



UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la  
Matière

N° d'ordre :

N° de série:

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option: Modélisation et Analyse numérique

Par: BOUDJERADA SOUMIA

Thème

# Approximation du problème de Stokes dans $\mathbb{R}_+^2$ par éléments finis inversés

Soutenu publiquement le : 19/06/2022

Devant le jury composé de:

Dr. Said Mohammed Said	M.C.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Dr. Rezzag bara Rayhana	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Dr. Kaliche Keltoum	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

---

# Dédicace

---

Je dédie ce travail à l'âme de mon grand-père, que Dieu lui fasse miséricorde

Mes parents : Ma mère et mon père C'est à vous que je dédie cet effort et cette recherche,  
parce que vous êtes Tu as toujours été mon inspiration.

A mes frères et soeurs :Chaima\*Maria\*Seyfeddine\*Souhaib.

A mon oncle et à la femme de mon oncle et ses enfants et mes tantes et mes grands-mères, à  
tous les membres ma famille.

mes amies :Rayane\*Yasmina\*Anfal\*Chahra\*Kawthar\*Nour el houda

A tous ceux qui a donné un mot pour la force de continuer.

Tous les proches que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

---

# Remerciement

---

Avant tout je remercie ALLAH qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude. Nous nos sincères remerciements et notre gratitude au encadreur **Mlle. Keltoum Kaliche** pour tous les précieux conseils et informations qu'il nous a fournis et qui ont contribué à l'intégration du sujet de notre étude dans ses différents aspects. Nous adressons également nos remerciements aux éminents membres du comité de discussion de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail . Nous tenons également à remercier notre Les professeurs du département de mathématiques du collège pour toutes les connaissances qu'ils nous ont transmises, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

---

# Table des matières

---

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciement</b>	<b>ii</b>
<b>Notations</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids</b>	<b>3</b>
1.1 Les espaces de Sobolev à poids . . . . .	4
1.1.1 Notations et définitions . . . . .	4
1.1.2 L'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	5
1.1.3 Les espaces de Sobolev à poids . . . . .	6
1.1.4 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	7
1.1.5 Les espaces de traces . . . . .	8
1.2 Inégalités de Hardy . . . . .	10
<b>2 Discrétisation du problème par les éléments finis inversés</b>	<b>12</b>
2.1 La formulation variationnelle du problème . . . . .	13
2.2 L'existence et l'unicité . . . . .	15
2.3 Discrétisation du problème . . . . .	17
2.3.1 L'espace discret . . . . .	17
2.3.2 Estimation d'erreur . . . . .	24

---

<b>3 Résultats numériques</b>	<b>27</b>
3.1 Fonctions de base. La matrice de rigidité . . . . .	27
<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

---

# Table des figures

---

2.1	Une illustration de vecteur altitude, de simplexe fini et de l'hyperplan support associés à un simplexe infini 2D. . . . .	18
2.2	un simplexe fini et infini de référence en 2D. . . . .	19
2.3	Partition de demi-espace de $\mathbb{R}_+^2$ en la réunion d'un domaine borné et de deux triangles infinis. . . . .	19
2.4	une illustration de La transformation $\Omega_\infty$ à $\Omega_*$ . . . . .	21
2.5	Une illustration de maillage gradué pour $\mu = 0.3$ . . . . .	23

---

# Notations

---

✓  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  : ouvert non borné.

✓  $\partial\Omega$  : frontière de  $\Omega$ .

✓  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$  : produit de dualité  $E', E$ .

✓  $\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker.

✓  $\nabla u$  : gradient de  $u$  définit par  $\nabla u \stackrel{def}{=} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ .

✓  $\Delta u$  : Laplacien de  $u$  définit par  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

---

# Introduction

---

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Elles sont nommées d'après deux physiciens du XIXe siècle, Claude Navier et George Stokes. Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes selon si le nombre de Reynolds  $Re$  est petit. Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \mathbb{R}_+^2 \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u = 0 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

qui modélise l'écoulement d'un fluide incompressible dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$ . Ce problème consiste à trouver le champ de vitesses du fluide  $u$  et la pression  $p$ , le donnée  $f$  représente les forces extérieures appliquées au fluide.

Ce problème a été étudié par F.Alliot et C.Amourouche [1] dans tout l'espace  $\mathbb{R}^n$  et par N.kerdid [8] en dimension  $n$  dans des domaines extérieurs et dans le demi-espace avec des conditions de glissement.

Notre objectif ici est d'approcher la solution du problème de Stokes (1) dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  par la méthode des éléments finis inversés ([3],[4]). Elle s'est avérée particulièrement efficace pour résoudre des problèmes elliptiques posés en domaines non bornés sans imposer aucune



---

frontière artificielle. Cette méthode repose sur l'utilisation des espaces de Sobolev à poids. Ces espaces sont des extensions des espaces de Sobolev classiques, mais qui sont munis de poids permettant de décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini. L'idée principale de la méthode des éléments finis inversée est de diviser le domaine géométrique en deux parties choisies librement : une partie bornée où les éléments finis usuels sont utilisés et une partie non bornée où les éléments finis inversés sont utilisés. La partie non bornée est transférée à une partie bornée par une transformation inverse.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notations, définitions et quelques propriétés fondamentales des espaces de Sobolev à poids.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème de Stokes dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$ , où nous cherchons d'abord une formulation variationnelle associée à ce problème, ensuite nous montrons l'existence et l'unicité de la solution. Après, nous présentons la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés et à la fin nous donnons une estimation de l'erreur.

Le troisième chapitre sera consacré au calcul de la matrice de rigidité.

---

# Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids

---

Dans ce chapitre, nous donnons des notations et des définitions et quelques propriétés fondamentales des espaces de Sobolev à poids qui joue un rôle important dans l'étude des problèmes elliptiques posé en domaines non bornée.

## 1.1 Les espaces de Sobolev à poids

### 1.1.1 Notations et définitions

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert et connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  non nécessairement borné ayant une frontière  $\partial\Omega$  régulière. On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonction indéfiniment différentiable à support compact dans  $\Omega$  et  $\mathcal{D}'(\Omega)$  son dual (l'espace des distributions).

Pour tout point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on note  $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$  la distance entre  $x$  et l'origine, on note aussi  $D_i$  la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on pose

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

**Théorème 1.1** (*Inégalité de Cauchy-Schwarz* [5])

Soit  $E$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire. Pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $E$ , on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Soit  $p \in ]1, +\infty[$ , on note  $q$  le conjugué de  $p$  défini par la relation suivante :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

**Définition 1.2** (*Inégalité de hölder* [5])

Soient  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ . Alors,

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \end{cases}$$

**Remarque 1.3** Lorsque  $p = q = 2$ , on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$L^p(\Omega)$  désignera l'espace des fonctions mesurables dont ses fonctions vérifient

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

et muni par la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On note  $P_l$  l'espace des polynôme sur  $\Omega$  de degré inférieur ou égale à  $l$ . On convient que  $P_l = \{0\}$  si  $l < 0$ .

