

UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA



Faculté des Mathématiques et sciences  
de la matière



DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Benhanna Fatma

Thème

Etude de l'existence local, globale , unicité et positivité  
pour le système de réaction-diffusion

Soutenu publiquement le : 15/06/2022

Devant le jury composé de :

Mr.Kouidri Mohammed	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.Abbassi Hocine	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Mr.Kouadri Ghada	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2021/2022

---

# Dédication

Louange à Dieu pour ses nombreux dons et grâces qu'il m'a permis de compléter ce mémorandum, donc la louange reste au début et à la fin.

Je dédie ce travail :

A la bougie qui a illuminé mon chemin pour moi et m'a ouvert les portes de la connaissance et de la connaissance... A la poitrine tendre et au cœur compagnon de ma mère bien-aimée... Que Dieu la protège et la revête du vêtement de la santé et de la le bien-être.

A celui qui s'est battu pour que je me repose et m'a préparé les raisons du succès... qui s'est efforcé de m'élever et de m'éduquer, mon cher père, que Dieu le protège et prolonge sa vie.

Aux stars avec qui je guide et je suis heureuse de les voir, qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours académique, mes frères, et mes oncles, tantes, oncles et tantes, et à tous ceux avec qui je suis apparenté.

A tous mes amis dont je me souviens et dont mon cœur ne se souvient pas, je leur dédie le fruit de ce travail.

---

# Remerciement

Louange à Dieu et grâce à Dieu toujours et à jamais, qui nous a bénis avec succès et nous a aidés à compléter ce mémorandum, et nous demandons à Dieu de le rendre utile et bénéfique pour les serviteurs.

Nous adressons nos plus hautes expressions de remerciements et d'appréciation avec le plus grand respect au professeur superviseur, le professeur " Kouadri Ghada " pour avoir suggéré et supervisé ce sujet, et pour tous les conseils, orientations et assistance, nous demandons à Dieu de le faire dans l'équilibre de son Bonnes actions.

Nous adressons également nos salutations de respect et d'appréciation aux professeurs " Professeur Kouidri Mohammed " et " Professeur Abbassi Hocine " du comité de discussion pour avoir accepté la discussion de ce mémorandum.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenu au cours de mon parcours scolaire, notamment les professeurs, les étudiants et les amis, en particulier les étudiants de la deuxième maîtrise en mathématiques, promotion 2022.

---

# Notations

- $\mathbb{R}$  : corps des réels .
- $[0, T]$  : l'intervalle fermé  $0 \leq t \leq T$  .
- $\Omega$  : un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  .
- $\|\cdot\|$  la norme associée aux produits scalaires .
- $L^\infty(\Omega) := u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  mesurable ;  $\sup |u(t)| < +\infty$  .
- $L^2(\Omega)$  : l'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue  $dx$  .
- $L^p$  : l'espace des fonctions de puissance  $p^{ime}$  intégrable pour la mesure de Lebesgue  $dx$ .
- $H^1(\Omega)$  : l'espace de Sobolev d'ordre 1 .
- $H^2(\Omega)$  : l'espace de Sobolev d'ordre 2 .
- $\|x\|$  : la norme de  $x$  .
- $\ll$  : beaucoup moins que

# Table des matières

<b>Dédication</b>	<b>i</b>
<b>Remerciement</b>	<b>ii</b>
<b>Notations</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Rappels mathématiques sur les équations paraboliques périodiques</b>	<b>1</b>
1.1 l'équation parabolique périodique sur $\mathbb{R}^N$ . . . . .	1
1.1.1 le problème de la valeur initiale . . . . .	1
1.1.2 Existence de points fixes d'ordre stable . . . . .	3
1.1.3 Problèmes aux valeurs propres paraboliques périodiques sur l'en- semble $\mathbb{R}^N$ . . . . .	7
1.1.4 Solutions T-périodiques stables $L_\infty$ . . . . .	10
1.2 quelque notions et résultats préliminaires . . . . .	13
1.2.1 Opérateurs différentiels . . . . .	13
1.2.2 Formule de Green : . . . . .	14
1.2.3 Inégalité de Hölder : . . . . .	14
1.2.4 Espaces de Sobolev . . . . .	14
<b>2 Modélisation mathématique pour des systèmes de réaction-diffusion</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Système de réaction-diffusion . . . . .	17
2.2.1 Réaction et Diffusion . . . . .	17
2.3 Modélisation des réactions chimiques . . . . .	18
2.3.1 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus	18

---

<b>3</b>	<b>Existence local, globale , unicité et positivité pour d'un système de réaction diffusion</b>	<b>37</b>
3.1	introduction . . . . .	37
3.2	Existence locale et unicité pour des systèmes de réaction diffusion . . .	38
3.3	Positivité de la solution . . . . .	41
3.4	Existence globale pour les systèmes de réaction-diffusion triangulaire . .	45
3.5	Applications . . . . .	47
3.6	Les étapes de la démonstration du résultat principal . . . . .	49
3.7	Annexe . . . . .	59
	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>

# Introduction

Les mathématiques ont toujours le bénéfice de participer au développement de plusieurs domaines scientifiques : la physique, la biologie, la biomédicale, l'ingénierie... Pour le mathématicien, ces domaines offrent de nouvelles et passionnantes branches de recherches, pendant que pour le spécialiste, le modelage mathématique offre un autre outil de la recherche proportionnée avec de nouvelles techniques du laboratoire.

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus.

On trouve le système de réaction-diffusion dans plusieurs domaines, tels que la biologie, la physique, la géologie et l'écologie .

Notre but dans ce travail est l'étude de l'existence locale ,globale et unicité et positivité pour d'un système de réaction-diffusion.

Le système à etudier s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - D\Delta v(x, t) = f(v(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)v_r + \lambda_r \frac{\partial v_r}{\partial v} = \alpha_r, & \text{pour } 1 \leq r \leq m \text{ } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

où :

\*  $v = (v_1, \dots, v_m), v_r : \Omega(0, \infty) \longrightarrow R$ , pour  $1 \leq r \leq m$ ,

\*  $\frac{\partial v}{\partial t}$  désigne le dérivée par rapport au temps de  $v$ ,

- \*  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien :  $\Delta v_r(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2}(x, t)$ , pour  $1 \leq r \leq m$ ,
- \*  $D$  matrice diagonale carrée d'ordre  $m$  dont les coefficients  $d_r$  sont strictement positifs,
- \*  $f$  fonction mesurable de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  et localement lipschitzienne

$$|f(p) - f(\hat{p})| \leq K(r)|p - \hat{p}|, \forall p, \hat{p} \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |p|, |\hat{p}| \leq r$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^m$ ,

\* la condition initiale est définie par

$$v_0 = (v_{0i})_{1 \leq i \leq m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^m,$$

\*  $\frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \nabla v_r \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \cdot n_j$  désigne la dérivée normale de  $v_r$ ,  $\vec{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq m}$  est le vecteur normal extérieur à  $\partial\Omega$ ,

\* pour tout  $1 \leq r \leq m$ ,  $\lambda_r$  et  $\alpha_r$  vérifient

$$0 \leq \lambda_r \leq 1, \alpha_r \in C^2(\bar{\Omega})$$

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le première chapitre nous commenons par rappale mathématique sur l'équation parabolique périodique.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des réactions chimiques. Ceci conduit à des système dits de réaction-diffusion. Nous commençons par rappeler certaines lois fondamentales de la physique (loi de conservations) et certaines lois de comportement. Nous arrivons à modéliser l'évolution du réaction chimiques sous forme de systèmes différentiels.

Dans le troisième chapitre , nous nous intéressons à l'étude de l'existence locale , globale et unicité et positivité pour d'un système de réaction-diffusion.



# Chapitre 1

## Rappels mathématiques sur les équations paraboliques périodiques

Les équations de réaction-diffusion sont l'un des types d'équations paraboliques qui ont d'importantes applications en sciences naturelles telles que les biomathématiques ou la théorie de la combustion chimique. Au sein de cette classe d'équations, les équations périodiques semblent particulièrement intéressantes car elles permettent de prendre en compte les fluctuations saisonnières des phénomènes qu'elles modélisent. Pour le traitement mathématique de telles équations sur des domaines bornés, nous nous référons principalement à la monographie récente, [11].

### 1.1 l'équation parabolique périodique sur $\mathbb{R}^N$

#### 1.1.1 le problème de la valeur initiale

considérons le semi-linéaire non autonome suivant problème de réaction-diffusion sur  $\mathbb{R}^N (n \geq 1)$ ;

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x, t, u) \text{ sur } \mathbb{R}^N(0, \infty], \\ u(., 0) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.1)$$

pour les valeurs initiales  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ ; c'est-à-dire que  $u_0$  est bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}^N$ .

par tout nous supposons que  $f$  est une fonction suffisamment lisse (Hölder continue) étant périodique en  $t$  avec une période donnée  $t > 0$ , et  $f(., ., 0) \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}^N \mathbb{R}$ .

Nous nous intéressons aux propriétés d'existence et de stabilité des solutions  $T$ -périodiques ; c'est à dire, solutions globales de (1.1) qui sont  $T$ -périodiques en temps.

Soient  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  des sous-et des sur-solutions ,respectivement de (1.1) satisfaisant

$$\begin{aligned} \underline{u}(\cdot, 0) \leq \underline{u}(\cdot, T), \bar{u}(\cdot, 0) \geq \bar{u}(\cdot, T) & \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \\ \underline{u}_0 := \underline{u}(\cdot, 0) \leq \bar{u}(\cdot, 0) =: \bar{u}_0 & \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pour des définitions précisses des sous-et sur-solution nous renvoyons à [21] ou [9] règles.

$$V = [\underline{u}_0, \bar{u}_0]_{BUC(\mathbb{R}^N)} = \{u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N) : \underline{u}_0 \leq u_0 \leq \bar{u}_0\}.$$

Siot  $X_0$  siot  $C_0(\mathbb{R}^N)$  siot  $BUC(\mathbb{R}^n)$ . D'après les résultats de [21] et [9] sur la solvabilité classique et l'existence de solution globales de (1.1) et du principe de comparuson (cf.théorème 1,7 de [21] ) il s'ensuit que pour les valeurs initiales  $u_0 \in V \cap x_0$  la solution  $u(\cdot, u_0)$  de (1.1) existe pour tous les instants ; c'est-à-dire,  $t^+(u_0) = +\infty$ ,et satisfait

$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}(\cdot, T) \leq u(T; u_0) \leq \bar{u}(\cdot, T) \leq \bar{u}_0.$$

Ainsi , en définissant la temps- $T$ -map  $S$  par :

$$S : V \cap X_0 \longrightarrow X_0, u_0 \longrightarrow u(T; u_0),$$

on obtient immédiatement que  $S$  est continue et strictement conservatrice d'ordre , et les points fixes de  $S$  sont en bijectif avec les solution  $T$ -périodiques de (1.1) dans  $V \cap X_0$ .

**Remarque 1** *Ici, le cône positif  $X_0^+$  est constitué de toutes les fonctions positives ponctuelles dans  $X_0$ . De plus, nous avons les éléments suivants :*

1. *Le cône positif de  $BUC(\mathbb{R}^N)$  a un intérieur non vide. Il se compose de tous les éléments positifs qui sont bornées loin de zéro*
2. *Ce qui précède n'est pas vrai pour  $C_0(\mathbb{R}^N)$ . Le cône positif de  $C_0(\mathbb{R}^N)$  a un intérieur vide et les points quasi-intérieurs de  $C_0(\mathbb{R}^N)^+$  sont exactement les*

*fonctions qui sont partout positives*

3. Soit  $w_1, w_2 \in X_0$ . Si  $w_1(x) < w_2(x)$  est vérifié ponctuellement sur  $R^N$  alors on écrira  $w_1 <_p w_2$ . Notons que, alors que  $w_1 \ll w_2$  est équivalent à  $w_1 <_p w_2$  dans  $C_0(R^N)$ , ce n'est pas vrai dans  $BUC(R^N)$ .

