République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des sciences de la Matire

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

fillère : Mathématiques et Informatique

MASTER ACADEMIQUE

option : Mathé matiques

spécialité :Analyse fonctionnelle

présentée par :

FRITCHE DJAOUHAR

Theme

Sur un problème d'ordre fractionnaire simillaire au problème de la chaleur selon Fourier

Soutenue le : 20/06/2022

Jury de soutenance :

Président :	Mr.SAID MOUHAMED AL SAID,	Prof,	UKMO
Rapporteur :	Dr.MEFLAH MABROUK,	Prof,	UKMO
Examinateur :	Mr.ACTI MOUHAMED,	Prof,	UKMO

- Année Universitaire : 2021/2022 -

Table des matières

الإهـداء

انتهت الحكاية أخيراً تخرجنا ورفعت القبعة احتراماً لسنين مضت من الدراسة وقد ابتدأ الوداع مع كل ابتسامه مع كل لقطة أخذت...

$\mathcal{A}$

الحمد لله الذي سهل علينا إنجاز هذا العمل. لا يمكن أن يكون البحث إلا بإذن الله له كل الصحة والعظمة وأن الحمد الأولي والأخير لله...

$\mathcal{A}$

أود أن أعبر عن امتناني لمروّجي ، السيد. مفلاح مبروك. أشكره على تأطري وتوجيهي ومساعدتي وتقديم النصح لي. يشرفني أن أكون قادرًا على شكر أعضاء لجنة التحكيم الخاصة وكل الناس الذين بكلامهم وكتاباتهم ونصائحهم وانتقاداتهم وجهت أفكاري وقبلت مقابلتي والإجابة على أسئلتي خلال بحثي...

$\mathcal{A}$

واهدي تخرجي وثمرت تعبي إلى من اعشقها الى نبض قلبي الى من تستقبلني بابتسامه وتودعني بدعوة "امي الغالية"

$\mathcal{A}$

واخوتي (نجوى التي كانت سندي في مسيرتي الدراسية وصابرينة وسمية) اسال الله ان يحفظهم لي، والى سندي

$\mathcal{A}$

وحزام ظهري وأماني "أبي الغالي" واشكر اخواني و أولادهم واولاد اختي وجميع اصدقائي .

NOTATIONS

l :	longueur
t :	temps
T :	température
f :	force
L :	l'operateur de Lamé où : $L = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div$
f, g :	fonction
$\div u$:	la divergence de u
$\div u$:	$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$
$\Delta u(x)$:	$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Laplacien de u.
grad u :	$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ... \frac{\partial u}{\partial x_n})$ le gradient de u .

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

(., .)X :	le produit scalaire de X
$\|\|.\|\|_x$:	la norme de X
D :	le coefficient de diffusivité thermique
λ :	le conductivié thermique
ρ :	la masse volumique
C :	le coefficient de chalrur massique. et u(x, t) une fonction
$\Gamma(.)$:	Fonction Gamma d'Euler.
$\beta(.,.)$:	La fonction Beta.
$\mathcal{I}^n$:	L'intégrale itérée de l'ensemble de la commande.
$\mathcal{D}^n$:	La dérivation d'ordre entier.

INTRODUCTION

En mathématique et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partiélles parabolique selon Fourier, introduite originellement en 1811 par Fourier pour dcrire le phénomene physique de conduction thermique et une équation aux dérivées partiélles hyberbolique selon Cattaneo. L′équation de la chaleur selon Fourier :

$$\forall x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\Delta u(x,t) \qquad avec \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Léquation de chaleur selon Cattaneo :

$$\forall x \in \Omega, \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\Delta u(x,t).$$

Oú τ : est une fonction strictement positive dépendant de la température absolue. La théorie d′analyse fonctionnelle nous à donné differentes des mèthodes pour trouver de l′existence et de l′unicité des solutions.

Dans ce travail, le problème principal etude d′un problème parapolique linéaire gouvernée par le système de Lamé

Le travail est divisé de trois chapitres :

Dans le premier, on donne des rappels d′analyse fonctionnelle utilises dans les deux autre chapitres.

Dans le deuxième chapitre, je travaille sur la modélisation de l′équation de chaleur linéaire pour trouver l′équation suivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Et on pose le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in [0, L] \\ \begin{cases} \text{Les condition aux limites} \\ u(0,t) = 0 \ , \forall t \\ u(L,t) = 0 \ , \forall t \end{cases} \end{cases}$$

Et étudie l'existence, l'unicité par deux méthode de séparation des variables et la méthode de difference finiée.

est on trois le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Lu = f, x \in \Omega, t \in (0, T) & (1) \\ u(x, T) = 0 \quad sur \quad \sum & (2) \\ u(x, 0) = u_0(x) sur \quad \Omega & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) est la condition aux limites de Dirichlet.

Les équation (3) traduise le condition initiale du système.

Soit Ω un ouvert de R^2 avec $\sum$ = (0, T) sa frontière on supposera que est assez régulière .

L : est opérateur de Lamé, on note L=$\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla div$; λ et μ constants Lamé et $\lambda + \mu \geq 0$. mais an sence fractionaire.

Chapitre 1

Rappels et notations générales

1.1 Quelques formules utiles

1.1.1 Espaces fonctionnels

$L^p(\Omega) = u$ mesurable sur Ω et $\int_\Omega |u(x)|^p dx, (1 \leq p < \infty)$

$L^\infty(\Omega) = u$ mesurable sur Ω et il existe C tel que $|u(x)| < C$ p.p.t.sur Ω

$D(\Omega) = u \in C^\infty u$ á support compact dans Ω

$H^m(\Omega) = u \in L^2(\Omega)$ telles que $D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m$.

$H_0^m(\Omega)$ L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$

1.1.2 Formules de Green

Soit Ω un ouvert de classe C^1 et $\eta(x)$ sa normale extérieure. Soient v et u de classe $C^2(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = -\int_\Omega v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(s) v(s) ds.$$

1.1.3 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Holder

Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega), L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, le produit fg est dans $L^1(\Omega)$et l'on a

$$\int_\Omega |fg| dx \leq (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p} (\int_\Omega |g|^q dx)^{1/q}$$

Inégalité de Young

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ Alors

$$\forall (a,b)\in R_+^2, \forall \varepsilon>0, ab\leq \frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{1}{q\varepsilon^{p/p}}b^q$$

si $p=q=2$ on a

$$\forall (a,b)\in R_+^2, \forall \varepsilon>0, ab\leq \frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2$$

1.2 Proprétés des espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert munit d'un produit scalaire $(.,.)$.

1.2.1 Définition

$A : H \longrightarrow H$ est dit positif ($A>0$) si

$$(Au,u)>0, \forall u\neq 0$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u,v)|\leq (u,u)^{1/2}(v,v)^{1/2}, \forall u,v\in H.$$

1.3 Espace de Sobolev classique

[10] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N(N\geq 1)$ et soient $m\in N$ et $p\in[1,+\infty]$

Définition 1.3.1. *On définit l'espace de Sobolev classique $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega)=u\in L^p(\Omega), tel\ que D^\alpha u\in L^p(\Omega), \forall|\alpha|\leq m$$

avec $\alpha=(\alpha_1,.....,\alpha_N)$ *et*

$$D^\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}....\partial_{x_N}^{\alpha_N}}, |\alpha|=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

D^α les dérivées au sens de distributions, c-à-d :

$$< D^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

$W^{m,p}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on le muni de la norme :

pour $p \in [1, +\infty[$:

$$||u||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p = +\infty$:

$$||u||_\infty = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha||_\infty$$

