UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et analyse numérique

Par : ABID Khouloud

Thème

Applications de la matrice opérationnelle pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Version de : /06/2022

Devant le jury composé de :

M. BADIDJA Salim	MCA. UKMO université-Ouargla	Président
M. TELLAB Brahim	MCA. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. AMARA Abdelkader	MCA. UKMO université-Ouargla	Examinateur

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et Teconnaissance

A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceur qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceur qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

Abid & Khouloud ✍

Remerciements

Louange à Dieu Tout-Puissant

, par sa grâce les bonnes actions sont accomplies et grâce à lui les bénédictions perdurenton

remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé

et la volonté d'entamer ce mémoire avant de commencer la présentation de ce travail ,

nous profitions l'ocasion pour remercier du fond coeur toute perdonne qui a contribué de prés au de loin

a la réalisation de ce travail ne servait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de

D.TALLEB Ibrahim

on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel ,pour sa patience ,

sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparationde ce mémoire Je remercie également le comité qui a discuté de mon mémoire

Je n'oublie pas non plus d'adresser mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé

et qui ont été la raison de ma formation, de mes professeurs à mes collègues

Table des matières

Liste des symboles

Symbole	Sens
$\Gamma(x)$	La Fonction gamma
$\beta(p,q)$	La Fonction bêta
D^{α}	l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α
I^{α}	l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville
$P_n(x)$	Polynômes de Legendre
$\phi(x)$	Le vecteur de base des polynômes de Legendre
$D^{(\alpha)}$	Matrice opérationnelle de la dérivée fractionnaire d'ordre α
E_{α}	La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre α
$E_{\alpha,\beta}$	La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres α et β
$\lceil \alpha \rceil$	Le plus petit entier supérieur ou égal à α
$\lfloor \alpha \rfloor$	Le plus grand entier inférieur ou égal à α
$\mathbf{D}^{(\alpha)}$	La matrice opérationnelle de la dérivée fractionnaire d'ordre α

Introduction générale

De nombreux problèmes dans divers domaines comme la physique théorique, la biologie, la viscosité peuvent être formulés avec succès par des équations différentielles fractionnaires [2, 3, 4]. Au cours de la dernière décennie, l'équation différentielle fractionnaire a attiré l'attention des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs [5, 8, 11]. Par conséquent, des méthodes précises pour résoudre des équations différentielles sont des recherches difficiles dans nos jours. Il existe de nombreuses méthodes analytiques et numériques utilisées pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Les résultats analytiques sur l'existence et l'unicité des solutions aux équations différentielles fractionnaires ont été étudié par de nombreux auteurs (voir, par exemple [1, 18, 12, 13]). Plusieurs chercheurs scientifiques ont présenté des méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles avec des ordres fractionnaires [6, 7, 9, 10], qui ont établi de bons résultats, et beaucoup d'entre eux ont utilisé la matrice opérationnelle de dérivation et d'intégration fractionnaires pour obtenir ces résultats.

Notre objectif principal de ce travail est de généraliser la matrice opérationnelle de Legendre au calcul fractionnaire. Il convient de mentionner ici que, le procédé est basé sur l'utilisation de la matrice opérationnelle d'une fonction orthogonale pour résoudre des équations différentielles fractionnaires en les transformant en un ensemble d'équations algébriques faciles à résoudre, pour trouver des solutions approximatives à ces équations différentielles d'ordre fractionnaire. Plusieurs travaux ont paru dans la littérature traitant l'application des polynômes de Legendre modifiés [14, 15, 16, 17].

Donc, nous avons présenté une méthode numérique pour résoudre quelques problèmes différentiels fractionnaires linéaires et non linéaires en utilisant la matrice opérationnelle basées sur les polynômes de Legendre. Pour atteindre cet objectif, nous avons organisé notre travail de la manière suivante :

• Dans le premier chapitre, nous présentons quelques fonctions spécifiques utiles pour le calcul fractionnaire ainsi que quelques définitions des opérateurs fractionnaires avec ses propriétés principales.

• Le deuxième chapitre est réservé à la définition des polynômes de Legendre et ses propriétés principales en précisant les méthodes de calcul des racines des six premiers polynômes.

• Dans le troisième chapitre, nous définissons la matrice opérationnelle de Legendre généralisée et son effet à la résolution de quelques problèmes différentiels fractionnaires.

• Enfin, dans le quatrième chapitre, nous appliquons la matrice opérationnelle de Legendre généralisée pour résoudre quelques problèmes différentiels fractionnaires linéaires du type

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x) = \mu_1 D^{\beta}u(x) + \mu_2 u(x) + \mu_3 g(x), \\ u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1, \end{cases}$$

et non linéaires du type

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x) = G\big(x, u(x), D^{\beta}u(x), D^{\gamma}u(x)\big), \\ u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1, \quad u''(0) = c_2. \end{cases}$$

Chapitre 1

Quelques rappels de calcul fractionnaire

1.1 Les fonctions Gamma et Bêta d'Euler

La fonction gamma d'Euler $\Gamma(x)$ joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Une définition de $\Gamma(x)$ est celle fournie par la Limite d'Euler :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \right), \quad x > 0. \tag{1.1}$$

Une autre expression définie par la transformée intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0 \tag{1.2}$$

est souvent plus utile, bien qu'elle soit limitée à une valeur positive de x . Une l'intégration par parties appliquée à l'expression (1.2) conduit à la relation de récurrence :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.3}$$

C'est la propriété la plus importante de la fonction gamma. Comme $\Gamma(1) = 1$, alors l'expression (1.3) montre que pour tout entier positif n nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n! \end{aligned} \tag{1.4}$$

Les propriétés les plus importantes de la fonction gamma sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \\ \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