D'autre part, pour tout sous-espace fermé  $Y$  d'un espace de Banach  $B$ , on note  $B/Y$  l'espace quotient de  $B$  par  $Y$  et le polaire de  $Y$  dans le dual  $B'$  de  $B$  :

$$B' \perp Y = \{f \in B', \forall v \in Y, \langle f, v \rangle = 0\}$$

### 1.1.2 L'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

**Définition 1.4** [9] *Espace  $W^{m,p}$  Soient  $\Omega \subset R^n$  un ouvert quelconque,  $p$  un réel tel que  $1 \leq p \leq \infty$  et  $m$  un entier naturel positif. On définit l'espace de Sobolev  $W^{m,p}$  par :*

$$W^{m,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}$$

où  $\alpha$  est un multi-indice tel que  $0 \leq |\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha$  est une dérivée partielle de  $u$  au sens faible (i.e. au sens des distributions)

La norme sur  $W^{m,p}$  est :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p \leq \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = \infty \end{cases}$$

$W^{m,p}(\Omega)$  muni de cette norme est un espace de Banach. Dans le cas où  $p < \infty$ , c'est aussi un espace séparable. La norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \right)^{1/p}, & 1 \leq p \leq \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = \infty \end{cases}$$

est une norme équivalente à la norme précédente.

Afin de définir les espaces de Sobolev avec poids qui nous intéressent, on introduit les deux fonctions poids suivantes :

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \lg \varrho(x) = \ln(2 + |x|^2)$$

On définit aussi l'espace de Lebesgue avec poids par :

$$L^q_\alpha(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^\alpha u \in L^q(\Omega)\}$$

### 1.1.3 Les espaces de Sobolev à poids

**Définition 1.5** [1] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , et  $p \in ]1, +\infty[$ . Nous définissons l'entier  $k$  comme suit :

$$k = k(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}, \\ m - n/p - \alpha & \text{si } n/p + \alpha \in \{1, \dots, m\}, \end{cases}$$

Étant donné un entier  $m > 0$ , on désignera par  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  l'espace

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{N}^n \ 0 \leq |\lambda| \leq k, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg \rho)^{-1} \partial^\lambda u \in L^p(\Omega), k+1 \leq |\lambda| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\Omega) \right\}$$

$W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach réflexif muni par la norme suivante :

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\lambda|=0}^k \left\| \frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}}{\lg \rho} \partial^{|\lambda|} u \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{k+1}^m \left\| \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^{|\lambda|} u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Et en plus on a la semi norme :

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\lambda|=m} \left\| \rho^\alpha \partial^\lambda u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$  l'espace Sobolev avec poids devient simplement comme suivant :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{N}^n \ 0 \leq |\lambda| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\Omega) \right\}$$

Sinon, on utilise le poids logarithmique.

Nous donnons ici quelques exemples de l'espace  $W_\alpha^{m,p}$ , on pose :

$$S = \begin{cases} \rho & \text{si } n \neq p \\ \rho \lg \varrho & \text{si } n = p \end{cases}$$

**Exemple 1** si  $m=1$  et  $\alpha = 0$  donc l'espace  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  est donné par :

$$W_0^{1,n}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}(lg\rho)^{-1}u \in L^n(\Omega), \nabla u \in L^n(\Omega) \right\} \text{ si } n = p$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega) \right\} \text{ si } n \neq p$$

cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left( \|S^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et aussi de la semi norme

$$|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

**Exemple 2** si  $m=2$  et  $\alpha = 1$  cet l'espace devient

$$W_1^{2,n}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}(lg\rho)^{-1}u \in L^n(\Omega), \nabla u \in L^n(\Omega), \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\} \text{ si } n = p$$

$$W_1^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega), \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega), i, j = 1, \dots, n \right\} \text{ si } n \neq p$$

muni par la norme

$$\|u\|_{W_1^{2,p}(\Omega)} = \left( \|S^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left\| \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et aussi de la semi norme

$$|u|_{W_1^{2,p}(\Omega)} = \left( \left\| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si le domaine  $\Omega$  est un ouvert non borné, Les poids contrôlent le comportement à l'infini des fonctions appartenant à  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ , sinon nous utilisons les espaces de Sobolev classique  $W^{m,p}(\Omega)$ . On remarque que toutes les propriétés des fonction appartenant à  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  coïncident localement avec les propriétés des fonctions appartenant à  $W^{m,p}(\Omega)$ .

#### 1.1.4 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Nous mentionnons maintenant quelques propriétés fondamentales de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  (voir [7] pour plus détails) :

1.  $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

2. Les inclusion suivantes sont valables avec injections continues :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega), \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$$

3. pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \varphi u \in W^{m,p}(\Omega)$$

est linéaire continue.

4. On a pour tout entier  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  avec  $k < m - \alpha - n/p$ ,  $P_k \subset W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

5. Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto (\lg \varrho)^\beta u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

6. Pour  $\lambda \in N^n$  avec  $|\lambda| \leq m$ , l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto D^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est linéaire et continue.

7. L'espace  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ .

On note  $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  et  $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$  son espace dual (espace de distributions). Lorsque  $m=1$  et  $\alpha = 0$  (resp  $m=2$  et  $\alpha = 1$ ) nous avons l'égalité :

$$\mathring{W}_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \quad \text{et} \quad \mathring{W}_1^{2,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_1^{2,p}(\Omega)}}$$

Les traces des fonctions de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  sur  $\partial\Omega$  se comportent comme celles de  $W^{m,p}(\Omega)$ . Dans la suite, pour définir les traces des fonctions de  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^2)$ , on va introduire les espaces de traces suivantes.

### 1.1.5 Les espaces de traces

**Définition 1.6** [10] pour tout nombre réel  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $p > 1$ ,  $\sigma \in ]0, 1[$ , on pose :

$$W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); w^{\alpha-\sigma} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\rho^\alpha(x)u(x) - \rho^\alpha(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx dy < \infty \right\},$$

où

$$w = \begin{cases} \rho & \text{si } n/p + \alpha \neq \sigma \\ \rho(\lg \rho)^{1/(\sigma-\alpha)} & \text{si } n/p + \alpha = \sigma \end{cases}$$

Pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$ , on introduit l'espace  $W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 1.7** [10] *Pour  $p > 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$ , On pose :*

$$W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); 0 \leq |\lambda| \leq k, \rho^{\alpha-s+|\lambda|}(\lg \rho)^{-1} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n); \right. \\ \left. k+1 \leq |\lambda| \leq [s]-1, \rho^{\alpha-s+|\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n); |\lambda| = [s], \partial^\lambda u \in W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) \right\},$$

où  $k = s - n/p - \alpha$  si  $n/p + \alpha \in \{\sigma, \dots, \sigma + [s]\}$ , avec  $\sigma = s - [s]$  et  $k = -1$  ailleurs