***Cas particulier (**$p = 2$)*

$W^{m,2}(\Omega)$ (noté aussi $H^m(\Omega)$) est un espace préhilbertien avec comme produit scalaire :

$$< u, v >_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v) dx$$

on a $< u, u >_{H^m} -||u||^2_{H^m}$

Théorème 1.3.1. *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$*

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace séparable pour tout $1 \leq p \leq +\infty$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour tout $p = 2$

Définition 1.3.2. *On pose $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ dans $W^{m,p}(\Omega)$*

$W_0^{m,p}(\Omega)$ est un sous espace de Banach de $W^{m,p}(\Omega)$, en général $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$

Théorème 1.3.2. *Soit $p \in [1, +\infty[$ nous avons : $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$;c-à-d :*

$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$

Théorème 1.3.3 (Les injections de Sobolev)**.** *Pour $1 < p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$ nous avons :*

1. *Si $N > mp$ alors pour tout q satisfait : $p \leq q \leq \dfrac{Np}{p - mp}$*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

Plus précisément dans les conditions données, il existe une constante c telle que :

$$\forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c||u||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$$

2. *Pour* $p = 1$ *nous avons :*

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow c_b(\mathbb{R}^N)$$

3. *Si* $N = mp$ *et* $p > 1$, *alors pour tout* q *satisfait* $p \leq q \leq +\infty$ *nous avons :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

4. *Si* $p > N$, *alors nous avons :*

$$0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p} \Rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow c_b^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

5. *Si* $mp > N$, *alors nous avons :*
   $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap (\mathbb{R}^N)$
   Plus précisément :
   Si $\dfrac{N}{p} \notin \mathbb{N}$, *et* j *satisfait* $(j-1)p < N < jp$, *alors :*

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p} \Rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow c_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

   Si $\dfrac{N}{p} \in \mathbb{N}$ *et* $m \geq j = \dfrac{N}{p} + 1$ *alors :*

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p} \Rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow c_b^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \forall \lambda < 1$$

Corollaire 1.3.1. *Soit* Ω *un ouvert borné et lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$, *alors nous avons :*

1. *Si* $N > mp$ *alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \leq \frac{Np}{N-m}$$

2. *Si* $N = mp$ *alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q < +\infty$$

3. Si $p = 1$ *alors :*

$$W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow c_b(\Omega)$$

4. Si $mp > N$ *alors nous avons :*
Si $\dfrac{N}{p} \notin \mathbb{N}$*, et* j *satisfait* $(j-1)p < N < jp$*, alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow c_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \forall \lambda \leq j - \frac{N}{p}$$

si $\dfrac{N}{p} \in \mathbb{N}$ *et* $m \geq j = \dfrac{N}{p} + 1$ *alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow c_b^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \forall \lambda < 1$$

1.4 Espace de Sobolev fractionnaire

Dans cette section on s'intéresse à donner la définition des espaces $W_{s,p}(\Omega)$, où $0 < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, Nous prouvons les injections continue et compact, et des autres résultats de la régularité.

Aprés avoir démontré ces propriétés dans le cas $0 < s < 1$, nous les étendons aux espaces $W_{s,p}$ pour $s \in \mathbb{R}$, et on conclure cette chapitre par le cas particulier où $p = 2$

1.4.1 Espace de Sobolev fractionnaire, $s > 1$

1.4.2 Espace de Sobolev fractionnaire, $0 < s < 1$

Définition 1.4.1. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, et soient* $s \in]0,1[$ *et* $p \in [1, +\infty[$*, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire* $W^{s,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ tq \ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega\Omega) \right\}$$

C'est un espace vectoriel, on le muni par la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{s,p})^{\frac{1}{p}}$$

avec :

$$[u]_{s,p} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 1.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $s \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty[$, nous avons alors :*

- *$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace séparable, et de Banach pour tout $1 \leqslant p < +\infty$*
- *$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$*
- *$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$*

Exemple 1.4.1. *$x \longmapsto \ln|x| \in W^{s,p}(]0,1[)$ avec $sp < 1$ en effet : On pose $I = [\ln|x|]$ avec $sp < 1$,*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|x - y|^{sp+1}} dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|y|^{sp+1}|\frac{x}{y} - 1|^{sp+1}} dxdy \end{aligned}$$

On pose $u = \dfrac{x}{y}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} y^{-sp} \frac{|\ln|uy| - \ln|y|^p|^p}{|u-1|^{sp+1}} dudy \\ &= \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} dudy \\ &\leqslant \int_0^1 y^{-sp} \left(\int_0^1 \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} du + \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} du \right) dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Pour I_1 nous avons :

$$\frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} \sim |\ln(u)|^p \;\; et \;\; \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} \sim |1-u|^{p-ps-1}$$

de plus : $\displaystyle\int_0^1 y^{-sp} dy < +\infty$ car $sp < 1$ donc $I_1 < +\infty$

Pour I_2, d'aprés la formule de Fubuni, nous avons :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} du dy \\
&= \int_0^{+\inf} \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} \left(\int_0^{\frac{1}{u}} y^{-sp} dy \right) du \\
&= \frac{1}{-sp+1} \int_1^{+\infty} \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} u^{sp-1} du
\end{aligned}$$

Or nous avons : $\frac{1}{|1-u|^s p+1} \sim \frac{1}{|u|^{sp+1}}$ *alors :*

$$\frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} u^{sp-1} \sim \ln |u|^p u^{-2} \ et \ \frac{|\ln u|^p}{|1-u|^{sp+1}} u^{sp-1} \sim |1-u|^{p(1-s)-1}$$

Donc $I_2 < +\infty$ ce qui implique que $I < +\infty$.

Proposition 1.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s \leqslant s' < 1$, alors nous avons :*

$$\|u\|_{s,p} \leqslant C \|u\|_{s',p}, \quad \forall u \in W^{s',p}(\Omega)$$

avec $C = C(n, s, p) \geqslant 1$. En particulière : $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$

Nous allons monter dans la proposition 1.4.3 que le résultat de la proposition 1.4.2 tient aussi dans le cas $s' = 1$. D'abord pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1]$; on dit que Ω est de classe $C^{k,\alpha}$, si $\exists M > 0$ telle que pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe une boule $B = Br_r(x), r > 0$ et un isomorphisme $T : Q \longrightarrow B$ telle que : $T \in C^{k,\alpha(\bar{Q})}, T^{-1} \in C^{k,\alpha}(\bar{B}), T(Q_+) = B \cap^{\Omega}, T(Q_0) = B \cap \partial\Omega$ et :

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}(\bar{Q})} + \|T^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\bar{B})} \leqslant M$$

avec :

$$Q = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1}\mathbb{R} : |x'| < 1 \text{ et } |x|_n < 1 \right\}$$

$$Q_+ = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1}\mathbb{R} : |x'| < 1 \text{ et } 0 < |x|_n < 1 \right\}$$

$$Q_0 = \{ x \in Q : x_n = 0 \}$$

Nous avons le résultat suivant

Proposition 1.4.3. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $s \in]0, 1[$, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, de* *frontière borné. Alors :*

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega).$$

où $C = C(N, s, p) \geqslant 1$, *en particulier :* $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$
N.B : $W^{1,p}(\Omega)$ *: l'espace de Sobolev classique.*

Théorème 1.4.1. *Pour* $0 < s < 1$, *l'espace* $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 1.4.2. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *on pose :* $W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}$ *dans* $W^{s,p}(\Omega)$