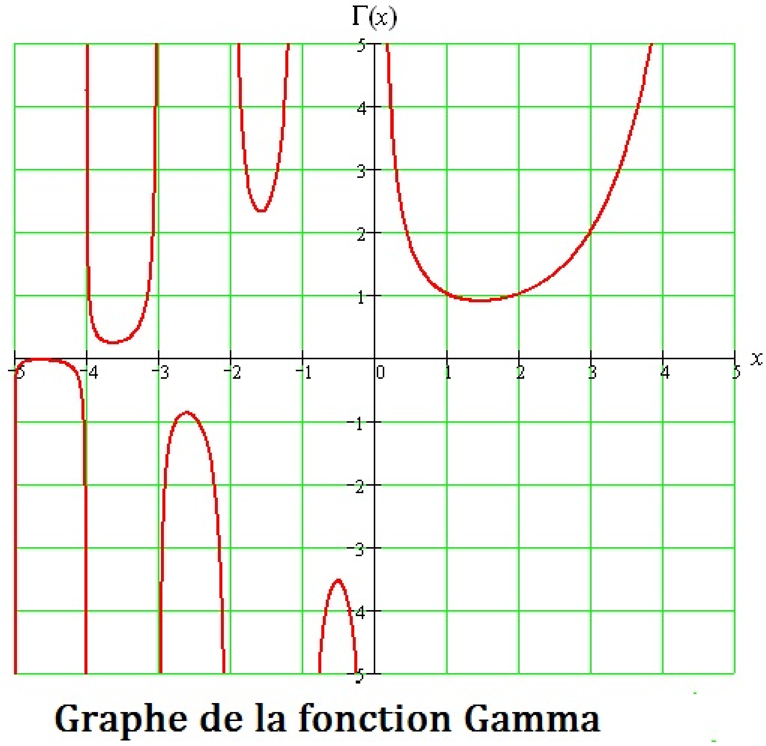

FIGURE 1.1: Courbe représentative de la fonction Gamma

Une fonction liée à la fonction gamma est la fonction bêta $\beta(p,q)$. Pour les deux paramètres $p>0$ et $q>0$, la fonction bêta est définie par l'intégrale suivante :

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{1.5}$$

Si l'un des paramètres p ou q n'est pas positif, alors l'intégrale (1.5) diverge sinon $\beta(p,q)$ est définie par la relation suivante :

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.6}$$

où $p>0$ et $q>0$.
Les fonctions bêta et gamma ont des analogues "incomplets". la fonction bêta incomplète d'argument x est définie par l'intégrale :

$$\beta_x(p,q)=\int_0^x y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy \tag{1.7}$$

et la fonction gamma incomplète d'argument x est définie par :

$$\begin{aligned}\Gamma_c(x) &= \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)}\int_0^c y^{x-1}e^{-y}dy\\ &= e^{-x}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)}\end{aligned} \tag{1.8}$$

$\Gamma_c(x)$ est une fonction analytique finie à valeur unique de x et c.

1.2 Intégrales fractionnaires :

De nombreuses littéatures introduisent différentes définitions des intégrations fractionnaires, parmi lesquelles :

1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville pour une fonction appropriée $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \alpha > 0 \tag{1.9}$$

et $I^0 f(x) = f(x)$ est l'opérateur d'identité.
Les propriétés de l'opérateur I^{α} peuvent être trouvées dans [**?**, $Podlbuny, 1999$] pour $\beta \geq 0, \alpha > 0$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} 1.\ I^{\alpha} I^{\beta} f(x) & = & I^{\alpha+\beta} f(x) \\ 2.\ I^{\alpha} I^{\beta} f(x) & = & I^{\beta} I^{\alpha} f(x) \end{array}$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire de Weyl

L'intégrale fractionnaire à gauche d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction donnée f est définie par :

$$_{-\infty}I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy \tag{1.10}$$

et l'intégrale à droite fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction donnée f est définie par :

$$_{\infty}I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy$$

1.2.3 Intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann

L'intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann d'ordre $\alpha > 0$, pour une fonction $f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$ est définie par :

$$I_{AR}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, x > 0, \alpha > 0 \tag{1.11}$$

$I_{AR}^0 = I$ (Opérateur d'identité)
L'intégrale d'Abel-Riemann possède la propriété de semi-groupe suivante :

$$I_{AR}^{\alpha} I_{AR}^{\beta} = I_{AR}^{\alpha+\beta} \quad \text{Pour tout} \quad \alpha, \beta \geq 0. \tag{1.12}$$

1.3 Dérivées fractionnaires :

Dans les littératures de nombreuses dérivées fractionnaires de certaines fonctions ont été discutées. dans cette paragraphe, certaines définitions des dérivées fractionnaires sont présentées :

1.3.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Parmi les formules les plus importantes utilisées dans le calcul fractionnaire se trouve la formule de Riemann-Liouville. Pour une fonction donnée $f(x), x \in [a,b]$; les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite d'ordre $\alpha > 0$ sont données par :

$$_xD^{\alpha}_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}}dt \tag{1.13}$$

$$_xD^{\alpha}_{b^-}f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}}dt \tag{1.14}$$

avec $m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}$.

1.3.2 La dérivée fractionnaire d'Abel-Riemann

La dérivée fractionnaire d'Abel-Riemann d'ordre $\alpha > 0$ est définie comme l'inverse de l'intégrale fractionnaire d'Abel-Riemann correspondante, c'est-à-dire :

$$D^{\alpha}_{AR}I^{\alpha}_{AR} = I \tag{1.15}$$

Pour un entier positif m, tel que $m-1 < \alpha \leq m$ où I est l'opérateur identité.

$$(D^m_{AR}I^{m-\alpha}_{AR})I^{\alpha}_{AR} = D^m_{AR}(I^{m-\alpha}_{AR}I^{\alpha}_{AR}) = D^m_{AR}I^m_{AR} = I$$

c'est-à-dire :

$$D^{\alpha}_{AR}f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\dfrac{d^m}{dx^m}\displaystyle\int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau & m-1 < \alpha < m \\ \\ \dfrac{d^m}{dx^m}f(x) & \alpha = m \end{cases} \tag{1.16}$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Une autre définition des dérivés fractionnaires a été introduite par Caputo. Caputo et Minadri ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la théorie de la viscoélasticité. Selon la définition de Caputo suivante :

$$^cD^{\alpha}_x = I^{m-\alpha}D^m, \quad for \quad m-1 < \alpha \leq m$$

ce qui signifie que :

$$
{}^cD_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{f^{(m)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \\ \dfrac{d^m}{dx^m} f(x) & \alpha = m \end{cases}
$$