Dans ce qui suit, nous voulons établir les conditions sous les quelles existent des solutions  $T$ -périodiques positives (asymptotiquement) stables de (1.1). En particulier, nous nous intéressons à la stabilité par rapport à la  $L_\infty$ -norme. Premièrement, nous prouvons l'existence de solutions  $T$ -périodiques stables d'ordre (cf. Proposition 2), puis nous montrons que dans certains cas la stabilité d'ordre implique la  $L_\infty$ -stabilité (cf. Proposition 5). Les définitions pertinentes concernant la stabilité peuvent être trouvées dans [14],[15] et [9].

### 1.1.2 Existence de points fixes d'ordre stable

Un point fixe  $v$  de  $S$  dans  $V$  est dit stable d'ordre par le bas s'il existe une suite strictement croissante  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-solutions (pas nécessairement strictes) de  $S$  dans  $V$  convergeant vers  $v$  par le bas. Le point fixe  $v$  est dit fortement stable d'ordre par le bas si les sous-solutions sont strictes. La stabilité d'ordre (forte) d'en haut est définie de manière analogue en remplaçant l'augmentation par la diminution et la sous-solution par la supsolution. Un point fixe d'ordre (fortement) stable a la propriété correspondante d'en haut et d'en bas.

Comme ci-dessus, nous supposons qu'il existe une paire liée à l'ordre  $\underline{u}_0 \leq \bar{u}_0$  de sous- et sur-solutions de  $S$ . D'après les résultats de [21] et [9], nous obtenons par le schéma d'itération monotone des points fixes minimaux et maximaux de  $S$  dans  $V$  par

$$u_{\min} := \lim_{n \rightarrow \infty} S^n(\underline{u}_0)$$

et

$$u_{\max} := \lim_{n \rightarrow \infty} S^n(\bar{u}_0)$$

Tout au long de cette section, nous supposons que les deux points fixes  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$  appartiennent à  $C_0(R^N)$ . Cela signifie que tout point fixe de  $S$  dans  $V$  appartient à  $[u_{\min}, u_{\max}]_{C_0(R^N)}$ .

Le résultat suivant est crucial pour notre preuve de l'existence de points fixes d'ordre stable de  $S$  dans  $V$ .

**Proposition 1** *Supposons qu'il existe des constantes positives  $R_0$  et  $\sigma_0$  tel que*

$$f_u(x, t, u) \leq 0 \text{ pour } |x| \geq R_0, |u| \leq \sigma_0 \text{ et } t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

*Soient  $v_1 < v_2$  des points fixes de  $S$  dans  $V$ .*

*Alors précisément l'une des trois alternatives est vraie :*

1. *Il existe un autre point fixe de  $S$  entre  $v_1$  et  $v_2$ .*
2. *Il existe une orbite entière  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  constituée de sous-solutions strictes de  $S$ , reliant  $v_1$  et  $v_2$ ; c'est-à-dire,  $y_n \rightarrow v_1$  comme  $n \rightarrow -\infty$ ,  $y_n \rightarrow v_2$  comme  $n \rightarrow +\infty$ , et il n'y a pas de sur-solution (stricte) entre  $v_1$  et  $v_2$ .*
3. *Il existe une orbite entière  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  constituée de sur-solutions strictes de  $S$ , reliant  $v_2$  et  $v_1$ ; c'est-à-dire,  $x_n \rightarrow v_2$  comme  $n \rightarrow -\infty$ ,  $x_n \rightarrow v_1$  comme  $n \rightarrow +\infty$ , et il n'y a pas de sous-solution (stricte) entre  $v_1$  et  $v_2$ .*

**Remarque 2** *La proposition 1 est une version plus générale de la proposition 4.3 dans [21] et reprend un résultat dû à E.N. Dancer et P. Hess dans [12]. La preuve de la proposition 4.3 dans [21] est basée sur des techniques développées par E.N. Dancer dans [5] et [6], qui dépendent fortement des propriétés spectrales de l'application de période  $S$ . L'avantage de notre approche ici est double : premièrement, nos hypothèses sont plus faibles que celles de [21] et deuxièmement, en utilisant des arguments de principe de comparaison, nous avons pu simplifier la preuve du résultat ci-dessus dans une certaine mesure. Notez qu'il n'est pas possible d'adapter les arguments de [21] à notre situation. Un des ingrédients essentiels de la preuve de la proposition 1 est contenu dans les lemmes suivants, où nous utilisons une idée similaire à celle du Lemme 3.1 dans [23].*

**Lemme 1** *Supposons (1.3) et soit  $\underline{u}_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$  une sous-solution de  $S$  et  $\bar{u}_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$*

une sursolution de  $S$  satisfaisant

$$\underline{u}(x, t) := u(x, t; \underline{u}_0) \leq u(x, t; \bar{u}_0) =: \bar{u}(x, t) \text{ pour } |x| \leq R_0 \text{ et } t \in [0, T]$$

et

$$|\bar{u}(x, t) - \underline{u}(x, t)| \leq \sigma_0 \text{ pour } |x| \geq R_0 \text{ et } t \in [0, T]$$

Alors

$$\underline{u} \leq \bar{u} \text{ sur } \mathbb{R}^N[0, T].$$

**preuve 1** En posant  $w := \underline{u} - \bar{u}$  on affirme que  $w \leq 0$  sur  $\mathbb{R}^N[0, T]$ .

De notre hypothèse on en déduit immédiatement que  $w(\cdot, 0) \leq w(\cdot, T)$  et

$$\partial_t w - \Delta w = f(x, t, \underline{u}) - f(x, t, \bar{u}) = f_u(x, t, \xi)w \quad (1.4)$$

sur  $\mathbb{R}^N[0, T]$  pour une fonction  $\xi$  appropriée, qui vérifie  $|\xi(x, t)| \leq 0$  pour  $|x| \geq R_0$  et  $t \in [0, T]$ . Si  $w(\cdot, 0) \leq 0$  on  $\mathbb{R}^N$ , le principe du maximum donne immédiatement l'assertion. Supposons par souci de contradiction que  $w(\Delta, 0) \not\leq 0$ . Puisque  $w(\Delta, 0)$  appartient à  $C_0\mathbb{R}^N$ , il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$M := w(x_0, 0) = \max_{x \in \mathbb{R}^N} w(x, 0) > 0.$$

De plus, il est clair que  $|x_0| > R_0$ . En fixant  $\tilde{w} := w - M$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{w} - \Delta \tilde{w} - f_u(x, t, \xi)\tilde{w} \leq 0 \quad \text{pour } |x| > R_0, t \in (0, T], \\ \tilde{w} < 0 \text{ pour } |x| = R_0, t \in (0, T], \\ \tilde{w}(\cdot, 0) \leq 0 \text{ pour } |x| \geq R_0. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Du principe du maximum, nous concluons  $w(x_0, T) < M = w(x_0, 0)$ . Cela donne la contradiction nécessaire.

**Lemme 2** Supposons (1.3) et soit  $v_1 < v_2$  des points fixes de  $S$  dans  $V$ . Supposons qu'il y ait existé une orbite entière  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  constituée de sous-solutions strictes de  $S$ , reliant  $v_1$  et  $v_2$ ; c'est-à-dire,  $y_n \rightarrow v_1$  comme  $n \rightarrow -\infty$ ,  $y_n \rightarrow v_2$  comme  $n \rightarrow +\infty$

.Alors il n'y a pas de sur-solution de  $S$  entre  $v_1$  et  $v_2$ .

**preuve 2** Supposons par souci de contradiction qu'il existe une sur-solution  $\bar{w}_0$  de  $S$  entre  $v_1$  et  $v_2$ . Sans perte de généralité on peut supposer que

$$v_2(x, t) - v_1(x, t) \leq \sigma_0$$

pour  $x \in \mathbb{R}^N$  satisfaisant  $|x| \geq R_0$  et  $t \in [0, T]$ . Comme il existe des sous-solutions strictes  $y_n$  arbitrairement proche de  $v_1$  il existe un  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tel que

$$u(x, t; y_{n_0}) \leq u(x, t; \bar{w}_0) \text{ pour } |x| \leq R_0 \text{ et } t \in [0, T].$$

Ainsi, le lemme 1 implique immédiatement  $y_{n_0} \leq \bar{w}_0$ . Mais c'est une contradiction, puisque  $S^k(y_{n_0}) = y_{k+n_0}$  tend vers  $v_2$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

**Remarque 3** En examinant la preuve du lemme 2, nous voyons que c'est encore plus vrai. Appelons un point fixe  $v$  de  $S$  dans  $\tilde{V} := [u_{\min}, u_{\max}]_{C_0(\mathbb{R}^N)}$  ordre repoussant par dessus ou par dessous, dès lors qu'il existe des sous-solutions strictes arbitrairement proches dans  $\tilde{V}$  situées au-dessus de  $v$  ou des sur-solutions arbitrairement proches dans  $\tilde{V}$  situées en dessous de  $v$ . Alors un point fixe  $v$  de  $S$  dans  $\tilde{V}$  ne peut pas être stable d'ordre et répulsif d'ordre en même temps. Cela signifie qu'il n'est pas possible qu'un point fixe  $v$  de  $S$  dans  $V$  ait à la fois des sous-solutions strictes et des sur-solutions strictes dans  $\tilde{V}$  du même côté arbitrairement proches de lui. Bien que cela soit trivial sur des domaines bornés, cela est loin d'être évident dans notre situation.

**preuve 3** de la proposition 1. Par les résultats de [12] ou [11] il suffit de montrer que dans le cas (2) il n'y a pas de sur-solutions de  $S$  dans  $(v_1, v_2)_{C_0(\mathbb{R}^N)}$ . Ceci n'est nullement évident, puisqu'il peut exister une sur-solution  $\bar{w}$  et des sous-solutions strictes arbitrairement proches de  $v_1$ , qui ne sont pas liées à l'ordre de  $\bar{w}$ . Mais à cause du lemme 5, cela ne peut pas se produire.

Cela prouve l'affirmation.

Si  $S^n(\underline{u}_0)$  ou  $S^n(\bar{u}_0)$  ne convergent pas uniformément sur  $\mathbb{R}^N$  vers  $u_{\min}$  ou  $u_{\max}$ , respectivement, il n'est pas clair si ces points fixes sont d'ordre stable par le bas ou par le haut. Néanmoins, nous obtenons le résultat suivant sur l'existence de points fixes d'ordre stable

**Proposition 2** *Soit (1.3) satisfait. S'il existe des sous- et sur-solutions strictes  $\underline{u}_n$  et  $\bar{u}_n$  de  $S$  telles que*

$$\underline{u}_n < u_{\min} \leq u_{\max} < \bar{u}_n \text{ et } \limsup_{|x| \rightarrow \infty} (\bar{u}_n(x) - \underline{u}_n(x)) < \frac{1}{n}$$

*pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , alors il existe toujours un point fixe d'ordre stable de  $S$  dans  $V$ . Plus précisément, il existe un point fixe fortement stable d'ordre ou un continu non trivial totalement ordonné  $F := u_1 \leq u \leq u_2 : S(u) = u$  de points fixes d'ordre stable de  $S$  dans  $V$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont points fixes de  $S$ , qui sont fortement stables d'ordre par le bas et par le haut, respectivement.*

**preuve 4** *En mettant*

$$\underline{w}_n := \sup \underline{u}_n, S^n(\underline{u}_0) \text{ et } \bar{w}_n := \inf \bar{u}_n, S^n(\bar{u}_0)$$

*pour  $n \in \mathbb{N}$  on obtient des sous- et sur-solutions strictes de  $S$  convergeant vers  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$ , respectivement, uniformément sur  $\mathbb{R}^N$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (cf. Théorèmes 3 et 4 dans [21]). Par conséquent,  $u_{\min}$  est fortement stable d'ordre par le bas et  $u_{\max}$  est fortement stable d'ordre par le haut et les deux points fixes se trouvent dans  $C_0(\mathbb{R}^N)$ . Ainsi, grâce à la proposition 1, on peut raisonner comme dans la preuve du corollaire 4.7 de [21] pour obtenir l'assertion.*

**Remarque 4** *Il faut remarquer que la proposition 1 ainsi que la proposition 2 reposent essentiellement sur le fait que  $S$  transforme les intervalles d'ordre dans  $C_0(\mathbb{R}^N)$  en ensembles relativement compacts dans  $C_0(\mathbb{R}^N)$ .*

### 1.1.3 Problèmes aux valeurs propres paraboliques périodiques sur l'ensemble $\mathbb{R}^N$

Les problèmes aux valeurs propres paraboliques périodiques sur des domaines bornés ont été largement étudiés (cf. [7], [11]). Dans [16], [8] et [9] D. Daners et P. Koch Medina ont étudié de tels problèmes sur l'ensemble  $\mathbb{R}^N$ . Dans ce qui suit, nous utiliserons leur travail. Soit  $v$  une solution T-périodique de (1.1) dans  $C_0(\mathbb{R}^N)$ . On considère le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \phi - \Delta \phi - f_u(x, t, v) \phi = \lambda \phi & \text{sur } \mathbb{R}^N \mathbb{R}, \\ \phi(\cdot, t) \in C_0(\mathbb{R}^N) & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ \phi \text{ est } T\text{-périodique} & . \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Soit  $S_v$  la carte de période associée à (1.6) et  $r(S_v)$  le rayon spectral de  $S_v$ .

