\beta)}$.

Il s'avère que le paramètre de réglage β permet de réguler le compromis entre efficacité et robustesse. Pour $\beta > 1$ l'effet des grandes contaminations est borné, puisque le HME bénéficie des propriétés de la moyenne harmonique. Cependant, une plus grande valeur de β implique également une augmentation de la variance. Pour $\beta < 1$, la queue de l'estimateur d'indice a également une variance plus élevée que l'estimateur de Hill. Cependant, dans certaines situations, il possède un biais asymptotique plus petit de sorte que l'$AMSE$ est plus petite. La classe d'estimateurs d'indice de queue des moment harmoniques a été introduite dans Henry (2009), en utilisant le paramètre de réglage $\theta = 1/(\beta - 1)$. Des résultats asymptotiques sont obtenus cependant seulement sous l'hypothèse triviale et très restrictive d'une queue de Pareto exacte au-delà d'un seuil fini u. Dans un article connexe, Stehlík et al. (2010) ont proposé estimateur de moments de score t qui est un estimateur d'indice de queue de moment harmonique avec $\beta = 2$, mais seulement les résultats de la simulation sont rapportés.

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur de l'indice de queue de moment harmonique sont dérivées pour des distributions avec des queues à variation régulière. L'estimateur présente de bonnes propriétés de robustesse et se distingue par sa simplicité. Un paramètre de réglage permet de réguler le compromis entre robustesse et efficacité (Jan. B (2013)).

3.1.2 Propriétés asymptotiques de l'estimateur de moment harmonique

Pour prouver la consistance, nous utilisons une approche similaire à celle de Resnick (2007). Soit $E_x = (x, \infty]$ et notons ε le $\sigma-$ champ de Borel sur $E = E_0 = (0, \infty]$. La mesure dite de $v_\gamma : \varepsilon \to \mathbb{R}_+$ est définie par $v_\gamma(E_x) = x^{-1/\gamma}$. De plus, soit $M_+(E)$ l'espace des mesures de Radon positives sur E muni de la topologie vague. La convergence vague en $M_+(E)$, ce qui est consistant avec la métrique générant la topologie vague, est défini comme suit.

Définition 3.2 *Étant donnée une suite $\{\mu_n, n \geq 0\}$ avec $\mu_i \in M + (E)$, on dit que μ_n converge vaguement à μ_0 ($\mu_n \to \mu_0$) si*

$$\mu_n(f) := \int_E f(x)\mu_n(dx) \to \mu_0(f) := \int_E f(x)\mu_0(dx)$$

pour tout $f \in C_K^+(E) := \{f : E \to \mathbb{R}_+ : f \text{ est continue à support compact}\}$ quand $n \to \infty$.

Notons que muni de la métrique vague $M_+(E)$ est un espace métrique complet, séparable. Selon Resnick (2007) *une queue à variation régulière, c'est-à-dire $X \sim F$, où $1 - F \in R_{-1/\gamma}$*

implique

$$\frac{n}{k}P\left(\frac{X}{U(n/k)}\in\cdot\right)\xrightarrow{\nu}v_{\gamma}\left(.\right) \tag{3.5}$$

dans $M_{+}(0,\infty]$ *lorsque* $n\to\infty$ *et* $k(n)\to\infty$ *avec* $k/n\to 0$. *Supposons que* $X_1,...,X_n$ *sont une suite de variables aléatoires iid et définie pour* $k=k(n)\leq n$ *la mesure empirique de la queue par*

$$v_{n,k}\left(.\right):=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}1\left\{\left(X_i/U\left(n/k\right)\right)\in\cdot\right\}.$$

Nous soulignons que $v_{n,k}$ *dépend de* k. *La mesure empirique de queue* $v_{n,k}$ *est un estimateur de* $n/k\ P(X/U(n/k)\in\cdot)$, *puisque pour tout* t *fixé* $t>0$,

$$\frac{n}{k}P\left(\frac{X}{U(n/k)}\in(t,\infty]\right)=\frac{n}{k}\left(1-F\left(tU\left(\frac{n}{k}\right)\right)\right)$$