Pour la dérivée de Caputo , on a :

$$
{}^cD_x^\alpha C = 0, \tag{1.17}
$$

$$
{}^cD_x^\alpha x^j = \begin{cases} 0 \quad , & pour \quad j \in \mathbb{N} \ \ et \ \ j < \lceil \alpha \rceil \\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} x^{j-\alpha} & pour \quad j \in \mathbb{N} \ \ et \ \ j \geq \lceil \alpha \rceil \quad ou \quad j \notin \mathbb{N}^* \ \ et \ \ j > \lfloor \alpha \rfloor \end{cases} \tag{1.18}
$$

Nous utilisons la fonction $\lceil \alpha \rceil$ pour désigner le plus petit entier supérieur ou égal à α et la fonction $\lfloor \alpha \rfloor$ pour désigner le plus grand entier inférieur ou égal à α

Les propriétés de base de la dérivée fractionnaire de Caputo sont :

1. Caputo a introduit une définition alternative, qui a la préférence de définir des conditions initiales d'ordre entier pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

2. $I^\alpha \, {}^cD_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \dfrac{x^k}{k!}$.

3. La différenciation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire, similaire á la différenciation d'ordre entier :

$$
{}^cD_x^\alpha[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda^c D_x^\alpha f(x) + \mu^c D_x^\alpha g(x). \tag{1.19}
$$

1.4 Fonctions de Mittag-Leffler

Dans cette section, nous présentons la définition et quelques propriétés de deux fonctions classiques de Mittag-Leffler. On commence par la fonction d'un seul paramètre :

$$
E_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad z \in \mathbb{C}; \quad Re(\alpha) > 0.
$$

Comme exemple prenons $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$:

$E_1(z) = e^z$ et $E_2(z) = \cosh(z)$.
Alors que quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la formule de différenciation suivante vaut pour une fonction $E_n(\lambda z^n)$:

$$
\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n), n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}
$$

et
$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1}E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right] = \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), z \neq 0; n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}$$
Aussi, lorsque $\alpha = \dfrac{1}{n}(n \in \mathbb{N}^*)$ on a la représentation suivante :

$$E_{\frac{1}{n}}(z) = e^{z^n}\left[1 + n\int_0^z e^{-t^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{k-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}dt\right)\right], n \in \mathbb{N}^*$$

Une fonction à deux paramètres de type Mittag-Leffler est définie par le développement en série :
$$E_{\alpha,y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + y)}, \alpha > 0, y > 0 \tag{1.20}$$
Il résulte de la définition (1.20) que :

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z\\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}\\
E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2}
\end{aligned}$$

et en général :
$$E_{1.m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\}$$

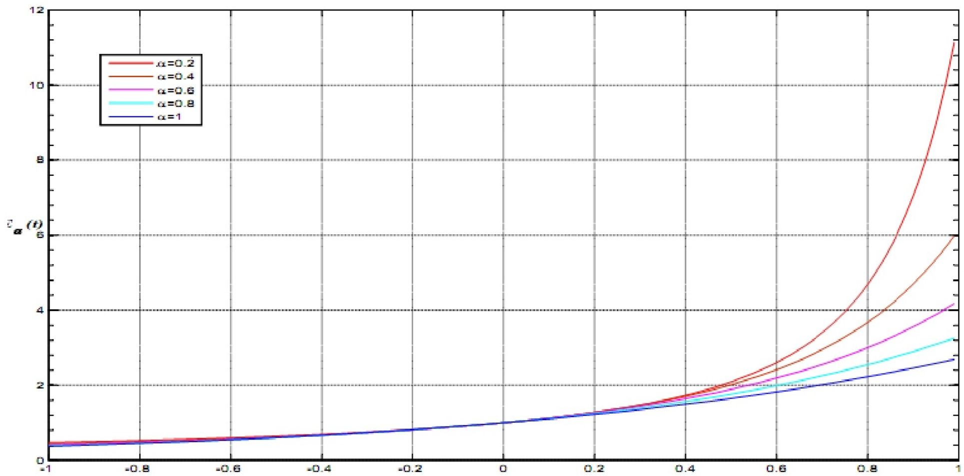

FIGURE 1.2: La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

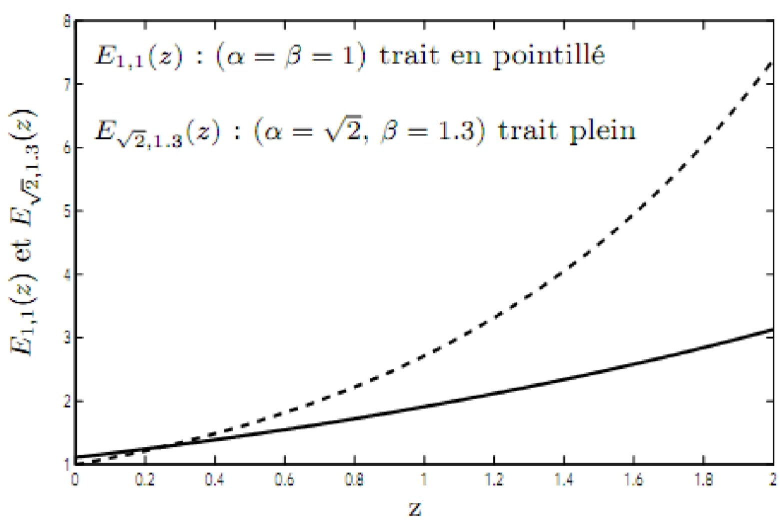

FIGURE 1.3: La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

Chapitre 2

Polynôme de Legendre et ses propriétés

2.1 Polynôme de Legendre

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est $[-1, 1]$ et la fonction poids est simplement la fonction constante de valeur 1. Pour tout entier naturel n, le polynôme de Legendre P_n est défini par :

P_n est la dérivée $n^{\text{ième}}$ du polynôme $(x^2-1)^n$ qui est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant égale à 1, par conséquent, P_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant

$$2n(2n-1)...(2n-n+1) = \frac{(2n)!}{n}.$$

Pour n donné, La formule suivante permet de calculer l'expression générale de P_n :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Cette formule s'appelle la formule de Rodriguès $(1794-1851)$, il a trouvé cette formule en travaillant sur la résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles dans le prolongement de sa thèse de doctorat (Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes, 1816).

