بســــــم الله الرحـمٰن الـرحـيم

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIERE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE PRESENT EN VUE DE L OTENTION DU DIPLOME

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités Et Statistique

Par :

khemili Asma

Titre

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour problème de contrôle relaxé

Devant le jury composé de :

SAOULI Mostapha Abdelouahab	MCB. UKM- Ouargla	Président
BENBRAHIM Radhia	MCB. UKM - Ouargla	Examinateur
MANSOUL Brahim	MAA. UKM - Ouargla	Rapporteur

Juin 2022

اهداء

الحمد لله الذي بحمده تتم الصالحات و تبارك الأعمال و الذي بفضله عز وجل اتممت بحثي هذا ليكون ثمرة تخرجي و نيل شرف الشهادة . ادعوا الله أن تتلوها اجتهادات و رتب و خبرات في حياتي العلمية و العملية .

وحيث إنني هنا فليس من سبيل الصدفة أن أصل إلا بدعم "امرأة " لطالما حثتني على الإصرار و الكفاح و التعلم تلك التي غرست مكارمها في عمقي و رحلت قبل أن تشهد ثمرة ما قدمته لي من دفع للوصول إلى تحقيق كل طموحاتي الى "أمي" رحمها الله إلى روحها الطاهرة أهدي عملي هذا.

إلى الغالي و القريب إلى قلبي "أبي" الذي حفزني على الإستمرار و المضي قدما.

إلى الفاضل "زوجي" سندي و داعمي و الذي شجعني على مواصلة المشوار و شاركني صعوباته و عراقيله.

إلى أبنائي "أماني" و "معاذ" .

إلى إخوتي و أخواتي وكل من كان له الفضل في دعمي و مساندتي خاصة أختي "نسيمة قيدوم" أهدي عملي هذا .

شكر و عرفان

كل الشكر و العرفان و التقدير إلى أستاذي الفاضل و موجهي المشرف على مذكرة بحثي و تخرجي الدكتور " منسول إبراهيم " . و الذي لن أكفيه حقه مهما نظمت من كلمات لرحابة صدره و واسع صبره و توجيهاته العلمية و المنهجية القيمة التي سهلت علي عملي و ساهمت في فضل إتمام مذكرتي

و شكرا لأساتذتي أعضاء اللجنة المناقشة المتكونة من

الدكتور "صولي مصطفى عبد الوهاب" .

الدكتورة "بن براهيم راضية".

مع عظيم امتناني.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Introduction au processus stochastique **5**

1.1 Notions de mésure et probabilités 5

1.1.1 Tribu 5

1.1.2 Mesure 6

1.1.3 Application mesurable 6

1.1.4 Variable aléatoire 7

1.1.5 Loi de probabilité d'une variable aléatoire 7

1.1.6 L'espérance d'une variable aléatoire 9

1.1.7 L'éspérance conditionnelle 9

1.1.8 Filtration 10

1.2 Notions de calcul stochastique 10

1.2.1 Processus stochastique 10

1.2.2 Martingale 12

1.2.3 Temps d'arrêt 12

1.2.4 Mouvement Brownien 13
1.2.5 Integrale stochastique 13
1.2.6 Processus d'Itô 14
1.2.7 Formule d'Itô 15
1.2.8 Equation différentielle stoochastique 16
1.2.9 Contrôle stochastique 17
1.2.10 Types de contrôle stochastique 18

2 Principe du maximum pour un problème des contrôles stochastiques relaxé 21
2.1 Formulation du probléme 21
2.1.1 Contrôle stochastique strict 21
2.1.2 Probléme de contrôle relaxé 23
2.2 processus adjoint et équation adjointe 32
2.2.1 Conditions nécessaires d'optimalité pour contrôles relaxés 40
2.2.2 Conditions suffisante d'optimalité pour contrôles relaxés 41

3 conclusion 43

4 Annexe 44

Bibliographie 45

Introduction

Comme des certains phénomènes naturels peuvent être modélisés au d'équations différentielles ordinaires, il en va de même pour certains phénomènes aléatoires qui sont modélisés mathématiquement par des équations différentielles stochastiques. Et le début a été fait par le naturaliste Robert Brown, avec son observation du mouvement des grains de pollen à la surface de l'eau en 1828, et à partir de là les physiciens cherchent à comprendre ce phénomène, qu'il a appelé Mouvement Brownien qui introduit par Wiener en 1923. Ce qui nous préoccupe est le développement mathématique du concept, puisque le mouvement brownien est un processus aléatoire continu sur un espace probabilisé qui présente la position brownienne à l'instant $t \geq 0$. Après Ito entre 1940 et 1950, met les bases du calcul stochastique. Ceci permet d'introduire la notion d'intégrale stochastique par rapport du mouvement brownien [17]. Puis ont suivi les travaux de recherche portant sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques de formes diverses, théoriquement ou numériquement.[8, 16, 22, 25]

La résolution du problème de contrôle stochastique basées sur deux approche le premier est le principe de programmation dynamique, et le second le principe de maximum de Pontriagin, on applique ce dernier principe dans ce travaille qui consiste à minimiser(maximiser) la fonction de cout sur l'ensemble des contrôles admissibles strict ou relaxé et de donner des conditions nécessaires ainsi que suffisantes d'optimalité, où est le but de Le principe du maximum pour contrôler les équations différentielles stochastiques (EDS). Il y a beaucoup des travaux dans ce sens à partir de Kushner [19].puis a été développée par Haussmann [14, 15]. En plus des nombreux auteurs qui ont traité différents cas comme Bensoussan [4]], Bismut [5, 6, 7], Elliot[9] , Elliot et Kohlmann [10]. On indiquer que Peng [21] étudie le cas général, où le domaine du contrôle admissible n'est pas convexe et le coefficient de diffusion dépend de la contrôle. Dans notre travail, nous aborderons les conditions nécessaires et suffisantes à l'optimisation à travers notre analyse de l'article de Bahlali[1]. Comme nous l'avons mentionné, il existe des publications sur ce sujet par exemple S. Bahlali, B. Djehiche, B. Mezerdi [3] ont obtenu le SMP pour ce type de SDE. Le fait commun dans les résultats précédents sur le principe de maximum stochastique(SMP) pour les problèmes de contrôle est de minimiser (ou maximiser) la fonction de coût sur un domaine de contrôle admissible U qui est convexe, dans l'autre cas le domaine de contrôle admissible U n'est pas nécessairement convexe, un contrôle strict optimal n'existe pas nécessairement dans U. Pour surmonter ce problème d'existence, l'idée est alors d'introduire une nouvelle classe $\mathcal{R}$ plus grande de processus q_t à valeurs $\mathcal{P}(U)$ (où $\mathcal{P}(U)$ est l'espace des mesures de probabilité , cette classe de processus est appelée l'ensemble des contrôles relaxés et possède une structure topologique plus riche, pour laquelle le problème de contrôle devient résoluble, pour plus de détails voir [1, 12]

Dans le cas stricte, le système est gouverné par une EDS de type

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t^v, v_t)dt + \sigma(t, x_t^v, v_t)dB_t \\ x(o) = \xi \end{cases}$$

telle que :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to M_{n*d}(\mathbb{R})$$

ξ est une v.a $\mathcal{F}_t-$mésurable telle que :

$$E\left(|\xi|^m\right) < \infty; \text{ pour tout } m > 1.$$

L'objective est de minimiser la fonction de coût J qui définié sur U dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(v) = E\left[g(x_T^v) + \int_0^T h(t; x_t^v, v_t)dt\right]$$

telle que :

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$

un control u stricte est dit optimale s'est satisfait :

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

Dans le modèle relaxé, le système est gouverné par le EDS

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a)q_t(da)\, dt + \int_U \sigma(t, x_t^q, a)\,(da)\, dB_t \\ x_0^q = \xi \end{cases}$$

etl'objectif à minimiser la fonction de cout $\mathcal{J}$, sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés, telle que

$$\mathcal{J}(q) = E\left[g(x_T^q) + \int_0^t \int_U h(t, x_t^q, a)q_t\,(da)\, dt\right]$$

un controle relaxé μ est optimal si :

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in R} \mathcal{J}(q).$$

Ce mémoire est composé à deux chapitres :

Première chapitre :

Dans ce chapitre, donne des rappels de base concernant la théorie du mesure, probabilités et le calcul stochastiques, tribu, mesure, processus aléatoire, mouvement brownien, intégral d'Itô, et les formules d'Itô et les équations différentielles stochastiques. Par la suite nous citons le contrôle stochastique et leurs types .

Deuxième chapitre :

Dans ce chapitre représente le problème de ce mémoire, telle que le but de ce chapitre est de déterminer, les conditions nécessaires et les conditions suffisantes d'optimalité pour problème de contrôle strict et relaxé par l'utilisation de la méthode des perturbations convexes sur $\mathcal{R}$, et en obtient le processus et l'équation adjoints .

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre on peut donner quelques concepts de base au mesure et calcul stochastique pour plus de détail voir [11, 13, 18, 20, 23, 24].

1.1 Notions de mésure et probabilités

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ensemble non vide , $\mathcal{F}$est une famille de partie de Ω , on dit que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω si elle verifiie les conditions suivantes :*

1- Contient l'ensemble vide $\Leftrightarrow \phi \in \mathcal{F}$.

2- Stable par passage au complémentaire $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{F})$.

3- Stable par union dénombrable de famaille $(A_n)_{n\geq 1}$ appartient à $\mathcal{F} \Leftrightarrow$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n \in \mathcal{F}$ $\Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$).

Définition 1.1.2 ***(Sous - tribu**) On dit que $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ si et seulement si :*

$$\text{pour } A \subset \Omega,\ \text{si } A \in \mathcal{G} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$

Définition 1.1.3 ***(Tribu engendrée)**Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (des parties de Ω) ,il existe une tribu* *notée $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribue contenant $\mathcal{A}$ appelée la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.*

Définition 1.1.4 ***(Tribu borélinne)****La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant tous les intervalle ouverts (ou fermés , semi ouverts à droite ou à gauche ,...) et on note par $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

1.1.2 Mesure

Définition 1.1.5 *Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$, on dit que μ est une mesure (positive) sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si :*

1/ $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$.