Cet espace est un espace de Banach réflexif muni de la norme :

$$\|u\|_{W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{0 \leq |\lambda| \leq k} \|\rho^{\alpha-s+|\lambda|}(\lg \rho)^{-1} \partial^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right. \\ \left. + \sum_{k+1 \leq |\lambda| \leq [s]-1} \|\rho^{\alpha-s+|\lambda|} \partial^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p} + \sum_{|\lambda|=[s]} \|\partial^\lambda u\|_{W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Les traces sur  $\mathbb{R}_+^d$  des fonctions de  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^d)$  sont données par le théorème suivant

**Théorème 1.8** [7] *Soit  $m \geq 1$  un entier et  $\alpha$  un réel. Il existe une application linéaire et continue  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$  de  $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^d)$  dans  $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$  tels que :*

- Pour tout  $u \in \bar{\mathcal{D}}(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $\gamma u = (u(x', 0), (\partial u / \partial x_n)(x', 0), \dots, (\partial^{m-1} u, \partial^{m-1} x_n)(x', 0))$  avec  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ .
- $\gamma$  est une application surjective.
- $\gamma^{-1}(0) = \dot{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^d)$ .

Comme conséquence, on a la formule de Green [4] suivante :

Pour toute fonction  $u \in W_{\alpha-1}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$  et  $v \in W_{-\alpha}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n-1 \quad (1.1)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} v = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_n} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0) v(x', 0) dx' \quad (1.2)$$



on introduit aussi l'espace suivant :

$$H_*(div, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \langle x \rangle div v \in L^2(\Omega)\}$$

cet espace est équipé de la norme

$$\|v\|_{[H_*(div, \Omega)]} = \left[ \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\langle x \rangle div v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

D'après la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_*(div, \Omega)$  (voir [8]), on a

pour toute  $v \in H_*(div, \Omega)$  et  $\varphi \in W_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} div v \cdot \varphi dx = - \int_{\Omega} v \nabla \varphi dx + \langle v \cdot n, \phi \rangle_{W_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), W_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad (1.3)$$

## 1.2 Inégalités de Hardy

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement importante dans les espaces de Sobolev avec poids.

**lemme 1. 2. 1** (*Inégalité de Hardy* [2])

Soit  $f \in \mathcal{D}(]A, \infty[)$ , on a

$$- \text{ si } \beta \neq -1, \gamma \in \mathbb{R} \text{ et } A \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$$

$$\int_A^{\infty} |f(t)|^2 t^{\beta} (\log t)^{\gamma} dt \leq \left(\frac{4}{|\beta+1|}\right)^2 \int_A^{\infty} \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t^{\beta+2} (\log t)^{\gamma} dt$$

$$- \gamma \neq -1 \text{ et } A \geq 1$$

$$\int_A^{\infty} |f(t)|^2 \frac{1}{t} (\log t)^{\gamma} dt \leq \left(\frac{2}{|\gamma+1|}\right)^2 \int_A^{\infty} \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t (\log t)^{\gamma+2} dt$$

$$- \text{ si } \beta \neq -1$$

$$\int_A^{\infty} |f(t)|^2 t^{\beta} dt \leq \left(\frac{2}{|\beta+1|}\right)^2 \int_A^{\infty} \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t^{\beta+2} dt$$

Une conséquence importante de l'inégalité de Hardy, le théorème suivant :

**Théorème 1.9** [7] soit  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  ou  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$  avec un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $m \geq 1$  un entier et  $\alpha, p \in ]1, +\infty[$  deux réels tels que  $\alpha + \frac{n}{p} \notin \{1, \dots, m\}$ . On pose  $q' = \min(m-1, [m-\alpha - (n/p)])$ .

Alors,

1. La semi-norme  $|\cdot|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$  définit une norme sur l'espace  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)/\mathbb{P}_{q'}$  équivalente à la norme quotient.
2. La semi-norme  $|\cdot|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$  est une norme sur l'espace  $\dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$  :  
il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$\forall u \in \dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C |u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$$

À la fin de ce chapitre nous rappelons du théorème de Brezzi et condition BBL

**Théorème 1.10** [9] (Théorème de Brezzi (1974)). *Considérons le problème variationnel mixte suivant : Trouver  $(u, \lambda)$  dans  $H \times M$  avec  $H$  et  $M$  deux espaces de Hilbert tels que :*

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle & \forall v \in H \\ b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle & \forall \mu \in M \end{cases}$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $a(\cdot, \cdot)$  est continue et bilinéaire.
- $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $V$  ou  $V$ -elliptique (uniquement sur  $V$  et pas sur  $H$  tout entier)

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que : } a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V = \{v \in H; b(v, \mu) = 0, \forall \mu \in M\}$$

- $b(\cdot, \cdot)$  est continue ;
- $b(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition inf-sup (condition BBL) suivante :

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{v \in H} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_H} \geq \beta \|\mu\|_M$$

Alors,  $\forall (f, g) \in H' \times M'$ , le problème précédent possède une unique solution  $(u, \lambda) \in H \times M$ .

**Preuve.** (voir [9]) ■

---

# Discrétisation du problème par les éléments finis inversés

---

Dans ce chapitre, On cherche de résoudre le problème de Stokes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec  $\Omega$  est un le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  et  $f$  une fonction donnée. D'abord on cherche la formulation variationnelle associée à ce problème où on choisit comme un cadre fonctionnel l'espace Sobolev avec poids  $W_{log}^1(\Omega)$ . Ensuite, on montre l'existence et l'unicité du problème par le théorème de Brezzi. Après, on donne la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés et à la fin on donne une estimation d'erreur.

## 2.1 La formulation variationnelle du problème

On considère le problème de Stokes suivant :

$$-\Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.4)$$

Avec  $\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$  on choisit comme cadre fonctionnel l'espace de Sobolev avec poids  $W_{\log}^1(\Omega)$  qui composé de toutes les fonctions satisfaisant :

$$\int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx < +\infty \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx < +\infty$$

muni par la norme suivante :

$$\|v\|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

et aussi on a :

$$\mathring{W}_{\log}^1(\Omega) = \{v \in W_{\log}^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0\}$$

On a aussi l'inégalité de Hardy suivant [3] :

**lemme 2. 1. 2** *Il existe une constant  $\eta_0$  telle que*

$$\forall v \in \mathring{W}_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \eta_0 \int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(2 + |x|^2))^2} dx \quad (2.5)$$

**Proposition 2.1** *Soit  $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$ . Alors,  $(u, p) \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est une solution de (2.1) si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(u, v) + b(v, p) = F(v) \quad \forall v \in W_{\log}^1(\Omega) \\ b(u, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx$$

et

$$b(u, q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \cdot q \, dx$$

**Preuve.** Soit  $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$  et  $(u, p) \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est une solution de (2.1).