Et alors d'après le théorème 1.4.1 on a : $W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$, mais en général pour $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^N, W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega)$.
Il est claire que les inclusions obtenu dans proposition 1.4.2 et 1.4.3, sont vrai dans $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Théorème 1.4.2. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, *et soient* $s \in]0,1[$ *et* $p \in [1,+\infty[$ *alors il existe* λ *tel que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \lambda[u]_{s,p}, \quad \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

Par conséquent si Ω *est borné alors* $[.]_{s,p}$ *est un norme de* $W_0^{s,p}(\Omega)$ *équivalent à* $\|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Remarque. *pour* $s < 0$ *et* $p \in]1,+\infty[$ *on définit* $W^{s,p}(\Omega)$ *comme dual de* $W_0^{-s,q}(\Omega)$ *avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1.4.3 Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}$

Comme il est bien connu lorsque s est un entier (c-à-d le cas ou $W^{s,p}$ est l'espace de Sobolev classique), sous certains hypothèses de régularité sur le domaine Ω, toute fonction dans $W^{s,p}(\Omega)$ peut être prolonger à une fonction de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Les résultats du prolongement sont assez important dans les applications, et sont nécessaires pour améliorer certains théorèmes d'intégrations dans le cas classique ainsi dans le cas fractionnaire.

Lemme 1.4.1. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *et* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *avec* $0 < s < 1$ *et* $p \in [1,+\infty[$, *s'il existe un compact* $K \subset \Omega$ *telle que* $u \equiv 0$ *dans* $\Omega \setminus K$, *alors : le prolongement* $\tilde{u}$ *défini par :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

appartient à $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ où C est un constant positive dépend à N, s, p, K et Ω.

Lemme 1.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, symétrique par rapport à le cordonné x_n, on pose :*

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_n > 0\} \text{ et } \Omega_- = \{x \in \Omega : x_n \leqslant 0\}.$$

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega_+)$ avec $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$ on définit :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n) & x_n \geqslant 0 \\ u(x', -x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

Alors $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 4\|u\|_{W^{s,p}(\Omega_+)}$.

Lemme 1.4.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $s \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty[$, et soient $u \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Alors :*

$$\psi u \in W^{s,p}(\Omega) \text{ et } \|\psi u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

avec $C = C(N, s, p, \Omega)$.

Maintenant nous sommes prêts à prouver le théorème principale de cette section, qui concerne tout ensemble ouvert Lipschitz Ω, de frontière borné.

Théorème 1.4.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ avec frontière borné, et $p \in [1, +\infty[$, $s \in]0,1[$. Alors :$\forall u \in W^{s,p}(\Omega), \exists \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que : $\tilde{u}_{|\Omega} = u$ et :*

$$\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

avec $C = C(N, s, p, \Omega)$.

Corollaire 1.4.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$, $s \in]0,1[$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, avec frontière borné. Alors pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_n \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $W^{s,p}(\Omega)$ i.e :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0.$$

Espace $W^{s,p}$,$s > 1$

Définition 1.4.3. *Soit Ω un ouvert de $(\mathbb{R}^N)$ et Soit $s \in \mathbb{R}/\mathbb{N}$ avec $s > 1$ et $p \in [1, +\infty[$ L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par :*
$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{[s],p}(\Omega) tq D^\alpha u \in W^{s-[s]}, p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| = s\}$

C'est un espace vectoriel, on le muni de la norme :

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = (||u||^p_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} ||D^\alpha u||^p_{W^{s-[s],p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

Si $s = [s]$, alors l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est coïncide avec l'espace de Sobolev classique.
$(W^{s,p}(\Omega), ||.||_{W^{s,p}(\Omega)})$*est un espace de Banach.*

Proposition 1.4.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, et soit $p \in [1, +\infty[$ et $s', s > 1$.Alors si $s' \geq s$:*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

Théorème 1.4.4. *Pour $s > 1$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*
Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $s > 1$ on pose : $W^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.
Nous avons d'après $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$
Toute les résultats précédent sont valable dans l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ avec $s > 0$

1.5 Espace $H^s(\Omega)$

Dans cette section on s'intéresse à le cas particulier où $p = 2$

Définition 1.5.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, alors on définit :*
$H^s(\Omega) := W^{p,2}(\Omega)$ *pour* $0 < s < 1$

Proposition 1.5.1. *Le produit scalaire dans $H^s(\Omega)$ est défini par*
$< u, v >_{H^s(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(u)dx + \int_{\Omega\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy$
$\forall u, v \in H^s(\Omega)$ alors $H^s(\Omega)$ est espace de Hilbert

P-Laplacien fractionnaire

Ce chapitre est consacré à l'étude des problèmes elliptique liée à le P-laplacien fractionnaire, mais avant, nous présentons une introduction à P-laplacien fractionnaire avec des résultats trivial de cet opérateur.

1.6 Introduction au P-laplacien fractionnaire

Définition 1.6.1. *Soit $p \in]1, +\infty[$ et $s \in]0, 1[$, alors on définit le p-laplacien factionnaire par*

$$\begin{aligned}(-\Delta)_p^s u(x) &= 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} \\ &= 2PV \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy\end{aligned}$$

Remarque. *Si $p \neq 2 : (-\Delta)_p^s$est non linéaire.*

Une caractéristique typique de cet opérateur susmentionnés est la non-localité, en ce sens que la valeur de p-laplacien fractionu(x) à tout point $x \in \Omega$ dépend non seulement des valeurs de x sur l'ensemble Ω, mais en fait sur la tout $\mathbb{R}^N$.
Cette définition est une généralisation de l'opérateur Laplacien fractionnaire lorsque p = 2,est qui défini par :

$$(-\Delta)^s u(x) = 2C(N, s)PV \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

avec une normalisation d'un constant $C = C(N, s)$

$$(-\Delta)_p^s \longrightarrow (-\Delta)_p \to 1^-$$

Proposition 1.6.1. *Soits $\in]0, 1[$ etp $\in]1, +\infty[$. Alors :*

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$$

est bien défini, et de plus :

1. $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *nous avons :*

$$< (-\Delta)_p^s u, v >= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dxdy$$

2. $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$:

$$< (-\Delta)_p^s u, v > \leq [u]_{s,p}^{p-1} [v]_{s,p}$$

et par suite : $||(-\Delta)_p^s u||_* \leq ||u||_{W^{s,p}}^{p-1}$

Proposition 1.6.2. *Soit* $s \in]0,1[$ *,* $p \in]1,+\infty[$ *et soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *. on pose* $X_p^s(\Omega) = u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) tel\ que : u = 0\ sur \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ *sur Alors :*

$$(-\Delta)_p^s : X_p^s(\Omega) \longrightarrow (X_p^s(\Omega))'$$

1. *est de classe*(S)
2. *est strictement monotone*
3. *est coércive.*

Proposition 1.6.3. *Soits* $\in]0,1[$ *et* $p \in]1,+\infty[$*. Alors :*

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$$

est continue i.e $(-\Delta)_p^s \in C(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))')$

1.7 La fonction gamma

Fonction gamma, qui est l'un des outils de base utilisés dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.7.1. *La fonction Euler Gamma est définie par l'intégrale Suivant :*

$$\Gamma : x \to \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall x \in \mathbb{C}(\Re(x) > 0). \tag{1.1}$$

Où

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\log(t)}. \tag{1.2}$$

cette intégrale est convergente pour tout complexe $x \in \mathbb{C}(\Re(x) > 0)$.

