N° d'ordre:
N° de série:

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH

Ouaragla

Faculté des Mathématique et des Sciences de la Matière

Département de Mathématique

Mémoire de Master

en Mathématique

Spécialité : Mathématique

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Thème

Approximation des solutions d'un problème d'ordre fractionnaire

---

Réalisé par :

SAIED RAWIYA

Mr.**Acila Moustafa**	M. C.B universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Kouidri Mohammed**	M. C.B universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Said Mohammed Al Said**	M. C.A université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2021/2022

شكر وعرفان

عن رسول الله خاتم الأنبياء محمد عليه الصلاة والسلام قال (من لم يشكر الناس لم يشكر الله ومن أهدى إليكم معروفا فكافؤه فإن لم تستطيع فأدعو له) واقتداءا برسولنا واعترافا بالجميل نحمد الله عزّ وجل ونشكره على أن وفقنى لإتمام هذا العمل المتواضع.

إلى منبع الحنان إلى أمي من حملتني وهنا على وهن لكي أمي الغالية مصدر فرحتي وإلهامي ودعوة في الخفاء حفظتني حفظك الله ورعاك بعينيه التي لا تنام

" أمي الحبيبة شيبة يمينة "

الأخ هو نعمة أنعم الله بها على كل من لديه أخ فهو السند والظهير في هذه الحياة فهو قطعة من القلب والروح، والأخت ضلع ونصف قلب الأم حفظكم الله ورعاكم: اعتدال -نبيل -فارس -لطفي – ليدا

"إخوتي الأعزاء"

إلى من علمني حرف إلى أستاذي المشرف السعيد محمد سعيد نك مني كل عبارات الشكر والتقدير على نصائحك طيلة إنجاز هذه المذكرة أسأل الله أن يمنّ عليك بالخير والصحة والعافية

تحية طيبة إلى اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذه المذكرة

وفي الأخير نشكر كل من ساهم في مساعدتنا لإنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد

Remerciements et Gratitude

Sur l'autorité du Messager de Dieu, le Sceau des Prophètes, Muhammad, paix et bénédictions sur lui, il a dit (Celui qui ne remercie pas les gens ne remercie pas Dieu, et celui qui vous accorde une faveur, récompensez-le, puis si vous ne pouvez pas, alors priez pour lui) et notre demande par notre messager et ils reconnaissent la faveur. Nous louons Dieu Tout - Puissant et nous le remercions de m'avoir permis d'accomplir cet humble travail.

A la source de la tendresse A celle qui m'a portée et ici sur la faiblesse Pour que ma chère mère soit la source de ma joie et de mon inspiration et une invitation en secret Tu m'as préservé Que Dieu te protège et prenne soin de toi avec ses yeux qui jamais sommeil

" Ma mère bien - aimée, Chiba Yamina "

Un frère est une bénédiction que Dieu a accordée à tous ceux qui ont un frère. Il est le lien et le dos dans cette vie. Il est un morceau du cœur et de l'âme. La sœur est une côte et la moitié du cœur de la mère. Que Dieu te protéger et prendre soin de toi. * A3tidal, Nabil, Fares, Loutvi, Lina*

" Chères frères et sœurs "

A ceux qui m'ont enseigné une lettre A mon heureux superviseur, le professeur Muhammad Saeed Vous avez toutes les expressions de remerciement et d'appréciation pour vos conseils tout au long de la rédaction de cette note. Je demande à Dieu de vous bénir avec une bonne santé et un bien - être.

Salutations au comité qui a gracieusement discuté de cette note. Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour nous aider à accomplir ce modeste travail.

Table des matières

Table des matières **5**

Notation **6**

Introduction générale **1**

1 Concept de base et étude de référence **2**

1.1 Présentation des dérivées fractionnaires 2

1.2 Concept de Base 2

1.2.1 La Fonction Béta 2

1.2.1.1 Définition : 2

1.2.2 La Fonction Gamma 3

1.2.2.1 Définition : 3

1.2.3 La Fonction de Mittag-leffler 5

1.2.3.1 Définition : 5

1.2.4 Transformation de la place 5

1.2.4.1 Définition 5

1.3 Arithmétique Fractionnaire 6

1.3.1 La dérivée fractionnaire 6

1.3.1.1 La dérivée fractionnaire de Grunuvld-betnikov 7

1.3.1.2 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 7

1.3.1.3 La dérivée fractionnaire de Caputo 8

1.3.1.4 La Relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et la dérivée fractionnaire aie le concept de Riemann-Liouville 8

1.3.1.5 Tableau des dérivées fractionnaires 9

2 Approximation des dérivées des équations différentielles et des intégrales d'ordre fractionnaire 10

2.1 Approximation des solution d'ordre fractionnaire 10

2.1.1 Méthode Numérique 11

2.1.1.1 Approximation des dérivées fractionnaires [8] 11

2.1.1.1.1 Approximation de dérivées de Caputo 11

2.1.1.1.2 Approximations de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 12

2.1.1.1.3 Approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville 12

2.1.1.1.4 Approximation de l'intégrale et de la dérivée de Grunuvald- Letnikov 13

2.1.1.1.5 Approximation la dérivée fractionnaire utilisant la méthode des différences finies 14

2.2 Méthode d'Intégration Numérique 16

2.2.1 Méthode de Trapèzes : 16

2.2.2 Méthode de transformée de laplace 17

2.2.2.1 La transformée de la place de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 17

2.2.2.2 La transformée de laplace de la dérivée de Caputo [1] . . . 18

2.2.2.3 La transformée de laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwold-Letnikov 19

2.3 Approximations des équations différentielles 20

2.3.1 Équations différentielles fractionnaires 20

2.3.2 Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville . . 21

2.3.3 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo 21

2.3.4 Équation différentielle transformation de laplace 22

2.4 Tableaux des méthodes d'ordre fractionnaire 24

2.5 Valeur d'approximation des intégrales de partie finie [2] 25

3 Application sur les équations d'ordre fractionnaire 26

3.1 Le but de l'étude des solutions d'ordre fractionnaire 29

Conclusion générale **31**

Notation

$\simeq$	Approximation
$\mathbb{N}$:	Ensemble des nombres Complexe
I^{α} :	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α
${}^{c}\mathfrak{D}^{\alpha}$:	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sans de Caputo
$\mathfrak{D}^{\alpha}$:	La dérivée fractionnaire d'ordre α
R :	Le reste
$C^{n}([a,b])$:	L'ensemble des fractions n fois continument dérivables sur [a,b]
$A_{n}(x)$:	Les polynômes d'Adomian
L :	Opérateur linéaire
N :	Le terme non linéaire
$\mathbb{R}$:	Ensemble des réels.
Γ :	La fonction Gamma.

Introduction générale

Le théorème de dérivation fractionnaire est un sujet aussi ancien que le calcule classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du dix-septième siècle, c'est à cette époque que leibniz développe les fondements du calcul. La première question qui a conduit au calcul fractionnaire était : La dérivée entière $\frac{dnf}{dxn}$ peut-elle être étendue pour être un booléen quand **n** est une fraction ? plus tard , la question est devenue : **n** peut être n'import quel nombre fractionnaire, irrationnel ou complexe ? depuis cette dernière question a reçu une réponse affirmative, le calcul fractionnaire est devenue terme impropre et peut être mieux appelé intégrale d'ordre fractionnaire et calcul leibniz a introduit la notation $\frac{dnf}{dxn}$ pour désigner la dérivée **n** de la fonction **f** .Lorsqu'il est déclaré dans une lettre à l'hôpital en 1695, l'hôpital répond : que signifie $\frac{dnf}{dxn}$ si $n = \frac{1}{2}$?.
Aujourd'hui cette lettre est accepter comme la première occurrence de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire on pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une affaire " pure" de mathématique sans l'attention de l'intégration cependant un exemple simple tiré de la mécanique des fluides montre comment l'intégration du demi-système apparait assez naturellement lorsque on veut expliquer le flux de chaleur sortant latéralement du flux de fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne . La dérivée du système étant donnée sa moitie il faut être vigilant quant à sa définition précise dans des situations plus générales il en va de même pour la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire α ou α est généralement un nombre réel compris entre zéro et un pendant longtemps de nombreuses définitions qui font suite aux travaux de joseph Liouville et de Bernard Riemann au milieu de xlxe ont coexiste sans jamais être en parfait accord entre elles.