( $\Rightarrow$ )

D'abord, on multiplie l'équation (2.2) par une fonction vectorielle  $v$  qui s'annule au bord et on intègre sur  $\Omega$  on trouve :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u : v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \\ - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i \, dx + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \end{aligned}$$

On applique les formules de Green (1.1), on trouve :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \cdot \gamma_0 v \, ds + \int_{\partial\Omega} p \cdot \gamma_0 v \, ds - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad (2.7)$$

Nous choisissons  $v \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega)$ . Alors (2.7) devient :

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega)$$

Ensuite, on multiplie l'équation (2.3) par une fonction  $q \in L^2(\Omega)$ , on obtient :

$$- \int_{\Omega} q \operatorname{div} u \, dx = 0$$

Alors  $(u, p) \in \mathring{W}_{\log}^1 \times L_0^2(\Omega)$  est une solution du problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega) \\ b(u, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

avec les forme bilinéaires sont définie comme suite :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \, dx \quad \forall (u, v) \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega)^2 \times \mathring{W}_{\log}^1(\Omega)^2$$

et

$$b(u, q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \cdot q \, dx \quad \forall (u, q) \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$$

( $\Leftarrow$ )

Soit  $(u, p) \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est un solution de la formulation variationnel (2.6). Comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est est dense dans  $W_{\log}^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx & \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div} u = 0 \, dx & \forall q \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

D'après la Formule de Green on trouve :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u : v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx & \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div} u = 0 \, dx & \forall q \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad \text{au sens des distributions}$$

et comme  $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$ , alors  $-\Delta u + \nabla p \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$  et par conséquence

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & p.p \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & p.p \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

pour la condition au limite et comme  $u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$  donc  $u=0$  sur  $\partial\Omega$ . ■

## 2.2 L'existence et l'unicité

**Proposition 2.2** *Supposons que  $\Omega$  est demi-espace de  $\mathbb{R}_+^2$  et aussi que  $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$ . Alors, le problème (2.1) admet une seule solution  $(u, p) \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ .*

**Preuve.** Pour montrer l'existence et l'unicité du problème (2.1), on applique le théorème de Brezzi.

Premièrement en va montrer la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i \, dx$$

Alors,

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_i| |\nabla v_i| dx$$

D'après inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{W_{log}^1(\Omega)} \|v\|_{W_{log}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où  $a(.,.)$  est continue.

Ensuite pour la coercivité de  $a(.,.)$ , on a :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla v_i \nabla v_i dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 dx \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hardy (2.5), on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_{log}^1}^2 &= \left\| \frac{v}{(\rho(x))(lg\varrho)} \right\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{\eta_0} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\eta_0}\right) \|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Par conséquence :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \frac{\eta_0}{1 + \eta_0} \|v\|_{W_{log}^1(\Omega)}^2$$

D'où  $a(.,.)$  est elliptique sur  $W_{log}^1(\Omega)$ .

Passant maintenant à la continuité de la forme bilinéaire  $b(.,.)$ , on a :

$$\begin{aligned} b(u, q) &= - \int_{\Omega} (div u) q dx = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot q dx \\ |b(u, q)| &= \left| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot q dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| |q| dx \end{aligned}$$

D'après Cauchy-Schwartz, il résulte que :

$$\begin{aligned} b(u, q) &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2} \|q\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{W_{log}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

D'où  $b(\cdot, \cdot)$  est continue.

A la fin nous montrons la condition inf-sup de  $b(\cdot, \cdot)$  :

Soit  $q \in L^2(\Omega)$  avec  $q \neq 0$ , et  $u$  est une solution unique dans  $W_{log}^2(\Omega)$  de l'équation de poisson suivante avec condition de Dirichlet sur la frontière :

$$\Delta u = q \text{ dans } \Omega \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

On pose  $w = \nabla u \neq 0$  c'est claire que  $w \in W_{log}^1(\Omega)^2$  et  $div w = \Delta u = q$  on a :

$$\|w\|_{[W_{log}^1(\Omega)]^2}^2 = \|\nabla u\|_{[W_{log}^1(\Omega)]^2}^2 \leq \|u\|_{[W_{log}^2(\Omega)]^2} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$$

Pour quelque constante  $C > 0$ . En plus  $div w = \Delta u = q$  et

$$b(w, q) = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|q\|_{L^2(\Omega)}\|q\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C}\|q\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{W_{log}^1(\Omega)^2}$$

Par conséquence on trouve que :

$$\sup_{w \in W_{log}^1(\Omega)^2} \frac{b(w, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{W_{log}^1(\Omega)^2}} \geq \frac{1}{C}$$

Donc toutes les conditions du théorème de Brezzi sont satisfaites, alors le problème (2.1) admet une solution unique  $(u, p)$  dans  $(\dot{W}_{log}^1(\Omega), L_0^2(\Omega))$ . ■

## 2.3 Discrétisation du problème

Dans cette section, on donne la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversée. Ensuite, nous donnons une estimation d'erreur.

### 2.3.1 L'espace discret

Premièrement, on introduit quelques définitions et notations géométriques.

**Définition 2.3** Soit  $a_j = (a_{ij})_{i=0}^2, j = 0, 1, 2$ , une collection de trois points de  $\mathbb{R}_+^2$  qui ne sont pas dans un même hyperplan. On appelle simplexe infini (ou triangle infini) de sommets  $a_0, a_1, a_2$  l'ensemble :

$$T^\infty(a_0|a_1, a_2) = \{x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_0 \leq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$



Le sommet  $a_0$  est appelé le sommet fictif de  $T^\infty$ , et les autres sommet  $a_1, a_2$  sont appelés les sommets réels de  $T^\infty$ .

Nous associons à ce triangle infini  $T^\infty$  le triangle (ou simplexe fini)  $S$  défini par :

$$S(a_0, a_1, a_2) = \{x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

Le vecteur altitude de  $T^\infty$  est défini par  $h = \pi a_0 - a_0$  avec  $\pi a_0$  est la projection orthogonale du sommet fictif  $a_0$  sur la droite  $(a_1 a_2)$ , et  $|h|$  est la distance entre  $a_0$  et la droite  $(a_1 a_2)$  (voir figure (2.1)).