1.7.1 Quelques propriétés

La fonction Γ vérifie les propriétés suivantes :

1. Une propriété importante de la fonction gamma est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\Re(x) > 0). \tag{1.3}$$

   Ce qui peut être démontré par une intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x).$$

2. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$ .Et aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3. pour tout $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!,$ et aussi :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad (2n-1)!: = 1.3\cdots(2n-1)(n \in \mathbb{N}). \tag{1.4}$$

4.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (x \notin \mathbb{Z}_0\,;\, 0 < \Re(x) < 1). \tag{1.5}$$

5. $\Gamma(x)$monotone et strictement décroissant $\forall x \in \left]0,1\right[$.

6. Formule de Legendre

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)(x \in \mathbb{C}). \tag{1.6}$$

7. Le théorème généralisé de multiplication de Gauss-Legendre :

$$\Gamma(mx) = \frac{2^{mx-1}}{(2\pi)^{(m-1)\backslash 2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{m}\right) \quad (x \in \mathbb{C}; m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}). \tag{1.7}$$

1.8 La fonction Bêta

Définition 1.8.1. *Pour $z, w \in \mathbb{R}$ tel que $z > 0$ et $w > 0$ la fonction beta est la fonction définie par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.8}$$

Remarque. *La relation entre la fonction bêta d'Euler et le gamma d'Euler est donnée par :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, (z > 0, w > 0) \tag{1.9}$$

Proposition 1.8.1. *Voici quelques propriétés de la fonction Beta*

1. *La fonction Beta peut également être définie par :*

$$B(z,w) = 2\int_0^{\pi\backslash 2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2x-1}(\theta)d\theta \tag{1.10}$$

2. *Beta est une fonction symétrique :*

$$B(z,w) = B(w,z) \tag{1.11}$$

3. *Dérivation*

$$\frac{\partial}{\partial z}B(z,w) = B(z,w)\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+w)}{\Gamma(z+w)}\right) \tag{1.12}$$

1.9 Intégrale fractionnaire au sens de Rimann-Liouville

Définition 1.9.1. *Soit $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue sur $[a,b)$, b peuvent être finis ou infinis. Une primitive de f est donnée par :*

$$\mathcal{I}^1 f(t) = \int_a^t f(t)dt,$$

Pour la deuxième primitive nous aurons

$$\mathcal{I}^2 f(t) = \int_a^t dt \int_a^t f(s)ds.$$

Nous utilisons le théorème de Fubini pour transformer la double intégrale en une seule intégrale

$$\mathcal{I}^2 f(t) = \int_a^t (t-s) f(s) ds.$$

Plus généralement, , la n-ième itération de l'opérateur $\mathcal{I}$ peut sécréter :

$$\mathcal{I}^n f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1)} f(s) ds \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.13}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation de la factorielle par la Fonction gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann s'est rendu compte que le second membre de (2.1) pouvait ont un sens même lorsque n prend une valeur non entière, il était naturel de définir fractionnaire intégration comme suit :

Exemple 1.9.1. *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, Alors*

$$\mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt$$

Pour évaluer cette intégrale, le changement de variable est supposé $t = a + (x-a)\tau$,ce qui donne

$$\mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^\beta \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \tag{1.14}$$

Etant donné la relation (1.8)*, on a*

$$\mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.15}$$

en utilisant (1.9)*, on arrive à*

$$\mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha} \tag{1.16}$$

on voit qu'il s'agit d'une généralisation du cas $\alpha = 1$ où l'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^1 (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1} \end{aligned}$$

Ceci tient compte de la relation (1.3).

1.10 Dérivation fractionnaire au sens de Rimann-Liouville

Définition 1.10.1. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $\alpha \in [n-1,n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Nous appelons la dérivée α d'ordre fractionnaire d'une fonction f au sens de Riemann-Liouville **la gauche** and **droite** à gauche et droit est défini par :*

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.17}$$

et

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d^n}{dt^n}\right) \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.18}$$

respectivement.

Où $n = [\alpha] + 1$ *and* $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α.

Exemple 1.10.1. ***La dérivée** $f(t) = (t-a)^{\beta}$ **dans le sens de Riemann-Liouville***
Soient α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$ alors on a :

$$\mathcal{D}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \tag{1.19}$$

En changeant la variable $\tau = a + s(t-a)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\alpha}(t-a)^{\beta} =& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta} ds \\
=& \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
=& \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

Alors

$$\mathcal{D}^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.20}$$

pour $\alpha=0.5$ *et* $\beta=0.5$ *on a :*

$$\mathcal{D}^{0.5}t^{0.5}=\frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)}=\Gamma(1.5) \tag{1.21}$$

Théorème 1.10.1. *Soient* $\alpha,\beta>0$ *et* $n=[\alpha]+1, m=[\beta]+1$ *tels que* $(n,m\in\mathbb{N}^*)$, *alors :*

1. *si* $\alpha>\beta>0$, *alors pour* $f\in L^1([a,b])$ *égalité :*

$$\mathcal{D}^{\beta}(\mathcal{I}^{\alpha}f)(t)=\mathcal{I}^{\alpha-\beta}f(t) \tag{1.22}$$

   est vrai de presque tout ce qui concerne $[a,b]$.

2. *S'il existe une fonction* $\varphi\in L^1([a,b])$ *tel que* $f=\mathcal{I}^{\alpha}\varphi$ *alors :*

$$\mathcal{I}^{\alpha}(\mathcal{D}^{\alpha}f(t))=f(t). \tag{1.23}$$

   est vrai de presque tout $t\in[a,b]$.

3. *Si la dérivée fractionnaire d'ordre* α, *d'une fonction* $f(t)$ *est intégrable, alors*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}(\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f(t))=f(t)-\sum_{j=1}^{n}[\mathcal{D}^{\alpha-j}_{a^+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \tag{1.24}$$

Proof 1. 1. *Pour* $\alpha>\beta>0$, *alors* $n\geq m$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\beta}(\mathcal{I}^{\alpha}f)(t)=&\mathcal{D}^{n}I^{n-\beta}(\mathcal{I}^{\alpha}f)(t)\\=&\mathcal{D}^{n}(I^{n+\alpha-\beta}f)(t)\\=&\mathcal{D}^{n}\mathcal{I}^{n}(\mathcal{I}^{\alpha-\beta}f)(t),\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathcal{D}^{\beta}(I^{\alpha}f)(t)=\mathcal{I}^{\alpha-\beta}f(t) \tag{1.25}$$

2. Si on remplace β par α dans (1.24), on obtient

$$\mathcal{I}^{\alpha}(\mathcal{D}^{\alpha} f(t)) = \mathcal{I}^{\alpha}(\mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{I}^{\alpha}\varphi(t)) = \mathcal{I}^{\alpha}\varphi(t) = f(t)$$

Proposition 1.10.1. *La dérivation fractionnaire et la dérivation classique (ordre entier)ne changez que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$*

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathcal{D}^{\alpha} f(t)) = \mathcal{D}^{n+\alpha} f(t). \tag{1.26}$$

Mais

$$\mathcal{D}^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = \mathcal{D}^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} \tag{1.27}$$

Chapitre 2

Équation De La Chaleur Lineaire

2.1 Description de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur en une dimension d'espacde est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

où $c > 0$ est une constante donnée , u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t.Cette fontion $u = u(x,t)$ représente la température dans un conducteur d'une dimension . La valeur de $u(x,t)$ dépend du temps $t \geq 0$ et de la position de x . L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique : en effet , si on applique l'opérateur de la chaleur aux fonctions

$$u : (x,t) \longrightarrow \exp(\lambda t + \mu x)$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = (\lambda - c\mu^2)\exp(\lambda t + \mu x) = 0,$$

c'est à dire $\lambda = c\mu^2$ qui représent une parabole . En général , les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique ,parabolique et hyperbolique .Engénéral , la valeur de $u(x,t)$ en $t=0$ est donnée . On vent donc résoudre le problème de cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

physiquement, considérons une barre de longueur illimitée. Pour décrire l'équation de la chaleur, supposons que le conducteur a une petite section d'aire Δs.La quantité de la chaleur à travers la section au point x est approximativement proportionnelle au gradient $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en x. La quantité de la chaleur dans la direction des x croissants pendant un court temps Δt est

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \Delta s \Delta t,$$

où κ est une constante strictement positivedépendant du matériau. Notons que la positivitéde κ est en accord avec le fait que la chaleur circle du chaud vers le froid.