L'estimation de F *par la fonction de distribution empirique, notée* F_n, *donne*

$$\frac{n}{k}\left(1-F_n\left(tU\left(\frac{n}{k}\right)\right)\right)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}1\left\{X_i/U(n/k)\in(t,\infty]\right\}v_{n,k}(t,\infty]$$

Pour être plus précis (voir Resnick 2007), on peut montrer dans $M_{+}(0,\infty]$ *pourvu que* $n\to\infty$, $k(n)\to\infty$ *et* $k(n)/n\to 0$, *où* $\Rightarrow$ *vaut pour une convergence faible en* $M_{+}(0,\infty]$ *(muni de la métrique vague). Ainsi nous présentons dans cette partie uniquement les théorèmes concernant la normalité asymptotiques de l'estimateur* $H_{n,k}^{(\beta)}$ *cité plus haut (pour les preuve voir le même papier)*

Théorème 3.1 *(Consistance du HME). Si* $k(n)/n\to 0$, *alors* $v_{n,k}\Rightarrow v_{\gamma}$ *implique la consistance de* $H_{n,k}^{(\beta)}$, *c'est-à-dire,*

$$H_{n,k}^{(\beta)}\to\gamma$$

Intuitivement, la preuve est basée sur les arguments suivants. Puisque $v_{n,k}$ dépend de U, et donc sur la fonction de répartition inconnue F, on définit un estimateur, disons $\hat{v}_{n,k}$, de $v_{n,k}$ et montrons sa convergence en probabilité vers v_γ. Réécrire $H_{n,k}^{(\beta)}$ en tant que fonctionnelle de $\hat{v}_{n,k}$ et en

conjonction avec le théorème de cartographie continue et un argument de Slutsky conduit au résultat de consistance souhaité. Pour montrer la normalité asymptotique du HME, définissons

$$A_0(t) := \{ {}^{\rho[1-\lim_{s\to\infty} s^{-\gamma}U(s)/(t-\gamma U(t))],\rho<0}_{1-\int_0^t s^{-\gamma}U(s)ds/(t^{1-\gamma}U(t)),\rho=0} \tag{3.6}$$

Cette fonction permet de borner les écarts de (3.3) uniformément en x

Remarque 3.1 *(CLT pour le HME). Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires iid de distribution commune F, satisfaisant (3.3). Alors pour toute suite intermédiaire $k(n) \to \infty$, avec $k/n \to 0$, satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k} A_0(n/k) = \lambda \tag{3.7}$$

on a, pour $\beta > 1 - 1/(2\gamma)$

$$\sqrt{k}\left(H_{n,k}^{(\beta)} - \gamma\right) \to N\left(\lambda\mu\beta, \sigma_\beta^2\right) \tag{3.8}$$

où

$$\mu_\beta := \mu_\beta(\gamma,\rho) = \frac{1+\gamma(\beta-1)}{1-\rho+\gamma(\beta-1)}, \sigma_\beta^2 := \sigma_\beta^2(\gamma) = \frac{\gamma^2(1+\gamma(\beta-1))^2}{1+2\gamma(\beta-1)}.$$

Remarque 3.2 *Notons que, du fait de $A_0(t) \sim A(t)$, (3.6) est équivalente à*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k} A(n/k) = \lambda \tag{3.9}$$

Remarque 3.3 *Sous l'hypothèse triviale que pour un certain $x_0 > 0$ fixé, on a l'exact égalité $1 - F(x) = P(X > x) = cx^{-1/\gamma}$ pour tout $x > x_0$ et certains $c, \gamma > 0$, on obtient asymptotiquement la distribution $N(0, \sigma_\beta^2)$, c'est-à-dire sans biais asymptotique. Ce simple cas a déjà* *été examiné dans Henry (2009). De plus, pour $\beta = 1$,* Théorème 23 *coïncide avec les résultats précédents pour l'estimateur de Hill $H_{n,k}^{(1)}$.*