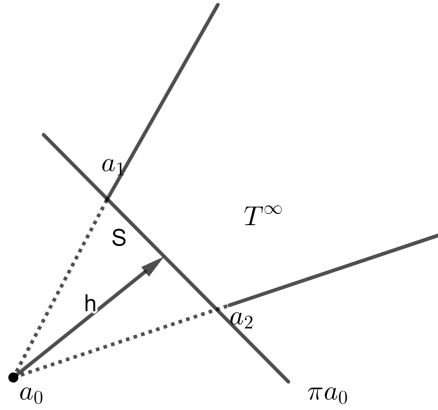


FIGURE 2.1 – Une illustration de vecteur altitude, de simplexe fini et de l’hyperplan support associés à un simplexe infini 2D.

les simplexes infini et finie de référence sont définis comme suit (voir figure(2.2)) :

$$\hat{T} = \{x = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in \mathbb{R}_+^2, \hat{\lambda}_k \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 \hat{\lambda}_k \geq 1\}$$

$$\hat{K} = \hat{S} = \{x = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in \mathbb{R}_+^2, 0 \leq \hat{\lambda}_k \leq 1, \text{ pour } k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 \hat{\lambda}_k \geq 1\}$$

La première étape de la construction de l’espace discret est de partitionner le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  en l’union de deux sous domaines : un sous domaine borné  $\Omega_0$  et un sous domaine non borné  $\Omega_\infty$  tels que :

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty \quad \text{avec} \quad \Omega_0 \cap \Omega_\infty = \emptyset$$

On divise  $\Omega_\infty$  en l’union de deux triangles infinis  $T_1$  et  $T_2$  tels que :

$$\bar{\Omega}_\infty = T_1 \cup T_2$$

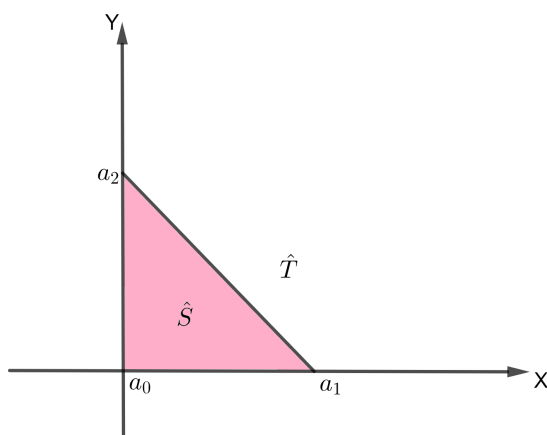


FIGURE 2.2 – un simplexe fini et infini de référence en 2D.

et  $T_1 \cap T_2$  est une arête infinie.

On suppose que le sommet fictif commun  $a_0 = 0$

Dans l'étape suivante, on pose

$$\Omega_* = S_1 \cup S_2 - \{0\}$$

où  $S_i, i = 1, 2$  est le triangle associé à  $T_i$ .

Ce domaine  $\Omega_*$  s'appelle le domaine fictif, il est borné et polygonal. Il est important de le distinguer de  $\Omega_0$ .

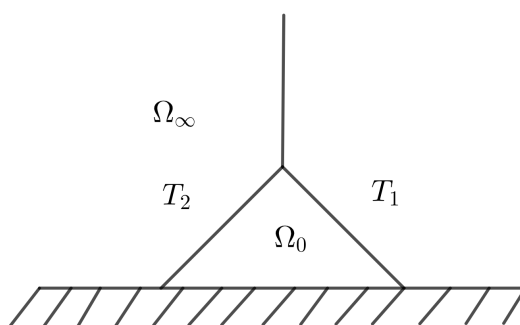


FIGURE 2.3 – Partition de demi-espace de  $\mathbb{R}_+^2$  en la réunion d'un domaine borné et de deux triangles infinis.

On considère les deux applications l'inversion polygonal  $\phi : \Omega_\infty \rightarrow \Omega_*$  qui transforme le sous-domaine non borné  $\Omega_\infty$  en sous-domaine borné  $\Omega_*$  et le rayon polygonal  $r(\cdot) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Définie

comme suit :

$$\phi(x) = \frac{x}{r(x)^2}; \forall x \in \Omega_\infty$$

avec

$$\forall x \in \overline{T_l \cup S_{l_1 \leq l \leq 2}}, r(x) = \frac{x \cdot h_l}{|h_l|^2},$$

On montre facilement les propriétés (voir Boulmzouad [4]) suivantes :

- la fonction  $r(\cdot)$  est continu sur  $\mathbb{R}_+^2$  ;
- $r(x) \simeq |x|, \forall x \in \mathbb{R}_+^2$  ;
- $r(x) \cdot r(\phi(x)) = 1, \forall x \in \Gamma = \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty$  ;
- $\phi$  transforme  $T_i$  en  $S_i \setminus \{a_0\}$  et vice versa ;
- $\phi$  est continu et injective de  $\Omega_\infty$  dans  $\Omega_*$ . Elle laisse invariant les points d'intersection de  $\bar{\Omega}_\infty$  et  $\bar{\Omega}_0$  ;
- $\phi = \phi^{-1}, \phi \circ \phi = id_{\mathbb{R}^d \setminus \{a_0\}}$  ;
- $\phi(x) = x$  si et seulement  $x \in \bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_* = \bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_0$

Dans ce travail, nous considérons la décomposition suivante du domaine  $\mathbb{R}_+^2$  :

On peut décomposer  $\mathbb{R}_+^2$  en l'union d'un domaine borné  $\Omega_0$  et un domaine non bornée  $\Omega_\infty$  qui représentant l'union de deux triangles infinis  $T_1$  et  $T_2$  tels que

$$\Omega_0 = R\hat{\Omega}_0, T_1 = R\hat{T}_1, T_2 = R\hat{T}_2,$$

avec  $\hat{\Omega}_0$  est le triangle de sommets  $(1/2, 0), (0, 1), (-1/2, 0)$  et  $\hat{T}_1, \hat{T}_2$  sont des triangles infinis de sommet fictif l'origine et de sommets réels donnés par

$$(1/2, 0), (0, 1) \text{ pour } \hat{T}_1,$$

$$(-1/2, 0), (0, 1) \text{ pour } \hat{T}_2,$$

Ici,  $R$  est un paramètre libre, présente la taille de sous domaine  $\Omega_0$ . Dans ce cas on définit le rayon polygonal et l'inversion polygonal comme suit :

$$r(x, y) = \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R} \right)$$

et

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{R^2}{x} & \text{si } \frac{x}{R} \geq \frac{y}{R} \\ \frac{R^2}{y} & \text{si } \frac{x}{R} \leq \frac{y}{R} \end{cases}$$