**Proposition 3** *Soit  $v$  une solution  $T$ -périodique de (1.1) dans  $C_0(\mathbb{R}^N)$  et supposons (1.3).*

1. *Si  $r(S_v) > 1$ , alors il existe une unique valeur propre principale  $\lambda_1(v)$  et une fonction propre positive correspondante  $\phi$  de (1.6). De plus,  $\lambda_1(v)$  est donné par  $\lambda_1(v) = -\frac{1}{T} \log r(S_v)$ .*
2. *L'assertion (1) reste vraie, si  $r(S_v) = 1$ , pourvu qu'il existe une constante  $c > 0$  tel que  $f_u(x, t, u) \leq -c$  pour  $|x| \geq R_0, t \in \mathbb{R}$  et  $|u| \leq \delta_0$ .*

**preuve 5** *L'assertion peut être directement obtenue à partir des résultats de [16] en utilisant un argument d'approximation.*

*D'autre part, d'après les résultats de [11] sur les problèmes aux valeurs propres périodiques-paraboliques sur les domaines bornés il est bien connu que pour tout  $R > 0$  il existe le principal valeur propre  $\lambda_R(v)$  et une fonction propre positive  $\phi_{R,v}$  de la valeur propre parabolique périodique problème sur le domaine borné  $\overline{\mathbb{B}}(0, R)$  :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \phi - \Delta \phi - f_u(x, t, v) \phi = \lambda \phi & \text{dans } \mathbb{B}(0, R) \mathbb{B}, \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial \mathbb{B}(0, R) \mathbb{B}, \\ \phi \text{ est } T\text{-périodique.} & \end{array} \right. \quad (1.7)$$

*Comme dans le lemme 6.6 de [16] nous concluons que  $R \mapsto \lambda_R(v)$  est strictement décroissant et borné pour  $R \rightarrow +\infty$ , pourvu que  $f$  satisfasse (1.3). Ainsi, nous pouvons définir*

$$\lambda_\infty(v) := \lim_{R \rightarrow \infty} \lambda_R(v). \quad (1.8)$$



De plus, nous mentionnons que les estimations de la valeur propre principale  $\lambda_R(v)$  ci-dessus et ci-dessous sont donnés dans [11]. De telles estimations sont utiles chaque fois que l'on s'intéresse à conditions suffisantes pour  $\lambda_\infty(v) < 0$ .

Il est naturel de se demander s'il existe une relation entre  $\lambda_\infty(v)$ , l'asymptotique valeur propre principale, et  $\lambda_1(v)$ , la valeur propre principale du problème aux valeurs propres sur  $\mathbb{R}^N$ . Une réponse partielle est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 4** Soit  $v$  une solution  $T$ -périodique de (1.1) dans  $C_0(\mathbb{R}^N)$ . Si (1.3) est vérifié, alors les assertions suivantes sont vraies.

1. (Daners, Koch)  $\lambda_\infty(v) \geq -\frac{1}{T} \log r(S_v)$ .
2. Supposons  $r(S_v) < 1$  ou  $r(S_v) = 1$ , et supposons dans ce dernier cas qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $f_u(x, t, u) \leq -c$  pour  $|x| \geq R_0, t \in \mathbb{R}$  et  $|u| \leq \delta_0$ . Alors  $\lambda_\infty(v) = \lambda_1(v) = -\frac{1}{T} \log r(S_v)$

**preuve 6** La preuve de (1) peut être trouvée dans [16].

La preuve de l'assertion (2) est divisée en deux parties. Soit  $\lambda_1(v) < 0$  la valeur propre principale et une fonction propre positive correspondante de (1.6). En supposant que  $\lambda_1(v) < \lambda_\infty(v)$  nous obtiendrons une contradiction. Soit  $\lambda < 0$  fixé dans  $\lambda_1(v), \lambda_\infty(v)$ .  
Mettre

$$\delta := \frac{\min \{ \phi(x, t) : |x| \geq R \text{ et } t \in [0, T] \} (\lambda - \lambda_1(v))}{1 + \max \{ |f_u(x, t, v(x, t))| : |x| \geq R \text{ et } t \in [0, T] \}} t > 0$$

ou  $R \leq R_0$  est choisi tel que  $|v(x, t)| \geq \delta_0$  pour  $|x| \leq R$  et  $t \in [0, T]$ . Fonctions de définition

$$\psi_\varepsilon := \varepsilon(\phi - \delta) \text{ pour } \varepsilon > 0$$

on a

$$\partial_t \psi_\varepsilon - \Delta \psi_\varepsilon - (f_u(x, t, v) + \lambda) \psi_\varepsilon = \varepsilon \phi(\lambda_1(v)) - \lambda + \delta \frac{\lambda + f_u(x, t, v)}{\phi(x, t)} \leq 0$$

sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ . Ainsi, en posant  $\psi_\varepsilon := \sup \psi_\varepsilon, 0$  on obtient des sous-solutions  $T$  positives arbitrairement petites du problème restreint

$$\begin{cases} \partial u - \Delta u = (f_u(x, t, v) + \lambda)u & \text{sur } \mathbb{B}(0, R_1)(0, \infty), \\ u = 0 & \text{dans } \partial\mathbb{B}(0, R_1)(0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{B}(0, R_1) \end{cases} \quad (1.9)$$

pour  $R_1 > 0$  suffisamment grand. Ceci implique que la solution nulle de (1.9) n'est pas stable ; c'est-à-dire  $\lambda_{R_1}(v) - \lambda \leq 0$ , ce qui donne la contradiction recherchée. Un argument similaire peut être utilisé si  $\lambda_1(v) = 0$ . Il suffit d'observer que  $\lambda \in (\lambda_1(v), \lambda_\infty(v))$  peut être choisi si petit que  $f_u(x, t, v(x, t)) \leq -\lambda$  vaut pour  $|x| \geq R$  et  $t \in [0, T]$ . Par conséquent, la preuve est complète

**Remarque 5** La proposition 4 donne une caractérisation de l'instabilité de la solution triviale  $u \equiv 0$  de (1.1) : La solution nulle de (1.1) est linéairement instable si et seulement si elle est linéairement instable sur un domaine borné suffisamment grand. De plus, nous soulignons que l'assertion (2) de la proposition 4 est restée ouverte dans [16].

#### 1.1.4 Solutions T-périodiques stables $L_\infty$

Dans la suite, nous établirons les conditions sous les quelles la stabilité d'ordre implique la stabilité  $L_\infty$  d'une solution T-périodique de (1.1).

Une solution T-périodique  $v$  de (1.1) est dite  $L_\infty$ -stable par le haut (par le bas) si pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $u_0 \in X_0$  vérifiant

$$\|u_0 - v(0)\|_\infty < \delta \text{ et } u_0 \geq v(0) (u_0 \leq v(0)) \text{ on a } t^+(u_0) = \infty \text{ et}$$

$\|u(t; u_0) - v(t)\|_\infty < \varepsilon$  pour  $t \geq 0$  De plus, une solution T-périodique  $v$  de (1.1) est dite (fortement) stable d'ordre si sa valeur initiale  $v_0 := v(0)$  a cette propriété comme point fixe de l'application de période  $S$ .

Nous nous intéressons maintenant à la  $L_\infty$ -stabilité d'un point fixe arbitraire d'ordre stable de  $S$  dans  $e [u_{\min}, u_{\max}]_{C_0\mathbb{R}^N}$  par rapport à  $V$ . Notez qu'il n'est pas toujours clair si la stabilité de l'ordre implique la  $L_\infty$ -stabilité.

Or (cf. Proposition 4.12 dans [21]), si  $f_u(x, t, 0) \leq -c$  pour grand  $|x|$  et une constante positive  $c$ , alors chaque solution T-périodique d'ordre stable de (1.1) dans  $V$  est  $L_\infty$ -stable par rapport à  $V$ . De plus, si la solution T-périodique est fortement stable d'ordre,

alors elle est (localement) asymptotiquement  $L_\infty$ -stable par rapport à  $V$ .

En supposant seulement (1.3) on démontre la proposition suivante :

**Proposition 5** *Soit (1.3) satisfait et soit  $v$  une solution  $T$ -périodique fortement stable d'ordre de (1) avec  $v_0 := v(\cdot, 0) \in V$ . Supposons qu'il existe des suites  $(\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous- et sursolutions strictes de  $S$  satisfaisant*

$$\underline{u}_n \ll u_{\min} \leq v_0 \leq u_{\max} \ll \bar{u}_n \text{ sur } BUC(\mathbb{R}^N)$$

et

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} (\bar{u}(x) - \underline{u}(x)) < \frac{1}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Alors  $v$  est  $L_\infty$ -stable.

**preuve 7** *Nous montrons seulement que  $v$  est  $L_\infty$ -stable d'en haut. Soit  $\varepsilon > 0$ . L'idée de la preuve est de construire une sur-solution stricte  $\bar{v}$  de  $S$  telle que*

$$v_0 \ll \bar{v} \leq v_0 + \varepsilon \text{ sur } BUC(\mathbb{R}^N).$$

De là, la réclamation découle immédiatement.

*Dans le cas  $v_0 = u_{\max}$  l'assertion découle directement de la preuve de la proposition 7.*

*Par conséquent, considérons le cas  $v_0 < u_{\max}$ . Puisque  $v_0$  est fortement stable d'ordre supérieur, il existe des supersolutions strictes  $v_k$  de  $S$  telles que  $v_k \searrow v_0$  uniformément sur  $\mathbb{R}^N$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .*

*En remplaçant  $v_k$  par  $\tilde{V}_k := \inf v_k, u_{\max}$  on peut supposer sans perte de généralité que les sursolutions strictes  $v_k$  de  $S$  appartiennent à  $C_0(\mathbb{R}^N)$ .*

*On fixe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que*

$$0 < v_{k_0}(x, t) - v(x, t) \leq \min \left\{ \delta_0, \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \text{ dans } \mathbb{R}^N [0, T],$$

*ou  $v_{k_0}(x, t) := u(x, t; v_{k_0})$ . Puisque  $v_{k_0}$  est une sur-solution stricte de  $S$  dans  $V$  un point fixe  $v_1 \geq v_0$  de  $S$  dans  $V$  tel que  $S^n(v_{k_0}) \searrow v_1$  uniformément sur  $\mathbb{R}^N$  comme  $n \rightarrow \infty$ .*

Choisir  $w_0 \in (v_1, \bar{u}_0]_{BUC(\mathbb{R}^N)}$  vérifiant

1.  $w_0 \gg v_1 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ ,
2.  $S(w_0) \leq v_0 + \varepsilon$ ,
3.  $u(x, t; S(w_0)) < u(x, t; v_{k_0})$  pour  $|x| \leq R_0$  et  $t \in [0, T]$ .