Corollaire 3.1 *Sous les conditions du* théorème 23*, l'erreur quadratique moyenne asymptotique de $H_{n,k}^{(\beta)}$ est donnée par*

$$AMSE(\beta) = k^{-1}(\lambda^2 \mu_\beta^2 + \sigma_\beta^2).$$

En outre,

Corollaire 3.2 *si $\rho = 0$, alors $\mu_\beta \equiv 1$ et σ_β est minimal pour $\beta = 1$;*

si $\rho < 0$, alors

$$AMSE(1) < AMSE\,(\beta) \qquad (\beta > 1)$$

et il existe de $\beta^* \in (1 - 1/(2\gamma), 1)$ tels que

$$AMSE(1) > AMSE(\beta^*);$$

si $\rho \to -\infty$, alors $\mu_\beta = 0$ et

$$eff\,(\beta, 1) = \frac{AMSE(1)}{AMSE\,(\beta)} < 1 \qquad (\beta \neq 1, \quad \beta > 1 - 1/(2\gamma)).$$

Le théorème 23 *et le* corollaire 1 *peuvent être utilisés pour comparer différents HME pour une suite intermédiaire fixe $k(n)$, une comparaison de l'erreur quadratique moyenne aux niveaux optimaux $k_0^{(\beta)}$peut être basé sur le résultat suivant :*

Théorème 24 *Supposons que (3.3) soit vérifiée avec $\rho < 0$ et notons par $k_0^{(\beta)}$ une intermédiaire suite minimisant le second moment asymptotique de $H_{n,k}^{(\beta)} - \gamma$, qui est donné par*

$$A^2(n/k)\mu_\beta^2 + k^{-1}\sigma_\beta^2$$

Si $\mu_\beta \neq 0$, *alors*

$$\sqrt{k_0^{(\beta)}}\left(H^{(\beta)}_{n,k_0^{(\beta)}} - \gamma\right) \rightarrow N\left(\frac{sign(A)}{\sqrt{-2\rho}}\sigma_\beta, \sigma_\beta^2\right) \tag{3.10}$$

En outre

$$k_0^{(\beta)}(n) := k_0^{(\beta)} \sim \frac{n}{s \leftarrow (n^{-1}\tau_\beta)}$$

où $s \leftarrow$ *est l'inverse de* $s \in RV_{2\rho-1}$ *donné par*

$$A\,(t)^2 \sim \int_t^\infty \ s(u)duet\tau_\beta := \tau_\beta(\gamma,\rho) = \frac{\sigma_\beta^2}{\gamma^2\ \mu_\beta^2} = \frac{(1-\rho+\gamma(\beta-1))^2}{1+2\gamma(\beta-1)}$$

Corollaire 3.3 *Supposons que* (3.3) *est vérifié avec* $\rho < 0$. *Alors on a*

$$eff_0(\beta,1) := \frac{AMSE\left(H^{(\beta)}_{n,k_0^{(\beta)}}\right)}{AMSE\left(H^{(1)}_{n,k_0^{(1)}}\right)} = \left((1-\rho)^{-2}\tau_\beta\right)^{\frac{1}{2\rho-1}} \frac{(1-\rho+\gamma(\beta-1))^2}{1+2\gamma(\beta-1)}$$

De plus, pour tout $(\gamma,\rho) \in (0,\infty)\times(-\infty,0)$, *il existe un* $\beta^* \in (1-1/(2\ \gamma),1)$ *tel que*

$$eff_0(\beta^*,1) < 1$$

Corollaire 3.4 *Supposons que* $A(t) = Ct^\rho$, *alors* $k_0^{(\beta)}$ *du* théorème 24 *est donné par*

$$k_0^{(\beta)} := k_0^{(\beta)}(n) = \left[\left(-\frac{1}{2}\rho^{-1}C^{-2}\gamma^2\tau_\beta\right)^{1/(1-2\rho)} n^{-2\rho/(1-2\rho)}\right]$$

où $[x]$ *désigne la partie entière de* x. *De plus,* (3.9) *est vérifiée avec* $sign(A) = sign(C)$. *Donc,*

$$AMSE\left(H^{(\beta)}_{n,k_0^{(\beta)}}\right) = \sigma_\beta^2\left(1-\frac{1}{2}\rho^{-1}\right).\left(-\frac{1}{2}\rho^{-1}C^{-2}\gamma^2\tau_\beta\right)^{1/(1-2\rho)} n^{-2\rho/(1-2\rho)}$$