Chapitre 1

Concept de base et étude de référence

1.1 Présentation des dérivées fractionnaires

La dérivée fractionnaire est un sujet ancien et encore nouveau au cours des derniers décennies, c'est un processus mathématique apparu en 1695 par le scientifique leibniz zt qui a ensuite connu un développent à l'ère moderne et après la révolution la technologie à trouvé sa voie pour être utilisée dans divers domaines de la physique de l'ingénierie de la mécanique...., ou nous discuterons de la définitions des fonctions intrusives , car ce sont les fonctions de base en arithmétique fractionnaire.La différenciation avec l'ordre fractionnaire et l'intégrale avec l'ordre fractionnaire.

1.2 Concept de Base

1.2.1 La Fonction Béta

1.2.1.1 Définition :

Désignée par le symbole $\beta(x, y)$ et comme sens le nom d'intégrale.[1]

$$\beta(x,y) = \int_0^1 \; A^{x-1}(1-t)^{y-1} \; dt \qquad\qquad x, y > 0$$

- Proposition :

$$\forall (x,y) > 0 \; on \; \beta(x,y) = \; \frac{\Gamma(x) \; \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

- Démonstration :

$$\begin{aligned}\Gamma(x) \; \Gamma(y) = \; & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \; t_1^{x-1} \; t_2^{y-1} \exp -(t_1) \exp(-t_2) dt_1 \; dt_2 \\ = \int_0^{+\infty} \; & t_1^{x-1} \; (\int_0^{+\infty} \; t_2^{y-1} \; \exp(-|t_1 \; + \; t_2|) dt_2 \; dt_1)\end{aligned}$$

en affectent le changement de variable

$$t'_2 = \ t_2 \ + \ t_1$$

On trouve :

$$\Gamma(x)\ \Gamma(y) = \int_0^{+\infty}\ t_1^{x-1}\ dt_1\ (\int_{c1}^{\infty}\ (t2\ -\ t1)^{y-1}\ \exp - - t_2\ dt_2)$$
$$= \int_0^{+\infty}\ (-t'_2)\ dt'_2\ \int_0^{t_1}\ (t'_2\ -\ t')^{y-1}\ t_{1^{x-1}}\ dt_1$$

Si on pose $t'_1 \ = \ \frac{t_1}{t_2}$ on arrive à :

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-t'_2)\ dt'_2\ (\int_0^1\ (t'_1\ t'_2)^{t_1}\ (t'_2 -\ t'_1 t'_2)^{y-1}\ dt'_1)$$
$$= \int_0^{+\infty} \exp(-t'_2) dt'_2\ (t'_2)^{x+y-1}\ \beta(x.y)$$
$$= \Gamma(x+y)\ \beta(x.y)$$

Ce qui donne le résultat désire.

- Propriété :
  - $\beta(a.\beta) \ = \ \beta(b.a)$
  - $a\beta(a, b+1) \ = \ \beta(a+1, b)$
  - Si n=b+1 est un entier cela donne une relation de récurrence :

$$\beta(a, \beta) \ = \ \frac{n-1}{a}\ \beta(a+1.n-1)$$

  - $\beta|a.1| \ = \ \frac{1}{a}$
  - Si a=m et b=n , on obtient :

$$\beta(m, n) \ = \ \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)!}$$

1.2.2 La Fonction Gamma

1.2.2.1 Définition :

Connaitre la fonction Gamma et la désigner par le symbole $\Gamma(x)$ comme intégration anormale.

$$\Gamma(x) \ = \ \int_0^{\infty}\ t^{x-1}\ \exp^{-t}\ dt$$

Cette intégrale est aussi appelée la deuxième intégrale d'Euler (integral of the second Kind Euler). Cette intégrale est convergent pour tout $x > 0$.

- Propriété :
  - Est une fonction associative $0 \ < x < \infty$ et une fonction de divergence pour chaque $x \leq 0$
  - Cela signifie que cette intégrale est une intégrale asymptotique pour tout x appartenant à $0 < x < \infty$ en d'autres termes il donne des valeurs réelles est

nom l'infini , pour chaque x à condition qu'il y ait une limite.

$$\Gamma(x+1) \;=\; n!$$
$$\Gamma(x+1) \;=\; x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(x+n) \;=\; (x+n-1)\,(x+n-2) * ..... * x\Gamma(x) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}$$

- Démonstration :

  on par définition :

$$\Gamma(x+1) \;=\; \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)dt$$

  On va appliquer une intégration par partie (n) fois

  — $\Gamma(n+1) \;=\; n!\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt \;=\; n![-\exp\,(-t)!^{\infty}] \;=\; n!^{\infty}$

  — $\Gamma(x+1) \;=\; \int_0^{1} t^x \exp(-t)dt$

  — $\Gamma(x+1) \;=\; \int_0^{+\infty} xt^{(x-1)} \exp(-t)dt \;-\; t^x \exp(-t)!^{\infty}$

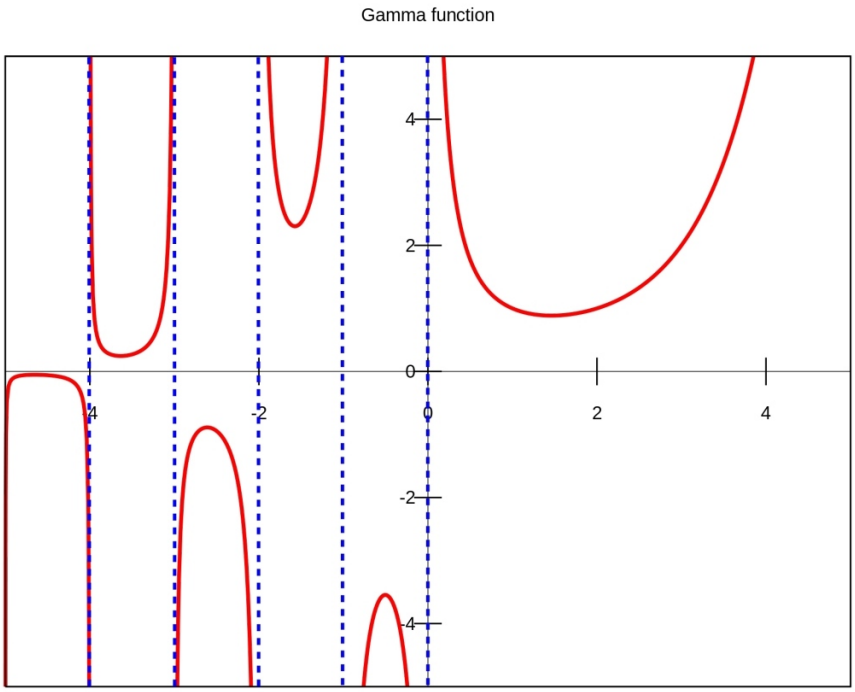
  $= x\int_0^{+\infty} t^{x+1} \exp(-t)dt$

  $= x\Gamma(x)$

  — $\Gamma(x+n) \;=\; (x+n-1)\;\Gamma(x+(n+1))$

  $\Gamma(Z+n) \;=\; (Z+n-1)\;(Z+n-2)\;\Gamma(Z+(n-2))$

  $= \Gamma(x+n) \;=\; (x+n-1)\;(x+n-2)\;...\;x\Gamma(x)$



1.2.3 La Fonction de Mittag-leffler

1.2.3.1 Définition :

La fonction de Mittag-liffler apparait naturellement dans la solution des équations intégrales d'ordre fractionnaire et en particulier dans les investigations de la généralisation fractionnaire de l'équation cinétique[2] :

$$E_\alpha(Z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans théorie du calcul fractionnaire.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(Z) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(\beta+\alpha n)} \\ E_\alpha(x^\alpha) \;&=\; \frac{1}{2\Pi_i} \int_{Hx} \frac{t^{\alpha-1}e^t}{t^\alpha \;-\; x^\alpha}\, dt \\ x \longrightarrow\; \alpha & \\ x_\alpha E'\alpha(x^\alpha) \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^\alpha n^{-1}}{\Gamma(\alpha n)} \end{aligned}$$