Evidemment, supposons que u et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ne changent pas rapidemment, $\kappa\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est la quantité de la chaleur par seconde et par unité d'espace circulant le long des x dans la direction négative . Cherchons comment varie au cours du temps la température u aux différents points de la barre. Ecrivons l'équation des échanges de chaleur dans l'intervalle $[a,b]$.quantité totale de la chaleur sortant de $[a,b]$ au temps Δt est approximativement égale à :

$$-\kappa_1 (b-a) \Delta s \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Où κ_1 est une constante strictement positive et qui exprime la chaleur spécifique par unité de volume. En générale, la quantité spécifique c_g est donnée par unité de masse, donc si le matériau a la densité ρ alors $\kappa_1 = \rho c_g$.

On écrit ensuite que les deux termes (2) et (3) sont égaux , on divise par $\Delta s \Delta t (b-a)$ et on fait tendre $(b-a)$ vers Zd' où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{\kappa_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

matériau	$\kappa(Wm^{-1}k^{-1})$	$c(Jkg^{-1}K^{-1})$	$\rho(kgm^{-3})$	$k(m^2s^{-1})$
Fe	79.5	448	7860	2.25810^{-5}
Cu	397	387	8920	1.1510^{-4}
Al	238	900	2700	9.79410^{-5}
béton	0.8	860	2300	4.04410^{-7}
verre	0.8	837	2600	3.67610^{-7}

TABLE 2.1 – Coefficients thermiques de quelque matériaux

2.2 Résoulution par la méthode de separation des variable

2.2.1 Équation de la chaleur 1D

On va maintenant résoudre le problème de diffusion de la température suivant :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad (\Omega) : 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

On recherche une solution de la forme (on sépare les variables x et t) :

$$u(x,t) = X(x)\psi(t)$$

Si nous remplaçons cette expression dans l'équation (P), nous obtenons :

$$X\psi' = DX''\psi$$

On divise par le produit $x\psi$

$$\frac{1}{D}\frac{\psi'}{\psi} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

(λ est une constante quelconque)

Encore une fois, les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité. On introduit à nouveau la constante de séparation λ qu'il faut définir.

On est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

1 problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable x (car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable) :

$$\begin{cases} X^{''}(X) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

où il faut rechercher toutes valeurs propres λ_n et les fonctions propres $x_n(x)$

1 équation différentielle du 1^{er} ordre sur la variable t :

$$\psi^{'}(t) + \lambda_n D\psi(t) = 0$$

On commence par résoudre le problème aux valeurs propres. On étudie toutes les possibilités pour la constante de séparation λ :

1. Résolution du problème aux valeurs propres :
   $X^{''} + \lambda X = 0$ a pour équation caractéristique

$$r^2 + \lambda = 0$$
$$\longrightarrow \Delta = -4\lambda$$

1^{er} cas : $\Delta = 0$ soit $\lambda = 0$

la solution s'ecrit : $X(x) = Ax + B$

$X(0) = 0 \longrightarrow B = 0 \quad \text{et} \quad X(L) = 0 \longrightarrow A = 0$

Par conséquent, $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre du problème.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\Delta > 0$ soit $\lambda < 0$. on pose $\lambda = -\alpha^2$ soit $\Delta = 4\alpha^2$

$\longrightarrow r_1 = \alpha$ et $r_2 = -\alpha$

la solution s'ecrit : $X(x) = A\exp^{\alpha x} + B\exp^{-\alpha x}$

$X(0) = 0 \longrightarrow A + B = 0$ soit $A = -B$

$X(L) = 0 \longrightarrow A(\exp^{\alpha L} - \exp^{-\alpha L}) = 2Ash(\alpha a) = 0$

comme $\alpha \neq 0$, $sh(\alpha a) \neq 0$ et donc $A = 0$ par conséquent, $\lambda < 0$ ne sont pas des valeurs propres .

$3^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$ soit $\lambda > 0$ .on pose $\lambda = \beta^2$ soit $\Delta = -4\beta^2$

$\longrightarrow r_1 = j\beta$ et $r_2 = -j\beta$

la solution s'ecrit : $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$X(0) = 0 \longrightarrow A = 0$

$X(l) = 0 \longrightarrow B\sin(\beta L) = 0$ une solution non triviale de léquation $(B \neq 0)$

correspond à :

$\beta = \dfrac{n\pi}{L}$ avec $n = 1.2.3.$

par conséquent ,$\lambda_n = (\dfrac{n\pi}{L})^2$ sont les valeurs propres du problème aux limites .

les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_n s'écrivent :

$X_n(x) = B_n\sin(\dfrac{n\pi}{L}x)$

2. Résolution de l'équation différentielle sur la variable t

   Les valeurs de λ (valeurs propres) étant maintenant connues, on peut résoudre l'équation différentielle en t :

$$\psi^{'} + \lambda_n D\psi = 0$$

   $\cdot$ pour $\lambda_n = (\dfrac{n\pi}{L})^2$, nous obtenons :

$$\psi^{'}{}_n + (\frac{n\pi}{L})^2 D\beta_n = 0$$
$$\longrightarrow \psi_n(t) = A_n\exp^{-D(\frac{n\pi}{L}^2)t}$$

   ou A_n est une constante arbitraire .

3. Solution générale de l'EDP :

   La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (on doit considérer toutes les valeurs propres) :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\psi_n(t)$$

soit :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp^{-D(\frac{n\pi}{L}^2)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Exemple 2.2.1. *on cette exemple on concider*

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad (\Omega) : 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$u(x,0) = f(x)$

avec :

$$f(x)\begin{cases} x & pour\, 0 < x < L/2 \\ L - x & pour\, L/2 < x < L \end{cases}$$

A partir de la solution générale, nous obtenons :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

Il reste donc à décomposer $f(x)$ sur la base des fonctions propres en calculant le coefficient A_n :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{2})dx$$

En remplaçant $f(x)$ par son expression, nous obtenons :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

Le développement des calculs nous donne :

$$A_n = \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

L'évolution de la température dans la barre suit la loi suivante :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\exp^{-D(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

2.2.2 Équation de la chaleur $2D$

On pose l'équation de la chaleur dons le problème (P) suivent

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y^2}\right) = c^2\Delta u \\ \text{Les codition aux linites} \\ \quad u(0,y,t) = 0 \ \forall t, \forall \ 0 < y < b \\ \quad u(a,y,t) = 0 \ \forall t, \forall \ 0 < y < b \\ \quad u(x,0,t) = 0 \ \forall t, \forall \ 0 < x < a \\ \quad u(x,b,t) = 0 \ \forall t, \forall \ 0 < x < a \\ \text{les condition intiales} \\ \quad u(x,y,0) = f(x,y) \\ \quad \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}|_{t=0} = g(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