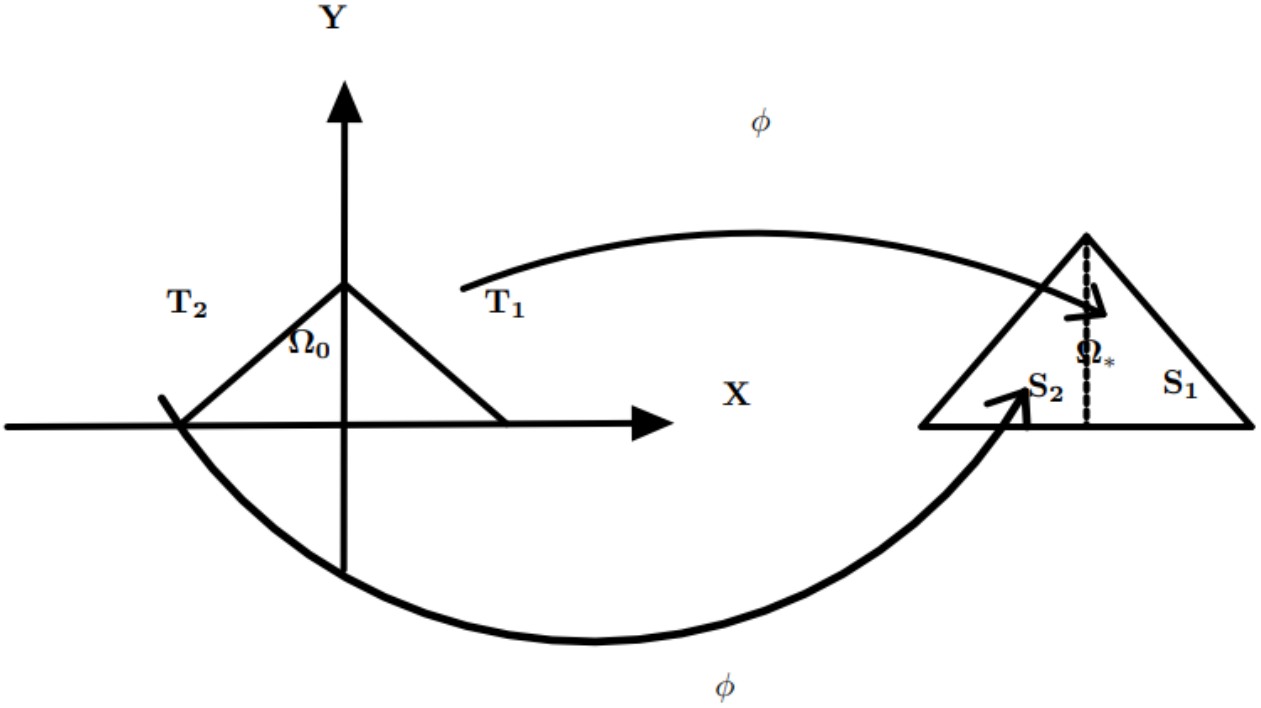


FIGURE 2.4 – une illustration de La transformation  $\Omega_\infty$  à  $\Omega_*$  .

Étant donnée une fonction  $u$  définie sur  $\Omega_\infty$  nous désignons  $\hat{u}$  la fonction définie sur  $\Omega_*$  par :

$$\forall (x, y) \in \Omega_*, \hat{u}(x, y) = r(x, y)^{-\theta+1} u(\phi^{-1}(x, y))$$

avec  $\theta > 0$  est un paramètre réel fixé.

On note immédiatement que :

$$u = \hat{u} \text{ pour } x \in \partial\bar{\Omega}_* \cap \partial\bar{\Omega}_\infty$$

La dernière étape dans la construction de l'espace discret  $W_h$  est le maillage du domaine. Plus précisément en triangulant séparément les deux sous-domaines  $\Omega_*$  et  $\Omega_0$ . Dans ce maillage nous utilisons deux familles de triangulation :

1. Triangulation classique  $\{K; K \in \mathcal{T}_h\}$  pour la région  $\Omega_0$  vérifiant les conditions de la régularité suivantes :

- (a) L'intersection de deux triangles adjacents est vide ou est une arête entière.
- (b) Il existe une constante  $\sigma$  telle que

$$\forall k \in, \frac{h_k}{\rho_k} \leq \sigma \text{ pour chaque } h,$$

où  $h$  est le paramètre de discrétisation, il est défini par

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$$

$h_k$  dénote le diamètre de  $K$  et  $\rho_k$  le rayon de sphère inscrite dans  $K$ .

2. Triangulation gradué  $\{K; K \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}$  pour le domaine fictif  $\Omega_*$  qui compose de  $S_1$  et  $S_2$ , vérifiant les conditions :

- (a) Pour tout  $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h^* = \{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h; 0 \notin K\}$

$$h_k \lesssim h d_K^{1-\mu}.$$

$$h^{\frac{1}{\mu}} \lesssim d_K.$$

où  $d_K$  désigne la distance entre l'origine 0 et  $K$ . Le réel  $\mu > 0$  est le paramètre de graduation, indépendant du raffinement.

- (b) Pour tout  $k \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*$

$$h_K \lesssim h^{\frac{1}{\mu}}$$

- (c) Pour tout  $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ , il existe  $i \in \{1, \dots, M\}$  tel que  $K \subset S_i$

Maintenant, on montre comment construire le maillage gradué sur l'élément de référence

$$\hat{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Premièrement, On considère une suite croissante  $(\alpha_i)_{i \geq 1}$  défini par :

$$\alpha_1 = 1; \alpha_{k+1} = \alpha_k + \alpha_k^{1-\mu}$$

On a pour tout  $N \geq 2$ , on pose  $h_N = \alpha_N^{-\mu}$

On définit la suite finie

$$d_i = \alpha_i h_N^{\frac{1}{\mu}} = \frac{\alpha_i}{\alpha_N}, 1 \leq i \leq N.$$

Ensuite nous considérons les segments suivants :

$$D_i = \{(x, y) \in \hat{K}_2; x + y = d_i\}, 1 \leq i \leq N$$

Pour tout  $i \leq N$ , nous subdivisons le segments  $D_i$  en  $i$  segments égaux. Après, puis on relie les sommets pour obtient le maillage finale de  $\hat{K}$  (voir le figure (2.5)).

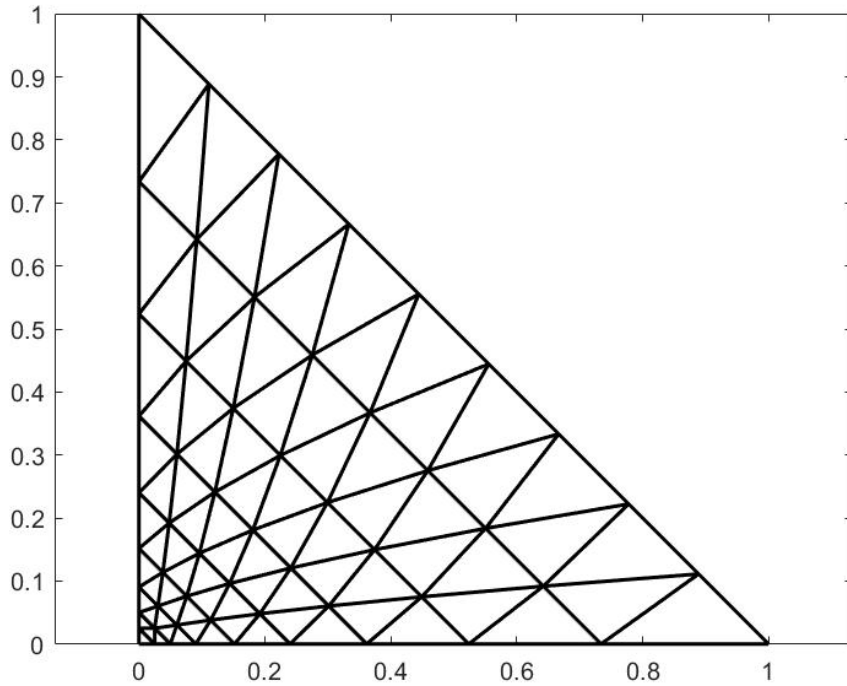


FIGURE 2.5 – Une illustration de maillage gradué pour  $\mu = 0.3$ .