2/ $\mu(\phi) = 0$.

3/ Pour $A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ deux à deux disjoints, alors $\mu\left\{\cup_{i=0}^{\infty} A_i\right\} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$

le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appellée éspace mesuré

Propriété 1.1.1 ***1/*** *Quand μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mu(\Omega) = 1$,on dit que μ est une mesure de probabilité.*

2/ *Quand $\mu(\Omega) < \infty$ on dit que μ est une mesure finie .*

3/ *$(\Omega, \mathcal{F})$ est appellée éspace mesurable .*

4/ *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appellée éspace probabilisé (cas partuclier d'une mésure) telle que $\mathbb{P}$ mésure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$*

1.1.3 Application mesurable

Définition 1.1.6 *soient $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces mesurables on dit q'une application : $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{F}'$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{F}' : f^{-1}(A) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \in A\} \in \mathcal{F}$$

Propriété 1.1.2 *1/ toute fonction continue, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sont mesurables .*

2/ si f *et* g *sont deux fonctions mesurables* :$(\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *alors :* $f+g$ *et* $f \times g$ *et*$\frac{f}{g}$ *sont mesurables.*

3/ si $f : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ *est mesurable et* $g : (\Omega', \mathcal{F}') \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ *est mesurable alors :* $f \circ g : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ *est mesurable*

1.1.4 Variable aléatoire

Définition 1.1.7 *Une variable aléatoire réal* X *est une application mesurable de* $(\Omega,\mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *telle que :*

$$X : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$
$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{F}.$$

On a deux types de variable aléatoire :

** La variable aléatoire continue prend ses valeurs sur un ensemble infini (ou non-dénombrable).*

** La variable aléatoire discrète prend ses valeurs sur un ensemble fini (dénombrable).*

1.1.5 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 1.1.8 *Soit* X *une varaible aléatoire réal défini sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$*, la loi de* X *est la probabilité* $\mathbb{P}_X$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *défini par :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\{\omega; X(\omega) \in A\} = \mathbb{P}(X \in A), \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Définition 1.1.9 ***(La fonction de répartition)****Soit* X *une variable alétoire réal, la loi de probabilité de* X *est* $\mathbb{P}_X$ *défini par la fonction* F_X*, appelée fonction de réparation de variable*

X, défini par :

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow \mathbb{P}(X \leq x)$$

Et elle est vérifie les propriétés suivants :

1. $\forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq F_X \leq 1$.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F_X = 1$.
4. Si $a \leq b : \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
5. On dit que deux variables aléatoires X et Y ont le même loi si elles ont la même fonction de répartition $F_X = F_Y$

Définition 1.1.10 ***(La densité d'une variable aleatoire)****La densité $f(x)$ d'une variable aléatoire est la dérivée de la fonction de répartition (si cette dérivée existe). On peut alors écrire $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx$, En particulier :*

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$$

Telle que :

1. f continue et positive sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$.
2. $\int\limits_I f(x)dx = 1$.
3. $F_X(t) = \mathbb{P}_X\left(]-\infty, t]\right) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

1.1.6 L'espérance d'une variable aléatoire

Définition 1.1.11 *L'espérance d'une variable aléatoire X est définie par la quantité* $\int\limits_{\Omega} XdP$ *que l'on note $E(X)$ ou $E_P(X)$,telle que :*

$$\int\limits_{\Omega} XdP = \int_{\mathbb{R}} xdP_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \textit{dans le cas continue.} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) & \textit{dans le cas discrète .} \end{cases}$$

1.1.7 L'éspérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un éspace de probabilité, A et B deux événements de $\mathcal{F}$ telle que :$\mathbb{P}(B) \neq 0$

Probabilité conditionnelle

Définition 1.1.12 *La probabilité conditionnelle de A sachant B est :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Définition 1.1.13 *Espérance conditionnelle d'une v.a par rapport à un événement :*

$$E(X/B) = \frac{1}{P(B)} \int_B XdP$$

Définition 1.1.14 ***(Espérance conditionnelle d'une v.a par rapport à une tribu) :****Soit $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$ alors : l'éspérance conditionelle de la v.a X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique v.a $\mathcal{G}-$mésurable telle que :*

$$\int_A E(X/\mathcal{G}) = \int_A XdP, \forall A \in \mathcal{G}$$

Propriété 1.1.3 *L'éspérance conditionnelle vérifier les propriétés suivantes, soient X et Y deux v.a et $\mathcal{G}$ et H sous tribue de $\mathcal{F}$ telle que : $H \subset \mathcal{G}$ ona :*

a/ Soient a et b deux constants alors : $E(aX + bY/\mathcal{G}) = aE(X/\mathcal{G}) + bE(Y/\mathcal{G})$...(la linéarité)b/ Si $X \leq Y$ alors $E(X/\mathcal{G}) \leq E(Y/\mathcal{G})$ ...(la croissance) c/ Si $X \geq 0$ alors $E(X/\mathcal{G}) \geq 0$ ...(la positivité) d/ $E[E(X/\mathcal{G})] = E(X)$. e/ Si X et

$\mathcal{G}-$mésurable alors : $E(XY/\mathcal{G}) = XE(Y/\mathcal{G})$. f/ Si X est indépandante de $\mathcal{G}$ alors : $E(X/\mathcal{G}) = E(X)$. g/ $E[E(X/\mathcal{G})/H] = E[E(X/H)/\mathcal{G}] = E(X/H)$.

1.1.8 Filtration

Définition 1.1.15 *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.*

Remarque 1.1.1 1/ *$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est appellée éspace de probabilité filtré .*

2/ La filtration canonique d'un processus stochastique X est :$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

1.2 Notions de calcul stochastique

1.2.1 Processus stochastique

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique (où fonction aléatoire) est un famaille de variable aléatoire $(X_t; t \in T)$ définie sur le méme espace de probabilité.*

Remarque 1.2.1

1. *Si $T \subset \mathbb{N}$:on dit que le processus est à temps discrét .*
2. *Si $T \subset \mathbb{R}$:on dit que le processus est à temps continue.*
3. *Pour t fixé $X(t, \omega)$ est une v.a.*
4. *Pour ω fixé $X(t, \omega)$ est appellée trajectoire .*

Processus mesurable

Définition 1.2.2 *Un processuse X est dit mesurable si l'application :*

$$X: \left(\mathbb{R}_+ \times \Omega, B_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}\right) \to (E, G)$$
$$(t, \omega) \to X(t, \omega)$$

est mesurable .

Définition 1.2.3 *Un processuse* (X_t) *est dit adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si pourtout* t , X_t*est* $\mathcal{F}_t-$ *mésurable.*

Remarque 1.2.2 *Le processus est toujours adaptée a ça filtration canonique.*

Définition 1.2.4 *On dit qu'un processus* (X_t) *est prévisible par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *si :* $\forall\ s \leq t, X_t$ *est* $\mathcal{F}_s-$ *mésurable.*

Définition 1.2.5 *On dit qu'un processus* (X_t) *est croissante si :*$\forall 0 \leq s \leq t; X(s, \omega) \leq X(t, \omega)$.

Définition 1.2.6 *On dit qu'un processus* (X_t) *est un processus Gaussien si tout combinaison linéaire fini de* X *est une v.a gaussien .*

Définition 1.2.7 *(**Processus progressivement mesurable**) Un processus* (X_t) *à valeurs réelles est dit progressivement mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_t$ *si pour tout* $t \geq 0$ *et pour tout* $w \in \Omega$ *l'application* $X_t(w)$ *est* $[\mathcal{B}([0;t]) \otimes \mathcal{F}_t]$*-mesurable* $\mathcal{B}([0;t])$ *est l'ensemble des boréliens de* $[0;t]$ *:*

Equivalent,modification,indistingable de deux processus

Définition 1.2.8 *Soient* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus définié sur le même éspace de probabilité ,ils sont dits que sont :*

1. *Equivalents (éguax en loi) : si pour tout* $(t_1, ...t_n)$ *et pour tout* n *ona :*$(X(t_1), ..., X(t_n)) := (Y(t_1), ..., Y(t_n))$.

2. Y *est une modification de* X *si :*$\forall t > 0, \mathbb{P}[X(t) = Y(t)] = 1$.

3. X *est* Y *sont indistingable* $(X \equiv Y)$ *si* $\mathbb{P}[X(t) = Y(t), \forall t > 0] = 1$.

Remarque 1.2.3 *indistingable* $\Rightarrow$*modification* $\Rightarrow$ *équivalent*

Accroissement stationaire

Définition 1.2.9 *Pour tout $0 \leq s \leq t$ les variables aléatoires $X(t) - X(s)$ sont appelés des accroissement*

1. *Un processus stochastique X est à accroissement stationnaire si la loi de la variable aléatoire $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t, c'est à dire pour tout $t > 0, h > 0$ la loi de $X_{t+h} - X_t$ est égale à la loi de $X_h - X_0$.*
2. *Un processus stochastique X est à accroissement indépendants si $\forall\ 0 < t_0 < t_1 < ... < t_n$ les v.a $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*

1.2.2 Martingale

Définition 1.2.10 *Soit $(X_t)_{t>0}$ un processus définie sur l'éspace $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \gtrsim 0}, \mathbb{P}\right)$ on dit que $(X_t)_{t>0}$ est une martingale si :*

1. *X_t est intégrable $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : E(|X_t(t)|) < \infty$.*
2. *X_t est $\mathcal{F}_t$ − mésurable $\forall t \geq 0$ $((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ − adapté$)$.*
3. *$\forall s \leq t\ E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$.*