Notez que  $S(w_0) \not\geq w_0$ . En effet, en supposant par souci de contradiction que  $S(w_0) \geq w_0$  on obtiendrait par un processus d'itération un point fixe de  $S$  dans  $[w_0, \bar{u}_0]_{BUC(\mathbb{R}^N)}$ , qui est une contradiction évidente de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(\bar{u}_0) = u_{\max} \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

De plus, en utilisant un argument similaire, nous concluons qu'il n'y a pas de sous-solutions de  $S$  dans  $(v_1, v_{k_0}]_{C_0(\mathbb{R}^N)}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $\bar{u}_{2n} = \bar{u}_{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Définition de la séquence suivante

$$\begin{aligned} w_1 &:= \inf \{w_0, S(w_0), \bar{u}_0\}, \\ w_2 &:= \inf \{w_0, S(w_1), \bar{u}_1\}, \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ w_{n+1} &:= \inf \{w_0, S(w_n), \bar{u}_n\}. \end{aligned}$$

Il est évident grâce à  $S(w_0) \not\geq w_0$  que  $w_{n+1} < w_n$  et donc  $S(w_{n+1}) < pS(w_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Comme dans la preuve du théorème 2.4 de [21] on conclut que  $S(w_n) \searrow w$  uniformément sur des sous-ensembles bornés de  $\mathbb{R}^N$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Depuis

$$S(w_{n+1})(x) - w(x) \leq \bar{u}_n(x) - v_0(x) \leq \frac{1}{n} \text{ pour } |x| \geq R_n$$

et une constante  $R_n > 0$ , la convergence a même lieu en  $BUC(\mathbb{R}^N)$ . De ce fait et puisque  $S(w_{n+1}) \leq S^2(w_n)$  on conclut que  $w \leq S(w)$ ; c'est-à-dire que  $w$  est une sous-solution de  $S$ . En utilisant (1.3) et  $w \leq S(w_0)$  nous obtenons

$$w(x, t) := u(x, t; w) < u(x, t; v_{k_0}) \text{ pour } |x| \leq R_0, t \in [0, T].$$

De plus, il n'est pas difficile de voir que  $v_1 \ll S(w_n)$  dans  $BUC(\mathbb{R}^N)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et

$w \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Ainsi, le lemme 4 implique  $v_1 \leq w \leq v_{k_0}$  et donc  $v_1 = w$ . Puisque  $v_1 \ll w_0$  dans  $BUC(\mathbb{R}^N)$  et  $S(w_n) \searrow v_1$  uniformément sur  $\mathbb{R}^N$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S(w_{n_0}) \leq v_0 + \varepsilon$  ainsi que  $S(w_{n_0}) \leq w_0$ . Sans perte de généralité on suppose que  $n_0$  est un entier impair et donc  $\bar{u}_{n_0} = \bar{u}_{n_0-1}$ .

On a donc

$$w_{n_0+1} = \inf \{w_0, S(w_{n_0}), \bar{u}_{n_0}\} = \inf \{S(w_{n_0}), \bar{u}_{n_0-1}\}.$$

puisque  $S(w_{n_0}) \leq S(\bar{u}_{n_0-1}) \leq \bar{u}_{n_0-1}$ ,

on en déduit que

$$w_{n_0} > w_{n_0+1} = \inf \{S(w_{n_0}), \bar{u}_{n_0-1}\} = S(w_{n_0}).$$

Ainsi,  $v := S(w_{n_0})$  est une sur-solution stricte de  $S$  située dans l'intervalle d'ordre  $[v_0, v_0 + \varepsilon]_{BUC(\mathbb{R}^N)}$ .

D'après le principe du maximum il est évident que  $\bar{v} \gg v_0$  dans  $BUC(\mathbb{R}^N)$ . cela prouve que  $\bar{v}$  a les propriétés souhaitées.

## 1.2 quelque notions et résultats préliminaires

### 1.2.1 Opérateurs différentiels

Pour  $n$  un entier, on note  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  une application  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , qui à  $x = (x_1, \dots, x_n)$  associe  $v(x) = (v(x_1), \dots, v(x_n))$ . Pour une fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , son gradient est le champ de vecteurs défini par :

$$\text{grad } u(x) = \nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

Pour un champ de vecteurs  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on appelle divergence de  $v$  la fonction définie par :

$$\text{div } v(x) = \nabla \cdot (v(x)) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}(x).$$

On appelle Laplacien d'une fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial\Omega$  régulière. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière  $u$  sur le bord  $\partial\Omega$  la fonction définie sur les points de  $\partial\Omega$  par :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \Delta u(x) \cdot \eta(x),$$

### 1.2.2 Formule de Green :

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière régulière  $\partial\Omega$ ,  $V(x)$  la normale extérieure au point  $x$ , soient  $u$  une fonction de  $H^2(\Omega)$  et  $V$  une fonction de  $H^1(\Omega)$  alors la formule de Green s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

### 1.2.3 Inégalité de Hölder :

Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  et vérifiant la relation de conjugaison suivant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
Alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

[18]

### 1.2.4 Espaces de Sobolev

Soit  $p$  un entier naturel et  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ .  
 $L^p(\Omega)$  désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables (au sens de Lebesgue) sur  $\Omega$ , muni de la norme

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ avec } |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

alors,  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme  $\|\cdot\|_{m,p}$  définie par

$$\|f\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in W^{m,p}(\Omega)$$

On note  $W_0^{m,p}(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$ . Lorsque  $p = 2$ , on notera de préférence  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  et  $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ . Sur  $H^m(\Omega)$  on utilisera plutôt la norme équivalente

$$|f|_m = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui fait de  $H^m(\Omega)$  un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f \cdot D^\alpha g \, dx$$

En particulier, pour  $m = 1$  on a

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_{\Omega} f \cdot g \, dx + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

Lorsque  $\Omega$  est borné, on sait qu'il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 \leq C(\Omega), \|\nabla u\|_2$$

Il sera alors parfois commode de munir l'espace  $\in H_0^1(\Omega)$  du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{1,0} = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

qui induit une norme équivalente à la norme  $|\cdot|_1$  sur le sous-espace fermé  $\in H_0^1(\Omega)$

## Chapitre 2

# Modélisation mathématique pour des systèmes de réaction-diffusion

### 2.1 Introduction

La modélisation de phénomènes physiques, biologiques ou économiques a toujours été la principale motivation pour le développement des mathématiques aussi abstraites soient-elles. Mais tout d'abord, qu'est-ce que modéliser ?

**Définition 2.1 :** (Modélisation mathématiques)

Un modèle mathématique est nécessaire dès lors que la complexité numérique d'un phénomène observé ne permet plus l'intuition d'en comprendre le fonctionnement ni de prévoir l'évolution. (Ceci est d'ailleurs le cas de beaucoup de phénomènes observés dans la nature). On doit alors avoir recours à un modèle mathématique, c'est-à-dire faire tout d'abord une hypothèse sur la loi mathématique qui régit le phénomène observé. Remarquons que cette loi n'est elle-même qu'une représentation de la réalité, par conséquent elle n'est pas unique. Elle devra d'ailleurs souvent être remise en question et le cas échéant. Modéliser consiste à écrire en notation mathématique ce qui est exprimé d'abord en mots en faisant intervenir des variables au besoin pour décrire, expliquer, prévoir un comportement d'un phénomène dans le monde réel, elle peut être particulièrement utile. La mathématique a fait l'objet de nombreuses recherches dans plusieurs domaines.



## 2.2 Système de réaction-diffusion

### 2.2.1 Réaction et Diffusion

#### Réaction :

Une réaction est une transformation de la matière au cours de laquelle les espèces chimiques (atomiques, ioniques ou moléculaires) qui constituent la matière sont modifiées. Les espèces qui sont consommées sont appelées réactifs. Les espèces formées au cours de la réaction sont appelées produits de réaction. Depuis les travaux de Lavoisier (1777), les scientifiques savent que la réaction chimique se fait sans variation mesurable de la masse : "Rien ne perd, rien ne se crée, tout se transforme" qui traduit la conservation de la masse.[20]

#### Diffusion :

La diffusion est un phénomène par lequel deux ou plusieurs substances en contact acquièrent une répartition et des propriétés homogènes. Diffusion des gaz, des solutions, diffusion thermique, coefficient de diffusion. Des courants rapides entraînaient tous ces gaz en diffusion, et les torrents laviques glissaient jusqu'au bas de la montagne, est appelé de manière générale "migration". La diffusion est donc la migration sous une certaine agitation (thermique par exemple), par exemple lorsque l'extrémité d'une barre est chauffée, la chaleur se diffuse de la partie chauffée vers la partie froide de la barre.[20]

#### Définition :

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions chimiques locales, dans lequel les différentes substances se transforment, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace. Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent. Mathématiquement, les systèmes à réaction-diffusion sont représentés par des équations différentielles aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires qui prennent la forme générale :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - D\Delta v(x, t) = f(v(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)v_r + \lambda_r \frac{\partial v_r}{\partial v} = \alpha_r, & \text{pour } 1 \leq r \leq m \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

\*  $v = (v_1, \dots, v_m), v_r : \Omega(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ , pour  $1 \leq r \leq m$ ,

\*  $\frac{\partial v}{\partial t}$  désigne la dérivée par rapport au temps de  $v$ ,

\*  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien :  $\Delta v_r(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2}(x, t)$  pour  $1 \leq r \leq m$ ,

\*  $D$  matrice diagonale carrée d'ordre  $m$  dont les coefficients  $d_r$  sont strictement positifs,

\*  $f$  fonction mesurable de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  et localement lipschitzienne

$$|f(p) - f(\hat{p})| \leq K(r)|p - \hat{p}|, \forall p, \hat{p} \in \mathbb{R}^m |p|, |\hat{p}| \leq r$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^m$ ,

\* la condition initiale est définie par

$$v_0 = (v_{0i})_{1 \leq i \leq m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^m,$$

\*  $\frac{\partial v_r}{\partial v} = \nabla v_r \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \cdot n_j$  désigne la dérivée normale de  $v_r$ ,  $\vec{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq m}$  est le vecteur normal extérieur à  $\partial\Omega$ ,

\* pour tout  $1 \leq r \leq m$ ,  $\lambda_r$  et  $\alpha_r$  vérifient

$$0 \leq \lambda_r \leq 1, \alpha_r \in C^2(\overline{\Omega})$$

## 2.3 Modélisation des réactions chimiques

### 2.3.1 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus

On désigne par milieu continu tout liquide, gaz ou solide déformable considéré d'un point de vue macroscopique. On peut l'assimiler à un système de particules dont l'évolution ou l'équilibre peut-être décrit à l'aide des lois universelles de la physique, à savoir : la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment

de cette quantité de mouvement par rapport à un point et de l'énergie.

Toutes les équations de la physique et des sciences voisines sont obtenues d'une part à partir de ces lois fondamentales, d'autre part à partir des lois de comportements qui sont spécifiques du milieu considéré : elles ont généralement un caractère plus empirique et des domaines de validité plus ou moins limités. La dérivation de ces lois de comportement est une science difficile ; il est indispensable de s'appuyer sur les connaissances et l'expérience des experts du domaine d'application envisagé.

### Lois de conservation

Elles sont universelles, contrairement aux lois de comportement, et s'appliquent à tout système matériel, indépendamment de sa nature : liquide, gazeuse ou autre. Rappelons qu'un milieu continu est intuitivement un "système de particules" en mouvement. On le modélise à chaque instant par l'ensemble des points d'un ouvert  $\Omega(t)$  de  $\mathbb{R}^3$  : On imagine que chaque point est une particule qui se déplace et que l'ensemble des particules occupe le domaine  $\Omega(t)$  à chaque instant. On suppose, de plus, l'existence d'une famille de bijections  $S(s, t)_{s, t > 0}$  de  $\Omega(s)$   $\Omega(t)$  dépendant régulièrement de  $s, t > 0$  et permettant de suivre chacun des points du domaine initial dans sa trajectoire au cours du temps, soit

$$t \mapsto S(0, t)X_0 = x(X_0, t)$$

On associe à ce milieu les quantités suivantes :

\*  $\vec{V}(X_0, t)$  la vitesse Lagrangienne définie par

$$\vec{V}(X_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(X_0, t)$$

et  $\vec{V}(X_0, t) = \vec{V}(x(X_0, t), t)$  la vitesse Eulérienne.