On pose que la solution u(x,y,t) écrit comme le produit de deux fonction à variables séparées

$$U(x,y,t) = V(x,y)W(t)$$

Alors

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (V(x,y)W(t))}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}W(t) \tag{2.2}$$

$V_{x,x}(x,y)W(t)$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (V(x,y)W(t))}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} W(t) \tag{2.3}$$

$V_{y,y}(x,y)W(t)$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial (V(x,y)w(t))}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} V(x,y) \tag{2.4}$$

$W\text{'}V(x,y)$

On remplace l'équation (2.2) et l'équation (3)et l'équation (2.4) dans le problème (P) on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\
\Leftrightarrow W^{'}(t)V(x,y) &= c^2 \left(V_{xx}W + V_{yy}W \right) \\
&= c^2 W \left(V_{xx} + V_{yy} \right) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Comme il s agit de trois variables x et y et t qui sont inatependantes , les expressions dans chaque membre de droite et de gauche ne peuvent $\hat{e}$tre en tous temps égaux que seilles sont égales à un costant arbitraire k

$$\frac{W^{'}}{W}\frac{1}{c^2} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = k$$

On obtient deux équation separées. ces équations sont des équations differentielles ordinaires du second ordre.

$$\begin{cases} \dfrac{W'}{W}\dfrac{1}{c^2} = k \\ W' = c^2 W k \\ W' = c^2 W k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = k \\ V_{xx} + V_{yy} - Vk = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W' - c^2 k W = 0 & E.D.O \\ (V_{xx} + V_{yy}) - kV = 0 & E.D.P \end{cases}$$

On détermine la solution d équation de helmbibty

$$V_{xx} + V_{yy} - kV = 0$$

On pose : $V(x, y) = X(x)Y(y)$

pour :

$$V_{xx} + V_{yy} - kV = X''y + Y''x - kxy = 0$$

On division l'équation par (X, Y)

$$\frac{X''Y}{XY} + \frac{Y''X}{XY} - k\frac{XY}{XY} = 0$$
$$\frac{X''}{X} + \frac{X''}{X} - k = 0$$
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k = 0$$

Pour que somme de la quantit $\dfrac{X''}{X} et \dfrac{Y''}{Y}$ soit toujour égale la contante k alors les fonction X(x),Y(y) vorie indepondanent d l′autre les deux fonction X(x) et Y(y)soient égale ausi est

$\frac{X''}{X} = k_x, \ \frac{Y''}{Y} = k_y$ d′ou le sytemme :

$$\begin{cases} Y'' - k_Y Y = 0 \quad E, D, O \\ X'' - k_X X = 0 \quad E, D, O \\ k_X + k_Y = k \end{cases}$$

On determine $X(x)$:

$$X'' - k_X X = 0$$

$$\begin{cases} \text{si } k_x = 0 \ \ X(x) = ax + b & (2.6) \\ \text{si } k_x > 0 \ \ X(x) = c_1 \exp^{\sqrt{k}x} + c_2 \exp^{-\sqrt{k}x} & (2.7) \\ \text{si } k_x < 0 \ X(x) = A(\cos \sqrt{k}x) + B(\sin \sqrt{k}x) & (2.8) \end{cases}$$

Verifier les conditions aux limites :

On remplace la solution (2.6) dans les conditions aux limites

$$U(0, y, t) = 0 \ \ U(x, y, t) = X(x)Y(y).W(t)$$

$$\begin{cases} U(0, y, t) = X(0)Y(y).W(t) \ \ \forall \ y, t \\ U(a, y, t) = X(a)Y(y).W(t) \ \ \forall \ y, t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

On démontrer que les deux premier formes ne peuvent exister puisque

$$\begin{cases} X(0) = a(0) + b = 0 \Longrightarrow b = 0 \\ X(a) = a(a) + b = 0 \Longrightarrow a = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(x) = 0 \ \forall \ x \Longrightarrow U(x, y, t) = 0 \ \forall \ x$$

On remplace la solution (2.7) dans les coditions aux limites

$$\begin{cases} X(0) = X(x) = c_1 \exp^{\sqrt{k}(0)} + c_2 \exp^{-\sqrt{k}(0)} = 0 \ \Longrightarrow c_1 + c_2 = 0 \ \Longrightarrow c_1 = -c_2 \\ \textit{ensuite}\, X(a) = c_1 \exp^{\sqrt{k}(a)} + c_2 \exp^{-\sqrt{k}(a)} = 0 \ \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$X(0) = 0$ ne peut $\hat{e}$tre existe

Il reste alors que (2.8) on remplace (2.8) dans les conditions aux limites

$$X(0) = A\cos(\sqrt{k}0) + B\sin(\sqrt{k}0) \Longrightarrow A = 0$$

Ensuite

$$X(a) = A\cos(\sqrt{k}a) + B\sin(\sqrt{k}a) = 0 \Longrightarrow B\sin(\sqrt{k}a) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \sin(\sqrt{k}a) = 0 \end{cases}$$

On choisit

$$B \neq 0 \Longrightarrow \sin(\sqrt{k}a) = 0$$

Alors

$$\sqrt{k}a = n\pi \Longrightarrow \sqrt{k} = \frac{n\pi}{a}$$

Donc la forme de solution de $X(x)$ est

$$X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{a}x) \quad n \in \mathbb{N}$$

La mêmee chose avec Y(y) et solution est :

$$Y_m = \sin(\frac{m\pi}{b}y)$$

Alors la forme de fontion V_{nm} est :

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x).Y_m(y)$$

$$V_{nm}(x, y) = \sin(\frac{n\pi}{a}x).\sin(\frac{m\pi}{b}y) \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} m = 1.2.3.....m \\ n = 1.2.3.....n \end{cases}$$

La solution temporielle

$$W^{'} - c^2 kW = 0$$
$$W(t) = c\exp^{-c^2 kt}$$
$$K = K_x + K_y$$
$$W_{nm}(t) = c\exp^{-c^2((\frac{n\pi}{a}^2)+(\frac{m\pi}{b}^2))t}$$

La solution de léspace

$$U_{nm}(x,y,t) = V_{nm}(x,y).W_{nm}(t)$$
$$= X_n(x).Y_m(y).W_{nm}(t)$$
$$U_{nm}(x,y,t) = (\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y)(c\exp^{-c^2((\frac{n\pi}{a}^2)+(\frac{m\pi}{b}^2))t})$$

2.3 Résoulution par la méthode difference finie

2.3.1 Équation de la chaleur 1D

Considérez le problème de valeur aux limites initiales suivant pour léquation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \tag{2.9}$$

$$BC : u(0,t) = 0 \ \ u(1,t) = 0 \tag{2.10}$$

$$IC : u(x,0) = fh(x) \tag{2.11}$$

L'idée de base est de remplacer les dérivées dans l'équation de la chaleur par des quotients de différence. Nous considérons les relations entre u en (x, t) et ses voisins à une distance Δx et à un instant Δt plus tard.

Correspondant aux approximations de quotient de différence introduites dans la section 1, nous considérons les approximations de différence.