Remarque 1.2.4 ***1-*** *Si $\forall s \leq t$, $E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$ alors $(X_t)_{t>0}$ est une sur martingale.*
2- *Si $\forall s \leq t$, $E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$ alors $(X_t)_{t>0}$ est une sous martingale.*

1.2.3 Temps d'arrêt

$(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration de $\mathcal{F}$ un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \{\tau \leq n\} = \{\omega \in \Omega \ / \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

1.2.4 Mouvement Brownien

Définition 1.2.11 *On appelle un mouvement brownien et on le note B_t un processuse stochastique qui vérifié les conditions suivantes :*

1. $B_0 = 0$ *p.s*
2. $t \to B_t$ *est continue p.s et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *− adapté*
3. *pour* $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ *les accroissements* $B_t - B_s$ *et* $B_u - B_v$ *sont indépendants*
4. *pour* $0 \leq s \leq t$; $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

   Remarque 1.2.5 *Un Mouvement Brownien est dite standard si :*

   (a) $B_0 = 0$ *p.s*

   (b) $E(B_t) = 0$

   (c) $E(B_t^2) = t$

Proposition 1.2.1 *Soit B_t Un Mouvement Brownien standard :*

1. B_t *est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne* $E(B_t) = 0$ *et covariance* $Cov(B_t, B_s) = \min(t, s)$.
2. B_t *est un processus de Markov .*
3. *Le mouvement brownien B_t est une martingale par rapport à la filtration naturelle* $\mathcal{F}_T^B$.
4. B_t *n'est pas à variation bornée .*
5. B_t *à variation quadratique .*

1.2.5 Integrale stochastique

Définition 1.2.12 *:L'intégralle stochastique, est une intégrale proposée avec des processus stochastiques sous la forme suivantes :*

$$\int_0^t X_s dB_s;$$

où $\{X_s, s \geq 0\}$ *est un processus stochastique et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien.*

Propriété 1.2.1 *L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :*

1. Linéairité $\forall a \in \mathbb{R}$, Additivité : Pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X(s)dB_s = \int_s^u X(s)dB_s + \int_u^t X(s)dB_s.$$

2. Si $\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$\int_0^t a(X_s + Y_s)dB_s = a\int_0^t X_s dB_s + a\int_0^t Y_s dB_s,$$

3. Si $\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$E\left[\int_0^T X(s)dB_s\right] = 0.$$

4. Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(s)dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (X(s))^2 ds.$$

5. Propriété du martingale $\quad \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)dBs.$

1.2.6 Processus d'Itô

Définition 1.2.13 *:Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace filtré, et* B_t *une mouvement Brownien, on appelle processus d'Itô un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall t \leq T \qquad X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

avec :

i) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

ii) $(\alpha_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ deux processus adaptés à $\mathcal{F}_t$.

iii) $\int_0^t |\alpha_s|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s et $\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < +\infty$ $\mathbb{P} - p.s.$

Le coefficient α_s s'appelle dérivé de processus X et σ_s s'appelle le coefficient de diffusion On appelle le processus $t \to x_0 + \int_0^t \alpha_s ds$ est la partie à variation finie de X, et le processus $t \to \int_0^t \sigma_s dB_s$ le partie martingale de X.

1.2.7 Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, s'écrit sous la forme :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

Alors

$$dX_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Théorème 1.2.1 ***(La premiére formule d'Ito1*** *) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors :*

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Alors

$$df(X_t) = f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.2.2 ***(La deuxiéme formule d'Ito2*** *) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X_s\rangle,$$

Telle que

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_s, dX_s\rangle = \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s\rangle = \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.2.3 ***(La troisiéme formule d'Ito2)****Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 alors*

$$\begin{aligned} f\left(X_1(t), X_2(t)\right) &= f\left(X_1(0), X_2(0)\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(X_1(s), X_2(s)\right) dX_1(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) dX_2(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_1\right\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_2\right\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(X_1(s), X_2(s)\right) d\left\langle X_1, X_2\right\rangle_s . \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 ***(Intégration par partie)*** *Soit X et Y deux processus d'Itô telle que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s \quad et\; Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s^{'} ds + \int_0^t \beta_s^{'} dB_s$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

avec

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \beta_s \beta_s^{'} ds$$

De plus la formule d'intégration par partie s'écrit

$$d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$$

1.2.8 Equation différentielle stoochastique

Définition 1.2.14 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme*

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t, t \geq 0 \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{1.1}$$

Telle que : $b, \sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$, b, σ sont deux fonctions déterministes mesurables, avec b est appelée le coefficient de dérive et σ est appelée le coefficient de diffusion, soit $x_0 : \Omega \to \mathbb{R}$,x_0 est une v.a de carrée intégrable et x_0 indépendant du Mouvement Brownien B_t .

Remarque 1.2.6 *Il existe deux types de solutions de le EDS, la solution forte et la solutions faible .*

L'existence et l'unicité des solutions

On suppose que :

H1) Les fonctions b, σ :$[0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues.

H2) Condition de lipschitz globale :il existe une constante $K \succ 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$et $x, y \in \mathbb{R}$

$$| b(t,x) - b(t,y) | + | \sigma(t,x) - \sigma(t,y) | \leq k | x - y |$$

H3) Condition de croissance :il existe une constante $c \succ 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$$|b(t,x)|^2 - |\sigma(t,y)|^2 \leq c(1 + | x |^2)$$

H4) La condition initiale x_0 est indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et est de carré integrale.

Alors : l' EDS (1.1) admet une solution $(X_t)_{t \in [0,T]}$ verifie $E(\sup_{0 \leq t \leq T} | X_t |^2) < \infty$

Cette solution est unique dans le sens que si $(X_{t \in [0,T]})$et$(Y_{t \in [0,T]})$sont deux solution de L'EDS(1.1) alors

$$\forall t \in [0,T], \; \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

1.2.9 Contrôle stochastique

Définition 1.2.15 *Un contrôle stochastique est un processus stochastique qui contrôlé un système dynamique aléatoire qu'on peut modéliser par un équation différentielle stochastique, intervient dans différents domaines de la vie courante comme l'économie, la biologie, les sciences humaines et sociales,...*

Un contrôle est un processus aléatoire u_t adapté par-rapport à une filtration et prend ses valeurs dans un espace de contrôle $U \subset \mathbb{R}^n$.

Le contrôle stochastique caractérisé par :

i) Etat du système

Etat du systéme dynamique se caractérise le contrôle stochastique à tout instant dans la mesure ou le temps peut être discrèt ou continue..L'intervalle de variation du temps peut être fini ou infini .L'état du systéme metre en représntation les variables quantitatives qui constituant une description exhaustive du systéme. Au moment t ,l'état de ce systéme sera noté l'appliccation $t \longrightarrow X(t)$ décrit l'evolution du systéme, cette évolution fourni par un modéle probabiliste.

ii) Contrôle :

La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut trés décidée à tout instant t, en fonction des informations disponibles à cet instant .

iii) Critère de coût :

L'objectif précis est de minimiser (ou maximiser) une fonctionnelle J s'appelle fonction de coût sur l'ensemble des contrôles admissibles. Pour décrire un probléme de contrôles stochastique, il est trés important de préciser que l'information soit disponible à tout instant.

.

1.2.10 Types de contrôle stochastique

ContrôIe admissible

Définition 1.2.16 *: Le contrôle admissible est tout processus $v_t(t \in [0,T]$) mesurable $(\mathcal{F}_t)$ adapté à valeur dans un borélien $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^d$.*

L'ensemble de tous les contrôIes admissible notons par U_{ad} :$U_{ad} = \{v : [0,T] \times \Omega \rightarrow B$,tel que v est mesurable et $\mathcal{F}_t-$adapté.

Contrôle optimal

Définition 1.2.17 *Le contrôle optimal minimiser (ou maximiser) la fonction de coût* J *sur I'ensemble des contrôIes admissibles* $U_{ad}.$, *C'est à dire un contrôle admissible est apelle optimal si*

$$J(v) = inf_{v \in u} J(u)$$

Contrôle presque optimal

Définition 1.2.18 *Soit* $0 < \epsilon$ *; le contrôle presque optimal ou* ϵ*-optimal est note par* v^{ϵ}*tel que :*

$$J(v^{\epsilon}) \leq J(v) + \epsilon, \forall U_{ad.}$$

Contrôle feed-back

Définition 1.2.19 *: Soit* v *un contrôle* $\mathcal{F}_t$*-adapté, et soit* $\{\mathcal{F}_t^X\}$*la filtration naturelle . On apelle feed-back contrôIe si :*v_t *est aussi adapté par rapport la filtration* $\{\mathcal{F}_t^X\}$. *On dit aussi qu'un contrôIe* v *est feed-back si et seulement si dépend de* X.

Contrôle relaxé

Soit l'ensemble U des contrôles stricts. Dans le modèle relaxé, nous remplaçons le processus v à valeur dans U par un processus q valeur dans $\mathcal{P}(U)$, où $\mathcal{P}(U)$ désigne l'éspace de mesure de probabilité sur U muni de la topologie de la convergence stable.

Définition 1.2.20 *: un controle relaxé admissible* q_t *est un processus prend ces valeurs dans* $\mathcal{P}(U)$ *progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *telle que pour tout* $t, 1_{]0,t[} \times q_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mésurable ,et :* $E\left[\sup_{t\in[0,T]} \int_u |a|^2 q_t(da)\right] < \infty$.