Nous retrouverons ces polynômes dans la résolution d'équations différentielles en physique (propagation de la chaleur, physique quantique, chimie quantique, etc).

2.2 Propriétés du polynôme de Legendre

Lemme 2.2.1. *Le polynôme de Legendre vérifie les propriétés suivantes :*
1) $\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0, \quad \textit{pour } i \neq j.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

3) Les polynômes de Legendre vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{2.1}$$

4) Quelques relations de récurrence en présence des dérivées de P_n :

$$P_n'(x) = xP_{n-1}'(x) + nP_{n-1}(x) \tag{2.2}$$

$$nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x), \quad n \neq 0. \tag{2.3}$$

5) Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Preuve. 1) $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P_i(x), P_j(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx \\
&= \frac{1}{i!j!2^{i+j}} \int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j dx \\
&= \frac{1}{i!j!2^{(i+j)}} \Bigg(\left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x^2-1)^i \frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j \right]_{-1}^{1} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x^2-1)^i \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^2-1)^j dx \Bigg).
\end{aligned}$$

Il est clair que le polynôme $(x^2-1)^i$ a une racine d'ordre i en 1 et en -1, donc la $(i-1)$-iéme dérivée de $(x^2-1)^i$ s'annule en $x = 1$ et en $x = -1$. Par conséquent nous obtenons :

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = \frac{-1}{i!j!2^{i+j}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x^2-1)^i \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^2-1)^j dx$$

Par intégration par parties j fois, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx &= \frac{(-1)^j}{i!j!2^{(i+j)}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}(x^2-1)^i \frac{d^{2j}}{dx^{2j}}(x^2-1)^j dx \\
&= \frac{(-1)^j(2)^j!}{i!j!2^{(i+j)}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}(x^2-1)^i dx \\
&= \frac{(-1)^j(2)^j!}{i!j!2^{(i+j)}} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}(x^2-1)^i \right]_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: On pose $k = \dfrac{1}{2^n n!}$ et $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$.

Donc

$$J = k^2 \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx,$$

Choisissant maintenant

$$du = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \quad \text{et} \quad v = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

alors une intégration par parties nous donne

$$J = k^2\left(\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx\right)$$

Le premier terme à l'intérieur du crochet est nul puisque -1 et 1 sont racines, et de proche en proche on obtient :

$$J = k^2(-1)^n \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx.$$

Puisque $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ (à coefficient principal réduit) que l'on dérive $2n$ fois, le résultat est une constante qui vaut $(2n)!$, alors J prend l'expression suivante :

$$J = k^2(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

Il est facile de calculer cette dernière intégrale, pour cela on pose :

$$L = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

Intégrale que l'on peut calculer par parties. Il suffit de choisir :
$u = (x^2-1)^n$ et donc :$du = 2n(x^2-1)^{n-1}xdx$, on obtient alors :

$$L = \left[x(x^2-1)^n\right]_{-1}^{+1} - 2n\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1}dx.$$

La première quantité a une valeur nulle. Une autre intégration par parties permet d'écrire :

$$L = \frac{2}{3}n(n-1)^2\int_{-1}^{1} x^4(x^2-1)^{n-2}dx.$$

On poursuit ainsi de suite les calculs et, en notant par ε le signe que l'on déterminera plus tard, on arrive à l'expression :

$$L = \varepsilon 2n\frac{1}{3}2(n-1)\frac{1}{5}2(n-2)...\frac{1}{2n-1}2(2-1)\int_{1}^{-1} x^{2n-2}(x^2-1)^1 dx,$$

qui conduit à l'expression suivante :

$$L = \varepsilon\frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n+1)}2.$$

Le problème du signe ε que nous avons délibérément abandonné se trouve résolu en remarquant que $(x^2-1)^n$ est une fonction qui a le signe de $(-1)^n$ sur l'intervalle $[-1,+1]$ ainsi L s'écrit :

$$L = (-1)^n \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n+1)}2.$$

Ensuite, nous pouvons écrire :

$$J = \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{1.3.5...(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}.$$

On obtient donc le résultat suivant :

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

3) Les polynômes de Legendre vérifient la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

On va chercher une relation de récurrence entre trois polynômes consécutifs $P_{n+1}(x), P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$. Pour cela on utilise la formule de Rodriguès écrite pour le degré $(n+1)$:

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1}.$$

On dérive une fois l'expression $(x^2-1)^{n+1}$, et l'on trouve :

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x(x^2-1)^n).$$

Que l'on peut l'écrire aussi :

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}\Big]$$

Puis on ajoute et l'on retranche $2n(x^2-1)^{n-1}$ dans la dérivée du second terme :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1} - 2n(x^2-1)^{n-1} + 2n(x^2-1)^{n-1}\Big] \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(2n+1)(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}\Big]. \end{aligned}$$

Soit encore :

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(2n+1)(x^2-1)^n + P_{n-1}(x).$$

Calculons le premier terme du second membre en utilisant la relation découlant de la règle de Leibniz, cette quantité est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n &= \frac{2n+1}{n2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\big[x(x^2-1)^n\big] - \frac{(2n+1)x}{n2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \\ &= \frac{2n+1}{n}P_{n+1}(x) - \frac{2n+1}{n}xP_n(x). \end{aligned}$$

Finallement, il vient :

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n} P_{n+1}(x) - \frac{2n+1}{n} x P_n(x) + P_{n-1}(x),$$

on aboutit finalement à la relation de récurrence désirée :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xp_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