Différence de temps avantu :

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\Delta t^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + ...$$

Après réarrangement et division par Δt :

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(u,t) + O(\Delta t) \tag{2.12}$$

Différences centrales dans l'espace :

$$u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)$$
$$u(x-\Delta x,t) = u(x,t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)$$

Ajout et réorganisation :

$$\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + O(\Delta x^2) \tag{2.13}$$

En substituant (2.12) et (2.13) dans (2.9) on obtient

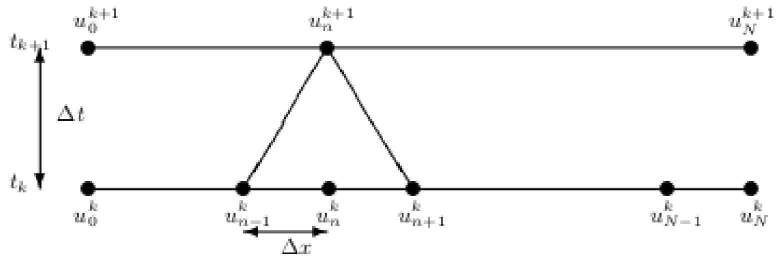
$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \alpha^2 (\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}) + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

Réarrangement :

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + \alpha^2 (\frac{\Delta t}{\Delta x^2})\{\ u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\} \tag{2.14}$$

Nous subdivisons l'intervalle spatial $[0,1]$ en $N+1$ points d'échantillonnage équidistants $x_n = n\Delta x$. L'intervalle de temps $[0,T]$ est subdivisé en $M+1$ niveaux de temps égaux $t_k = k\Delta t$. À chacun de ces points d'échantillonnage spatio-temporels, nous introduisons approximations :

$$u(x_n, t_k) \simeq u_n^k$$



$$u_n^{k+1} = u_n^k + \alpha^2(\frac{\Delta t}{\Delta x^2})(u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k)$$

Ceci est implémenté dans les tableurs Heat0 et Heat.

Mise en œuvre des conditions aux limites dérivées : Supposons que les conditions aux limites (2.13) sont changées en

$$BC/u(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

Considérons une approximation par différence centrale de $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t)$ ou $x_N = N\Delta x = 1$,

$$\frac{u(x_N + \Delta x, t) - u(x_N - \Delta x, t)}{\Delta x} = 0$$

En réorganisant on obtient :

$$u(x_N + \Delta x, t) = u(x_N - \Delta x, t) \tag{2.15}$$

Puisque x_N on observe que $x_N + \Delta x$ est hors du domaine. Pour tenir compte de cela, nous introduisons une colonne supplémentaire u_{N+1} dans lequel on copie les valeurs u_{N-1}. Dans la colonne x_N nous implémentons la même approximation de différence pour l$'$équation de la chaleur, à savoir :

$$u_N^{k+1} = u_N^k + \alpha^2(\frac{\Delta t}{\Delta x^2})(u_{N+1}^k - 2u_N^k + u_{N-1}^k) \tag{2.16}$$

Ceci est implémenté dans le tableur Heat0f.

pendant que $u_{N+1}^k = u_{N-1}^k$ (voir (2.15)) puisque la colonne u_{N-1}^k est copié dans la colonne u_{N+1}^k . Notez que ce BC pourrait être mis en œuvre une autre façon sans introduire la colonne supplémentaire, en éliminant u_{N+1} de (2.15) et (2.16) :

$$u_N^{k+1} = u_N^k + 2\alpha^2(\frac{\Delta t}{\Delta x^2})(u_{N-1}^k - u_N^k).$$

Si cette dernière équation est implémentée en x_N il n'est pas nécessaire d'introduire une colonne supplémentaire u_{N+1} ou d'implémenter l'équation de différence donnée en (2.16) en tant que condition aux limites dérivée est prise en charge automatiquement.

Stabilité du schéma aux différences finies pour l'équation de la chaleur

Considérez l'approximation aux différences finies suivante de l'équation de la chaleur 1D :

$$u_N^{k+1} - u_N^k = \frac{\Delta t}{\Delta 4x^2}(u_{N+1}^k - 2u_N^k + u_{N-1}^k)$$

Donc

$$u_N^k \simeq u(x_n, t_k)$$

péché $u_N^k = \phi k \exp^{in\Delta x\theta}$

$$\begin{aligned}(\phi_{k+1} - \phi_k)\exp^{in\Delta x\theta} &= \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(\exp^{i\Delta x\theta} - 2 + \exp^{-i\Delta x\theta}) \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x^2}[2\cos(\theta\Delta x) - 2]\phi_k \exp^{in\Delta x\theta}\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\phi_{k+1} &= \phi_k - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} 4\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})4^{\text{o}} \text{ puisque} \quad \cos(\theta\Delta x) - 1 = -2\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2}) \\ &= [1 - \frac{4\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})]\phi_k\end{aligned}$$

Maintenant, pour la stabilité, nous exigeons que $|\phi_{k+1}| \leq |\phi_k|$ pour que

$$\begin{aligned}&|1 - \frac{4\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})| \leq 1 \\ &\longrightarrow -2 \leq -\frac{4\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2}) \leq 0\end{aligned}$$

L'inégalité de droite est satisfaite automatiquement, tandis que l'inégalité de gauche peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{4\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2}) \leq 2$$

Depuis ($\sin^2 \leq 1$)cette condition est satisfaite pour tout θ pourvu

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2} \tag{2.17}$$

2.3.2 Équation de la chaleur 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

Les méthodes employées pour la solution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle peuvent être facilement étendues à la solution de (1).

Considérons une région carrée $0 \leq x \leq y \leq a$ et supposons que u est connu du tout points à l'intérieur et sur la limite de ce carré.

Si h est la taille de pas, alors un point de maillage$(x, y, t) = (ih, jh, nl)$ peut être noté simplement (i, j, n).

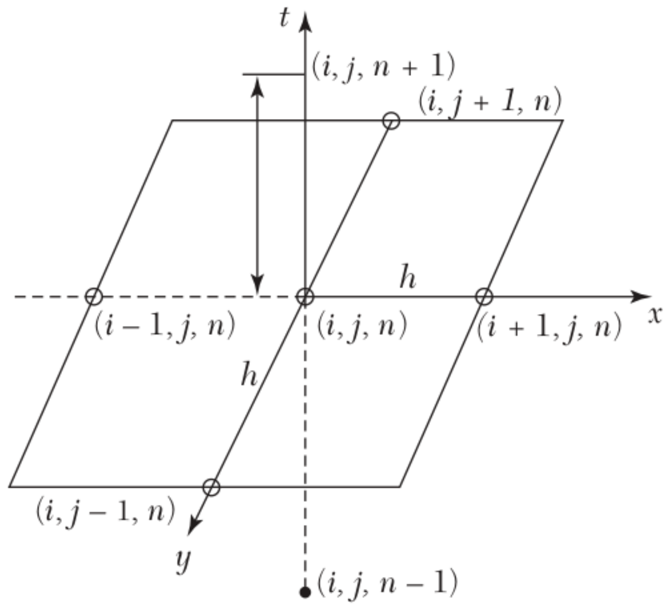
En remplaçant les dérivées de (1) par leurs approximations aux différences finies, on obtient

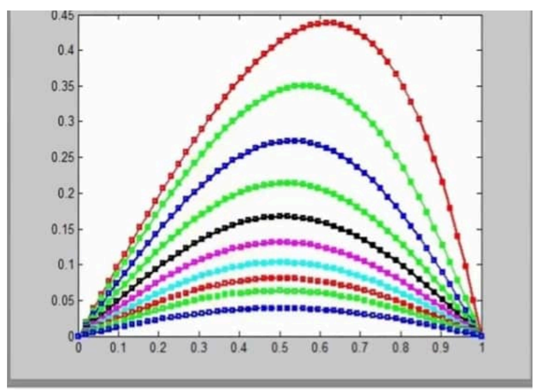
$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{l} = \frac{c^2}{h^2} \{(u_{i-1,j,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i+1,j,n}) + (u_{i,j-1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j+1,n})\}$$

i.e.,

$$u_{i,j,n+1} = u_{i,j,n} + \alpha(u_{i-1,j,n} + u_{i+1,j,n} + u_{i,j-1,n} - 4u_{i,j,n}) \tag{2.18}$$

où $\alpha = lc^2/h^2$ Cette équation a besoin des cinq points disponibles sur le nième