ContrôIe singulier

Définition 1.2.21 *soit A_1 un sous-ensembre fermé convexes de $\mathbb{R}$ et $A_2 = [0, +\infty[$. soient U_{ad1} et U_{ad2} deux classes des processus mesurable définie comme suit :*

$$U_{ad1} = \{u(.) : [s, T] \times \Omega \to A_1; \mathcal{F}_t - adaptés\},$$
$$U_{ad2} = \{\eta(.) : [s, T] \times \Omega \to A_2; \mathcal{F}_t - adaptés\}$$

Un contrôle admissibre est paire (u, η) de $A_1 \times A_2$ à valeur mesurable,$\mathcal{F}_t$ _adaptés, terque :

1. η est à variation bornée non décroissante continue à gauche, limite à droite et$\eta_0 = 0$.
2. $E[sup_{t\in[0,T]} \mid u_t \mid^2 + \mid \eta_T \mid^2] < \infty$

On note $U_{ad1} \times U_{ad2}$ l'ensemble de tous les contrôle admissibles. Notons que depuis $d\eta_t$ peut être singulier par rapport à la mesure de lebesgue dt ,nous appellons η.ta partie singulier de la contrôle et la processus u sa partie absolument continue..

Chapitre 2

Principe du maximum pour un problème des contrôles stochastiques relaxé

2.1 Formulation du probléme

Soient T un réel positif ,U un ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$,et $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfait les conditions usuelles,$B = (B_t)_{t\geq 0}$ un Mouvement Brownien .

2.1.1 Contrôle stochastique strict

Définition 2.1.1 *Un contrôle admissible strict $v = (v_t\ )$est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté prend ces valeurs dans U telle que $E\left(\sup_{t\in[0,T]}(v_t)^2\right) < \infty$ on note U l'ensemble des contrôles strict admissibes .*

pour tout $v \in U$, on cosidére l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dx_t^v = b(t, x_t^v, v_t)dt + \sigma(t, x_t^v, v_t)dB_t \\ x_0^v = \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

telle que :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to M_{n*d}(\mathbb{R})$$

ξ est une v.a $\mathcal{F}_0-$ mésurable telle que :

$$E(|\xi|^m) < \infty; \text{ pour tout } m > 1.$$

L'objective est de minimiser la fonction de coût J qui définié sur U dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(v) = E\left[g(x_T^v) + \int_0^T h(t; x_t^v, v_t)dt\right] \tag{2.2}$$

telle que :

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$

un control stricte est dit optimale s'est satisfait :

$$J(u) = \inf J(v) \tag{2.3}$$

Hypothéses

b, σ, g et h sont continue par rapport à (x, v) .

b, σ, g et h sont diffirentiable par rapport à x .

b_x, σ_x et h_x sont bornées par $C(1 + |x| + |v|)$.

g_x est bornée par $C(1 + |x|)$.

avec C est un constante positive .

sous les hypothéses précédentes ,pour tout $v \in U$,l'équation (2.1) admet une solution forte unique et la fonction de coût J est bien définié sur U dans $\mathbb{R}$.

2.1.2 Probléme de contrôle relaxé

L'idée pour relaxé le probléme de contrôle strict $\{(2.1), (2.2), (2.3)\}$ par remplacer l'ensemble U de contrôle strict par une autre ensemble de structure topologique riche $\mathcal{P}(U)$ telle que $\mathcal{P}(U)$ est désigne l'éspace de probabilité sur U muni du topologie de convergence stable .

Définition 2.1.2 *Un contrôle admissible relaxé q_t est un processus prend ces valeurs dans $\mathcal{P}(U)$ progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ telle que pour tout $t, 1_{]0,t[} \times q_t$ est $\mathcal{F}_t-$mésurable ,et $E\left[\sup_{t\in[0,T]} \int_u |a|^2 q_t(da)\right] < \infty$.*

Remarque 2.1.1 *On désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des controle relaxé q, pour chaque contrôle relaxé q on a :$q(dt, da) = q_t(da)\,dt$ tq :$q_t(da)$ un processus progressivement mesurable prend ces valeures dans $\mathcal{P}(U)$, et l'ensemble U remplacé par $\mathcal{R}$ par l'aplication*

$$F : v \in U \to F_v(dt, da) = \delta_{v_t}(da)\,dt$$

avec δ_{v_t} est la mesure de Dirac (atonique) concentré au point v .

pour chaque $q \in \mathcal{R}$ on obtient le probleme de controle relaxé $\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$:

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da)\,dt + \int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da)\,dB_t \\ x_0^q = \xi \end{cases} \tag{2.4}$$

et

$$\mathcal{J}(q) = E\left[g(x_T^q) + \int_0^t \int_U h(t, x_t^q, a) q_t(da)\,dt\right] \tag{2.5}$$

un contrôle relaxé μ est optimal si :

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q\in R} \mathcal{J}(q) \tag{2.6}$$

puisque $\mathcal{R}$ est convéxe alors on peut utiliser la méthode du perturbation classique pour obtenir les conditions d'optimalités :

Soient μ un contrôle relaxé optimale et x^{μ} est la solution de l'équation (2.4) contrôlé par μ . Alors , pour chaque $t \in [0, T]$ on definié un contrôle relaxé perturbé par :

$$\mu_t^{\theta} = \mu_t + \theta \left(q_t - \mu_t\right) \tag{2.7}$$

avec $\theta > 0$ est sufisement petit et q un élément quellconque de $\mathcal{R}$ on note par x_t^{θ} la solution de (2.4) associée par μ^{θ}, puisque μ optimale on a l'inégalité variationelle :

$$0 \leq J\left(\mu^{\theta}\right) - J\left(\mu\right)$$

Lemme 2.1.1 *sous les hypothéses 2.1.1 ci -désous,on a :*

$$\lim_{\theta \to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^{\theta} - x_t^{\mu}\right|^2\right] = 0 \tag{2.8}$$

Preuve. D'aprés (2.4) on a :

$$x_t^{\mu} = \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^{\mu}, a\right) \mu_s\left(da\right) ds + \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^{\mu}, a\right) \mu_s\left(da\right) dB_s.$$

et :

$$x_t^{\theta} = \int_0^t \int_U b\left(s, x_t^{\theta}, a\right) \mu_s^{\theta}\left(da\right) ds + \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_t^{\theta}, a\right) \mu_s^{\theta}\left(da\right) dB_s.$$

Donc :

$$\begin{aligned} x_t^{\theta} - x_t^{\mu} = & \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^{\epsilon}, a\right) \mu_s^{\epsilon}\left(da\right) ds + \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^{\epsilon}, a\right) \mu_s^{\epsilon}\left(da\right) dB_s \\ & - \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^{\mu}, a\right) \mu_s\left(da\right) ds - \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^{\mu}, a\right) \mu_s\left(da\right) dB_s \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] dB_s. \end{aligned}$$

On utilise la définition de μ_s^θ (2.7) on trouve :

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\left(\mu_s + \theta\left(q_s - \mu_s\right)\right)(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\left(\mu_s + \theta\left(q_s - \mu_s\right)\right)(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] dB_s \\ &= \int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] ds \\ &+ \theta \int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\left(q_s - \mu_s\right)(da)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] dB_s \\ &+ \theta \int_0^t \left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\left(q_s - \mu_s\right)(da)\right] dB_s. \end{aligned}$$

D'aprésl'inégalite de Yong on trouve :

$$\begin{aligned} \left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 &\leq 4\left|\int_0^t \left[\int_u b\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_u b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] ds\right|^2 \\ &+ 4\theta^2 \left|\int_0^t \left[\int_u b\left(s, x_t^\theta, a\right)\left(q_s - \mu_s\right)(da)\right] ds\right|^2 \\ &+ 4\left|\int_0^t \left[\int_u \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_u \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] dB_s\right|^2 \\ &+ 4\theta^2 \left|\int_0^t \left[\int_u \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\left(q_s - \mu_s\right)(da)\right] dB_s\right|^2. \end{aligned}$$

On utilise l'isométrie et d'aprés l'esperance on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 &\leq 4E\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds \\
&+ 4\theta^2 E\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)(q_s - \mu_s)(da)\right|^2 ds \\
&+ 4E\int_0^t \left|\left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right]\right|^2 ds \\
&+ 4\theta^2 E\int_0^t \left|\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)(q_s - \mu_s)(da)\right|^2 ds \\
&\leq 4E\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right) - b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds \\
&+ 4\theta^2 E\int_0^t \int_U \left|b\left(s, x_t^\theta, a\right)\right|^2 \left|(q_s - \mu_s)\right|^2 (da)\, ds \\
&+ 4E\int_0^t \left|\left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right) - \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\right]\mu_s(da)\right|^2 ds \\
&+ 4\theta^2 E\int_0^t \int_U \left|\sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\right|^2 \left|(q_s - \mu_s)\right|^2 (da)\, ds,
\end{aligned}$$

Sous les hypothése :2.1.1 et $\int_U \mu_s da = 1$.On a :

$$E\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq CE\int_0^t \left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 ds + M\theta^2.$$

D'apres le lemme de Gronwall on obtient :

$$E\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq M\theta^2 \int_0^t e^{Cs} ds$$

Alors :

$$E\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq \theta^2\left(e^{CT} - 1\right)$$

Si $\theta \to 0$ on trouve :

$$E\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \to 0$$

Finalement si on applique B.D.G on trouve :

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] = 0$$

■

Lemme 2.1.2 *Soit $\widetilde{x}$ la solution de l'équation linéaire (l'inégalité variationnel) :*

$$\begin{cases} d\widetilde{x}_t = \left[\int_U b_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t + \int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t - \mu_t\right)\left(da\right)\right] dt \\ \left[\int_U \sigma_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t + \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t - \mu_t\right)\left(da\right)\right)\right] dB_t \\ \widetilde{x}_0 = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Alors, on a :

$$\lim_{\theta\to 0} E\left|\frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \widetilde{x}_t\right|^2 = 0 \tag{2.10}$$

Preuve. On pose

$$X_t^\theta = \frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \widetilde{x}_t \tag{2.11}$$