4) On dérive la formule de Rodriguès par rapport à x, on obtient :

$$P_n'(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (2nx(x^2-1)^{n-1}),$$

en utilisant encore une fois la relation de Leibniz, on arrive à :

$$P_n'(x) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} (x \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n-1} + n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n-1}),$$

d'où, la premiére relation de récurrence

$$P_n'(x) = xP_{n-1}'(x) + nP_{n-1}(x),$$

qui peut encore s'écrire :

$$(n+1)P_{n+1}'(x) = (n+1)\big[xP_n'(x) + (n+1)P_n(x)\big]. \tag{2.4}$$

La dévivation de la relation (2.1) donne :

$$(n+1)P_{n+1}'(x) = (2n+1)P_n(x) + (2n+1)xP_n'(x) - nP_{n-1}'(x), \tag{2.5}$$

La soustraction des expressions (2.4) et (2.5) conduit à la seconde relation de récurrence

$$nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x), \quad n \neq 0.$$

Ces deux dernières formules sont utiles dans le cadre de l'ètude de la mèthode d'intègration de Gauss-Legendre.

5) Dérivons une fois par rapport à x la relation (2.2) :

$$\begin{aligned} P_n''(x) &= P_{n-1}'(x) + xP_{n-1}''(x) + nP_{n-1}'(x) \\ &= (n+1)P_{n-1}'(x) + xP_{n-1}''(x). \end{aligned}$$

De même, la dérivation de la relation (2.3) donne :

$$nP_n'(x) = xP_n''(x) + P_n'(x) - P_{n-1}''(x).$$

D'où l'on tire :

$$P_{n-1}''(x) = -(n-1)P_n'(x) + xP_n''(x).$$

Éliminons $P_{n-1}''(x)$ entre ces deux relations, il vient

$$P_n''(x) = (n+1)P_{n-1}'(x) + x(xP_n''(x) - (n-1)P_n'(x)).$$

Reste à éliminer $P_{n-1}'(x)$ grâcde à la relation (2.3) :

$$P_n''(x) = (n+1)\big(xP_n'(x) - nP_n(x)\big) + x^2 P_n''(x) - (n-1)xP_n'(x).$$

La dernière relation ne dépend plus que de $P_n(x)$ et de ses deux premières dérivées :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Cette dernière relation est vraie quel que soit n, c'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre appelée équation différentielle de Legendre. $\square$

2.3 Premiers polynômes de Legendre et leurs racines :

2.3.1 Six premiers polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15) \end{aligned}$$

2.3.2 Racines des six premiers polynômes de Legendre :

Les racines du polynômpe de Legendre sont solutions de l'équation : $P_n(x) = 0$.

- $n = 0, \quad S = \emptyset$
- $n = 1, \quad S = \{0\}$
- $n = 2, \quad S = \left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$
- $n = 3, \quad S = \left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$
- $n = 4, \quad S = \left\{\pm\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}, \pm\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}\right\}$

• $n = 5$, on obtient l'équation : $63x^5 - 70x^3 + 15 = 0$. Généralement, il n'ya pas une méthode pour la résoudre algébriquement, sauf en utilisant les méthodes numériques pour trouver des solutions approximatives.

Chapitre 3

Matrice opérationnelle de Legendre

3.1 Propriétés des polynômes de Legendre modifiés

D'après l'expression (2.1) , les polynômes de Legendre sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ par la formule de récurrence suivante :

$$L_{i+1}(s) = \frac{2i+1}{i+1} s L_i(s) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(s), \quad i = 1, 2, ...$$

avec $L_0(s) = 1$ et $L_1(s) = s$. Pour utiliser ces polynômes de Legendre sur l'intervalle $[0, 1]$ on définit les polynômes de Legendre dits modifiés en effectuant le changement de variables $s = 2x - 1$ Notons les polynômes de Legendre modifiés $L_i(2x - 1)$ par $P_i(x)$. Alors $P_i(x)$ peut être obtenus comme suit

$$P_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)(2x-1)}{i+1} P_i(x) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(x) \quad i = 1, 2, ... \tag{3.1}$$

avec $P_0(x) = 1.$ et $P_1(x) = 2x - 1$ La forme analytique des polynômes de Legendre modifiés $P_i(x)$ de degré i sont donnés par :

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+k} \frac{(i+k)!}{(i-k)!(k!)^2} x^k. \tag{3.2}$$

En notant que $P_i(0) = (-1)^i$ et $P_i(1) = 1$ la condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\int_0^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2i+1}, & \text{si} \quad i = j \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{3.3}$$

Une fonction g ,carré intégrable dans $[0, 1]$ peut être exprimée en termes de polynômes de Legendre modifiés de la manière suivante :

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x),$$

où les coefficients c_j sont donnés par :

$$c_j = (2j+1) \int_0^1 g(x) P_j(x) dx, \quad j = 1, 2, ...$$

En pratique , seulement les $(m+1)$ premiers termes des polynômes de Legendre modifiés sont considérés. Alors nous avons :

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j P_j = C^T \Phi(x),$$

tel que le vecteur coefficient de Legendre décalé C et le vecteur de Legendre décalé $\Phi(x)$ sont donnés par :

$$C^T = [c_0, ..., c_m], \tag{3.4}$$

$$\Phi(x) = [P_0(x,)P_1(x), ..., P_m(x)]^T. \tag{3.5}$$

La dérivée du vecteur $\Phi(x)$ peut être exprimer par :

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \mathbf{D}^{(1)}\Phi(x), \tag{3.6}$$

où $\mathbf{D}^{(1)}$ est la $(m+1)\times(m+1)$ matrice opérationnelle des dérivées donnée par :

$$D^{(1)} = (d_{ij}) = \begin{cases} 2(2j-1), & \text{si } j = i-k \\ 0, \quad \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} k = 1, 3, \ldots, m, & \text{si } m \text{ impair}, \\ k = 1, 3, \ldots, m-1, & \text{si } m \text{ pair}, \end{cases}$$

par exemple, pour m un entier pair la matrice $D^{(1)}$ s'écrit

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 2m-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \cdots & 0 & 2m-1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

3.2 Matrice opérationnelle de Legendre généralisée au calcul fractionnaire

En exploitant l'équation (3.6) , nous obtenons clairement que

$$\frac{d^n\Phi(x)}{dx^n} = (\mathbf{D}^{(1)})^n.\Phi(x) \tag{3.8}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\left(\mathbf{D}^{(1)}\right)^n$ désignent les puissances matricielles. Donc

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{D}^{(1)})^n, \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.9}$$

Lemme 3.2.1. *Soit $P_i(x)$ le polynôme de Legendre décalé. Alors*

$$D^\alpha P_i(x) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, \lceil\alpha\rceil - 1, \quad \alpha > 0.$$

Preuve. Pour la preuve, il suffit d'appliquer les égalités (1.17)-(1.19) dans l'équation (3.2). □

Dans le théorème suivant, nous généralisons la matrice opérationnelle de la dérivée des polynômes de Legendre modifiés donnée par (1.18) aux dérivées fractionnaires.