- Propriété :
  - $E_{\alpha\beta}(Z) \;=\; ZE_{\alpha,\alpha} + \beta(Z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$
  - $E_{\alpha\beta}(Z) \;=\; \beta E_{\alpha.\beta+1}(Z) + \alpha\; Z\; \frac{d}{dZ} E_\alpha.\beta + 1(Z)$
  - $(\frac{d}{dZ})^m\; [Z^{\beta-1}\; E_{\alpha.\beta}(Z^\alpha)] \;=\; Z^{\beta-m-1}\; E_{\alpha\beta-m}(Z^\alpha),$
    $R(\beta - m) > 0\;;\; (m \in\; \mathbb{N})$

1.2.4 Transformation de la place

1.2.4.1 Définition

La transformation de la place dans cette section nous chenhon à transformer de la place $\frac{d^q f}{dx^q}$ pour tout q et différer intégrable f, c'est-à-dire que nous souhaite relier [3].

$$\mathcal{L}\{\frac{d^q f}{dx^q}\} \;=\; \int_0^\infty\; e^{-Sx} \frac{d^q f}{dx^q} dx \;=\; F(S); S > 0$$

à la transformée de la place (f) de la fonction différent intégrable reprenons d'abord appelée les transformées bien connues des dérivées d'ordre entier.

$$\mathcal{L}\{\frac{d^q f}{dx^q}\} \;=\; S^q\; \mathcal{L}\{f\} \;-\sum_{k=0}^{q-1}\; S^{q-1-k}\; \frac{d^k f}{dx^k}(0)\; ....\; q = \;1, 2, 3$$

et intégrales multiples

$$\mathcal{L}\{\frac{d^q f}{dx^q}\} \;=\; S^q\ \mathcal{L}\{f\}..... \; q = \; -1, -2, -3$$

- Propriété :

  Nous avons :

  — $\mathcal{L}(f(x)) \;=\; \int_0^\infty \exp^{-Sx}\ f(x)dx \;=\; F(S)$

  — La question maintenant :

  quel est le critère de la fonction F(S) ?, qui est symbolisé par le symbole $//F(S)//_2^2$ pour répondre à cette question, nous commençons par préciser que l'une des conditions les plus important pour l'existence de la transformée de la place est que la fonction f(t) : est Double- intégrable.

  — Supposon que $L_2([a,b])$ représente espace de toutes les fonctions f(x) de sort que :

  $$\int_a^b\ |f(x)|^2 dx \;=\; m < \infty$$

  — α au sens ou (f(x)) appartient à l'espace de Hilbert et aussi il faut souligner que la transformée de la place est un opérateur intégratif convergent.

  — tandis que :

  $$\int_0^\infty\ |e^{-St}|^2 dt \;=\; \int_0^\infty e^{-2St} dt \;=\; \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\alpha e^{-2St} dt$$
  $$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{-1}{2S}\ \int_0^\infty\ e^{-2St} \;-\; (-2S)dt \qquad ; \qquad S > 0$$
  $$= \lim_{\alpha\to\infty} [\frac{-1}{2S}\ e^{-2St}]_0^\alpha \;=\; \lim_{\alpha\to\infty} [\frac{-1}{2S}\ - e^{-2St}\ + \frac{1}{2S}] \;=\; \frac{1}{2S}$$

1.3 Arithmétique Fractionnaire

1.3.1 La dérivée fractionnaire

Dans cette section, nous discuterons de trois définitions de différents dérivées fractionnaires :

La dérivée fractionnaire de Grunuvld-betnikov et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo et la relation entre la dérivée fractionnaire aie le concept de Riemann-Liouville.

1.3.1.1 La dérivée fractionnaire de Grunuvld-betnikov

- Définition[1] [3] [5] : ${}_{\alpha}^{G}\mathcal{D}_{t}^{p}\ f(t)$ de la fonction polynomiale, et : $f(t) = (t-\alpha)^{\alpha}, \alpha$ est un nombre réel.

  ${}_{\alpha}^{G}\mathcal{D}_{t}^{p}(t - \alpha)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-P)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{-p-1} (\tau - \alpha)^{\alpha} d\tau$

- Propriétés :

  ⋆ $\alpha > -1$

$$\begin{aligned}\tau = \alpha + (t-\alpha) - {}_{\alpha}^{q}\mathcal{D}_{t}^{p}(t - \alpha)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(-P)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \int_{\alpha}^{t}\{^{\alpha}(1-)^{-p-1}d\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)}\ \beta(-P_{\alpha+1})(t-\alpha^{\alpha-p^{\alpha}}) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-P+1)}\ (t-\alpha)^{\alpha-P}\end{aligned}$$

  ⋆ $\alpha > m$

$${}_{\alpha}^{G}\mathcal{D}_{t}^{p}(t - \alpha)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-P+m+1)} \int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-P} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^{\alpha}d\tau}{d\tau^{m+1}}$$

1.3.1.2 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

- Définition [1] [3] [5] :

  La dérivée fractionnaire sens de Riemann-Liouville conduit a des conditions initiales de types fractionnaire difficilement explicable physiquement.

- Droite :

$$\forall t < \alpha\ :\ {}_{\alpha}^{q}\mathcal{D}_{t}^{p}\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\ (\frac{-d}{dt})^{n} \int_{t}^{b}(\tau-t)^{n-\alpha-1}\ f(\tau)d\tau$$

  f est une fonction telle que ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}\ f(t)$ et ${}_{t}^{R}\mathcal{D}_{b}^{B}$ Sont définies

- Gauche :

$$\forall t > \alpha\ :\ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt}^{n}) \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1}\ f(\tau)d\tau$$

- Preuve : Pour $p = m \geq 1$

$$\begin{aligned}{}_{\alpha}^{R}\mathcal{D}_{t}^{n}\ ({}_{\alpha}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-n}\ f(t)) &= \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} \frac{(t-\tau)^{m-1}}{m-1}\ f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{t} f(\tau)d\tau = f(t)\end{aligned}$$

1.3.1.3 La dérivée fractionnaire de Caputo

- Définition[4] :

De la dérivée fractionnaire par rapport à Caputo qui comprend les conditions initiales de la fonction à traiter ainsi que ses dérivées entières.

- Gauche :

$$\forall t > \alpha \ : \ {}_{\alpha}^{c}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} \ f(t) \ = \ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \ \int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(na)}(\tau)d\tau$$

- Droite :

$$\forall t < b \ {}_{b}^{c}\mathcal{D}_{t}^{B} \ f(t) \ = \ \frac{1}{\Gamma(m-B)} \ (-1)^{m} \ \int_{t}^{t}(\tau-t)^{m-B-1} \ f^{m}(\tau)d\tau$$

1.3.1.4 La Relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et la dérivée fractionnaire aie le concept de Riemann-Liouville

$$n-1 \geq \alpha < n \ , n \in \mathbb{N}^{*} \ - \alpha > 0, \ f \in C^{n}([a,b])$$
$${}^{c}\mathcal{D}_{\alpha}^{\alpha} \ f(t) \ = \ {}^{R}\mathcal{D}_{a}^{\alpha} \ f(t) \ - \ \sum_{k=0}^{n-1} \ \frac{(t-K)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \ f^{(k)}\alpha \ [5]$$

— Cas particulières :

(1) Si $0 < \alpha < 1$ alors :

$${}_{\alpha}^{c}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} \ f(t) \ = \ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} \ f(t).f(\alpha)$$

(2) Si $f^{(k)} \ (\alpha) \ = \ 0; \ n \ = \ [\alpha] \ + \ 1 \qquad \forall k = 0$ Alors :

$${}^{R}\mathcal{D}_{a}^{\alpha} \ f(t) \ = \ {}^{c}\mathcal{D}_{a}^{\alpha} \ f(t)$$

(3) Si ça f continue sur le terrain alors :

$${}_{a}^{c}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} \ ({}_{a}^{R}\mathcal{I}_{t}^{\alpha}) \ f(t) \ = \ f(t)$$

et à partir de l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est l'opposé de gauche à l'opérateur intégratif de Riemann-Liouville du même ordre , mais in n'a pas d'opposé de droite.