Maintenant, on va définir l'espace d'approximation où on utilise un élément fini de type  $P_1 - bulle/P_1$

Soient  $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$  les coordonnées barycentriques par rapport à un triangle  $K$ . On note  $\lambda_b^K$  la fonction "bulle" associée au triangle  $K$  définie par

$$\lambda_b^K = \begin{cases} 27\lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

tell que  $\lambda_{|K}^K \in P_3$

$P_1$  (resp  $P_1 - bulle$ ) est un espace de dimension finis de fonctions polynomiales sur  $K$  (resp  $K^*$ ).

On considère l'espace d'approximation  $W_h$

$$\begin{aligned} W_h &= \{v_h \in C^0(\bar{\Omega})^2; v_h(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \lambda_i^K(x) + \beta^K \lambda^K(x), \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ \hat{v}_h(x) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{K^*} \lambda_i^{K^*}(x) + \beta^{K^*} \lambda^{K^*}(x), \forall K^* \in \mathcal{T}_h^*, \\ \alpha_i^K, \alpha_i^{K^*}, \beta^K, \beta^{K^*} &\in \mathbb{R}, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \hat{v}_h(0) = 0\} \end{aligned}$$

Pour la pression, on considère l'espace :

$$Y_h = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}); q_{h|K} \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall K^* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*, \hat{q}_{h|K} \in \dot{P}_1, \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*, \hat{q}_h = 0\} \cap L_0^2(\Omega)$$

**lemme 2.3.3** *Si  $\theta > 0$ , on a*

$$W_h \subset \dot{W}_{log}^1(\Omega) \text{ et } Y_h \subset L_0^2(\Omega)$$

**Preuve.** (voir [8]) ■

Par la suite, on suppose  $\theta > 0$ , le problème discret associé au (2.6) donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in W_h \times Y_h \text{ tels que :} \\ a(u_h, p_h) + b(v_h, u_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in W_h \\ b(u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Comme la forme bilinéaire  $b$  vérifie la condition inf-sup discret (voir [11]) suivante sur  $W_h \times Y_h$ ;

$$\exists \beta^* > 0 \quad \inf_{q_h \in Y_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{b(w_h, q_h)}{\|q_h\|_{L_0^2} \|w_h\|_{W_{log}^1}} \geq \beta^*$$

Alors, la solution  $(u_h, p_h)$  du problème de Stokes discret est unique dans  $W_h \times Y_h$ .

### 2.3.2 Estimation d'erreur

**Théorème 2.4** *Supposons que  $(u, p) \in W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega) \times W_{k+\theta-\epsilon}^k(\Omega)$*

*pour chaque nombre réel  $\epsilon$  tel que  $0 < \epsilon < \min(1, \theta)$ . Alors il existe une constante  $C_\epsilon > 0$  ne dépend pas  $u, h$  et  $p$  tel que :*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{[W_{log}^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_0^2(\Omega)} &\leq C_\epsilon \left( h^k \left\{ \|u\|_{[H^{k+1}(\Omega_0)]^2} + \|p\|_{H^k(\Omega_0)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \left\{ \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1,2}(\Omega_\infty)} + \|p\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k,2}(\Omega_\infty)} \right\} \right) \end{aligned}$$

avec  $\mu_0 = \frac{\theta - \epsilon}{k}$ .

**Preuve.**

D'après le lemme de Céa (voir [6] Lemme 2.44), on a :

$$\|u - u_h\|_{W_{log}^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C \left( \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{W_{log}^1(\Omega)} + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_{L_0^2(\Omega)} \right)$$

puisque  $W_h \subset W_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_{log}^1(\Omega)$ , et  $Y_h \subset L^2(\Omega) \hookrightarrow L_0^2(\Omega)$ , on a :

$$\|u - u_h\|_{W_{log}^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C \left( \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{W_0^1(\Omega)} + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Soit  $\Pi_h$  l'opérateur d'interpolation défini de  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  dans  $W_h$  comme suit :

pour tout  $v \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ , on associe l'élément unique  $z \in W_h$  satisfaisant :

$$z|_K = \pi_K v \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h$$

$$\hat{z}|_{K_*} = \pi_{K_*} \hat{v} \text{ pour tout } K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*$$

où

- ✓ pour  $K \in \mathcal{T}$  ou  $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}^*$ ,  $\pi_K$  est l'opérateur d'interpolation local  $\mathbb{P}_1$  dans  $K$ .
- ✓ pour  $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*$  (c'est-à-dire  $a_0 \in K_*$ ),  $\pi_{K_*}$  désigne l'opérateur d'interpolation local  $\mathring{P}_1$  dans  $K_*$  avec  $\mathring{P}_1 = \{P \in P_1 | P(a_0) = 0\}$

Soit  $S_h$  l'opérateur d'interpolation défini de  $L^2(\Omega)$  dans  $Y_h$  comme suit :

pour tout  $q \in L^2(\Omega)$ , on a  $z \in Y_h$  l'élément unique qui satisfait :

$$z|_K = s_K q \text{ pour tout } K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$$

$$\hat{z}|_{K_*} = s_{K_*} \hat{q} \text{ pour tout } K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*$$

- ✓ pour  $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$  ou  $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*$ ,  $s_K$  est l'opérateur d'interpolation local  $\mathbb{P}_1$  dans  $K$ .
- ✓ pour  $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h / \tilde{\mathcal{T}}_h^*$  (c'est-à-dire  $a_0 \in K_*$ ),  $s_{K_*}$  désigne l'opérateur d'interpolation local  $\mathring{P}_1$  dans  $K_*$  avec  $\mathring{P}_1 = \{P \in P_1 | P(a_0) = 0\}$ .

On suppose que  $u$  et  $p$  sont continues, alors on obtient :

$$\|u - u_h\|_{W_{log}^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L_0^2(\Omega)} \lesssim \|u - \Pi_h u\|_{W_0^1(\Omega)} + \|p - S_h p\|_{L^2(\Omega)}$$

Ensuite, on applique (le théorème 1 dans [4]), qui montre l'estimation suivante :

$$\|u - \pi_h u\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1,2}(\Omega_\infty)} \quad (2.9)$$



---


$$\|p - S_h p\|_{L_0^2(\Omega)} \lesssim h^k \|p\|_{H^k(\Omega_0)} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \|p\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1,2}(\Omega_\infty)} \quad (2.10)$$

Enfin, on combinons (2.9) et (2.10), on trouve

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{[W_{log}^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C_\epsilon \left( h^k \left\{ \|u\|_{[H^{k+1}(\Omega_0)]^2} + \|p\|_{H^k(\Omega_0)} \right\} + \right. \\ \left. h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \left\{ \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1,2}(\Omega_\infty)} + \|p\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k,2}(\Omega_\infty)} \right\} \right) \end{aligned}$$

■

---

## Résultats numériques

---

Dans ce chapitre, nous expliquons comment calculer la matrice de rigidité.