Théorème 3.2.1. *Soit $\phi(x)$ le vecteur de Legendre décalé défini par* (3.5) *avec $\alpha > 0$. Alors*

$$D^\alpha \phi(x) \backsimeq \boldsymbol{D}^{(\alpha)} \phi(x), \tag{3.10}$$

où $\boldsymbol{D}^{(\alpha)}$ est la $(m+1) \times (m+1)$ matrice opérationnelle de la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo et est définie de la manière suivante :

$$\boldsymbol{D}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{\lceil\alpha\rceil} \Theta_{\lceil\alpha\rceil,0,k} & \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{\lceil\alpha\rceil} \Theta_{\lceil\alpha\rceil,1,k} & \cdots & \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{\lceil\alpha\rceil} \Theta_{\lceil\alpha\rceil,m,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i} \Theta_{i,0,k} & \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i} \Theta_{i,1,k} & \cdots & \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i} \Theta_{i,m,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{m} \Theta_{m,0,k} & \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{m} \Theta_{m,1,k} & \cdots & \sum\limits_{k=\lceil\alpha\rceil}^{m} \Theta_{m,m,k} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

où $\Theta_{i,j,k}$ est donné par :

$$\Theta_{i,j,k} = (2j+1) \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^{i+j+k+l}(i+k)!(l+j)!}{(i-k)!k!\Gamma(k-\alpha+1)(j-l)!(l!)^2(k+l-\alpha+1)}. \tag{3.12}$$

Notons que dans $\boldsymbol{D}^{(\alpha)}$, les $\lceil\alpha\rceil$ premières lignes sont toutes nulles .

Preuve. En appliquant les égalités (1.18),(1.19) dans (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} D^\alpha P_i(x) &= \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i+k}(i+k)!}{(i-k)!(k!)^2} D^\alpha(x^k) \\ &= \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i} \frac{(-1)^{i+k}(i+k)!}{(i-k)!(k!)\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}, \quad i = \lceil\alpha\rceil, \cdots, m. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Maintenant , en approximant $x^{k-\alpha}$ par $(m+1)$ termes de séries de polynômes de Legendre , on trouve

$$x^{k-\alpha} \backsimeq \sum_{j=0}^{m} b_{k,j} P_j(x), \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned} b_{k,j} &= (2j+1)\int\limits_0^1 x^{k-\alpha}P_j(x)dx \\ &= (2j+1)\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^{j+l}(j+l)!}{(j-l)!(l!)^2}\int\limits_0^1 x^{k+l-\alpha}dx \\ &= (2j+1)\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^{j+l}(j+l)!}{(j-l)!(l!)^2(k+l-\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En exploitant (3.13)-(3.15) on obtient :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}P_i(x) &\backsimeq \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^{i+k}(i+k)!}{(i-k)!(k!)\Gamma(k-\alpha+1)}b_{k,j}P_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\theta_{h,j,k}\right)P_j(x), \quad i=\lceil\alpha\rceil,\cdots,m \end{aligned} \tag{3.16}$$

où $\theta_{i,j,k}$ est donné par l'équation (3.12). Réécrivons l'équation (3.16) sous forme vectorielle nous obtenons :

$$D^{\alpha}P_i(x) \backsimeq \left[\sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\theta_{i,0,k}, \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\theta_{i,1,k},\cdots, \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\theta_{i,m,k}\right]\phi(x), \quad i=\lceil\alpha\rceil,\cdots,m \tag{3.17}$$

D'après le Lemme 3.2.1, nous pouvons écrire :

$$D^{\alpha}P_i(x) = [0,0,\cdots,0]\phi(x), \quad i=0,1,\cdots\lceil\alpha\rceil-1. \tag{3.18}$$

Une combinaison des équations (3.17) et (3.18) nous donne le résultat recherché. □

Remarque 3.2.1. *si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors le Théorème 3.2.1 donne le même résultat que l'équation* (3.9).

Chapitre 4

Quelques applications de la matrice opérationnelle

Dans cette section, afin de montrer la grande importance de la matrice opérationnelle dérivation fractionnaire, nous l'appliquons pour résoudre quelques types d'équations différentielles fractionnaire. L'existence et l'unicité de solutions de ces équations sont discutées dans deux types choisis d'équations différentielles fractionnaire.

4.1 Cas d'un problème linéaire :

On considère l'équation différentielle fractionnaire

$$D^{\alpha}u(x) = \mu_1 D^{\beta}u(x) + \mu_2 u(x) + \mu_3 g(x), \tag{4.1}$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1. \tag{4.2}$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont des coefficients constants réels, $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta < \alpha$ et D^{α}, D^{β} désignent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α et β de Caputo.