Exemple 3.1 . *Pour la loi de Fréchet, on a* $A(t) = \frac{1}{2}\gamma t^{-1}$. *Cela mène à*

$$AMSE\left(H^{(\beta)}_{n,k_0^{(\beta)}}\right) = \frac{3}{2}\sigma_\beta^2\left[2^{-1}\tau_\beta^{-1}(\gamma,-1)\right]^{1/3} n^{-2/3}$$

Exemple 3.2 *Pour* $Y = |X|$ *avec* X *suit une loi de Cauchy, on a*

$$1 - F_Y(x) = \frac{2}{\pi}x^{-1} - \frac{2}{3\pi}x^{-3} + o(x^{-3})(x \to \infty)$$

Donc, $A(t) = (\pi^2/6)t^{-2}$ *et*

$$AMSE\left(H^{(\beta)}_{n,k_0^{(\beta)}}\right) = \frac{5}{4}\ \sigma_\beta^2\left[(\pi/3)^2\tau_\beta^{-1}(1,-2)\right]^{1/5} n^{-4/5}$$

Remarque 3.4 *Bien que de nombreux estimateurs d'indice de queue existent dans la littérature, nous nous concentrons sur une comparaison avec la méthode de Hill. Il y a plusieurs raisons de le faire. D'abord dans l'ensemble, l'estimateur de Hill est généralement considéré comme une référence, car il a la plus petite variance asymptotique. La deuxième raison est que la normalité asymptotique du* HME *a été établie dans les mêmes conditions de second ordre que pour l'estimateur de Hill. Exigible d'avoir la même fonction de normalisation* A *et le même paramètre de second ordre, l'efficacité asymptotique relative (définie par le rapport des erreurs quadratiques moyennes asymptotique) peut facilement être montré. Comme l'ont souligné de Haan et Ferreira* (2004), *une comparaison tout à fait générale des estimateurs de l'indice de queue est difficile en raison de différences conditions de second ordre. La raison essentielle est que le biais asymptotique dépend de la fonction auxiliaire et n'est donc pas directement comparable. De plus, même pour des estimateurs dont la normalité asymptotique* *a été établie sous la même condition de second ordre, il ne semble pas possible de trouver un uniforme meilleur estimateur d'indice de queue.*

Remarque 3.5 . *Les intervalles de confiance basés sur les théorèmes* (23) *et* (24) *peuvent être obtenus de manière analogue à l'estimateur de Hill . Essentiellement, deux approches différentes peuvent être distinguées :* (*a*)*, la suite* $k = k(n)$ *est telle que l'erreur quadratique moyenne asymptotique est minimisée ou* (*b*)*,* $k(n)$ *est tel que la variance domine l'erreur quadratique asymptotiquement. Dans le cas* (*a*)*, une correction de biais est nécessaire pour que le paramètre du second ordre* ρ *ainsi que la fonction* A *(ou de manière équivalente le paramètre* λ*) doivent être estimé. Dans le cas* (*b*)*, aucun biais asymptotique ne se produit et les techniques de bootstrap peuvent être adoptées*

3.2 Nouvel estimateur conditionnel adapté à l'estimateur harmonique de γ

Nous nous intéressons dans cette partie à adapter l'estimateur harmonique des moments de l'estimation de l'indice présenté par Jan. B et al (2013) basé sur un paramètre de réglage β, en présence de covariance via la méthode de la fenêtre mobile telle que présentée par Laurent. G et Stéphane. G (2008).