Alors

$$\begin{aligned} X_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s^\theta\left(da\right) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\right] ds \\ &+ \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s^\epsilon\left(da\right) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\right] dB_s \\ &- \int_0^t \int_U b_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t \\ &+ \int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right) q_t\left(da\right) - \mu_t\left(da\right))dt \\ &- \int_0^t \int_U \sigma\left(t, x_t^\epsilon, a\right)\mu_t\left(da\right)\widetilde{x}_t \\ &+ \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right) q_t\left(da\right) - \mu_t\left(da\right))dB_s. \end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
X_t^\theta = & \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s^\theta(da)\right] ds \\
& + \frac{1}{\theta}\left[\int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] ds \\
& \frac{1}{\theta}\left[\int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_t^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s^\theta(da)\right] dB_s \\
& + \frac{1}{\theta}\left[\int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right] dB_s \\
& - \int_0^t \left[\int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t(da)\widetilde{x}_t + \int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t(da) - \mu_t\right)(da))dt\right] dt \\
& - \int_0^t \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t(da)\widetilde{x}_t + \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t(da) - \mu_t\right)(da))dB_t.
\end{aligned}
$$

D'aprés la définition de μ^θ (2.7)on trouve

$$
\begin{aligned}
X_t^\theta = & \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\int_U \left(b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s(da) - b\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\mu_s(da)\right] ds \\
& + \int_0^t \left[\int_U \left(b\left(s, x_s^\theta, a\right) - b\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\left(q_{s-}\mu_s\right)(da)\right] ds \\
& + \frac{1}{\epsilon}\left[\int_U \left(\sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) - \sigma\left(s, x_s^\epsilon, a\right)\right)\mu_s(da)\right] dB_s \\
& + \int_0^t \left[\int_U \left(\sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) - \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\left(q_t - \mu_t\right)(da))\right] dB_s \\
& - \int_0^t \left[\int_U b_x\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\widetilde{x}_s\right] ds \\
& - \int_0^t \left[\int_U \sigma_x\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\widetilde{x}_s\right] dB_s.
\end{aligned}
$$

On utilise la formule de Taylor avec reste intégrale on obtient :

$$
\begin{aligned}
X_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)(x_s^\theta - x_s^\mu)\mu_s(da)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)(x_s^\theta - x_s^\mu)(q_s - \mu_s)(da)d\lambda ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t\int_0^1\int_U \sigma_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)(x_s^\theta - x_s^\mu)\mu_s(da)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \sigma_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)(x_s^\theta - x_s^\mu)(q_s - \mu_s)(da)d\lambda ds \\
&- \int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\widetilde{x}_s d\lambda ds - \int_0^t\int_0^1\int_u \sigma_x\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s\left(da\right)\widetilde{x}_s d\lambda ds \\
&\pm \int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda ds \\
&\pm \int_0^t\int_0^1\int_U \sigma_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda ds..
\end{aligned}
$$

De (2.11)on remplase X_t^θ par sa valeur on trouve :

$$
\begin{aligned}
X_t^\theta &= \int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)X_s^\theta\mu_s\left(da\right)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \sigma_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)X_s^\theta\mu_s\left(da\right)d\lambda dB_s + \alpha_t^\theta
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\alpha_t^\theta &= \int_0^t\int_0^1\int_U b_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)\left(x_s^\theta - x_t^\mu\right)\left(q_s - \mu_s\right)\left(da\right)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \sigma_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right)\left(x_s^\theta - x_t^\mu\right)\left(q_s - \mu_s\right)\left(da\right)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \left(b_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right) - b_s\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda ds \\
&+ \int_0^t\int_0^1\int_U \left(\sigma_x\left(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\theta - x_s^\mu), a\right) - \sigma_x\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\widetilde{x}_s\mu_s\left(da\right)d\lambda dB_S.
\end{aligned}
$$

En passant à l'éspérance et on utilise l'inégalité de Yong,Cauchy-Shwartz et l'isométrie, on trouve :

$$\begin{aligned} E\left|X_t^\theta\right|^2 &\leq 3E\left[\int_0^t\int_0^1\int_U \left|b_x\left(s,x_s^\mu+\lambda(x_s^\theta-x_s^\mu),a\right)X_t^\theta\right|^2\mu_s(da)\,d\lambda ds\right] \\ &+3E\left[\int_0^t\int_0^1\left|\sigma_x\left(s,x_s^\mu+\lambda(x_s^\theta-x_s^\mu),a\right)X_t^\theta\right|^2\mu_s(da)\,d\lambda ds\right]+3E\left|\alpha_t^\theta\right|^2. \end{aligned}$$

Par hypothése 2.1.1 b_x et σ_x sont continues et bornée alors :

$$E\left|X_t^\theta\right|^2\leq CE\int_0^t\left|X_s^\theta\right|^2ds+CE\left|\alpha_t^\theta\right|^2$$

Telle que $\int_0^t d\lambda=1$, $\int_U \ \mu_s da=1$,appliquons le théoréme de convergence dominé on obtient :

$$\begin{aligned} E\left|X_t^\theta\right|^2 &\leq CE\left|X_s^\theta\right|^2\int_0^t e^{cs}ds \\ &\leq CE\left|\alpha_t^\theta\right|^2\left[\frac{1}{c}e^{cs}\right]_0^t \\ &\leq E\left|\alpha_t^\theta\right|^2\left[e^{cT}-1\right]_0^t \end{aligned}$$

Passant à la limite :

$$\lim_{\theta\to0}E\left|\alpha_t^\theta\right|^2=0.$$

■

Lemme 2.1.3 *Soient μ un controle relaxé optimale qui minimize la fonction de cout $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{R}$ et x_t^μ le trajectoire optimale associé .alors, pour tout $q\in\mathcal{R}$,on a :*

$$0\leq E\left[g_x\left(x_T^\mu\right)\widetilde{x}_T\right]+E\int_0^T\int_U h_x\left(t,x_t^\mu,a\right)\widetilde{x}_t\mu_t(da)\,dt+E\int_0^t\int_U h\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(\mu_t-q_t\right)(da)\,dt$$

Preuve. on a :

$$J(q)=E\left[g_x\left(x_T^q\right)+\int_0^T\int_U h_x\left(t,x_t^q,a\right)q_t(da)\,dt\right]$$

$$J(\mu)=E\left[g_x\left(x_T^\mu\right)+\int_0^T\int_U h_x\left(t,x_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\,dt\right]$$

$$J\left(\mu^{\theta}\right)=E\left[g_{x}\left(x_{T}^{\theta}\right)+\int_{0}^{T}\int_{U}h_{x}\left(t,x_{t}^{\theta},a\right)\mu_{t}^{\theta}\left(da\right)dt\right]$$

D'aprés l'inégalité variationnelle :

$$0\leq J\left(\mu^{\theta}\right)-J\left(\mu\right) \tag{2.12}$$

On obtient :

$$0\leq E\left[g\left(x_{T}^{\theta}\right)+\int_{0}^{T}\int_{U}h_{x}\left(t,x_{t}^{\theta},a\right)\mu_{t}^{\epsilon}\left(da\right)dt\right]-E\left[g_{x}\left(x_{T}^{\mu}\right)+\int_{0}^{T}\int_{U}h_{x}\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\mu_{t}\left(da\right)dt\right]$$

Alors :

$$\begin{aligned}0\leq\ & E\left[g\left(x_{T}^{\theta}\right)-g_{x}\left(x_{T}^{\mu}\right)\right]+\epsilon\int_{0}^{T}\int_{U}h\left(t,x_{t}^{\theta},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt\\&+\int_{0}^{T}\int_{U}\left\{h\left(t,x_{t}^{\theta},a\right)-h\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\right\}\mu_{t}\left(da\right)dt\end{aligned}$$

appliquons la formule de Taylor avec reste intégrale sur g et h alors on obtient :

$$\begin{aligned}0\leq\ & E\left[g_{x}\left(x_{T}^{\mu}+\lambda\left(x_{T}^{\theta}-x_{T}^{\mu}\right)\right)\left(x_{T}^{\theta}-x_{T}^{\mu}\right)d\lambda\right]+\epsilon\int_{0}^{T}\int_{U}h\left(t,x_{t}^{\theta},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt\\&+\int_{0}^{t}\int_{0}^{1}\int_{U}h_{x}\left(t,x_{t}^{\mu}+\lambda\left(x_{t}^{\theta}-x_{t}^{\mu}\right),a\right)\left(x_{t}^{\theta}-x_{t}^{\mu}\right)\mu_{t}\left(da\right)d\lambda dt\\&\pm E\left[\int_{0}^{1}g_{x}\left(x_{T}^{\mu}+\lambda\left(x_{T}^{\theta}-x_{T}^{\mu}\right)\right)\right]\widetilde{x}_{T}d\lambda\pm E\left[g_{x}\left(x_{T}^{\mu}\right)\widetilde{x}_{T}\right]\\&\pm\int_{0}^{t}\int_{0}^{1}\int_{U}h_{x}\left(t,x_{t}^{\mu}+\lambda\left(x_{t}^{\theta}-x_{t}^{\mu}\right),a\right)\left(x_{t}^{\theta}-x_{t}^{\mu}\right)\widetilde{x}_{t}\mu_{t}\left(da\right)d\lambda dt\pm E\int_{0}^{t}h_{x}\left(t,x_{t}^{\theta},a\right)\widetilde{x}_{t}\mu_{t}\left(da\right)dt\end{aligned}$$

Donc :

$$0\leq E\left[g_{x}(x_{T}^{\mu})\widetilde{x}_{T}\right]+E\int_{0}^{t}h_{x}\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\widetilde{x}_{t}\mu\left(da\right)dt+E\int_{0}^{T}\int_{U}h\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt+\rho^{\theta}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\rho^\theta &= E\int_0^1 g_x\left(x_T^\mu + \lambda\left(x_T^\theta - x_T^\mu\right)\right)x_T^\theta d\lambda \\ &+ E\int_0^t\int_0^1\int_U h_x\left(t, x_t^\mu + \lambda\left(x_t^\theta - x_t^\mu\right), a\right)\left(x_t^\theta - x_t^\mu\right)x_t^\theta\mu_t\left(da\right)d\lambda dt \\ &+ E\left[\int_0^1 \widetilde{x}_t\left(x_T^\mu + \lambda\left(x_T^\theta - x_T^\mu\right)\right)\right] - g_x(x_T^\mu)\widetilde{x}_T d\lambda \\ &+ \int_0^t\int_0^1\int_U h_x\left(t, x_t^\mu + \lambda\left(x_t^\theta - x_t^\mu\right), a\right) - h_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\widetilde{x}_t\mu_t\left(da\right)d\lambda dt\end{aligned}$$

On appliquons l'inégalité de Cauchy-Shwartz et le théoréme de convergence dominié ,sous les hypothéses(2.1.1) sur $g_x$et h_x on a $\lim_{\theta\to 0}\rho^\theta = 0$. Finalement on trouve :

$$0 \leq E\left[g_x\left(x_T^\mu\right)\widetilde{x}_T\right] + E\int_0^T\int_U h_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\widetilde{x}_t\mu_t\left(da\right)dt + E\int_0^t\int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(\mu_t - q_t\right)\left(da\right)dt$$

■

2.2 processus adjoint et équation adjointe

Dans cette sous-section, nous introduire le processus adjoint. Avec ce processus, nous dérivons l'inégalité variationnelle (2.12).