\*  $\rho(x, t)$  = la densité du milieu à l'instant  $t$ , c'est-à-dire la masse par unité de volume dans  $\Omega(t)$ , ainsi la masse  $m(w)$  de tout sous-ensemble mesurable  $w$  de  $\Omega(t)$  est donnée par

$$m(w) = \int_w \varrho(x, t) dx$$

Afin de traduire mathématiquement les lois de conservation, nous utiliserons le lemme suivant qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale du type

$$K(t) = \int_{w(t)} k(x, t) dx$$

où  $w(t) = S(0, t)(w_0)$  avec  $w_0$  un sous-ensemble mesurable quelconque de  $\Omega(0)$  et où  $k(., .)$  est une fonction définie sur  $\Omega(t)$ . Cette dérivée est parfois appelée dérivée particulière par référence au fait qu'on dérive selon les trajectoires des particules.

### Un lemme de dérivation par rapport au domaine

Sous les hypothèses de régularité

$$K'(t) = \int_{w(t)} \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(k\vec{V}) \right) dx$$

ou encore

$$K'(t) = \int_{w(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dx + \int_{\partial w(t)} k\vec{V}\vec{n} d\sigma$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieur unitaire à  $\partial w(t)$ .

Pour une démonstration et des précisions sur la régularité requise, voir par exemple [10].

### Conservation de la masse

Loi qui exprime l'invariance par rapport au temps  $t$  de la masse de tout sous-système matériel  $w(t) = S(0, t)(w_0)$  que l'on suit au cours du temps, où  $w_0$  est un sous-ensemble mesurable quelconque de  $\Omega(0)$ . Cette masse est donnée par

$$m(w) = \int_{w(t)} \varrho(x, t) dx$$

on a donc

$$\frac{d}{dt}m(w(t)) = 0$$

D'après le lemme appliqué à  $k = \sigma$ , on a pour tout sous-ensemble  $w_0$  de  $\Omega(0)$

$$\int_{w(t)} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{V}) \right) dx = 0$$

et puisque  $w_0$  et donc  $w(t)$  sont arbitraires dans  $\Omega(t)$ , on en déduit l'équation de conservation de la masse, dite parfois équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{V}) = 0$$

[4]

### Conservation de l'énergie (1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique)

Elle s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{w(t)} \varrho \left( \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + e \right) dx = \int_{w(t)} (\varrho \vec{f} \cdot \vec{V} + \varrho w) dx + \int_{\partial w(t)} (\vec{F} \cdot \vec{V} - \vec{q} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

où

- \*  $\varrho w$  : Les apports volumiques de quantités de chaleur par unité de temps,
- \*  $\vec{q}$  : le vecteur-flux de chaleur,
- \*  $\varrho \vec{V}$  : la densité volumique des forces appliquées,
- \*  $\vec{F}$  : la densité surfacique de force s'appliquant sur chaque éléments de surface. [4]

### Conservation de la quantité de mouvement et de son moment en O

Ces lois s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{w(t)} \varrho \vec{V} \right) dx = \int_{w(t)} \varrho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} \vec{F} d\sigma \quad \text{pour la quantité de mouvement}$$

et

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{w(t)} O\vec{M} \wedge \varrho \vec{V} \right) dx = \int_{w(t)} O\vec{M} \wedge \varrho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F} d\sigma \quad \text{pour le moment}$$

**2<sup>eme</sup> principe de la thermodynamique :**

Il s'exprime par

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{w(t)} \varrho s dx \right) \geq \int_{w(t)} \varrho \frac{w}{T} - \int_{\partial w(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\sigma$$

où  $s$  est l'entropie et  $T$  la température absolue. [4]

## Lois de Fick

### \* Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

$$J_i = -d \nabla C_i \tag{2.2}$$

### \* Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules  $i$ ,  $\iiint C_i dV$  dans un volume donné  $V$  est égale au flux sortant  $\iint J_i dS$  du vecteur densité de courant  $J_i$  de particules  $i$  à travers la surface fermée  $S$  délimitant le volume  $V$ .

En utilisant le théorème de la divergence, et en identifiant les deux intégrants ci-dessous, on obtient la deuxième loi de Fick suivante

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v C_i dV = \iint_s J_i dS = \iiint_v \nabla J_i dV \quad (2.3)$$

Les signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente.

On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla J_i = 0 \quad (2.4)$$

### Lois de comportement

Nous donnons ici deux exemples des lois de comportement :

#### Loi de diffusion de Fick

Cette loi exprime qualitativement que les particules se déplacent vers les régions à plus faible densité. Quantitativement, ce mouvement est tel que le flux de diffusion ( $\vec{J} = \rho \vec{V}$ ) à travers chaque surface soit proportionnel au gradient de densité ; ce qui peut s'écrire

$$\vec{V} = -d \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \right)$$

La loi de continuité devient alors

$$\rho_t - \text{div}(d \nabla \rho) = 0,$$

soit encore, en utilisant  $d$  est une fonction de  $x$  uniquement

$$\rho_t - \text{div}(d(x) \nabla \rho) = 0,$$

La densité  $\rho$ , dans ce cas, satisfait alors une loi linéaire de diffusion : C'est l'équation linéaire de la chaleur. Notons que pour les situations stationnaires, c'est-à-dire lorsque  $\rho(x, t) = \rho(x)$ , et le coefficient de diffusion constant, la densité satisfait à l'équation de Laplace  $\Delta_\rho = 0$ .

Remarquons qu'il existe d'autres lois de diffusion comme par exemple, la loi de Darcy, qui s'applique à la diffusion de certains fluides dans les milieux poreux et qui, couplée avec d'autres lois de comportement, exprime que la vitesse  $\vec{V}$  est proportionnelle au gradient de densité, soit

$$\vec{V} = -d \nabla \bar{\rho}$$

ceci conduit à l'équation

$$\rho_t - \frac{d}{2} \Delta(\rho^2) = 0$$

qui est une équation de diffusion non-linéaire pour la densité, connue sous le nom d'équation des milieux poreux.

### Loi de Fourier pour la conduction de la chaleur

On considère un milieu continu au repos, c'est-à-dire  $\vec{V} = 0$ . Dans ce cas l'équation de conservation de la chaleur prend la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{w(t)} \rho e \right) = \int_{w(t)} \rho w - \int_{w(t)} \operatorname{div} \vec{q} \quad (2.5)$$

l'équation de continuité elle aussi se simplifie pour exprimer que  $\rho(x, t)$  est indépendante de  $t$ . Ainsi, (2.1) donne

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho w - \operatorname{div} \vec{q}.$$

On ajoute les deux lois de comportement suivantes :

\*  $e = cT$  : concernant l'énergie interne

\*  $\vec{q} = -k \nabla T$ ,  $k > 0$  : la loi de Fourier qui est une loi analogue à la loi de Fick, mais appliquée au flux de chaleur et non au flux de matière. On obtient ainsi

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = 0$$

qui est la célèbre équation linéaire de la chaleur

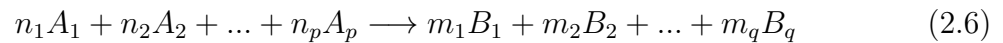


## Modélisation de l'évolution des réactions

### Vitesse d'une réaction, conservation de la matière

On convient de noter  $[A]$  la concentration d'un constituant  $A$  dans un système donné, c'est-à-dire par définition, la quantité de ce constituant par unité de volume. On utilise généralement la mole par litre comme unité de concentration. Rappelons que la mole est l'unité standard du Système International (*SI*) pour la quantité de matière : elle correspond à la quantité de matière d'un constituant contenant autant de particules élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. Noter pour l'ordre de grandeur que cela correspond à environ  $610^{23}$  particules.

Considérons d'une manière générale l'équation en équilibre suivante



où  $p$  et  $q$  sont des entiers  $\geq 1$ , ainsi que  $n_i, i = 1, \dots, p, m_j, j = 1, \dots, q$ . Cette équation d'équilibre contient en soi la conservation de la quantité de matière. Ainsi, en supposant le système clos, c'est-à-dire, sans aucun apport extérieur  $n_i$  perte de matière, on obtient

$$v = \frac{1}{m_j} \frac{d[B_j]}{dt} = -\frac{1}{n_i} \frac{d[A_i]}{dt}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q.$$

le nombre ci-dessus est appelé vitesse instantanée de la réaction (2.6). On appelle réactifs

les constituants  $A_i$ , et produits les constituants  $B_j$ .

En général, une réaction d'équilibre n'est pas seulement constituée d'une réaction élémentaire, mais de plusieurs réactions parallèles ou successives, par exemple du type suivant



ou encore



ou encore



Par simplicité, nous convenons de noter dans la suite,  $a = [A], b = [B]$ , etc ... Dans ces équations, la loi de conservation de la matière s'exprime par

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t), \text{ ie, } a(t) + b(t) + c(t) = \text{cste, pour (2.7)}$$

$$a'(t) + b'(t) = 0 \text{ pour (2.8)}$$

$$x'(t) = 2(-a'(t) - c'(t)), a'(t) = b'(t), c'(t) = d'(t) \text{ pour (2.9)}$$

quand aux vitesses de réactions, elles s'écrivent

$$v_1 = -a'(t), v_2 = c'(t) \text{ pour les réactions de l'équation (2.7)}$$

$$v = -a'(t) = -b'(t) \text{ pour (2.8)}$$

$$v_1 = -a'(t) = -b'(t), v_2 = c'(t) = d'(t) \text{ pour (2.9).}$$

Il s'agit maintenant de décrire les lois de comportement de ces vitesses. Notons que dans les systèmes précédents, on a toujours moins d'équations que d'inconnues. Les lois de comportements vont permettre de "clore" ces systèmes.

### Lois de comportement

On va supposer que, dans les réactions dites "élémentaires", la vitesse de réaction

est supposée proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Pour des réactions plus complexes, elle est généralement proportionnelle à des puissances de ces concentrations. Cependant, on verra que la vitesse peut aussi être une fonction homographe des concentrations, voire des combinaisons plus complexes de ces comportements. Ces lois sont déduites des connaissances approfondies des étapes intermédiaires de la réaction considérée.

### Réactions élémentaires

On va supposer que les réactions élémentaires satisfont à la loi d'action de masse.

#### Loi d'ordre un :

On considère la réaction la plus simple



Si cette réaction est élémentaire, on considère qu'à température constante, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration  $[A]$ , soit

$$a'(t) = -ka(t) = -b'(t)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{da}{a} = -k dt.$$

Cette équation différentielle s'intègre immédiatement en

$$a(t) = a_0 e^{-kt}$$

où :  $a_0 = a(0)$  est la valeur initiale de  $a$ . Beaucoup de réactions suivent en fait cette loi, par exemple la décomposition radioactive de certains éléments chimiques. La constante  $k$  est appelée constante de vitesse. Sa valeur n'est pas toujours très bien connue : on peut la déterminer à l'aide de mesures expérimentales.

**Loi d'Arrhénius :**

La loi précédente correspond à une réaction se déroulant à température constante.

On s'attend à ce que la valeur de cette constante varie avec la température.

C'est l'objet de la loi d'Arrhénius qui s'écrit

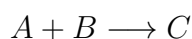
$$k = Ae^{-E_a/RT}$$

où  $T$  est la température absolue,  $R$  la constante des gaz parfaits ( $= 8,314J/K$ ),

$E_a$  l'énergie d'activation et  $A$  une constante à préciser dans chaque cas.