3.2.1 Sélection de l'échantillon conditionnel

Soit $Y \in \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle associée à une covariable non aléatoire $x \in E$ où E est un espace métrique muni d'une métrique d dans le cas où les points de conception $x_1, ..., x_{(n)}$ sont non aléatoires. Étant donné un échantillon $(Y_1, x_1), ..., (Y_{(n)}, x_n)$ d'observations indépendantes de la fonction de distribution conditionnelle de Y, pour tout $y > 0$,

$$F(y, x) = 1 - y^{-1/y(x)} l(y, x) \tag{3.11}$$

Où $\gamma(.)$ est une fonction positive inconnue de la covariable x et pour x fixé, $l(.,x)$ est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour $\lambda > 0$

$$\lim_{y\to+\infty}(\frac{l(\lambda y,x)}{l(\lambda,x)})=1$$

En appliquant l'approche de la fenêtre mobile, nous sélectionnerons l'échantillon, que nous considérons pour déterminer l'estimateur harmonique de Jan. B et al (2013), dans le cas conditionnel, pour un $x \in E$ donné, soit $h_{n,x}$ une suite positive tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infinie, notons $B(x,h_{n,x})$ la boule centrée au point x et de rayon $h_{n,x}$ définie par

$$B(x,t)=\{t\in E,d(t,x)\leq h_{n,x}\}$$

L'échantillon en question concerne les variables réponses Y_i dont les covariables associées x_i appartiennent à la boule $B(x,h_{n,x})$. La proportion de ces points de conception est donc définie par

$$\phi(h_{n,x})=(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{I}_{B(x,h(n,x))}(x_i)$$

L'échantillon résultant de l'observation dans $(0,\infty)\times B(x,h_{n,x})$ est donné par

$$\{Z_i(x),i=1,...,m_{n,x}\}$$

avec $m_{n,x}=n\phi(h_{n,x})$ et soient

$$Z_{1,m_{n,x}}(x)\leq ...\leq Z_{m_{n,x}m_{n,x}}(x) \tag{3.12}$$

les statistiques d'ordre correspondantes, qui sera prises en compte pour l'adaptation de notre estimateur dans la suite. En utilisant cet échantillon conditionnel, nous nous intéressons dans cette partie à l'adaptation de l'estimateur de l'indice de queue des moments harmoniques de Jan. B et al (2013) dans le cas où les données sont complètes.

3.2.2 Calcul du nouvel estimateur de l'indice de queue de moment harmonique adapté au cas conditionnel

Pour le même échantillon considéré dans la section ci-dessus où $l(y,x)=1$ et pour un seuil arbitraire $z_0>1$ soit

$$T=(\frac{Z}{z_0})I_{\{Z>z_0\}}$$

Alors conditionnellement à $Z>z_0$,

$$\begin{aligned}P(T\leq t/Z>z_0) &= F_T(t/Z>z_0)\\ &= 1-t^{-1/\gamma(x)}\end{aligned}$$

De plus conditionnellement à $Z>z_0$, on a

$$T^{-1/\gamma(x)}=1-F(T)\overset{d}{=}U$$

où U est uniformément distribuée sur $[0,1]$. Étant données une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $T_1,...,T_{k_{n,x}}$ au-delà d'un seuil z_0, la loi forte des grands nombres implique que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_{n,x}}\sum_{i=1}^{k_{n,x}}T_i^{1-\beta} &= \frac{1}{k_{n,x}}\sum_{i=1}^{k_{n,x}}(T_i^{-1/\gamma(x)})^{\gamma(x)(\beta-1)}\\ &\overset{d}{=}\frac{1}{k_{n,x}}\sum_{i=1}^{k_{n,x}}U_i^{\ \gamma(x)(\beta-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{p.s}{\rightarrow}E[U^{\ \gamma(x)(\beta-1)}] &= \int_0^1 U^{\gamma(x)(\beta-1)}du\\ &= \left(\frac{1}{\gamma\left(x\right)\left(\beta-1\right)+1)}\right)\end{aligned}$$

à condition que $\gamma\left(x\right)\left(\beta-1\right)+1\neq 0$. Ainsi

$$\frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{k^{-1}\sum_{i=1}^{k_{n,x}} T_i^{1-\beta}}-1\right) \xrightarrow{p.s} \gamma(x)$$