Pour résoudre le problème (4.1)-(4.2) nous approximons $u(x)$ et $g(x)$ par les polynômes de Legendre modifiés comme suit :

$$u(x) \backsimeq \sum_{i=0}^{m} c_i p_i(x) = C^T \phi(x) \tag{4.3}$$

$$g(x) \backsimeq \sum_{i=0}^{m} g_i p_i(x) = G^T \phi(x) \tag{4.4}$$

où le vecteur $G = [g_0, \cdots, g_m]^T$ est connu mais $C = [c_0, \cdots, c_m]^T$ est un vecteur inconnu. En utilisant les équations (3.10) et (4.3) on a :

$$D^{\alpha}u(x) \backsimeq C^T D^{\alpha}\phi(x) \backsimeq C^T \mathbf{D}^{(\alpha)}\phi(x) \tag{4.5}$$

$$D^{\beta}u(x) \backsimeq C^T D^{\beta}\phi(x) \backsimeq C^T \mathbf{D}^{(\beta)}\phi(x). \tag{4.6}$$

En exploitant les équations $(4.3) - (4.6)$. le résidu $R_m(x)$ pour l'équation (4.1) peut s'écrire :

$$R_m(x) \backsimeq \left(C^T\mathbf{D}^{(\alpha)} - C^T\mu_1\mathbf{D}^{(\beta)} - \mu_2 C^T - \mu_3 G^T\right)\phi(x). \tag{4.7}$$

Maintenant nous générons $(m-1)$ équations linéaires en appliquant

$$\langle R_m(x), P_j\rangle = \int_0^1 R_m(x), P_j dx = 0 \quad j = 0, 1, \cdots, m-2. \tag{4.8}$$

Aussi, en substituant les équations (3.9) et (4.3) dans l'équation (4.2). on obtient

$$\begin{aligned} u(0) &= C^T\phi(0) = c_0 \\ u'(0) &= C^T\mathbf{D}^{(1)}\phi(0) = c_1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Les équations (4.8) et (4.9) génèrent $(m-1)$ et (2) équations linéaires. Ces équations linéaires peuvent être résolues pour des coefficients inconnus du vecteur C . Par conséquent, $u(x)$ donné dans l'équation (4.3) peut être calculé.

Exemple 4.1.1. *On considère le problème à valeur initiale suivant*

$$\begin{cases} D^2u(x) = -D^{\frac{3}{2}}u(x) - u(x) + 1 + x, \\ \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

Il est facile de vérifier que la solution exacte de ce problème est $u(x) = 1 + x$. En appliquant la technique décrite dans la section 4.1 avec $m = 2$, on peut exprimer la solution approchée du problème de la façon suivante :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{2} c_i p_i = C^T\phi(x),$$

c'est-à-dire :

$$u(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + c_2p_2(x) = C^T\phi(x),$$

avec

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 2x - 1, \quad p_2(x) = 1 - 6x + 6x^2.$$

D'après le théorème $3.2.1$ on trouve :

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}^{(\frac{3}{2})} = \left(\frac{16}{\sqrt{\pi}}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc en exploitant l'équation (4.8) on obtient :

$$c_0 + \left(12 + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\right)c_2 - \frac{3}{2} = 0 \tag{4.11}$$

Maintenant, en appliquant employant (4.9) on arrive à :

$$c_0 - c_1 + c_2 - 1 = 0 \tag{4.12}$$
$$2c_1 - 6c_2 - 1 = 0 \tag{4.13}$$

Enfin la résolution des équations $(4.11) - (4.13)$ nous donne :
$c_0 = \dfrac{3}{2}, \quad c_1 = \dfrac{1}{2}, \quad c_2 = 0$.
Ainsi on peut écrire :

$$u(x) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2x-1 \\ 6x^2-6x+1 \end{pmatrix} = 1 + x$$

qui est la solution exacte.

4.2 Cas d'un problème non linéaire :

On considère le problème différentielle fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x) = G\big(x, u(x), D^{\beta}u(x), D^{\gamma}u(x)\big), \\ \\ u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1, \quad u''(0) = c_2, \end{cases} \tag{4.14}$$

où $2 \leq \alpha \leq 3$, $0 < \beta < \gamma < \alpha$, $D^{\alpha}, D^{\beta}, D^{\gamma}$ désignent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α, β et γ au sens de Caputo et G une fonction non linéaire.

Afin d'utiliser des polynômes de Legendre modifiés pour ce problème, nous approchons d'abord $u(x), D^{\alpha}u(x)$ et $D^{\beta}u(x)$ et $D^{\gamma}u(x)$. En substituant les équations $(4.3), (4.5)$ et (4.6) respectivement dans l'équation (4.14). on obtient :

$$C^T\mathbf{D}^{(\alpha)}\phi(x) \simeq G(x, C^T\phi(x), C^T\mathbf{D}^{(\beta)}\phi(x), C^T\mathbf{D}^{(\gamma)}\phi(x)) \tag{4.15}$$

Aussi, en remplaçant les équations (3.9) et (4.3) dans (4.14) on trouve :

$$\begin{aligned} u(0) &= C^T\phi(0) = c_0, \\ u'(0) &= C^T\mathbf{D}^{(1)}\phi(0) = c_1, \\ u''(0) &= C^T\mathbf{D}^{(2)}\phi(0) = c_2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pour trouver la solution $u(x)$, on colocalise d'abord les équations (4.15) à $(m-2)$ points. Pour les points de collocation appropriés, nous utilisons les premières $(m-2)$ racines du polynômes de Legendre modifiés de $P_{m+1}(x)$. Ces équations ensembles avec l'équation (4.16) génèrent $(m+1)$ équations non linéaires qui peuvent être résolues par la méthode itérative de Newton par exemple. Par conséquent $u(x)$ donnée dans l'équation (4.3) peut être calculée.