Théorème 2.2.1 *Soit* $(x_t;\mu_t)$ *une solution optimale pour problème de contrôle relaxé* $\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$ *alors il existe* $p(t)$ *un processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté défini par :*

$$p(t) = E\left[\psi^*(t)\phi^*(T)g_x(x\left(T\right) + \psi^*(t)\int_t^T\phi^*(s)\int_U h_x\left(s; x_s^\mu; a\right)q(da)ds/\mathcal{F}_t\right].$$

vérifie l''EDSR suivante :

$$\begin{cases} -dp(t) = & \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right)dt - P_t^\mu dB_t \\ p(T) = & g_x\left[x_T^\mu\right], \end{cases} \tag{2.13}$$

telle que

$$\mathcal{H}\left(t,x,q,p,P\right)=\int_{U}h\left(s;x;a\right)q(da)+\int_{U}b\left(s;x;a\right)q(da)p+\int_{U}\sigma\left(s;x;a\right)q(da)P. \tag{2.14}$$

Preuve. Soit Φ la solution de l'équation linéaireLes termes linéaires en (2.6) peuvent etre traités de la façon suivante.Soit Φ la solution fondamontale de l'équation linéaire

$$\begin{cases} d\Phi_t=\int_U b_x\left(t,x_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\Phi_t dt+\int_U \sigma_x(t,x_t^{\mu},a)\mu_t\left(da\right)\Phi_t dB_t \\ \Phi_0=I_d \end{cases}$$

cette équation étant linéaire à coéfficients bornés, alors elle admet une solution unique et forte. De plus la solution Φ est inversible et son inverse on pose $\Phi^{-1}=\Psi$ Alors

$$\Phi\Psi=Id\Longrightarrow d\left(\Phi\Psi\right)=0$$

On suppose que :

$$d\Psi(t)=a(t)dt+b(t)dB_t$$

par la formule I'Ito sur $d\left(\Phi_t\Psi_t\right)=0$, on trouve que Ψ vérifié l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Psi_t= & \int_U \sigma(t,x_t^{\mu},a)\Psi_t\sigma_x^{*}(t,x_t^{\mu},a)\mu_t\left(da\right)dt \\ & -\int_U b\left(t,x_t^{\mu},a\right)\Psi_t\mu_t\left(da\right)dt-\int_U\sigma(t,x_t^{\mu},a)\Psi_t\mu_t\left(da\right)dB_t \\ \Psi_0= & I_d \end{cases} \tag{2.15}$$

Telle que Φ et Ψ sont vérifies

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\Phi_t\right|^2\right]+E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\Psi_t\right|^2\right]<\infty \tag{2.16}$$

En suivant d'aprés la méthode de la résolvante des équations différentielles ordinaires linéaires, on pose

$$\eta(t)=\Psi(t)\widetilde{x}_t. \tag{2.17}$$

On applique la formule d'Ito sur $\Psi(t)\widetilde{x}_t$ on obtient :

$$d\eta(t) = d\Psi(t)\widetilde{x}_t + \Psi(t)d\widetilde{x}_t + < d\Psi(t), d\widetilde{x}_t > .$$

D'aprés (2.9) et (2.15) on a :

$$\begin{aligned} d\eta(t) = &\left(\left[\int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\,\Psi(t)\int_U \sigma_x^*(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da) - \Psi(t)\int_U b_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\right] dt\right. \\ &\left. -\Psi(t)\int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\, dB_t\right)\widetilde{x}_t + \Psi(t)\left(\int_U b_x\,(t, x_t^\mu, a)\,\mu_t\,(da)\,\widetilde{x}_t dt\right. \\ &+ \int_U b\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\,dt + \left[\int_U \sigma_x\,(t, x_t^\mu, a)\,\mu_t\,(da)\,\widetilde{x}_t\right. \\ &\left.+ \int_U \sigma\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\right] dB_t \\ &+ \left(\left[\int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\,\Psi(t)\int_U \sigma_x^*(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da) - \Psi(t)\int_U b_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\right] dt\right. \\ &\left.-\Psi(t)\int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\, dB_t\right)\left(\left[\int_U b_x\,(t, x_t^\mu, a)\,\mu_t\,(da)\,\widetilde{x}_t + \int_U b\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\right] dt\right. \\ &\left.\left[\int_U \sigma_x\,(t, x_t^\mu, a)\,\mu_t\,(da)\,\widetilde{x}_t + \int_U \sigma\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\right] dB_t\right) \end{aligned}$$

Alors on trouve la formule suivante :

$$\begin{aligned} d\eta(t) = \Psi(t)&\left(\int_U b\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\,dt + \int_U \sigma\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\,dB_t\right. \\ &\left.\int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da) \times \int_U \sigma\,(t, x_t^\mu, a)\,(q_t - \mu_t)\,(da)\,dt\right). \end{aligned}$$

On pose :

$$Y = \Phi^*(T)g_x(x(T)) + \int_0^T \int_U \Phi^*(t)h_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t\,(da)\,dt \tag{2.18}$$

$$\zeta(t) = E\left[Y/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t \int_U \Phi^*(s)h_x(s, x_s^\mu, a)\mu_s\,(da)\,ds \tag{2.19}$$

On remarque que :

$$E\left[g_x(x(T))\widetilde{x}_t(T)\right] = E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T))\eta(T)\right] = E\left[\eta(T)\zeta(T)\right] \tag{2.20}$$

Car :

$$
\begin{aligned}
E\left[\eta(T)\zeta(T)\right] &= E\left[\eta(T)\left(E\left[Y/\mathcal{F}_T\right] - \int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds\right)\right] \\
&= E\left[\eta(T)E\left[Y/\mathcal{F}_T\right] - \eta(T)\int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds\right] \\
&= E\left[\eta(T)\Phi^*(T)g_x(x(T)) + \eta(T)\int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds\right. \\
&\left. -\eta(T)\int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds\right] \\
&= E\left[\eta(T)\Phi^*(T)g_x(x(T))\right] + E\left[\eta(T)\int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds\right] \\
&- E\left[\eta(T)\int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds\right] \\
&= E\left[\eta(T)\Phi^*(T)g_x(x(T))\right].
\end{aligned}
$$

D'autre patr :$E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T))\eta(T)\right] = E\left[g_x(x(T))\widetilde{x}_t(T)\right]$car $\eta(T) = \Psi(T)\widetilde{x}_t(T)$ donc $\widetilde{x}_t(T) = \eta(T)\Psi(T)^{-1} = \eta(T)\Phi(T)$ alors :

$$
\begin{aligned}
E\left[g_x(x(T))\widetilde{x}_t(T)\right] &= E\left[g_x(x(T))\eta(T)\Phi(T)\right] \\
&= E\left[\Phi^*(T)g_x(x(T))\eta(T)\right]
\end{aligned}
$$

Alors pour calculer le premier terme $E\left[g_x(x(T))\widetilde{x}(T)\right]$, il suffit de calculer $E\left[\eta(T)\zeta(T)\right]$. Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t), Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $E(Y/\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carré intégrable, alors la décomposition d'Itô nous donne :

$$
E(Y/\mathcal{F}_t) = E(Y) + \int_0^t G(s)dB_s - \int_0^T \int_U \Phi^*(s)h_x(s,x_s^\mu,a)\mu_s\left(da\right)ds \tag{2.21}
$$

Où G est un processus adapté telle que $E\left[\int_0^t |G(s)|^2 ds\right] < \infty$ donc on peut utuliser une forme de $\zeta(t)$ mieux adapté à notre probléme comme suit :

$$
\zeta(t) = E(Y) - \int_0^t \Phi^*(s)\int_U h_x(s,x(s),a))\mu_s\left(da\right)ds + \int_0^t G(s)dB_s.
$$

Ce qui nous donne

$$d\zeta(t) = -\Phi^*(t)\int_U h_x(t,x(t),u(t))dt + G(t)dB_t.$$

On applique la formule d'Itô sur $\eta(t)\zeta(t)$ on obtient :

$$d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = \eta(t)d\zeta(t) + \zeta(t)d\eta(t) + < d\zeta(t), d\eta(t) > .$$

$$\begin{aligned}
d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = \eta(t) & \left[-\Phi^*(t)\int_U h_x(t,x(t),a)\mu_t\left(da\right)dt + G(t)dB_t\right] \\
& + \zeta(t)\Psi(t)\left(\int_U b\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dt + \int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dB_t\right. \\
& \left.\int_U \sigma_x(t,x_t^{\mu},a)\mu_t\left(da\right) \times \int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dt\right) \\
& + G(t)\Psi(t)\int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dt
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) &= -\eta(t)\Phi^*(t)\int_U h_x(t,x(t),a)\mu_t\left(da\right)dt + \eta(t)G(t)dB_t \\
&+ \zeta(t)\Psi(t)\int_U b\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dt \\
&+ \zeta(t)\Psi(t)\int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dB_t \\
&+ \zeta(t)\Psi(t)\int_U \sigma_x(t,x_t^{\mu},a)\mu_t\left(da\right) \times \int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dt \\
&+ G(t)\Psi(t)\int_U \sigma\left(t,x_t^{\mu},a\right)\left(q_t-\mu_t\right)\left(da\right)dt.
\end{aligned}$$