L'idée est maintenant la même que pour l'estimateur de Hill, à savoir remplacer z_0 par une statistique d'ordre $Z_{m_{n,x}-k_{n,x}m_{n,x}}(x)$. Ainsi, nous obtenons la définition définitive de notre nouvel estimateur,

$$\hat{\gamma} := \frac{1}{\beta-1}\left\{\left[\frac{1}{k_{n,x}}\sum_{i=1}^{k_{n,x}}\left[\frac{Z_{m_{n,x}-k_{n,x}m_{n,x}}(x)}{Z_{m_{n,x}+i+1m_{n,x}}(x)}\right]^{\beta-1}\right]^{-1}-1\right\} \tag{3.13}$$

Conclusion

Nous avons présenté un nouvel estimateur de l'indice des valeurs extrêmes par l'adaptation de l'estimateur harmonique de Jan. B et al (2013) dans le cas conditionnel. Les perspectives que nous envisageons, sont les suivantes :

. Établir la normalité asymptotique de cet estimateur pour ensuite passer à la réduction du bais et la minimisation de l'erreur quadratique moyenne théorique pour le choix du nombre de valeurs extrêmes indispensable pour les simulations et les applications.

. Adapter cet estimateur dans le cas censurées

. Effectuer des applications sur des données réelles

. Et finalement faire des simulations comparatives en ce qui concerne les paramètres de dispersion telle que le biais et l'erreur quadratique moyenne avec les meilleurs estimateurs déjà existant pour déduire ses avantages et ses inconvenants.

,

Bibliographie

[1] Beirlant, J., Dierckx, G., Goegebeur, Y., and Matthys, G. Tail index estimation and an exponential regression model. Extremes. 2(2). (1999)

[2] Beirlant, J., Dierckx, G., Guillou, A., and St aric a, C. On exponential represen-tations of log-spacings of extreme order statistics. Extremes. 5(2). (2002),

[3] Csorgő, S., and Mason, D. Central limit theorems for sums of extreme values. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 98(3). (1985)

[4] Davis, R., and Resnick, S. Tail estimates motivated by extreme value theory. The Annals of Statistics. 12(4). (1984),

[5] Deme, E.H., 2013, Quelques contribution à la Théorie univeriee des Va-

[6] Danielsson, J., De Haan, L., Peng, L., and de Vries, C. Using a bootstrap method

[7] to choose the sample fraction in tail index estimation. Journal of Multivariate Analysis76(2). (2001)

[8] De Haan, L., and Ferreira, A. Extreme value theory : An introduction. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Science and Business Media.

[9] Deheuvels, P., Haeusler, E., and Mason, D. Almost sure convergence of the hill estimator. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 104(2).(1988),

[10] De Haan, L., and Resnick, S.. Stochastic Models. 4. (1997).

[11] Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. Modelling extremal events for insurance and nance. Springer-Verlag. Berlin. (1997).

[12] Falk, M., and Marohn, F. E cient estimation of the shape parameter in pareto models with partially known scale. Statistics and Decisions. 15(3). (1997),

[13] Ferrez, J., Davison, A.C., Rebetez, M. Extreme temperature analysis under forest cover

[14] compared to an open ...eld. Agricultural and Forest Meteorology,151 :992-1001, 2011.(Cité en page 81.)

[15] Jan Beran · Dieter Schell · Milan Stehlík 2013.The harmonic moment tail indexestimator : asymptotic distribution and robustness

[16] Haeusler, E., and Teugels, J. On asymptotic normality of hill's estimator for the exponent of regular variation. The Annals of Statistics. 13(2). (1985)

[17] Hill, B. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. The Annals of Statistics, 3 :1163-1174, 1975

[18] Hill, B. M.(1975). A simple general approach to inference about the tail of adistribution.Ann. Statist., 3(5) ; 11631174 in the presence of censoring.comptes rendus mathématiques. Académie des Sciences. Paris

[19] Geluk, J., and De Haan, L. Regular variation, extensions and tauberian theorems.Centrum voor Wiskunde en Informatica. Amsterdam. (1987)

[20] Gardes, L., Girard, S. Conditional extremes from heavy-tailed distributions : an application to the estimation of extreme rainfall return levels. Extremes, 13 :177-204, 2010.(Cité en page 81.)