1.3.1.5 Tableau des dérivées fractionnaires

Dérivée Fractionnaire	**Définition**	**Remarque**
Riemann-Liouville	$(\mathcal{D}_a^\alpha + f)(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt$	$f \in \mathcal{L}_1([a,b])$
Cputo	$\mathcal{D}_a^\alpha + f(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)} dt$	$f \in Ac([a,b])$
La place	$F(S) = \mathcal{L}\{f(t) : S\} = \mathcal{L}[f]S$ $= \int_0^{+\infty} e^{-St} f(t)dt$	
Grunireld-belnikov	${}_\alpha^a\mathcal{D}_t^P (t-a)^a = \frac{1}{\Gamma(-P)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$	
Différences finies	$\int_a^b f(x)dx \approx T(f.h)$	

Chapitre 2

Approximation des dérivées des équations différentielles et des intégrales d'ordre fractionnaire

2.1 Approximation des solution d'ordre fractionnaire

Les dérivées fractionnaire ont attiré beaucoup d'attention ces dernières années et en raison de leur nature non locale par rapport aux dérivées entières traditionnelles, il est donc nécessaire d'étudier les méthodes numériques les plus importantes pour l'approximation de solutions fractionnaires à l'aide de la transformée du palace de la dérivée de Caputo et la dérivée Riemann-Liouville, relation trapézoïdale.
Cette section présente les méthodes utilisées pour approximer les solutions fractionnaires.

— **Définition d'approximation**

Nous pouvons définir de terme anomalie comme une compétence mathématique utilisée pour rendre le nombre que le nombre remplacé par un autre nombre qu'est inférieur à lui dans les rangs et en même temps proche de sa valeur mathématique. Mais ce n'est pas égal à lui.

— **Dérivation d'ordre fractionnaire**

La fractionnaire est la généralisation de la entière à des ordres non entières quelconques, cette généralisation peut être obtenue à partir de l'intégration fractionnaire de l'équation

donnant ainsi la définition de Riemann- Liouville et la définition de Caputo une autre généralisation basée sur la définition usuelle de la différentiation entière est proposée par Grunwold-Letnikov.

2.1.1 Méthode Numérique

2.1.1.1 Approximation des dérivées fractionnaires [8]

Dans cette partie nous dérivons un algorithme pour approximer les dérivées fractionnaire arbitraires d'ordre caputo d'une fonction donnée puisque la dérivée de Riemann-Liouville et la dérivée de caputo sont liées de sorte que presque toutes les méthodes numérique de dérivée de Riemann- Liouville peuvent être étendues au dérive Caputo et la dérivée-Letnikov

2.1.1.1.1 Approximation de dérivées de Caputo

— **Définition de Caputo** [8]

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(x)}{(t-x)^{\alpha}}\, dx \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$$

ou n est un entier , une autre définition de dérivée fractionnaire.

Introduit par Cputo est défini comme :

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}\, f^{(m)}(\tau) d\tau$$

La formule de trapèze modifiée pour ${}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}$. ${}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}\; f(t) \;\approx\; \sum_{k=0}^{n} d_{Kn}\; f^{m}(t_k)$

ou :

$$c(f.h.\alpha) \;=\; \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m+2-\alpha)} \begin{cases} ((n-1)^{m-\alpha+1} \;-\; (n-m+\alpha-1)\; n^{m-\alpha})\; f(0)^{(m)} + \\ f^{m}(\alpha) \;+ \sum_{k=1}^{n-1} ((n-k+1)^{m-\alpha+1}) \\ -2(n-k)^{m-\alpha+1} \;+\; (n-k-1)^{m-\alpha+1}\; fx_k \end{cases}$$

Est une approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{D}^{\alpha}\; f(t)(a) \;=\; c(f.h.\alpha) \;- Ec(f.h.\alpha).\alpha > 0$$

$$d,k_n \;=\; \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m+2-\alpha)}\begin{cases} *\ (n-1)^{m-\alpha+1}\ -(n-1+m)n^{m+\alpha} & k=0 \\ *\ (n-k+1)^{m-\alpha+1}\ +\ (n-1-k)^{m-\alpha+1} & \\ *\ -2(n-k)^{m-\alpha+1} & 1\leq k<n-1 \\ *\ 1, & k=n \end{cases}$$

2.1.1.1.2 Approximations de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

On se propose d'utiliser la formule générale pour calculer la dérivée fractionnaire.

Soient $\alpha \;=\; 0$ et $0<\alpha<1$, les dérivées fractionnaires d'ordre α au sens de Riemann-Liouville peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}_0^{\alpha} f(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(0)}{x^{\alpha}}\;+\;\int_0^x \frac{1}{t^{\alpha}}\,(\frac{df(x-t)}{dt})\,dt\right]$$

on consiste $Dx \;=\; \frac{x}{N}, N\in\mathbb{N}$ et $x_j = j\ Dx$ avec $j\;=0,1....N-1$, l'intégrale dans la formule précédente peut présentée sous la forme d'une somme :

$$\mathcal{D}_0^{\alpha} f(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(0)}{x^{\alpha}}\;+\sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} \frac{1}{t^{\alpha}}\,(\frac{df(x-t)}{dt})\,dt\right]$$

L'approximation d'intégrale dans s'écrit :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{t^{\alpha}}(\frac{df(x-t)}{dt})\,dt \;=\; \frac{f(x-x_j+1)-f(x-x_j)}{\Delta x}\;\frac{x_{j+1}^{1-a}\;-\;x_j^{1-a}}{1-a}$$

L'algorithme basé sur l'approximation s'écrit :

$$\mathcal{D}_0^{\alpha} \approx (\mathcal{D}_0^{\alpha} f(x))_{L^1}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\;\frac{f(0)}{x^{\alpha}}\;+\;\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\;\sum_{j=0}^{N-1}\;\frac{f(x-x_{j+1})-f(x-x_j)}{\Delta x}\;[x_{j+1}^{-1-a}\;-\;x_j^{1-a}]$$

Dans les approximations et l'erreur de calcule numérique dépend des valeurs de α et du nombre de points N utilisés pour discrétiser le domaine d'intégration, on remarque aussi que l'expression pose un problème lorsque $f(0)\;\neq 0$ pour contourner ce point.

2.1.1.1.3 Approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville

— **Définition**

Soient $\alpha \;=\; 0$ et $\alpha>0$, la définition de l'intégral fractionnaire au sens de Riemann-Liouville se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_0^\alpha f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \tfrac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \tfrac{f(x-t)}{t^{1-a}} dt\end{aligned}$$

— **Propriétés**

Soit $D_x = \frac{x}{N},\ N \in \mathbb{N} et x_j = j\Delta_x$ avec $j\ = 0, 1....N-1$, l'intégrale apparaissent dans la formule peut être transformée en une somme :

$$\mathcal{I}_0^\alpha f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \tfrac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}}\ dt$$

En utilisant l'approximation de l'intégrale de sous la forme suivante :

$$\int_{x_j}^{x^{j+1}} \tfrac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}} dt = \tfrac{f(x-x_{j+1})+f(x-x_j)}{2\alpha}\ [x_{j+1}^\alpha - x_j^\alpha]$$

On obtient l'algorithme :

$$\mathcal{I}_0^\alpha f(x) \approx (\mathcal{I}_0^\alpha\ f(x)) = \tfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \tfrac{f(x-x_{j+1})f(x-x_j)}{2}\ [x_{j+1}^\alpha - x_j^\alpha]$$

Pour augmenter la précision du calcul numérique de l'intégrale, oldham et spaniver proposent de choisir une approximation d'ordre supérieur à la place de cette approximation consiste à supposer que sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]f(x)$ varie linéairement.