**Loi d'ordre deux :**

On considère la réaction supposée "élémentaire"



On considère qu'à température constante la vitesse de réaction est de la forme

$$c'(t) = ka(t)b(t)$$

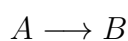
On dit alors qu'il s'agit d'une loi d'ordre deux par rapport à l'ensemble des réactifs, on obtient

$$\begin{aligned} \text{si } a_0 \neq b_0, \frac{a}{a - a_0 + b_0} &= \frac{a_0}{b_0} e^{-k(b_0 - a_0)t} \\ \text{sinon } a(t) &= \frac{a_0}{1 + a_0kt} \end{aligned}$$

A partir de ces deux lois élémentaires, on peut écrire les lois de comportement des vitesses pour des réactions plus complexes, mais décomposables en réactions élémentaires du type ci-dessus.

**Quelques exemples**

**Exemple 1**





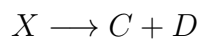
Le bilan matière s'écrit alors

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t)$$

Pour la loi de comportement, on peut supposer que chaque réaction est élémentaire et d'ordre un, ce qui donne

$$\begin{cases} a' = -k_1 a \\ b' = k_1 a - k_2 b \\ c' = k_2 b \end{cases} \quad (2.10)$$

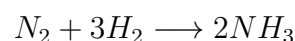
**Exemple 2**



Le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab + k_{-1} x = b' \\ x' = k_1 ab - k_{-1} x - k_2 x \\ c' = k_2 x = d' \end{cases} \quad (2.11)$$

**Exemple 3** On considère l'exemple de l'ammoniac



dont le mécanisme peut être expliqué par l'introduction d'un état intermédiaire  $X$



Si on suppose élémentaires les deux réactions, le système d'équations s'écrit (en supposant  $k_1 = k_2 = 1$ )

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[N_2] = -[N_2][H_2]^3 + k_{-1}[X] = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}[H_2] \\ \frac{d}{dt}[X] = [N_2][H_2]^3 - k_{-1}[X] - k_{-2}[X] + [NH_3]^2 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[NH_3] = k_{-2}[X][NH_3]^2 \end{cases} \quad (2.13)$$

**Exemple 4** On va étudier l'exemple important de la catalyse enzymatique qui s'écrit :



où les molécules de substrat  $S$  réagissent avec l'enzyme  $E$  pour donner un produit  $P$  via la formation d'un complexe intermédiaire  $ES$ . On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[E] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES] \\ \frac{d}{dt}[S] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] \\ \frac{d}{dt}[ES] = k_1[E][S] - k_{-1}[ES] - k_2[ES] \\ \frac{d}{dt}[P] = k_2[ES] \end{cases} \quad (2.15)$$

### Formation de complexe intermédiaire et principe des états stationnaires

Nous venons de donner quelque sexemples d'équations apparemment simples mais dont la compréhension du vrai mécanisme nécessite l'introduction d'une succession d'équations intermédiaires et aussi de composants intermédiaires. Souvent, ceux-ci sont très réactifs et ne sont pas vraiment détectables dans le mélange. Leur concentration reste en tous cas négligeable devant celle des vrais réactifs ou produits. C'est le principe dit des états stationnaires (P.E.S) que nous expliquerons sur l'exemple 2.

On  $y$  considère donc que le complexe intermédiaire  $X$  est très réactif et qu'il arrive très vite à l'équilibre. Le P.E.S consiste à considérer brutalement que  $x'(t) = 0$  dans le

système (2.7), ce qui donne

$$k_1 ab = (k_{-1} + k_2)x$$

soit

$$x = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} ab$$

ainsi, le système devient

$$\begin{cases} a' = -\frac{k_{-1}k_2}{k_{-1} + k_2} ab \\ b = a + b_0 - a_0 \\ c' = \frac{k_1k_2}{k_{-1} + k_2} ab = d' \end{cases}$$

Ainsi, on peut considérer qu'en fait, la réaction  $A + B \longrightarrow C + D$  est d'ordre 2. Par ailleurs, on peut intégrer directement les deux premières équations pour obtenir  $a, b$ , puis en déduire  $c, d$ .

**Exemple 5** *Il a été proposé en 1906 pour la vitesse de réaction de l'Hydrogène et du Brome*

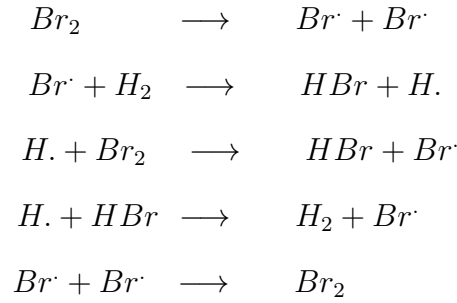


la loi empirique suivante

$$\frac{d}{dt}[HBr] = \frac{2L[H_2][Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}$$

*Cette loi établie empiriquement a finalement obtenue une explication par le mécanisme*

de réactions en chaîne suivant (voir [19])



En effet, le système d'équations obtenues est le suivant

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d}{dt}[Br_2] &= -k_1[Br_2] - k_3[H\cdot][Br_2] + k_5[Br\cdot]^2 \\
 \frac{d}{dt}[Br\cdot] &= 2k_1[Br_2] - k_2[Br\cdot][H_2] + k_3[H\cdot][Br_2] + k_4[H\cdot][HBr] - 2k_5[Br\cdot]^2 \\
 \frac{d}{dt}[H_2] &= -k_2[Br\cdot][H_2] + k_4[H\cdot][HBr] \\
 \frac{d}{dt}[H\cdot] &= k_2[Br\cdot][H_2] - k_3[H\cdot][Br_2] - k_4[H\cdot][HBr] \\
 \frac{d}{dt}[HBr] &= k_2[Br\cdot][H_2] - k_4[H\cdot][HBr] + k_3[H\cdot][Br_2]
 \end{aligned} \right.$$

En appliquant le P.E.S, il vient que

$$[H\cdot] = \frac{k_2[Br\cdot][H_2]}{k_3[Br_2] + k_4[HBr]} et [Br\cdot]^2 = \frac{k_1}{k_5}[Br_2]$$

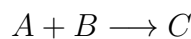
ainsi

$$\frac{d}{dt}[HBr] = \frac{2L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}$$

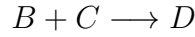
où  $L = k_2\sqrt{\frac{K_1}{K_5}}$  et  $m = \frac{K_4}{K_3}$ .

### Système de réaction-diffusion

Nous nous plaçons maintenant dans une situation plus réaliste où les réactions ont lieu dans un milieu ambiant où les concentrations dépendent aussi de la variable d'espace. Prenons par exemple la réaction suivante







en supposant que chacune des réactions est élémentaire et suit une loi d'ordre 2, nous aurions

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab \\ b' = -k_1 ab - k_2 bc \\ c' = k_1 ab - k_2 bc \\ d' = k_2 bc \end{cases}$$

et la conservation de la matière s'exprime par

$$c' = -a' - d', b' = a' - d'$$

Pour tenir compte de la dépendance des concentrations de la variable d'espace  $x$ , nous pouvons assimiler chaque constituant à un milieu continu animé d'une vitesse eulérienne  $\vec{V}(x, t)$ . La quantité du constituant  $A$  contenu dans le volume  $w(t)$  est donnée par :  $m_a(w(t)) = \int_{w(t)} a(x, t) dx$ , et de même pour les autres constituants. D'après les résultats déjà obtenus, on a

$$\frac{d}{dt} m_a(w(t)) = \int_{w(t)} \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a(x, t)\vec{V}) \right) dx$$

ainsi, la variation instantanée de quantité de matière est donnée par

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a(x, t)\vec{V}).$$

Supposer que la vitesse des réactions ci-dessus suit une loi d'ordre 2 consiste à écrire que cette variation instantanée est proportionnelle au produit des concentrations de  $A$  et  $B$ . Ainsi, la première équation devient

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a(x, t)\vec{V}) = -k_1 ab$$

que nous écrivons le plus souvent

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(J_a) = S_a$$

et les lois de conservation de matière deviennent

$$\frac{d}{dt}m_c(w(t)) = -\frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t))$$

$$\frac{d}{dt}m_b(w(t)) = \frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t))$$

Pour compléter le système, il faut ajouter une loi de comportement pour la vitesse des particules ou le flux de matière de chaque constituant. La loi la plus simple et de domaine de validité relativement large pour ce type d'application est la loi de Fick, soit

$$J_a = a\vec{V} = -d_a\nabla a$$

où  $d_a$  est la fonction de diffusivité du constituant  $A$ . On introduit la même loi pour les autres constituants avec pour chacun sa propre constante de diffusivité  $d_b$ ,  $d_c$ ,  $d_d$ . On obtient comme modèle le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{div}(d_a \nabla a) = -k_1 ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}(d_b \nabla b) = -k_1 ab - k_2 bc \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(d_c \nabla c) = k_1 ab - k_2 bc \\ \frac{\partial d}{\partial t} - \operatorname{div}(d_d \nabla d) = k_2 bc \end{cases}$$

Ici, il s'agit d'un système de réaction-diffusion, terminologie qui fait référence aux deux phénomènes apparaissant dans l'équation diffusion de chaque constituant avec sa propre vitesse de diffusion (régie par la constante de diffusivité) et interaction non linéaire entre les différents constituants.

La variable  $x$  varie dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . On peut supposer ici que ce domaine est indépendant du temps si la réaction a lieu dans un milieu "fixe"; on le note  $\Omega$ .

Pour "fermer" le système, il est indispensable d'ajouter des conditions au bord de  $\Omega$  qui doivent traduire les éventuels échanges de matière avec le milieu extérieur. Par exemple :

1– Si la réaction se produit dans un milieu isolé, on écrit que le flux de matière à la frontière est nul, soit  $a\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , ou selon la loi de Fick,  $da\nabla a\cdot\vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$  ce qui peut encore s'écrire si  $da$  est une constante positive  $\frac{\partial}{\partial n}a(x, t) = 0$  pour  $x \in \partial\Omega, t > 0$

2– Si le flux de matière, à travers la frontière est une fonction affine de la concentration, on aura dans ce cas

$$\lambda\nabla a\cdot\vec{n} = -(1 - \lambda)a + \alpha \text{ sur } \partial\Omega(0, \infty)$$

ou encore

$$\lambda\frac{\partial a}{\partial n} + (1 - \lambda)a = \alpha \text{ sur } \partial\Omega(0, \infty)$$

où  $\lambda \in [0, 1]$ .

Ainsi, en appliquant ces résultats aux exemples précédents, nous obtenons :

\*pour la réaction de l'amoniac (2.12), le système de réaction-diffusion associé est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial[N2]}{\partial t} - d_1\Delta[N2] = -\frac{k_1k_2}{k_{-1} + k_2}[N2][H2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial[H2]}{\partial t} - d_2\Delta[H2] = -\frac{3k_1k_2}{k_{-1} + k_2}[N2][H2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial[NH3]}{\partial t} - d_3\Delta[NH3] = \frac{2k_1k_2}{k_{-1} + k_2}[N2][H2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial[N2]}{\partial v} = \frac{\partial[H2]}{\partial v} = \frac{\partial[NH3]}{\partial v} = 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ [N2](x, 0) = n_0, [H2](x, 0) = h_0, [NH3](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.17)$$

\* pour la réaction enzymatique (2.14), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial[E]}{\partial t} - d_1\Delta[E] = 0 \quad \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial[S]}{\partial t} - d_2\Delta[S] = \frac{-k}{K_M + [S]}[E]_0[S] \quad \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial[P]}{\partial t} - d_3\Delta[P] = \frac{k}{K_M + [S]}[E]_0[S] \quad \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial[E]}{\partial v} = \frac{\partial[S]}{\partial v} = \frac{\partial[P]}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega[0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.18)$$

\* quant à la réaction de l'Hydrogène et du Brome (2.16), elle entraîne le système de réaction-diffusion suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [Br_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [Br_2] = \frac{-L[H_2][Br_2]^{\frac{3}{2}}}{[Br_2] + m[HBr]} & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = \frac{-L[H_2][Br_2]^{\frac{3}{2}}}{[Br_2] + m[HBr]} & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [HBr]}{\partial t} - d_3 \Delta [HBr] = \frac{2L[H_2][Br_2]^{\frac{3}{2}}}{[Br_2] + m[HBr]} & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [Br_2]}{\partial t} = \frac{\partial [H_2]}{\partial t} = \frac{\partial [HBr]}{\partial t} = 0 & \text{sur } \partial\Omega[0, \infty) \\ [Br_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [HBr](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.19)$$

## Chapitre 3

# Existence local, globale , unicité et positivité pour d'un système de réaction diffusion

### 3.1 introduction

Durant ces dernières décennies, l'intérêt porté à l'étude des systèmes de réaction-diffusion n'a cessé de croître et une abondante littérature a été développée sur ce sujet, notamment sur les problèmes d'existences locales, globales ou d'explosion en temps fini, de comportement asymptotique...