Exemple 4.2.1. *On considère le problème différentielle fractionnaire non linéaire à valeur initiale suivant :*

$$\begin{cases} D^3u(x) = x^4 - D^{\frac{5}{2}}u(x) - u^2(x), \\ \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 2. \end{cases} \tag{4.17}$$

Dans cet exemple on va résoudre le problème (4.17), en appliquant la technique dècrite dans la Section 4.2 avec $m = 3$, nous approchons la solution de la manière suivante :

$$u(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = C^T \phi(x)$$

avec

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 2x - 1, \quad p_2(x) = 1 - 6x + 6x^2, \quad p_3(x) = -1 + 12x - 30x^2 + 20x^3.$$

Ici, on a

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} ,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{(\frac{5}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{160}{\sqrt{\pi}} & \frac{96}{\sqrt{\pi}} & -\frac{160}{7\sqrt{\pi}} & \frac{32}{3\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'équation (4.15) on obtient :

$$C^T \mathbf{D}^{(3)} \phi(x) + C^T \mathbf{D}^{(\frac{5}{2})} \phi(x) + \left[C^T \phi(x)\right]^2 - x^4 = 0 \tag{4.18}$$

Maintenant, nous colocalisons l'équation (4.18) à la premiè ère racine de $P_4(x)$, c'est-à-dire :

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{525 - 70\sqrt{3}}}{70} \simeq 0.069431844$$

Aussi en employant les équations (4.16) on trouve :

$$\begin{aligned} C^T \phi(0) &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ C^T \mathbf{D}^{(1)} \phi(0) &= 2c_1 + 12c_3 - 6c_2 = 0 \\ C^T \mathbf{D}^{(2)} \phi(0) &= 12c_2 - 60c_3 = 2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En résolvant les équations (4.18) et (4.19) on obtient :

$$c_0 = \frac{1}{3}, \qquad c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{6}, \qquad c_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$u(x) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2x - 1 \\ 6x^2 - 6x + 1 \\ 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \end{pmatrix} = x^2,$$

qui représente la solution exacte du problème (4.17).

Conclusion et perspectives

Dans ce travail une formule générale de la matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire a été présentée. Nous avons appliqué cette méthode à la résolution numérique d'une classe d'équations différentielles fractionnaires en se basant sur les polynômes de Legendre modifiés et ses propriétés. Comme nous l'avons vu dans les exemples illustratifs présentés, cette méthode est caractérisée par la précision de la résolution. De plus, seuls quelques polynômes de Legendre modifiés sont nécessaires pour obtenir un résultat satisfaisant comme il est prouvé dans les exemples étudiés. Cette méthode peut être appliquer à la résolution d'une large classe d'équations différentielles fractionnaires. Une autre méthode due à la matrice opérationnelle de d'intégration fractionnaire peut aussi jouer un rôle similaire à la résolution de ce genre de problèmes différentiels fractionnaires basant sur des polynômes orthogonaux de Legendre, Bernstein, Tchebychev, etc,...

Bibliographie

[1] R. Hilfer. Applications of Fractional Calculus in Physics. A. World Scientifc, Singapore, 2000

[2] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[3] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

[4] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[5] S. Das, Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, New York, 2008.

[6] K. Diethelm, N.J. Ford, Numerical solution of the Bagley-Torvik equation, BIT 42 (2002) 490-507.

[7] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equation, Nonlinear Dyn. 29 (2002)

[8] F. Mainardi, Fractional calculus : 'Some basic problems in continuum and statistical mechanics', in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, Verlag, New York, 1997, pp. 291-348.

[9] P. Kumar, O.P. Agrawal, An approximate method for numerical solution of fractional differential equations, Signal Processing 86 (2006) 2602-2610.

[10] F. Liua, V. Anh, I. Turner, Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation, J. Comput. Appl. Math. 166 (2004) 209-219

[11] R.L. Magin, Fractional calculus in bioengineering, Crit. Rev. Biomed. Eng. 32 (1) (2004) 1-104

[12] S. Momani, Z. Odibat, Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics, Phys. Lett. A 355 (2006) 271-279

[13] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fract. Calculus Appl. Anal. 5 (2002) 367-386.

[14] A. Saadatmandi, M. Razzaghi, M. Dehghan, Hartley series approximations for the parabolic equations, Intern. J. Comput. Math. 82 (2005) 1149-1156.

[15] A. Saadatmandi, M. Dehghan, A Tau method for the one-dimensional parabolic inverse problem subject to temperature overspecification, Comput. Math. Appl. 52 (2006) 933-940.

[16] A. Saadatmandi, M. Dehghan, Numerical solution of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis via the tau method, Commun. Numer. Methods. Eng. 24 (2008) 1467-1474.

[17] A. Saadatmandi, M. Dehghan, Numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition, Numer. Methods Partial Differential Equations 23 (2007) 282-292.

[18] Z. Shuqin, Existence of Solution for Boundary Value Problem of Fractional Order, Acta Mathematica Scientia, 26B (2006), pp.220-228.

ملخص:

في هذا اعمل نطبق المصفوفة التنفيذية للاشتقاق الكسري بإستعمال كثيرات حدود لوجندر.إقترحنا خوارزمية للحصول على حل تقريبي للمعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية باستخدام اساس كثيرات حدود لوجندر المحولة .ثم تطبيق هذه الطريقة على حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية متعددة الرتب مع الشروط الإبتدائية. تكشف هذه النتائج العددية أن هذه الطريقة تعطي تقريبا مثاليا لهذه المعادلات التفاضلية.

الكلمات المفتاحية : معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية ، المصفوفة التنفيذية ، كثيرات حدود لوجندر المحولة التكامل الكسري لريمان-ليوفيل .

Abstract

In this work we implement an operational matrix of fractional derivative using the Legendre polynomials. We proposed an algorithm to obtain an approximate solution for fractional differential equations described in Riemann-Liouville sense based on shifted Legendre polynomials . This method was applied to solve linear and nonlinear multi-order fractional differential equations with initial conditions . Numerical results reveal that this method gives ideal approximation these fractional differential equations.

Keywords: Fractional-order differential equation ; operational matrix Riemann-Liouville fractional integral ; shifted Legendre polynomials.

Résumé

Dans cet travail , nous implémentons une matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire en utilisant les polynôme de Legendre. Nous avons proposé un algorithme pour obtenir une solution approximative pour les équation différentielles fractionnaires, décrite au sens de Riemann-Liouville ,basé sur les polynômes de Legendre modifiés. Cette méthode a été appliquée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires multi-ordre linéaires et non linéaires avec des conditions initiales. Les résultats numériques révèlent que cette méthode donne une approximation idéale pour ces équations différentielles fractionnaires.

Mots-clés : Equation différentielle d’ordre fractionnaire ; matrice opérationnelle ; polynômes de Legendre modifiés; intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.