2.1.1.1.4 Approximation de l'intégrale et de la dérivée de Grunuvald- Letnikov

— **Définition**

L'approximation de la dérivée fractionnaire de la Grunwold – Letnikov est la plus facile à mettre en œuvre numériquement car cette dérivée est définie par une série de fonctions, en considérant le fait que le fait que la série infinie $k \to \infty$ peut être traquées on obtient l'algorithme :

$$\mathcal{D}_0^\alpha f(x) \approx\ (\mathcal{D}_0^\alpha f(x)) = \tfrac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{A}_{j+1}^\alpha f(x - j\Delta x)$$

— **Propriétés :**

ou $\mathcal{A}_{j++}^\alpha$ s'appelle le coefficient de Grunuvald, il est défini par la formule suivante :

$$\mathcal{A}_{j+1}^\alpha = \tfrac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\ \Gamma(j+1)} = \tfrac{(j-\alpha-1)\ \Gamma(j-\alpha-1)}{\Gamma(-\alpha)_j\ \Gamma(j)} = \tfrac{(j-\alpha-1)}{j}\mathcal{A}_j^\alpha$$

Sachant que $\mathcal{A}_1^\alpha = 1$ et en tenant compte que $0 < \alpha < 1$ la valeur absolue $|\frac{(j-\alpha-1)}{j}|$ est inférieur à 1 par conséquent on obtient :

$$|\mathcal{A}_{j+1}^\alpha| \ < \ |\mathcal{A}_j^\alpha|$$

la condition précédente signifie que la valeur du coefficient de Grunwold $\mathcal{A}_{j+1}^\alpha$ décroit lorsque j augmente, autrement dit cette condition caractérise le principe de l'evonexence de la mémoire :
a un instant donné le passé lointain a moins d'influence que le passé récent, on retrouve ici le fait que les dérivées fractionnaires sont des opérateurs héréditaires au sens ou l'étend Volterra à savoir qui elles permettant de prendre en compte le passé en introduisant une attenaution de plus en plus fort pour des événements lointains.

I **Approximation de Letinkov , G**

$$^G\mathcal{D}_{t,0}^\alpha \ f(t) \approx \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \ \sum_{j=0}^{[\frac{(t-a)}{h}]} \ (-1)^j \ (j^\alpha) \ (t - fh)$$

ou

$$(j^\alpha) \ = \ \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \ = \ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j+1) \ - \ \Gamma(\alpha-j+1)}$$
$$\Gamma(\alpha) \ = \ \int_0^\infty \ t^{\alpha-1} \ e^{-t} \ dt$$

Si $z \in \mathbb{C}$

$$\Gamma(z) \ = \ \int_0^\infty \ t^{\alpha-1} e^{-t} \ dt \qquad\qquad R \ e \ \alpha > 0$$

II **Autre Approximations**

$\mathcal{D}_{0,t}^\alpha U \approx h^{-\alpha} \ \sum_{h=0}^{i} \ g_h(U_i - h) \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$

avec $g_0 \ = \ 1 \ , g_1 \ = \ -\alpha \ , \ g_2 \ = \ \alpha(\alpha-1), \ g_3 = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)2!$

$*g_h \ = \ (-1)^h.g_{h-1}(h-1)!$

$h = \frac{b-a}{n} \qquad\qquad h \to 0$

2.1.1.1.5 Approximation la dérivée fractionnaire utilisant la méthode des différences finies

- **Théorème**

  On supposons que l'intervalle [a,b] soit subdivise en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ de undième, $h = \frac{b-a}{n}$ utilisant les nœuds équidistants $x_k \ = \ a + k.h$ pour $k = 1, 2, ...n$;

la règle trapézoïdale composite pour n sous intercales peut être exprimée comme :

$$\mathcal{T}(f.h) \ = \ \frac{h}{2} \ \sum_{k=0}^{n} \ [f(x_k) \ + \ f(x_k)]$$

C'est une approximation de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{T}(f.h) \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$$

La dérivée fractionnaire , la définition de Caputo est choisie maintenant selon l'équation.

Si $0 < \alpha < 1$ alors la dérivée fractionnaire Caputo est définie par :

(1)

$$^{c}\mathcal{D}^{\alpha} \ y(t) \ = \ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \ \int_0^t \ \frac{y'(x)}{(t-x)^{\alpha}} \ dx$$
$$0 < \alpha < 1 \qquad t \geq 0$$

intégration de la rente au détail

$$^{c}\mathcal{D}^{\alpha} f(t) \ = \ \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \ y'(0)t^{1-\alpha} \ + \ \int_0^t (t-x)^{1-\alpha} \ .y''(x)dx$$

* nous mettons :

$$f(x) \ = \ \int_0^t -(t-x)^{1-\alpha} \ : \ y''(x)dx$$

* et à partir de là :

$$\int_0^t (t-x)^{1-\alpha} \ y''(x)dx \approx \ \frac{h}{2} \ \sum_{j=1}^{n} [(t-x_{j-1})^{1-\alpha} \ y''(x_{j-1})^{1-\alpha} \ y''(x_j)]$$
$$\approx \ \frac{h}{2} \ \sum_{j=1}^{n} (t-x_{j-1})^{1-\alpha} \ y''(x_{j-1}) \ + \ \frac{h}{2}(t-x_j)^{1-\alpha} \ y''(x_j)$$
$$\approx \frac{h}{2}[(t-x_0)^{1-\alpha} \ y''(0) \ + \ (t-x_n)^{1-\alpha} \ y''(x_n) \ + \ 2\sum_{j=1}^{n-1}(t-x_j)^{1-\alpha} \ y''(x_j)]$$
$$^{c}\mathcal{D}^{\alpha} y(t) \ = \ \frac{h[(t-x_0)^{1-\alpha} \ y''(0) \ + \ (t-x_n)^{1-\alpha} \ y''(x_n)+2\sum_{j=1}^{n-1} \ (t-x_j)^{1-\alpha} \ y''(x_j)]}{2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \ + \ \frac{(t-x_0)^{1-\alpha} \ y'(0)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

(2-)

$$\mathcal{D}^{\alpha} y(t) \ = \ \frac{1}{(2-\alpha)} \int_0^t \ \frac{y''}{(t-x)^{\alpha-1}} dx$$
$$1 < \alpha < 2 \qquad , t \geq 0 \text{ and } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

intégration de la rente au détail :

$$\mathcal{D}^{\alpha} y(t) \ = \ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \ (y''(0)t^{2-\alpha} \ + \ \int_0^t (t-x)^{2-\alpha} \ y'''(x)dx)$$

Nous mettons :

$$f(x) \;=\; \int_0^t (t-x)^{2-\alpha}\; y'''(x)dx$$

$$\int_0^t (t-x)^{2-\alpha}\; y'''(x)dx \;\approx\; \frac{h}{2}[t^{2-\alpha}y'''(0)+2\sum_{j=1}^{n-1}(t-x_j)^{2-\alpha}\; y'''(x_j) \;+\; (t-b)^{2-\alpha}\; y'''(b)]$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_j = a + jh \quad , \qquad j = 0, 1, ...n-1$$

(3-)

$$\mathcal{D}^\alpha y(t) \;\approx\; \frac{1}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\; y''(0)t^{2-\alpha} \;+$$

$$\frac{h}{2}\left[t^{2-\alpha}y''(0) \;+\; 2\sum_{j=1}^{n-1}(t-x_j)^{2-\alpha}y'''(x_j) \;+\; (t-b)^{2-\alpha}y'''(b)\right]$$

Alors :

$$y''(0) \approx \frac{y(0)-2y(h)+y(2h)}{h^2}$$

$$y'''(0) \approx \frac{-y(0) \;+\; 3y(h)-3y(2h) \;+\; y(3h)}{h^3}$$

$$y'''(x_j) \;\approx\; \frac{-y(x_j-2h) \;+\; 2y(x_j-h) \;-2y(x_j+h) \;+\; y(x_j+2h)}{2h^3}$$