Où :$p(t) = \Psi(t)\zeta(t)$ en simplifiant, on trouve

$$
\begin{aligned}
d\left(\eta(t)\zeta(t)\right) = & -\eta(t)\Phi^{*}(t)\int_{U} h_{x}(t,x(t),a)\mu_{t}\left(da\right)dt + \eta(t)G(t)dB_{t} \\
& + p(t)\int_{U} b\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt \\
& + p(t)\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dB_{t} \\
& + p(t)\int_{U} \sigma_{x}(t,x_{t}^{\mu},a)\mu_{t}\left(da\right)\times\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt \\
& + G(t)\Psi(t)\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt.
\end{aligned}
$$

Maintenant on passant par l'intégrale on a :

$$
\begin{aligned}
\eta(T)\zeta(T)-\eta(0)\zeta(0) = & -\int_{0}^{T}\eta(t)\Phi^{*}(t)\int_{U} h_{x}(t,x(t),a)\mu_{t}\left(da\right)dt + \int_{0}^{T}\eta(t)G(t)dB_{t} \\
& + \int_{0}^{T}p(t)\int_{U} b\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt \\
& + \int_{0}^{T}p(t)\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dB_{t} \\
& + \int_{0}^{T}p(t)\int_{U} \sigma_{x}(t,x_{t}^{\mu},a)\mu_{t}\left(da\right)\times\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt \\
& + \int_{0}^{T}G(t)\Psi(t)\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt.
\end{aligned}
$$

En passant au l'espérance, on a :

$$
\begin{aligned}
E\left[\eta(T)\zeta(T)\right] = & E\left[-\int_{0}^{T}\eta(t)\Phi^{*}(t)\int_{U} h_{x}(t,x(t),a)\mu_{t}\left(da\right)dt\right] \\
& + E\left[\int_{0}^{T}p(t)\int_{U} b\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt\right] \\
& + E\left[\int_{0}^{T}p(t)\int_{U} \sigma_{x}(t,x_{t}^{\mu},a)\mu_{t}\left(da\right)\times\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt\right] \\
& + E\left[\int_{0}^{T}G(t)\Psi(t)\int_{U} \sigma\left(t,x_{t}^{\mu},a\right)\left(q_{t}-\mu_{t}\right)\left(da\right)dt.\right]
\end{aligned}
$$

On a :

$$
E\left[\left(\eta(T)\zeta(T)\right)\right] = E\left[g_{x}(x(T))\widetilde{x}(T)\right]
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
E\left[g_x(x(T))\widetilde{x}(T)\right] &= E\left[-\int_0^T\int_U \eta(t)\Phi^*(t)h_x(t,x(t),a)\mu_t(da)\,dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T p(t)\int_U b\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt\right] \\
&E\left[\int_0^T p(t)\int_U \sigma_x(t,x_t^\mu,a)\mu_t(da)\times\int_U \sigma\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt\right] \\
&E\left[\int_0^T G(t)\Psi(t)\int_U \sigma\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt.\right]
\end{aligned}
$$

telle que $\eta(t)=\Psi(t)\widetilde{x}(t)$ implique $\eta(t)\Phi^*(t)=\widetilde{x}(t)$ donc :

$$
\begin{aligned}
E\left[g_x(x(T))\widetilde{x}(T)\right] &= E\left[-\int_0^T\int_U h_x(t,x(t),a)\mu_t(da)\,\widetilde{x}(t)dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T p(t)\int_U b\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt\right] \\
&E\left[\int_0^T p(t)\int_U \sigma_x(t,x_t^\mu,a)\mu_t(da)\times\int_U \sigma\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt\right] \\
&E\left[\int_0^T G(t)\Psi(t)\int_U \sigma\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt.\right]
\end{aligned}
$$

En remplacant $E\left[g_x(x(T))x_1(T)\right]$ par sa valeur dans le lemme (2.12) on obtient :

$$
\begin{aligned}
0 \leq E&\left[-\int_0^T\int_U h_x(t,x(t),a)\mu_t(da)\,\widetilde{x}(t)dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T p(t)\int_U b\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt\right] \\
&+E\left[\int_0^T p(t)\int_U \sigma_x(t,x_t^\mu,a)\mu_t(da)\times\int_U \sigma\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T G(t)\Psi(t)\int_U \sigma\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(q_t-\mu_t\right)(da)\,dt.\right] \\
&+ E\int_0^T\int_U h_x\left(t,x_t^\mu,a\right)\widetilde{x}_t\mu_t(da)\,dt + E\int_0^t\int_U h\left(t,x_t^\mu,a\right)\left(\mu_t-q_t\right)(da)\,dt
\end{aligned}
$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
0 \leq & E \int_0^t \int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(\mu_t - q_t\right)(da)\, dt \\
& + E\left[\int_0^T p(t) \int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t - \mu_t\right)(da)\, dt\right] \\
& + E\left[\int_0^T p(t) \int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a) \mu_t(da) \times \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t - \mu_t\right)(da)\, dt\right] \\
& + E\left[\int_0^T G(t)\Psi(t) \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)\left(q_t - \mu_t\right)(da)\, dt.\right]
\end{aligned}
$$

Donc on peut réecrire l'inégalité (2.12)comme

$$
0 \leq E\left[\int_0^T \left[\mathcal{H}(t, x^\mu(t), q_t, p^\mu(t), P^\mu(t)) - \mathcal{H}(t, x^\mu(t), \mu_t, p^\mu(t), P^\mu(t))\right] dt\right]
$$

Telle que la définition d'Hamiltonien est :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, x(t), q_t, p(t), P(t)) = & \int_U h\left(t, x_t, a\right) q_t(da) + p(t) \int_U b\left(t, x_t, a\right) q_t(da) \\
& + P(t) \int_U \sigma\left(t, x_t, a\right) q_t(da),
\end{aligned}
$$

avec (p^μ, P^μ) est un couple de processus adapté donnée comme suivant

$$
\begin{aligned}
p^\mu(t) = & \quad \Psi(t)\zeta(t), p^\mu \in \mathcal{L}^2\left([0,T] \times \mathbb{R}\right) \\
P^\mu(t) = & \quad G(t)\Psi(t) - p^\mu(t) \textstyle\int_U \sigma_x(t, x_t^\mu, a)\mu_t(da), P^\mu \in \mathcal{L}^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^d\right),
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

et le processus G satisfie :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t G(s) dB_s = E(Y/\mathcal{F}_t) - E(Y) = & E\left[\left(\Phi^*(T) g_x(x^\mu(T)) + \int_0^T \Phi^*(s) \int_U h_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t(da)\, dt\right) / \mathcal{F}_t\right] \\
& - E\left[\Phi^*(T) g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi^*(s) \int_U h_x\left(t, x_t^\mu, a\right) \mu_t(da)\, dt\right].
\end{aligned}
$$

■

Le p processus est appelé le processus adjoit et si en appliquant la formule d'Itô à $p(t) = \Psi^*(t)\zeta(t)$ on obtient l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} -dp(t) = & \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) dt - P_t^\mu dB_t \\ p(T) = & g_x\left[x_T^\mu\right], \end{cases}$$

2.2.1 Conditions nécessaires d'optimalité pour contrôles relaxés

On obtient les conditons nécessaires d'optimalité, pour le probléme de contrôle relaxé $\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$ à travers l'inégalité variationnélle,

Théorème 2.2.2 ***(Conditions nécessaires d'optimalité pour contrôles relaxés)*** *soient μ un contrôle optimale relaxé minimisant la fonction J dans R et x_t^μ notée trajéctoire optimal correspondante. Alors, il éxiste un couple de processus adapté*

$$\left(p^\mu, P^\mu\right) \in \mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}\right) \times \mathcal{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^{n\times d}\right)$$

solution de EDS rétrograde (2.13) tel que

$$\mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) = \inf_{q_t \in p(U)} \mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right), \qquad p.p \tag{2.23}$$

Preuve. *A partire de l'inégalité variationnélle, on a*

$$0 \leq E\left[\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} \left\{H\left(s, x_s^\mu, q_s, p_s^\mu, P_s^\mu\right) - H\left(s, x_s^\mu, \mu_s, p_s^\mu, P_s^\mu\right)\right\} ds\right]$$

En plus. soit ϵ tend vers 0, on trouve

$$0 \leq E\left[H\left(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) - H\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right)\right]$$

Soit A un élément arbitraire de $\sigma-$algebre $\mathcal{F}_t$, et

$$\pi_t := q_t 1_A + \mu_t 1_{(\Omega - A)}$$

C'est à dire que $\pi \in R$. En appliquant l'inégalité précédent sur π, on trouve

$$0 \leq E\left[1_A \left\{H\left(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) - H\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P^\mu\right)\right\}\right], \ \forall A \in \mathcal{F}_t$$

ce qui imlique que

$$0 \leq E\left[H\left(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) - H\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) / \mathcal{F}_t\right]$$

la quantité a l'interieure d'ésperance conditionelle est $\mathcal{F}_t -$ mesurable. ■

2.2.2 Conditions suffisante d'optimalité pour contrôles relaxés

Dans cette section, nous étudions quand les conditions d'optimalité nécessaires deviennent suffisantes. Pour tout $q \in \mathcal{R}$, on note (x_t) la solution de l'équation (2.4) contrôlé par q_t,