### 3.1 Fonctions de base. La matrice de rigidité

Soit  $(M_i)_{1 \leq i \leq DOF}$  (DOF=nombre de degré de liberté) les noueds du maillage. On considère  $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_1}$  les fonctions de base de  $W_h$  et  $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq N_2}$  les fonctions de base de  $Y_h$  qui sont définie comme suit :

- $\phi_i \in W_h$ ;
- $\phi_i(M_j) = \delta_{i,j}$  si  $M_j \in K$  pour quelque  $K \subset \Omega_0$ ;
- $\hat{\phi}_i(M_j) = \delta_{i,j}$  si  $M_j \in K$  pour quelque  $K \subset \Omega_*$ ;
- $\psi_i \in Y_h$ ;
- $\psi_i(M_j) = \delta_{i,j}$  si  $M_j \in K$  pour quelque  $K \subset \Omega_0$ ;
- $\hat{\psi}_i(M_j) = \delta_{i,j}$  si  $M_j \in K$  pour quelque  $K \subset \Omega_*$ ;

Pour tout  $(u_h, p_h) \in W_h \times Y_h$ , on décompose  $u_h$  et  $p_h$  sous la forme suivante :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_1} u_i \phi_i \quad , \quad p_h(x) = \sum_{i=1}^{N_2} p_i \psi_i$$

où les coefficients  $u_i, p_i$  sont donnés par :

$$u_i = \begin{cases} u(M_j) & \text{si } M_j \in K \text{ pour quelque } K \subset \Omega_0; \\ \hat{u}(M_j) & \text{si } M_j \in K \text{ pour quelque } K \subset \Omega_*; \end{cases}$$

$$p_i = \begin{cases} p(M_j) & \text{si } M_j \in K \text{ pour quelque } K \subset \Omega_0; \\ \hat{p}(M_j) & \text{si } M_j \in K \text{ pour quelque } K \subset \Omega_*; \end{cases}$$

**Proposition 3.1** le problème discret (2.8) est équivalent au système linéaire :

$$MU = F \quad (3.1)$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où les coefficients des matrices  $A$  et  $B$  et le vecteur  $F$  sont donné par :

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_i : \nabla \phi_j dx$$

et

$$B_{ij} = b(\phi_i, \psi_j) = - \int_{\Omega} \psi_j \operatorname{div} \phi_i dx$$

et

$$F_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx$$

**Preuve.** puisque

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_1} u_i \phi_i \text{ et } p_h = \sum_{i=1}^{N_2} p_i \psi_i \quad (3.2)$$

on substitue (3.2) dans la forme variationnelle mixte (3.1) et on choisit  $v_h = \phi_j$  et  $q_h = \psi_j$  on obtient :

Trouver  $u_1, \dots, u_{N_1}, p_1, \dots, p_{N_2}$  tels que :

$$\sum_{i=1}^{N_1} u_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i : \nabla \phi_j - \sum_{i=1}^{N_2} p_i \psi_j dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_j dx, \quad \forall j = 1, \dots, N_1$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} u_i \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi_i \psi_j dx \quad \forall j = 1, \dots, N_2$$

posons

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i : \nabla \phi_j dx, \quad B_{ij} = - \int_{\Omega} \psi_j \operatorname{div} \phi_i dx$$

$$F_i = \int_{\Omega} f \phi_i, \quad U = (u_1, \dots, u_{N_1}) \text{ et } P = (p_1, \dots, p_{N_2})$$

Alors, on trouve le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

---

# Conclusion

---

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode des éléments finis inversés pour approcher la solution d'un problème de Stokes posé sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$ . Parmi les avantages de cette méthode, l'absence des frontières artificielles.

Comme perspectives, on va créer un code de calcul de 2D pour faire des tests numériques et afin de montrer l'efficacité de cette méthode.

---

# Bibliographie

---

- [1] F. Alliot and C. Amrouche. Problème de stokes dans  $R^n$  et espaces de sobolev avec poids. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(12) :1247–1252, 1997.
- [2] N. Arar. Résolution de problèmes elliptiques en domaines non bornés. 2013.
- [3] S. K. Bhowmik, R. Belbaki, T. Z. Boulmezaoud, and S. Mziou. Solving two dimensional second order elliptic equations in exterior domains using the inverted finite elements method. *Computers & Mathematics with Applications*, 72(9) :2315–2333, 2016.
- [4] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1) :109–145, 2005.
- [5] H. Brezis and H. Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.
- [6] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer, 2004.
- [7] K. Kaliche. *Méthode des éléments finis inversés pour des domaines non bornés*. PhD thesis, Université Paris-Saclay (ComUE), 2016.
- [8] N. Kerdid. A mixed formulation of the stokes equations with slip conditions in exterior domains and in the half-space. *Hiroshima Mathematical Journal*, 48(2) :119–131, 2018.
- [9] V. Manet. *Méthode des éléments finis : vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode*. 2018.

- 
- [10] Y. Raudin. *Weighted Sobolev spaces and nonhomogeneous elliptic problems in the half-space*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2007.
- [11] J. Scheid. *Approximations numériques des équations de navier-stokes incompressibles*. 2016.

**ملخص**

الهدف من هذا العمل هو تقريب حل مسألة ستوكس في نصف فضاء  $R_+^2$  باستعمال طريقة العناصر المنتهية المعكوسة. التي أثبتت فعاليتها بشكل خاص في حل المسائل الإهليليجية المطروحة في مجالات غير محدودة . هذه الطريقة تعتمد على إستعمال فضاءات سوبولاف ذات الأوزان والتي تمثل إطارا وظيفيا مناسباً لوصف سلوك التوابع في ما لانهاية. الكلمات الرئيسية : فضاءات سوبولاف ذات الأوزان، العناصر المنتهية المعكوسة، مسألة ستوكس، المجالات غير المحدودة.

**Résumé**

Le but de ce travail est d'approximer la solution du problème de Stokes dans le demi-espace  $R_+^2$ , en utilisant la méthode des éléments finis inversés. Il s'est avéré particulièrement efficace pour résoudre des problèmes elliptiques dans des domaines non bornée. Cette méthode consiste à utiliser les espaces de Sobolev à poids qui représentent un cadre fonctionnel approprié pour décrire le comportement des fonctions à l'infini.  
Mots clés : Espace de Sobolev à poids, éléments finis inversés, problème de Stokes, domaines non bornés.

**Abstract**

The purpose of this work is to approximate the solution of Stokes problem on the half-space  $R_+^2$ , using the inverted finite element method. It turned out to be particularly effective for solving elliptic problems in unbounded domains. this method is based on the use of weighted Sobolev spaces, which represent an appropriate functional framework to describe the behavior of functions in infinitely.  
Key words : weighted Sobolev space, inverted finite elements, Stokes problem, unbounded domains.