2.2 Méthode d'Intégration Numérique

2.2.1 Méthode de Trapèzes :

Soit $f : [a, b] \to \mathcal{R}$

on pose $a = x_0$ et $b = xn$

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \int_{x_0}^{xn} f(x)dx$$

$$\approx\; \frac{h}{2}\;[f(x_0) \;+\; f(x_n) \;-2\sum_{i=0}^{n}\; f(x_i)]$$

$$\begin{cases} x_i \;=\; x_0 \;+\; ih \;= a + ih \\ x_0 \;=\; a, x_n \;=\; b \\ h \;=\; \frac{x_n \;-\; x_0}{n} \;=\; \frac{b-a}{n} \qquad\qquad h \to 0 \; and \; n \to +\infty \end{cases}$$

l'erreur est défini par :

$$\epsilon(x) \;=\; f''(\theta)$$

ou

$$\theta \;\in\;]a, b[$$

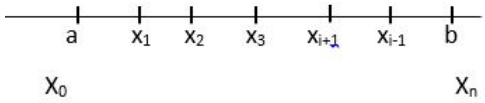
$$x_{i+1} \;-\; x_i \;=\; h;\; \forall\; i = 0, 1...n;\; i = 0, 1...n-1$$

l'erreur est défini par :

$$\epsilon(x) \approx f''(\theta)$$

ou

$$\theta \in]a, b[=]x_0, x_n[\qquad a < \theta < b$$



$$x_0 = a;\ x_n = b_j\ , x_{i+1} - x_i = h$$
$$\int_a^b f(x) \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_n) - 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

L'erreur est définie par :

$$\epsilon(x) = f''(\theta) \qquad\qquad a < \theta < b$$

2.2.2 Méthode de transformée de laplace

Nous citons dans ce qui suit la transformée de laplace des différentes définitions de la dérivée .[10]

2.2.2.1 La transformée de la place de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La transformée de laplace de la fonction t^{P-1} est[10] :

$$G(S) = L\{t^{P-1}\ ;\ S\} = \Gamma(p)S^{-P}$$

et

$$g(t) = t^{P-1}\,;$$

en utilisant la transformée de laplace de la convolution nous obtenions la transformée de laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

$$\mathcal{L}\{{}_0\mathcal{D}_t^{-P}\ f(t); S\} \ = \ L\{{}_0\mathcal{D}_t^{-P}\ f(t); S\} \ = \ S^{-P}\ F(S)$$

Calcul de la transformée de laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville qui pour cela nous l'écrivons sous la forme :

$$\begin{gathered} {}_0\mathcal{D}_t\ f(t) \ = \ g^{(n)}(t) \\ g(t) \ = \ {}_0\mathcal{D}_t^{-(n-P)}\ f(t) \ = \ \frac{1}{\Gamma(K-P)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1}\ f(\tau)d\tau\ , \qquad (n-1) \leq \ P < (n) \end{gathered}$$

L'utilisation de la formule de la transformée de laplace d'une dérivée d'ordre entier donne :

$$\mathcal{L}\{{}_0\mathcal{D}_t\ f(t); S\} \ = \ S^n\ G(S) \ - \ \sum_{k=0}^{n-1}\ S^k\ g^{(n-k-1)}(0)$$

La transformée de laplace de la fonction g(t) est déterminée par :

$$G(S) \ = \ S^{-(n-p)}\ F(S)$$

Nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $P > 0$

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\{{}_0\mathcal{D}_t\ f(t)\ ; S\} \ = S^P\ F(S) \ - \ \sum_{k=0}^{n-1} S^k [{}_0\mathcal{D}_t^{P-k-1}\ f(t)]_0 \\ t = 0 \text{ et } n-1 \leq P < n \end{gathered}$$

2.2.2.2 La transformée de laplace de la dérivée de Caputo [1]

Afin d'établir la formule de la transformée de laplace de la dérivée fractionnaire de Cputo écrivons la dérivée de Cputo sous la forme :

$${}_0^c\mathcal{D}_t^P\ f(t) \ = \ {}_0\mathcal{D}_t^{-(n-p)}\ g(t), \qquad g(t) \ = \ f^n(t), \qquad (n-1) < P \leq n$$

En utilisant la formule de la transformée de laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville , on aura :

$$\mathcal{L}\{{}_0^c\mathcal{D}_t^P\ f(t); S\} \ = \ S^{-(n-P)}G(S)$$

ou

$$\begin{aligned} G(S) \ &= \ S^n\ F(S) \ - \ \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\ S^{n-k-1}\ f^{(k)}(0) \\ &= \ S^n\ F(S) \ - \ \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\ S^{k}\ f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

En utilisant dans on arrive à la formule de la transformée de laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo .

$$\mathcal{L}\{{}_0^c\mathcal{D}_t^P\ f(t); S\} \ = \ S^P\ F(S) \ - \ \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\ S^{P-k-1}\ f^{(k)}(0), \qquad (n-1 < P \leq n)$$

2.2.2.3 La transformée de laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwold-Letnikov

Tout d'abord considérons les cas $0 \leq P < 1$ quand la dérivée fractionnaire de Grunwold-Letinkov avec la borne inférieur $\alpha = 0$ de la fonction $f(t)$ qui est bornée en $t = 0$ peur s'écrire sous la forme suivante :

$${}_0\mathcal{D}_t^P\ f(t) \ = \ \tfrac{f(0)t^{-P}}{\Gamma(1-P)} \ + \ \tfrac{1}{\Gamma(1-P)}\ \int_0^t (t-\tau)^{-P}\ f'(\tau)d\tau$$

En utilisant la transformée de laplace de la fonction polynôme de la transformée de laplace de la convolution et de transformée de laplace de la dérivée d'ordre entier en obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_0\mathcal{D}_t^P\ f(t); S\} \ &= \ \tfrac{f(0)}{S^{1-P}} \ + \ \tfrac{1}{S^{1-P}}(S\ F(S)) \ - \ f(0) \\ &= \ S^p F(S) \end{aligned}$$

$\mathbf{F}$(s)	$\mathbf{f}$(t) $= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s), t\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{s+\alpha}^{\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-}}{\Gamma(\alpha)} exp(at)$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+\alpha)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{\alpha}{s(s^\alpha+\alpha)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-\alpha)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-\alpha}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(exp(at) \ - \ exp(bt))$

TABLE 2.1 – Tableau de transformation de laplace des dérivées fractionnaire

2.3 Approximations des équations différentielles

2.3.1 Équations différentielles fractionnaires

Sont une généralisation des équations différentielles par l'application du calcul fractionnaire [7].

- Équations différentielles ordinaires :

$$P_n(x)\ y^n \ + \ P_{n-1}(x)\ y^{n-1} \ + \ ... \ + \ P_i(x)y' \ + \ P_0(x)\ y \ = \ \varphi(x)$$

- Équations différentielles fractionnaires :

$$\mathcal{D}^\alpha\ y(x) \ = \ \sum_{i=1}^{k}\ a_i\ \mathcal{D}^{\beta i}\ y(x) \ + \ \alpha_k \ + \ 1y(x) \ + \ g(x)$$

Avec les conditions initiales :

$y'(0) \ = \ d_i, \ i \ = \ 0 \ ... \ 1 \ ... \ n-1$

ou $\alpha_j \ = \ (j \ = \ 1 \ ..... \ k+1)$

Ce sont aussi de vois coefficients constants

$0 < \beta_1 < \ ou \ n-1 \ < \alpha \leq n$

ou $\mathcal{D}^\alpha$ désignent des dérivées fractionnaires d'ordre α

2.3.2 Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

$\alpha > 0$ si nous supposons $y \in C(0,1) \cap C(0,1)$ $\mathcal{D}_0^\alpha \ y(t) = 0 \qquad , 0 < t < 0.$ [3]

$$y(t) = C_1 \ t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}$$

ou $C_m \in K$ avec $m = 1, 2, ...n$

Supposons que :

$$\mathcal{I}_0^\alpha + \mathcal{D}_0^\alpha + y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}$$

$y \in C(0,1) \cap C(0,1)$ on a

$$\mathcal{I}_0^\alpha + \mathcal{D}_0^\alpha + u(t) = y(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{I}_0^{n-\alpha} + y(0)^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

$$= y(t) - \left[\frac{\mathcal{I}_0^{n-\alpha} + y(0)^{n-1}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{\mathcal{I}_0^{n-\alpha} + y(0)^{n-2}}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\alpha-2} + ... + \frac{\mathcal{I}_0^{n-\alpha} + y(0)}{\Gamma(\alpha-n+1)} t^{\alpha-n}\right]$$

$$C_m = -\frac{\mathcal{I}_0^{n-\alpha} + U^{n-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \in R$$