Théorème 2.2.3 ***(Conditions suffisante d'optimalité pour contrôles relaxés)*** *suppose que les fonctions $g(.)$ et $H(t, ., q_t, p_t, P_t)$ sont convexes. Alors μ est une solution optimal du probléme$\{(2.4), (2.5), (2.6)\}$ s'il vérifie (2.23)*

Preuve. *soient μ un élément de $\mathcal{R}$ (condidat pour être optimal) et q un élément quelconque de $\mathcal{R}$. pour tout $q \in \mathcal{R}$ on a*

$$\begin{aligned} J(\mu) - J(q) &= E\left[g\left(x_T^\mu\right) - g\left(x_T^q\right)\right] \\ &\quad + E\int_0^T \left[\int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu(da) - \int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right) q(da)\right] dt \end{aligned}$$

comme g est convexe, on a

$$g\left(x_T^\mu\right) - g\left(x_T^q\right) \leq g_x\left(x_T^\mu\right)\left(x_T^\mu - x_T^q\right)$$

en remarque que $p_T^\mu = g_x\left(x_T^\mu\right)$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\mu) - J(q) &\leq E\left[p_T^\mu\left(x_T^\mu - x_T^q\right)\right] \\ &\quad + \int_0^T \left[\int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu(da) - \int_U h\left(t, x_t^\mu, a\right) q(da)\right] dt \end{aligned}$$

En appliqaunt la formule d'Itô à $p_t^\mu\left(x_t^\mu - x_t^q\right)$ on trouve

$$\begin{aligned} J(\mu) - J(q) &\leq E\int_0^T \left[\mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) - \mathcal{H}\left(t, x_t^q, q_t, p_t^q, P_t^q\right)\right] dt \\ &\quad - E\int_0^T \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right)\left(x_t^\mu - x_t^q\right) dt \end{aligned}$$

comme H est convexe sur x linéaire sur μ, donc par utilisant Le Gradient généralisée de Clarke pour H éventuelement à (x_t, μ_t) et condition nésessaire d'optimalité (2.23), est suivre

$$0 \geq \mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right) - \mathcal{H}\left(t, x_t^q, q_t, p_t^q, P_t^q\right) - \mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu\right)\left(x_t^\mu - x_t^q\right)$$

En combinaisant les deux inégalités précédentes, on obtien

$$J(\mu) - J(q) \leq 0$$

■

Remarque 2.2.1 *L'équation (2.13) est une équation backward linéaire à coefficient bornés, donc elle admet une solution forte unique.*

Remarque 2.2.2 *Le processus $p(T)$ est appellé processus adjoint de l'équation adjointe, et si le couple optimale (x, u) est une solution optimale pour le probléme de contrôle, alors il existe un couple (p, Z) solution de l'équation backward (2.13) telle que (2.23) soit vérifiée.*

Conclusion

Dans ce travaille nous avons étudiés les conditions nécessaire d'optimalité en contrôle optimal stochastique dont le système est gouverné par une équation différentiel stochastique non linéaire ou bien on dire le principe du maximum de contrôle stochastique telle que le coefficient de diffusion dépend au contrôle relaxé . Nous avons pris les problèmes de contrôles stochastiques strict et relaxé et intéressons aux conditions nécessaires d'optimalité des contrôles, ainsi que les conditions suffisants pour les contrôles relaxé.

Annexe

Lemme 2.2.1 *(Lemme de Gronwall)voire* [4]*Soient $T > 0$ et u une fonction positive bornée sur $[0;T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a > 0, b > 0$ telles que pour tout $t \in [0;T]$, on a :*

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [0;T] , \quad u(t) \leq a \int_0^t \exp(bs)\, ds$$

Lemme 2.2.2 *(Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG) pour tout temps d'arrêt τ on a ,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0;T]}\left|\int_0^t f(s)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s)|^2\, ds\right],$$

où C est une constante positive.

Proposition 2.2.1 *(L'inégalité de Hölder) voire* [2]*L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Proposition 2.2.2 *(l'inégalité de Cauchy-Schwartz) C 'est une cas particuliée de l'inégalité de Holder pour $p = q = 2$;on a*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Théorème 2.2.4 ***(Dévelopment de Taylor-Young)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n-1$-fois dérivable, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left(|x-a|^n\right).$$

Théorème 2.2.5 ***(Dévelopment de Taylor avec reste intégral)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt.$$

Théorème 2.2.6 ***(Inégalité de Young)*** *: Soient a, b deux nombres réels Alors :*

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Théorème 2.2.7 ***(Inégalité de Young)*** *: Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < +\infty$ deux éxposants conjugués i.e, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bibliographie

[1] S. Bahlali. : Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict control problems, SIAM J. Control and Optim, 2008, Vol. 47, No. 4, pp. 2078.2095.

[2] S.Bahlali, A. Chala, A general optimality conditions for stochastic control problems of jump diffusions Appl. Math Optim. Vol. 65, N_1 (2012), pp. 15-29.(2005).

[3] S. Bahlali, B. Djehiche, B. Mezerdi, Approximation and optimality necessary conditions in relaxed stochastic control problems. J. Appl. Math. Stoch. Anal., Vol. 2006, Article ID 72762, 1–23.

[4] A. Bensoussan : Non linear . . . ltering and stochastic control. Proc. Cortona 1981, Lect. notes in Math. 1982, 972, Springer Verlag.

[5] J.M. Bismut : Conjugate convex functions in optimal stochastic control, J. Math. Anal. Appl.44 (1973), pp. 384-404.

[6] J.M. Bismut : Linear quadratic optimal control with random coe¢ cients, SIAM J. Control Optim., 14 (1976), pp. 419-444.

[7] J.M. Bismut : An introductory approach to duality in stochastic control, SIAM Rev, 20 (1978), 62-78.

[8] K. Burrage, P. M. Burrage and T. TianP. Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations : an overview,The Royal Society Proc. R. Soc. Lond. A (2004) 460, 373–402

[9] R.J. Elliott. : The optimal control of diusions, Appl. Math. Optim., 1990, 22, pp.229-240.

[10] R.J. Elliott and M. Kohlmann. : The second order minimum principle and adjoint process. Stochastics and Stoch. Rep., 1994, Vol. 46, pp.25-39.

[11] J. Faraut Collection dirigée par Daniel Guin « Calcul intégral » 2006, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtaboeuf, 91944 Les Ulis Cedex A.

[12] W. H. Fleming and N. Nisio, On stochastic relaxed control for partially observed diffusions. Nagoya Math. Journal 93 (1984), 71-108.

[13] N.Guillotin-Plantard « Introduction au Calcul Stochastique » 2009 .

[14] U.G. Haussmann. : General necessary conditions for optimal control of stochastic systems, Math. Programming Studies 6, 1976, pp 30-48.

[15] U.G. Haussmann. : A Stochastic maximum principle for optimal control of diffusions, Pitman Research Notes in Math, 1986, Series 151.

[16] N.Ikeda et S. Watanabe « Comparison theorem solotions of stochastic differential equations and ite applications », Osaka J. Math.14 (1977), 619-633.

[17] K. Ito, Multiplet Wiener integral, J. Math. Soc. Japan 3(1951)157-169..

[18] A. Joulin « Calcul Stochastique »Polycopie du cours de base C2, Institut de Mathématiques de Toulouse Université Paul Sabatier 2012-2013.

[19] H.J. Kushner. : Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems, SIAM J. Control Optim, Vol. 10, 1973, pp 550-565.

[20] J.P.Lecoutre « statistique et probabilités », cours et exercices corrigés. 6 édition, Dunod 2016.

[21] S. Peng : A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM J. Control and Optim. 1990, 28, N_ 4, pp 966-979.

[22] Protter, P.E, Stochastic Differential Equations. In : Stochastic Integration and Differential Equations. Stochastic Modelling and Applied Probability, vol 21. Springer, Berlin, Heidelberg, (2005).

[23] S. Rubenthaler « Intégration et probabilités » (cours + exercices corrigés) L3 MASS, Université de Nice-Sophia Antipolis.

[24] C.Tudor « cours de Calcul Stochastique », Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1, 2008.

[25] T. yamada et S. Watanabe « On the uniqueness of solotions for stochastic differential equations,J. Math. Kyoto Univ (JMKYAZ)11-1(1971) 155-167..

Résumé

Dans ce travaille nous avons étudié le problème de contrôle stochastique gouverné par une EDS dans le cas ou l'ensemble des contrôles admissibles (strict) $\mathcal{U}$ est non convexe, et nous avons essayé d'introduire une nouvelle ensemble des processus (relaxé) $\mathcal{R}$ convexe et nous pouvons utiliser cette propriété pour dériver les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Mots-clés : mouvement Brownien, intégrale d' Itô, Equations différentielles stochastiques, contrôle stochastiques, processus adjoint, conditions d'optimalité

.

Abstract

In this work we studied the problem of stochastic control governed by a SDE in the case where the set of admissible controls (strict) $\mathcal{U}$ is non-convex, and we tried to introduce a new set of processes (relaxed) $\mathcal{R}$ convex and we can use this property to derive the necessary and sufficient conditions for optimality.

Key Words: Brownian motion, Ito integral, Stochastic differential equations, stochastic control, adjoint process,optimality conditions

الملخص

لقد درسنا في هذا العمل مشكلة التحكم العشوائي التي يحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية في الحالة التي تكون فيها مجموعة الضوابط المقبولة (الصارمة) $\mathcal{U}$ غير محدبة ، وحاولنا تقديم مجموعة جديدة من العمليات (مريحة) $\mathcal{R}$ محدبة و يمكننا استخدام هذه الخاصية لاشتقاق الشروط اللازمة والكافية لتحقيق الأمثل.

الكلمات المفتاحية : الحركة البراونية، تكامل ايتو، المعادلات التفاضلية العشوائية ، التحكم العشوائي، السيرورة المرافقة. الشروط المثلى .