[21] Kluppelberg et Mikosch,journal of applied probability 1997

[22] leurs Extrêmes et Estimation des mesures de risque actuariel pour despertes a queues lourdes, Université Gaston Berger.

[23] Lekina, A., 2010, Estimation non-paramétrique de quantiles extrêmes conditionnels, thèse pour obtenir le grade de docteur de l'université deGrenobl

[24] Lekina,A,13 octobre 2010 ;Estimation non-paramétrique des quantiles extrêmes

[25] On asymptotic normality of the hill estimator. Communications in StatisticsBOUALAM, K., 2017, Etude de l'estimateur de Hill sous dépendance faible ,UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

[26] Pisarenko, V.F., Sornette, D. Characterization of the frequency of extreme earthquakeevents by the generalized pareto distribution. Pure and Applied Geo-physics, 160 :2343-2364, 2003. (Cité en page 81.)

[27] Ph. Tassi et S. Legait ; " Théorie des probabilités en vue des applications statistiques",école nationale supérieure du pétrole et des moteurs, éditions technip 1990

[28] Mason, D. Laws of large numbers for sums of extreme values. The Annals of Probability.10(3). (1982), 754{764.

[29] Resnick, S. Extreme values regular variation and point processes. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Verlag, New-York. (1987)

[30] S. Resnick. Extreme values, regular variation, and point processes. Applied Probability. Springer-Verlag, New York, 1987.

Annexe Abréviations et Notations

F	Fonction de répartition
F_n	Fonction de répartition empirique
$F^{\leftarrow}$	Inverse généralisée de F
i, i, d	Indépendantes et identiquement distribuées.
$M_n = X_{n,n}$	Maximum de X_1,...,X_n
$V.a$	Variable aléatoire
$p.s$	Presque sûre
$S = \overline{F}$	fonction de survie
al	Autres
Φ	Loi de frêchet
Ψ	Loi de weibull
TEV	Théorie des valeurs extrêmes
$X_{n_1,n}...X_{n,n}$	Statistique d'ordre associées à $X_1, ..., X_n$
$X \wedge Y$	$min(X, Y)$
$\stackrel{L}{=}$	Égalité en loi
$:=$	Égalité en définition
D	Converge en distribution
$(\Omega\ A\ \mathbb{P})$	Espace probabilisé
$\overrightarrow{P}$	Converge en probabilité
$\overrightarrow{P.S}$	Converge presque sûre
$\overrightarrow{l}$	Converge en loi
$\hat{\gamma}_k^H$	Estimateur de Hill
$H_{n,k}^{(\beta)}$	Estimateurs d'indice de queue de moment harmonique
EVD	Distribution des valeurs extrêmes

x_F Point terminal

Résumé

Dans ce travail nous nous somme intéressée à calculer un nouveau estimateur conditionnelle de l'indice des valeurs extrêmes adapté à l'estimateur harmonique de Jan. B et al (2013) par l'utilisation de la fenêtre mobile dans le cas des donnée complètes.

Mot clés : Indice des valeurs extrêmes, estimateur de Hill, estimateur harmonique, fenêtre mobile, estimation conditionnelle

Abstract

In this work we are interested in calculating a new conditional estimator of the index of extreme values adapted to the harmonic estimator of Jan. B et al (2013) by using the moving window in the case of complete data.

Keywords: Extreme value index, Hill estimator, harmonic estimator, moving window, conditional estimation

ملخص

في هذا العمل، نحن مهتمون بحساب مقدر شرطي جديد لمؤشر القيم القصوى المتوافقة مع المقدر التوافقي لجان. (2013) باستخدام النافذة المتحركة في حالة البيانات الكاملة.

الكلمات المفتاحية: مؤشر القيمة القصوى، مقدر هيل، المقدر التوافقي، النافذة المتحركة، التقدير الشرطي