2.3.3 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo

$\alpha > 0$ si nous supposons que $y \in C(0,1) \cap C(0,1)$

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha \ y(t) = 0$$

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1} t^{n-1}$$

ou

$$C_m \in K = 1, 2 \ ... \ n$$

$$\mathcal{I}_0^\alpha + {}^c\mathcal{D}_0^\alpha + y(t) = y(t) + C_0 t + C_1 t + ... + C_{n-1} t^{n-1}$$

$y \ in \ C^n$ (]0.1[) on a :

$$\mathcal{I}_0^\alpha + {}^c\mathcal{D}_0^\alpha + y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k(0)}{k^1} + k$$

$= y(t) - [y(0) +'_y (0)t + \frac{y''(0)}{2} t^2 + ... + \frac{y(0)^{(n-1)}}{(n-1)} t^{n-1}]$

2.3.4 Équation différentielle transformation de laplace

Dans cette partie nous présentons la solution approchée des équations différentielles d'ordre rationnel β à l'aide de la transformée de laplace avec le concept :[6][10]

$$ {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}y(x) \; - ay(x) \; = \; h(x); \qquad n-1 < \alpha < n, \; n \; \in \; \mathbb{N} $$

$$ y^{k}(0) \; = \; b_k; \; k \; = \; 0, 1, ... \; n-1 $$

La solution exacte est donnée :

$$ y(x) \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} \; b_k \; x^k \; E_{\alpha-k+1} \; (ax^{\alpha}) \; + \; \int_0^x \; (x-t)^{\alpha-1} \; E_{\alpha.\alpha}(a \; (x-t). \; h(t)dt) $$

La preuve :

on prend la transformée de laplace de des deux cotés pour obtient :

$$ S^{\alpha} \; y(S) \; - \; \sum_{k=0}^{n-1} \; S^{\alpha-k-1} \; y^{(k)}(0) \; - \; y(S) \; = \; H(S) $$

$$ y(S) \; (S^{\alpha} \; - \; a) \; = \; H(S) \; + \; \sum_{k=0}^{n-1} \; S^{\alpha-k-1} $$

$$ \equiv \; y(S) \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} \; b_k \; \frac{S^{\alpha-k-1}}{S^{\alpha} \; - \; a} \; + \; \frac{H^S}{S^{\alpha} \; - \; a} $$

Exemple :

on a l'équation différentielle :

$$ {}_0^R\mathcal{D}_t^{\frac{2}{3}} \; y(t) \; = \; a \; y(t) $$

$$ \mathcal{L}\{{}_0^R\mathcal{D}_t^{\frac{2}{3}} \; y(t)\} \; = \; a \; L\{y(t)\} \qquad 0 < \alpha \; = \; \frac{2}{3} $$

$$ S^{\frac{2}{3}} \; y(S) \; - \; {}_0^R\mathcal{D}_t^{-(1- \; \frac{2}{3})} \qquad ; \; y(0) \; = \; a \; y(S) $$

${}_0^R\mathcal{D}_t^{-(1- \; \frac{2}{3})} \; y(0) \; = \; {}_0^R\mathcal{D}_t^{-\frac{1}{3}} \; y(0)$ est la valeur de :

$$ {}_0^R\mathcal{D}_t^{-\frac{2}{3}} \; y(t) \text{ en } t = 0 $$

$$S^{\frac{2}{3}}\ y(S)\ -\ C_1\ =\ ay(S)$$

$$y(S)\ =\ \frac{C_1}{S^{\frac{2}{3}}\ -\ a}$$

Pour trouver l'inverse de la transformée de la place de $y(S)$

$$L^{-1}\{\frac{C_1}{S^{\frac{2}{3}}\ -\ a}\}\ =\ C_1 t^{\frac{-1}{3}}\ ;\ E\ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\ (a\ t^{\frac{2}{3}})$$

2.4 Tableaux des méthodes d'ordre fractionnaire

Dérivée Fractionnaire	**Définition**	**Remarque**
Riemann-Liouville	$\mathcal{D}_0^\alpha.y(t) = 0\ y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}$	$C_m \in R$
Cputo	$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$	$C_m \in R$
Transformation La place	$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k E_{\alpha-k-1}(ax^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha\alpha}(a(x-t)^\alpha h(t)dt)$	
Différences finies	$T(fh) = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n} [f(x_{k1}) + f(x_k)]$	$k = 0$
Grunwold Letinkov	${}^G\mathcal{D}_{t^a}^\alpha f(t) \approx \lim h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^j (j^\alpha)(t - fh)$	$Re\alpha > 0; z \in \mathbb{C}$
Trapèzes	$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) - 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$	$f : [a,b] \to R$

2.5 Valeur d'approximation des intégrales de partie finie [2]

$I_k = \int_{-1}^{1} \frac{x^k dx}{(1-x^t)^{\frac{3}{2}}}$	I_0	I_2	I_4
h = 0.01	0.0075	-3.1366	-4.6807
h=0.001	0.008	-3.1411	-4.7092
h=0.001	0.0001	-3.1415	-4.7120
h= 0.00005	0.000	-3.1416	-4.7123
Exact value	0.0000	-3.1416	-4.7124

Chapitre 3

Application sur les équations d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons à présenter les résultats les plus importants obtient grâce à notre étude de quelques méthodes et théorèmes qui visent à approximer des solutions d'ordre fractionnaire, à travers quelques exemples [2].

- **Exemple 01**

Soit l'EDO fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} f(t) + a\, f(t) = 0 \qquad t > 0.....(*) $$

f inconnue.

$$ \begin{cases} {}_0\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} f(t) + a\, f(t) = 0 & t > 0 \\ {}_0\mathcal{D}^{\frac{-1}{2}} f(t) = C & t > 0 \end{cases} $$

De l'équation * on utilise la transformation de laplace.

On applique la transformation de la place de l 'EDO (*)

$$ {}_0\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} f(t) + a\, f(t) = 0 \qquad t > 0 $$

On obtient :

$$ F(S) = L(f) = \frac{C}{S^{\frac{1}{2}}+a} \qquad ; C = \left[{}_0\mathcal{D}^{\frac{-1}{2}} f(t)\right]_{t\,=\,0} $$

On applique la transformation de la place sur (*)

Ce qui donne :

$$f(t) \;=\; Ct^{\frac{-1}{2}}\; E\;\tfrac{1}{2} -\; \tfrac{1}{2}\;(-a\sqrt{t})$$

Pour $a \;=\; 1$

La solution de l'EDO (α)

$$f(t) \;=\; \tfrac{C}{\sqrt{\pi t}}\; - e^{t}\; erfe\;(\sqrt{t})$$

- **Exemple 02**

Considérons le problème de valeur initiale suivant pour une équation différentielle fractionnaire non homogène sous des conditions initiales non nulles.

$$_0\mathcal{D}_t^{\alpha}\; y(t) \;-\; \lambda\; y(t) \;=\; h(t) \qquad\qquad (t > 0),$$

$$\left[_0\mathcal{D}_t^{\alpha\,-\,k}\; y(t)\right]_{t=0} \;=\; b_k\;, \qquad\qquad (k = 1, 2, ...n)$$

Ou $n - 1 < \alpha < n$

Le problème a été résolu par la méthode d'itération à l'aide de la transformée de laplace et de la formule on obtient directement et facilement la même solution.

En effet compte tenu des conditions initiales la transformée de laplace de l'équation donne :

$$S^{\alpha}\; y(S) \;-\; \lambda\; y(S) \;=\; H(S) \;+\; \textstyle\sum_{k=1}^{n}\; b_k\; S^{k-1}$$

à partir duquel :

$$y(S) \;=\; \tfrac{H(S)}{S^{\alpha} -\; \lambda} \;+\; \textstyle\sum_{k=1}^{n}\; b_k\; \tfrac{S^{k-1}}{S^{\alpha} -\; \lambda}$$

Et la transformée de laplace inverse en utilisant donne la solution :

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \textstyle\sum_{k=1}^{n}\; b_k\; t^{\alpha\,-\,k}\; E_{\alpha.\alpha} \;-\; k+1\;(Nt^{\alpha}) \\ &+\; \textstyle\int_0^t\; (t-\tau)^{\alpha-1}\; E_{\alpha.\alpha}\;(\lambda\;(t-\tau)^{\alpha})\; h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

- **Exemple 03**

Nous avons :

$$_0\mathcal{D}_t^{\alpha}\;(_0\mathcal{D}_t^{\beta}\; y(t)) \;+\; a\; y(t) \;=\; 0$$

$$\left[_0\mathcal{D}_t^{\alpha-t}\;(_0\mathcal{D}_t^{\beta}\; y(t))\right]_{t=0} = b_1\;; \qquad \left[_0\mathcal{D}_t^{\beta-1} y(t)\right]_{t=0} \;=\; b2$$

Ou $0 < \alpha < 1 \qquad 0 < \beta < 1, \qquad \alpha + \beta = \frac{1}{2}$

La formule de la transformée de laplace de la dérivée fractionnaire séquentielle nous permet d'utiliser les conditions initiales.