(a) Représentation du changement de solution de l'équation de la chaleur

Chapitre 3

Etude Du Problème Parabolique Linéaire Gouvernée Par Le Système De Lamé.

problème aux sence classique :

$$(p)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - L(u) = f(t,u) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

problème aux sence fractionnaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda^{RL}D^{\alpha}u + (\lambda+u)^{RL}D^{\gamma+\beta}u) = f(t,u) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

calculon l'équation Integrale :

$$\begin{aligned} \lambda^{RL}D^{\alpha}u + (\lambda+u)^{RL}D^{\gamma+\beta}u = f(t,u) + \frac{\partial u}{\partial t}{}^{RL}D^{\alpha}u(t) - \frac{1}{\lambda}f(t,u) + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\lambda+u}{\lambda}^{RL}D^{\gamma+\beta}u(t) \\ {}^{RL}I^{\alpha}\,{}^{RL}D^{\alpha}u(t) = -\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha}f(t,u) + \frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-1}u(t) - \frac{\lambda+u}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-(\gamma+\beta)}u(t) \\ u(t) = -\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha}f(t,u) + \frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-1}u(t) - \frac{\lambda+u}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-(\gamma+\beta)}u(t) + C1^{\alpha-1} \\ + u(t) + C2^{\alpha-1} \end{aligned}$$

calculons $C1$ et $C2$:

on $u(0,t)=0 \Longrightarrow C2=0$

et on a :$u(l,t)=0 \Longrightarrow$

$$C1=[-\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha}f(l,u)+\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-1}u(l)-\frac{\lambda+u}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-(\gamma+\beta)}u(l)]l^{1-\alpha}$$

remplace $C1etC2$ trouvons :

$$\begin{aligned}u(t)=&-\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha}f(t,u)+\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-1}u(t)-\frac{\lambda+u}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-(\gamma+\beta)}u(t)+\\&\left[-\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha}f(l,u)+\frac{1}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-1}u(l)-\frac{\lambda+u}{\lambda}^{RL}I^{\alpha-(\gamma+\beta)}u(l)\right]l^{1-\alpha}t^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Annex

Résolution sur Matlab

Résoudre le problème de l'équation de la chaleur dans 2D

Dans cette partie, nous représente les résultats numérique dans le programme Matlab, par le code suivant :

```
clc;clear all;close all;format short
N=input('N=');N=N+1;
h=1/(N+1);T=1;M=400;dt=T/M;t=1:1:M;
lamda=dt/h^2
A= diag((1+2*lamda)*ones(1,N))+diag(-lamda*ones(1,N-1),1)+diag(-lamda*ones(1,N-1),
X=h:h:1-h;
W=(1-X).*X.*exp(X);
U(1,:)=W.B=inv(A);
for n=1:M-1
    U(n+1,:)=B*U(n,:)';
end
U0=zeros(M,1);Ufin=zros(M,1);U=[U0 U Ufin];
X=[0 x 1];
figure(1)
plot(x,U(1,:),'-rs', 'LineWidth',1.5,'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(10,:),'-gs', 'LineWidth',1.5,'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(20,:),'-bs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',3),hold on
```

```
U(1,:)=W.B=inv(A);
for n=1:M-1
    U(n+1,:)=B*U(n,:)';
end
U0=zeros(M,1);Ufin=zros(M,1);U=[U0 U Ufin];
X=[0 x 1];
figure(1)
plot(x,U(1,:),'-rs', 'LineWidth',1.5,'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(10,:),'-gs', 'LineWidth',1.5,'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(20,:),'-bs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(30,:),'-gs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(40,:),'-ks', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(50,:),'-ms', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(60,:),'-cs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSize',3),hold on
plot(x,U(70,:),'--rs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSizr',3),hold on
plot(x,U(80,:),'--gs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSizr',3),hold on
plot(x,U(100,:),'--bs', 'LineWidth',1.5, 'MarkerSizr',3),hold on
```

CONCLUSION

Avec l'aide et la préservation de Dieu, j'ai atteint les dernières lettres de ce mémoire, et ce fut un voyage intéressant et agréable, au cours duquel j'ai rencontré des théories et des idées mathématiques pures et merveilleuses, sachant que je n'ai pas mentionné dans mes recherches l'équation de la chaleur selon à Fourier et à la parabole linéaire dans le système de Lamy, sauf dans la mesure où l'aiguille prélève de l'eau de mer, et tout travail humain ne peut être exempt d'impuretés, vous trouverez donc des lacunes et des changements.

Bibliographie

[1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et application. Dunod, Paris-1999

[2] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problemes aux limites non linéaires.. Dunod. (1969).

[3] R.A. Adams, Sobolev space, Academic Press 1976.

[4] Raviart et J. M Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles., Masson-1992.

[5] Demailly J.P., (1991) , Analyse numÃ©rique et Ã‰quations diffÃ©rentielles, Presses universitaires de Grenoble, 1991.J.

[6] M. Meflah, Study of a similar nonlinear heat problem, internatoinal communication, 1st international conference on pure and applied mathematics ouargla 2021.

[7] H.Hadji, Etude d'un problème hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé avec un terme viscoélastique, Mèmoire de Master 2020.

[8] B.Tellab,Etude de quelques équations de chaleur avec mémoire, Mèmoire de Magister 2011.

[9] Diffusion de la chaleur dans une barre conductrice.

[10] Sidi Mohamed Ben Abdellah university , p-laplacien fractionnaire $(-\Delta)_p^s$ Mémoire de Master 2017.

[11] Kilbass : theory and Application of Fractional Differential Equations .

[12] Taiyong chen, Wenbin Liu :An anti - periodic boundary value problem for the fractional differential equation with a p-laplacian 2012.

Résumé

Dans ce travail, nous avons résolu les problèmes suivants :

La première partie : Nous avons étudié l'équation de diffusion linéaire de la chaleur selon Fourier pour les deux dimensions par la méthode de séparation des variables et de différenciation du fini.

Deuxième partie : Nous étudions le problème de la parabole linéaire régie par le système de Lamy.

Mots clés : Équation de la chaleur - Ordre fractionnaire - Différenciation fractionnaire - Parabole linéaire.

Abstract

In this work we have solved the following :

The first part : We studied the equation of linear heat diffusion according to Fourier for the two dimensions by the method of separating the variables and differentiating the finite.

Part Two : We study the linear parabola problem governed by the Lamy system.

Keywords : Heat equation - Fractional order - Fractional differentiation - Linear parabola.

ملخص

في هذا العمل قمنا بحل مايلي :

الجزء الأول : درسنا معادلة انتشار الحرارة الخطية وفق لفورييه للبعدين بطريقة فصل المتغيرات وتفاضل المنتهي.

الجزء الثاني : ندرس مشكلة القطع المكافئ الخطية التي يحكمها نظام لامي .

الكلمات المفاحية: معادلة الحرارة - الترتيب الكسري - الاشتقاق الكسري - القطع المكافئ الخطية.