Dans lequel :

$\alpha_1 = \beta , \qquad \alpha_2 = \alpha , \qquad m = 2 , \qquad \sigma_1 = \beta , \qquad \sigma_2 = \alpha + \beta$

d'équitation donne :

$$y(S) = b_2 \frac{S^\alpha}{S^{\alpha + \beta} + a} + b_1 \frac{1}{S^{\alpha + \beta} + a}$$

Et après l'inversion de laplace à l'aide de on trouve la solution au problème.

$$y(t) = b_2 \, t^{\beta-1} \, E_{\alpha+\beta,\beta} \left(-at^{\alpha+\beta}\right) + b_1 t^{\alpha+\beta-1} \, E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta} \left(-at^{\alpha+\beta}\right)$$

pour $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (et en supposant bien sur , $b_2 = 0$)

- **Exemple 04**

Considérons le problème de la valeur initiale de Mainarde pour l'équation d'onde de diffusion fractionnaire :

$$ {}_0\mathcal{D}_t^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (|x| < \infty, t > 0)$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (|x| < \infty)$$

$$\lim_{x \pm \infty} u(x,t) = 0, \qquad (t > 0)$$

où $0 < \alpha < 1$.

dérivée fractionnaire quantique :

$$ {}_0\mathcal{D}_t^\alpha = {}_0\mathcal{D}_t^{\alpha_2} \, {}_0\mathcal{D}_t^{\alpha_1}.$$

pour $\alpha_2 = \alpha - 1, \alpha_1 = 1$ et $k = 2$.

(Cela donne la formule de caputo), i.e.,

$$\mathcal{L} \{ {}_0\mathcal{D}_t^\alpha y(t) : s\} = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0)$$

appliqué au problème donne :

$$s^\alpha \bar{u}(x,s) - s^{\alpha-1} f(x) = \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2}, \qquad (|x| < \infty)$$

$$\lim_{x \pm \infty} \bar{u}(x,s) = 0, \qquad (t > 0)$$

en appliquant maintenant la transformée de Fourier ou exponentielle à l'èquation et en utilisant les conditions aux limites on obtient :

$$U(\beta, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2\beta^2} F(\beta).$$

où $U(\beta, p)$ et $F(\beta)$ sont les transformées de Fourier de $\bar{u}(x)$ et $f(x)$.
La transformée de Laplace inversr de la fraction $\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+\lambda^2\beta^2)}$ est la fonction de Mittag-Leffler en deux paramétres donc les inversions de Fourier et la transformée de Laplace donnent la solution sous la forme suivente :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t) f(\xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda^2\beta^2 t^{\alpha}) \cos(\beta x) d\beta \\ &= \frac{1}{2\lambda} t^{-\rho} W(-z, -\rho, 1-\rho). \end{aligned}$$

où $W(z, \lambda, \mu)$ est la fonction de wright cette solution est identique à la solution de l'équation de diffusion fractionnaire (intégro-différentielle) de Schneider-Wyss.

3.1 Le but de l'étude des solutions d'ordre fractionnaire

Le but de notre étude pour cette branche est l'arrangement fractal, qui a provoqué un paradoxe clair dans tous les domaines qui souffraient du manque d'explication directe des solutions[11][12][13].
Le calcul fractionnaire est utilisé pour comparer les cardiogrammes d'une maladie si ces diagrammes se présentent sous la forme d'un énoncé de fonctions continues mais ne sont pas différentiables en certains points ou en tous le calcul classique ne peut pas être caractérisé car il n'est pas possible de trouver des dérivées au points d'interruption mais l'utilisation de calcul fractionnaire peut trouver les dérivées fractionnaires de ces points.
L'intégration fractionnaire en série peut être utilisée dans les circuits symétriques

$${}_a\mathcal{I}_t^{\alpha}\ {}_a\mathcal{I}_t^{\beta}\ {}_a\mathcal{I}_t^{\gamma}\ f(S) \ = \ {}_a\mathcal{I}_t^{\alpha+\beta+\gamma} f(S)$$

Pour calculer la solution de l'équation différentielle fractionnaire.
L'ordre fractionnaire est utilisé pour le contrôle comme dans le cas d'un système de positionnement aérien la précision, la bande passante et la stabilité du mouvement sont les indicateurs de performance les plus importants pour tous système de mouvement.

De plus, il a été montré que une telle masse en mouvement se comporte principalement sous une forme fractionnaire en utilisant des fractions.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour nous aider à accomplir ce modeste travail.

Conclusion générale

Il est difficile d'exister dans le monde sans les mathématiques. c'est comme marcher dans une galerie d'art les yeux fermés, les mathématiques sont à la base de la plupart des opérations quotidiennes que les humains pratiquent, étudions dans ce domaine les dérivées d'ordre fractionnaire qui ont suscité beaucoup d'attention ces dernières années en raison de leur nature non locale par rapport aux dérivées d'ordre entier, il est donc nécessaire d'étudier les méthodes numériques les plus importantes pour l'approximation de solutions fraction, cette recherche présente une étude des théories les plus importante qui ont été avancées dans ce contexte.

Bibliographie

[1] Oldham, K., Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Elsevier.

[2] Miller, K. S., Ross, B. (1993). An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John-Wily and Sons. Inc. New York.

[3] Tellab, B., Haouam, K. (2018). Résolution des équations différentielles fractionnaires (Doctoral dissertation, Université des Fréres Mentouri Constantine 1).

[4] Krasnobrizha, A., Rozycki, P., Cosson, P., Gornet, L. (2016). Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires. Matériaux et Techniques, 104(4), 407.

[5] Podlubny, I., Dorcak, L., Kostial, I. (1997, December). On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers. In Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control (Vol. 5, pp. 4985-4990). IEEE.

[6] ur Rehman, M., Khan, R. A. (2012). A numerical method for solving boundary value problems for fractional differential equations. Applied Mathematical Modelling, 36(3), 894-907.

[7] Odibat, Z. (2006). Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives. Applied Mathematics and Computation, 178(2), 527-533.

[8] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). elsevier.

[9] Artin, E. H. Rinehart, and Winston (1964) Gamma Function. New York.

[10] Li, C., Zeng, F. (2015). Numerical methods for fractional calculus (Vol. 24). CRC Press.

[11] S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das. "Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patients", Submitted on 7 Nov 2017.

[12] H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, and Y. Chen, "A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering." Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 64, 213–231, 2018

[13] S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das. "Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patients", Submitted on 7 Nov 2017.

الملخص

في هذه المذكرة حاولنا إيجاد حلول تحليلية و عددية لبعض المعادلات التفاضلية و التكاملات و المشتقات ذات الصيغة الكسرية.

الكلمات المفتاحية

الحساب الكسري - الإشتقاق الكسري - التكامل الكسري - الدوال الشاذة - المعادلات التفاضلية الكسرية.

Summary

In this note, we have tried to find analytical and numerical solutions to some diffrential equations, integrals and derivatives of fractional from.

Keyword

Fractional arithmetic - Fractional differentiation - Fractional integral - Abnormal Function - Fractional differential equations.

Résumé

Dans cette note, nous avons essayé de trouver des solutions analytiques à quelques équations différentielles, intégrales et dérivées de forme fractionnaire.

Mot clé

Arithmétique fractionnaire - Dérivation fractionnaire - Intégrale fractionnaire - Fonction anormales - équations différentielles fractionnaire.