Nous nous intéressons en particulier à l'étude des systèmes de réaction-diffusion . Nous commençons par rappeler un résultat d'existence locale pour ce type de problèmes ainsi qu'une caractérisation du temps maximal d'existence de la solution de laquelle nous déduisons un critère d'existence globale.

Puis, dans un deuxième temps, nous introduisons les deux propriétés caractéristiques de la classe des systèmes de réaction-diffusion pour laquelle nous allons étudier l'existence globale des solutions à savoir  $H1$  et  $H2$ .

## 3.2 Existence locale et unicité pour des systèmes de réaction diffusion

Soit  $\Omega$  un ouvert bornée de  $\mathbb{R}^N$ , de frontière régulière  $\partial\Omega$ . Nous considérons le système d'équations de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - D\Delta v(x, t) = f(v(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)v_r + \lambda_r \frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \alpha_r, & \text{pour } 1 \leq r \leq m \text{ } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- \*  $v = (v_1, \dots, v_m), v_r : \Omega(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ , pour  $1 \leq r \leq m$ ,
- \*  $\frac{\partial v}{\partial t}$  désigne le dérivée par rapport au temps de  $v$ ,
- \*  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien :  $\Delta v_r(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2}(x, t)$ , pour  $1 \leq r \leq m$ ,
- \*  $D$  matrice diagonale carrée d'ordre  $m$  dont les coefficients  $d_r$  sont strictement positifs,
- \*  $f$  fonction mesurable de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  et localement lipschitzienne

$$|f(p) - f(\hat{p})| \leq K(r)|p - \hat{p}|, \forall p, \hat{p} \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |p|, |\hat{p}| \leq r \quad (3.2)$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^m$ ,

\* la condition initiale est définie par

$$v_0 = (v_{0i})_{1 \leq i \leq m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^m, \quad (3.3)$$

\*  $\frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \nabla v_r \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \cdot n_j$  désigne la dérivée normale de  $v_r$ ,  $\vec{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq m}$  est le vecteur normal extérieur à  $\partial\Omega$ ,

\* pour tout  $1 \leq r \leq m$ ,  $\lambda_r$  et  $\alpha_r$  vérifient

$$0 \leq \lambda_r \leq 1, \alpha_r \in C^2(\Omega) \quad (3.4)$$

La définition suivante précise ce que nous désignons par une solution au sens classique

**Définition : (Solution classique)**

Par solution classique, nous entendons une solution  $v$  appartenant à  $C^{2,1}(\overline{\Omega}(0, T_{max}))^m$  et vérifiant (3.1) au sens usuel. Nous énonçons maintenant des conditions suffisantes assurant l'existence locale et l'unicité de la solution classique de (3.1). Nous avons donc le résultat suivant :

**Thérème 1 : (Hollis-Martin-Pierre)**

*Sous le hypothèses (3.2) et (3.4), le système (3.1) admet une unique solution locale et classique  $v$  sur  $[0, T_{max}[$ , telle que pour chaque  $1 \leq r \leq m$ , il existe  $N_r : [0, T_{max}[ \rightarrow [0, \infty)$  continue avec*

$$0 \leq v_r(t, x) \leq N_r(t), \forall (x, t) \in \Omega[0, T_{max}[ \quad (3.5)$$

*De plus, le temps maximal d'existence  $T_{max}$  est caractérisé par*

$$\text{si } T_{max} < \infty, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{max}} \sum_{r=1}^m \|v_r(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty \quad (3.6)$$

*Voir [13] pour une démonstration de ce résultat.*

**Remarque 6** *Pour étudier l'existence globale de la solution du système (3.1), c'est-à-dire déterminer si*

*$T_{max} = +\infty$ , nous utilisons la contraposée de la caractérisation (3.6) du temps maximal*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{S'il existe une fonction } N : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \text{ telle que pour} \\ \text{tout } t \in [0, T_{max}[: \sum_{r=1}^m \|v_r(t)\| \leq N(t), \text{ alors } T_{max} = +\infty \end{array} \right. \quad (3.7)$$

*Par conséquent, pour montrer l'existence globale des solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence*

**Remarque 7** *Notons que sous les hypothèses (3.11) et (3.12), et si de plus on a une hypothèse de "contrôle de masse" sur  $f$  (condition dite de Lyapunov) :*

$\exists H : \mathbb{R}^m \rightarrow (0, \infty)$  *régulière satisfaisant*

1.  $|H(z)| \rightarrow \infty$  quand  $|z| \rightarrow \infty$
2.  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\langle \nabla H(z), f(z) \rangle \leq MH(z), \forall z \in \mathbb{R}^m$

alors, l'existence globale pour le système différentiel ordinaire associé est assurée, soit

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) & t > 0 \\ y(0) = v_0 & t = 0 \end{cases}$$

Rappelons que l'existence globale pour une équation différentielle ordinaire implique toujours l'existence globale pour l'équation de réaction-diffusion associé (c'est une application du principe de maximum), mais ce résultat est en général faux pour les systèmes. Pour s'en convaincre, nous proposons le contre-exemple suivant.

Soit le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + 2aN & x \in \Omega, t > -1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + 2(N-t) + v^2 - 8|1-u|v^3 & x \in \Omega, t > -1 \\ u = 0, v = (1+t^2)^{-1} & x \in \partial\Omega, t > -1 \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $\Omega$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ , et  $r^+$  est définie par

$$r^+ = \begin{cases} r, & \text{si } r \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système différentiel ordinaire associé est

$$\begin{cases} y_1' = 2aN & t \geq 0 \\ y_2' = 2(N-t) + y_2^2 - 8|1-y_1|y_2^3 & t \geq 0 \\ y_1(-1) = \xi_1, y_2(-1) = \xi_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

alors, si  $a > \frac{(N+1)^2}{4N}$ , la solution de (3.9) existe dans  $[-1, \infty), \forall \xi_1, \xi_2 \geq 0$ . De plus

$$u(r, t) = 1 - r^2, v(r, t) = (t^2 + r^2)^{-1}$$

est une solution positive de (3.8) dans  $\bar{\Omega}(-1, \infty)$  qui explose dans  $L^\infty(\Omega)$  quand  $t \rightarrow 0$  (voir [3]).



**Remarque 8** Nous présentons ici un contre-exemple qui reflète l'importance de la condition  $d_r > 0$ , pour  $1 \leq i \leq m$ .

Nous considérons pour cela le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -uv^\beta & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = uv^\beta & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u = u_0, v = v_0 & x \in \Omega, t = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous pouvons montrer que si  $d_2 = 0, d_1 > 0$  et  $\beta > 1$ , alors il n'existe pas d'estimations dans  $L^\infty$  de la solution de (3.10) en terme de  $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$  pour  $t$  large. Plus précisément, si pour  $a, b > 0$  et  $u_0, v_0$  tels que

$$0 \leq u_0 \leq a, 0 \leq v_0 \leq b$$

il existe une solution de (3.10) dans  $[0, T]$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|v(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(T, a, b)$$

alors

$$T \leq [(\beta - 1)b^{\beta-1}a]^{-1}.$$

Pour plus de détails voir [13].

### 3.3 Positivité de la solution

Nous énonçons maintenant les hypothèses assurant que la positivité de la solution du système (3.1) est préservée au cours du temps. Nous supposons donc que :

\* la condition initiale est positive, c'est-à-dire

$$v_{0i}(x) \geq 0, \forall i \in [1, m], \text{ et pour tout } x \text{ dans } \overline{\Omega} \quad (3.11)$$

\*  $f$  est quasi-positive, c'est-à-dire

$$\forall p_1, \dots, p_m \geq 0, \text{ si } \hat{p}_r = (p_1, \dots, p_{r-1}, 0, p_{r+1}, \dots, p_m), \text{ alors } f_r(\hat{p}_r) \geq 0, \quad (3.12)$$

\* pour tout  $1 \leq r \leq m$

$$\alpha_r \geq 0 \quad (3.13)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème concernant la positivité de la solution du système de réaction-diffusion (3.1).

**Théorème 2** *Sous les hypothèses(3.2) - (3.13), la positivité de la solution classique  $v$  de (3.1) est préservée au cours du temps, c'est-à-dire  $v(x, t) \geq 0$ , pour  $(x, t) \in \overline{\Omega}[0, T_{max}]$ .*

**preuve 8** *Nous définissons  $\hat{f}$  sur  $\mathbb{R}^m$  par*

$$\hat{f}(v) = \hat{f}(v_1, \dots, v_m) = \begin{cases} f(v_1, \dots, v_m), & \text{si } v_r \geq 0, \forall 1 \leq r \leq m \\ f(v_1, \dots, v_{i_0-1}, 0, v_{i_0+1}, \dots, v_m), & \text{si } v_{i_0} \leq 0 \end{cases}$$

*Nous considérons alors le système suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(x, t) - D\Delta \hat{v}(x, t) = \hat{f}(\hat{v}(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)\hat{v}_r + \lambda_r \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} = \alpha_r, & \text{pour } 1 \leq r \leq m, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \hat{v}(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

*Notre objectif est de montrer que  $\hat{v}$  reste positive au cours du temps, ce qui termine la démonstration du théorème . En effet, dans ce cas,  $\hat{f}$  coïncide avec  $f$ , et par conséquent  $\hat{v}$  serait une solution positive de (3.1) Nous introduisons , pour cela, la fonction  $sign^-$  définie par*

$$sign^- r = \begin{cases} -1, & \text{si } r < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

*Comme  $sign^-$  est croissante, nous pouvons considérer la fonction  $\varepsilon$  , convexe, deux*

fois dérivable, et telle que

$$\varepsilon'(r) \longrightarrow \text{sign}^- r \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Pour tout  $1 \leq r \leq m$ , nous multiplions la  $r^{\text{eme}}$  équation de (3.14) par  $j'_\varepsilon(\hat{v}_r)$ , nous avons alors après intégration sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) = d_r \int_{\Omega} (\Delta \hat{v}_r) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) + \int_{\Omega} \hat{f}_r(\hat{v}) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \quad (3.15)$$

Nous notons par  $I_1$  et  $I_2$  les intégrales du membre de droite de (3.15). Nous obtenons, en utilisant la formule de Green

$$I_1 = -d_r \int_{\Omega} \nabla(\hat{v}_r) \nabla(j'_\varepsilon(\hat{v}_r)) \, dx + d_r \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \, d\sigma.$$

Utilisant le fait que  $j_\varepsilon$  est convexe, nous aurons

$$-d_r \int_{\Omega} \nabla(\hat{v}_r) \nabla(j'_\varepsilon(\hat{v}_r)) \, dx = -d_r \int_{\Omega} j''_\varepsilon(\hat{v}_r) |\nabla(\hat{v}_r)|^2 \, dx \leq 0.$$

Pour le terme sur le bord, nous avons deux cas à étudier : 1<sup>er</sup> cas : si  $0 < \lambda_r \leq 1$ , nous avons d'après (3.1)

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \, d\sigma$$

par passage à la limite, et en utilisant le théorème de Lebesgue, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) \text{sign}^-(\hat{v}_r) \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega \cap [\hat{v}_r \leq 0]} \left( \frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) \text{sign}^-(\hat{v}_r) \, d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \cap [\hat{v}_r < 0]} \left( \frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) \text{sign}^-(\hat{v}_r) \, d\sigma \end{aligned}$$

utilisant la définition de  $\text{sign}^-$ , (3.4) et (3.13), il vient que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \, d\sigma \leq 0.$$

2<sup>ème</sup> cas : si  $\lambda_r = 0$ , dans ce cas  $\hat{v}_r = \alpha_r r \geq 0$  sur  $\partial\Omega$  et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j'_\varepsilon(\hat{v}_r = \text{sign}^-(\alpha_r) = 0 \text{ sur } \partial\Omega).$$

par suite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma = 0.$$

ainsi, dans les deux cas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma \leq 0.$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 \leq 0.$$

Traçons maintenant  $I_2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\hat{v}_r \geq 0]} \hat{f}_r(\hat{v}) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\hat{v}_r < 0]} \hat{f}_r(\hat{v}) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \\ &= - \int_{[\hat{v}_r < 0]} \hat{f}_r(\hat{v}) \\ &= - \int_{[\hat{v}_r < 0]} f_r(\dots, \hat{v}_{i-1}, 0, \hat{v}_{i+1}, \dots) \end{aligned}$$

utilisant (3.12), nous trouvons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 \leq 0.$$

Ainsi, par passage à la limite dans (3.15), nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} \right) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) dx ds \leq 0 \right)$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (j_\varepsilon(\hat{v}_r)) dx ds \leq 0 \right)$$

par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_{\varepsilon}(\hat{v}_r)(t) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_{\varepsilon}(\hat{v}_r)(0) dx$$

d'après (3.11), nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_{\varepsilon}(\hat{v}_r)(t) \leq 0$$

ainsi

$$\int_{\Omega} \hat{v}_i^-(t) dx \leq 0$$

d'où  $\hat{v}_i^- = 0$  et donc  $\hat{v}_i \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ .

**Remarque 9** La preuve donnée ici marche aussi si nous avons considéré une notion de solution plus générale, à savoir les solutions dites faibles :  $v \in C([0, T]; L^2(\Omega))^m \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^m$ , pour plus de détails, voir [1].

### 3.4 Existence globale pour les systèmes de réaction-diffusion triangulaire

Nous allons maintenant aborder le problème de l'existence globale de la solution  $v = (v_r)_{1 \leq r \leq m}$  de (3.1). Pour cela, nous supposons qu'il existe une fonction  $H \in C^2(\mathbb{R}_+^m, \mathbb{R})$  et  $h_r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  pour tout  $r = 1, \dots, m$  telles que  $H(z) = \sum_{r=1}^m h_r(z_r)$  pour tout  $z_r \geq 0$  et vérifiant

$$h_r(0) = 0, \forall 1 \leq r \leq m, \tag{3.16}$$

$$h_r(z_r), h_r''(z_r) \geq 0, \text{ pour tout } z_r \geq 0, r = 1, \dots, m, \tag{3.17}$$

$$H(z) \longrightarrow +\infty, \text{ si et seulement si } |z| \longrightarrow +\infty, \tag{3.18}$$

il existe  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{mm}$  qui satisfait  $a_{ij} \geq 0, a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i, j \leq m$  tels que pour tout  $j = 1, \dots, m$ , il existe  $K_1, K_2 \geq 0$  indépendamment de  $j$  tels que

$$\sum_{i=1}^j a_{ji} h'_i(z_i) f_i(z) \leq K_1 H(z) + K_2, \forall z \geq 0, \quad (3.19)$$

il existe  $q_1, K_3, K_4 \geq 0$  tels que pour tout  $i = 1, \dots, m$ , on a

$$h'_i(z_i) f_i(z) \leq K_3 (H(z))^{q_1} + K_4, \text{ pour tout } z \geq 0, \quad (3.20)$$

il existe  $K_5, K_6 \geq 0$  tels que

$$\langle \nabla H(z), f(z) \rangle \leq K_5 H(z) + K_6, \text{ pour tout } z \geq 0 \quad (3.21)$$

Pour les conditions au bord, nous supposons que

$$\begin{aligned} & * \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, \lambda_i > 0, \\ & * \text{ si } \exists i_0 \text{ tel que } \lambda_{i_0} = 0, \text{ alors on a :} \\ & \quad \bullet \forall j \neq i_0, \lambda_j = 0, \\ & \quad \bullet \exists j \neq i_0, \lambda_j > 0, \text{ dans ce cas, } \alpha_{i_0} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

**Remarque 10** 1. Les hypothèses (3.17) et (3.18) assurent respectivement la convexité et la coercivité de  $H$  de  $[0, \infty)$  dans  $[0, \infty)$ .

2. L'hypothèse (3.19) implique que le système (3.1) admet une structure triangulaire.

3. L'hypothèse (3.20) est une condition de croissance polynômiale sur  $f$ . Le résultat est indépendant de l'ordre de  $q_1$ .

4. Quant à (3.21), elle impose au système (3.1) d'être un système avec contrôle de masse. En particulier, si  $H = I$ , alors (3.21) implique

$$\sum_{r=1}^m f_r \leq K_5 \sum_{r=1}^m u_r + K_6 \text{ c'est la conservation de la masse.}$$

Nous allons énoncer maintenant le résultat principal de ce chapitre.

### Thérème 3 (Existence globale)

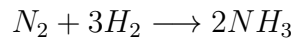
Sous les hypothèses (3.2)-(3.13), et (3.16)-(3.22), le système de réaction-diffusion (3.1)

admet une unique solution globale classique et positive.

### 3.5 Applications

Nous allons utiliser ce théorème pour montrer que les systèmes de réaction-diffusion obtenus dans le 2<sup>ème</sup> chapitre (modélisation) admettent une solution globale.

**Exemple 6** *La réaction de l'amoniac*



donne le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -\frac{3k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H_2]}{\partial v} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial v} = 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega[0, \infty) \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

où nous avons posé  $\alpha = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2}$

Ce système admet une solution globale, puisque les hypothèses du Théorème 2.3 sont satisfaites avec

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, f_1(z) = -\alpha z_1 z_2^3, f_2(z) = -3\alpha z_1 z_2^3, f_3(z) = 2\alpha z_1 z_2^3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, K_3 = \alpha, q_1 = 4.$$

**Exemple 7** La réaction enzymatique conduit, après modélisation, au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = \frac{-k}{K_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k}{K_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial [E]}{\partial v} = \frac{\partial [S]}{\partial v} = \frac{\partial [P]}{\partial v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega[0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

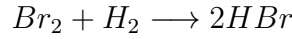
si nous avons posé  $k = k_2$ .

Les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées avec

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, f_1(z) = 0, f_3(z) = -f_2(z) = \frac{K z_2}{K_M + z_2}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, K_3 = \alpha, q_1 = 0.$$

**Exemple 8** La réaction du l'Hydrogène et du Brome



conduit au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v_1}{\partial t} - d_1 \Delta v_1 = \frac{-L v_2 v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + m v_3} & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - d_2 \Delta v_2 = \frac{-L v_2 v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + m v_3} & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} - d_3 \Delta v_3 = \frac{2L v_2 v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + m v_3} & \text{dans } \Omega[0, \infty) \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial v_3}{\partial t} = 0 & \text{sur } \partial\Omega[0, \infty) \\ v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0} \geq 0 & \end{array} \right.$$

où nous avons posé  $v_1 = [Br_2], v_2 = [H_2]$  et  $v_3 = [HBr]$ .

Les conditions du théorème 3 sont satisfaites avec

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, f_1(z) = f_2(z) = \frac{-L z_2 z_1^{\frac{3}{2}}}{z_1 + m z_3}, f_3(z) = \frac{2L z_2 z_1^{\frac{3}{2}}}{z_1 + m z_3}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_5 = K_6 = 0, K_4 = \alpha, q_1 = 2.$$



## 3.6 Les étapes de la démonstration du résultat principal

### Une estimation fondamentale

Nous allons énoncer un résultat donnant une estimation fondamentale vérifiée par la solution de (3.1). Cette estimation serait importante pour la démonstration de l'existence globale.

### Théorème 4 (*Estimation fondamentale*)

*Supposons que (3.2)-(3.13), (3.16)-(3.18), (3.21) et (3.22) sont satisfaites, alors il existe*

*$g \in C([0, \infty))$  telle que :  $\left\| \int_0^t H(v(\cdot, s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(t), \forall 0 < t < T_{max}$ .*

### Un lemme fondamental

Le lemme technique suivant serait lui-aussi d'une grande importance dans la démonstration du Théorème 3.

**Lemme 3** *Sous les conditions (3.2)-(3.13), (3.17), (3.19) et (3.21), et pour tout  $j = 1, \dots, m$ , il existe  $\xi \geq 1$  tels que pour tout  $\xi \leq p < \infty$ , il existe  $0 < \delta_p < 1$  et  $K_{1p}, K_{2p} \in C([0, \infty))$  tels que  $\forall 0 \leq \tau < T < T_{max}$ , nous avons*

$$\|h_j(v_j)\|_{L^p(Q(\tau, T))} \leq K_{1p}(T - \tau) + K_{2p}(T - \tau) \|H(v)\|_{L^p(Q(\tau, T))}^{\delta_p}. \quad (3.23)$$

*Nous passons maintenant à la démonstration du théorème concernant l'existence globale de la solution de (3.1).*

### Démonstration du Théorème 3

Notre objectif est de montrer que sous les hypothèses du Théorème 3, et pour tout  $j = 1, \dots, m$ , la norme de  $h_j(v_j)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  reste majorée par une fonction de  $t$ .

Ainsi, et d'après la coercivité de  $H$  (hypothèse (3.18)),  $\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$  reste majorée par une fonction de  $t$ . La caractérisation (3.7) entraîne alors l'existence globale de la solution de (3.1).

En effet, (3.23) entraîne que pour tout  $1 \leq p < \infty$ , il existe  $M_p, N_p > 0$  et  $0 < \delta_p < 1$  tels que

$$\|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq M_p + N_p(T - \tau) \|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))}^{\delta_p}$$

et comme  $H(v) \geq 0$  et  $0 < \delta_p < 1$ , nous avons

$$\|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq C(T - \tau, p), \text{ pour tout } 1 \leq p < \infty$$

ainsi

$$\|K_3(H(z))^{q_1} + K_4\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq C(T - \tau, p), \text{ pour tout } 1 \leq p < \infty.$$

Nous considérons alors, pour tout  $j = 1, \dots, m$ ,  $Z_j$  solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_j}{\partial t} - d_j \Delta Z_j = K_3(H(z))^{q_1} + K_4 & \text{dans } \Omega ]0, T[, \\ (1 - \lambda_j)Z_j + \lambda_j \frac{\partial Z_j}{\partial \nu} = \beta_j & \text{sur } \partial\Omega ]0, T[ \\ Z_j(x, 0) = \|h_j(v_j(x, 0))\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $T < T_{max}$  et

$$\beta_j = \max(\|h_j(\alpha_j)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\alpha_j h'_j(N_j)\|_{L^\infty(\Omega)}). \quad (3.25)$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe),  $Z_j$  existe,  $\forall j = 1, \dots, m$ . De plus, nous avons

$$\|Z_j(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_j(t), \forall t \in ]0, T[ \quad (3.26)$$

or l'hypothèse (3.17) entraîne que pour tout  $j = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial t} - d_j \Delta(h_j(v_j)) \leq h'_j(v_j) \cdot f_j(v)$$

d'après (3.20), nous aurons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial t} - d_j \Delta(h_j(v_j)) \leq K_3(H(v))^{q_1} + K_4$$

et comme  $Z_j$  vérifie (3.24), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}(Z_j - h_j(v_j)) - d_j \Delta(Z_j - h_j(v_j)) \geq 0, \text{ dans } \Omega]0, T[.$$

D'autre part

$$(Z_j - h_j(v_j))(x, 0) \geq 0, \text{ pour tout } x \in \Omega$$

Il reste à comparer  $Z_j$  et  $h_j(v_j)$  sur le bord de  $\Omega]0, T[$ , nous distinguons alors deux cas

1<sup>er</sup> cas :  $\lambda_j = 0$ , dans ce cas,  $Z_j = \beta_j$  et  $v_j = \alpha_j$  sur  $\partial\Omega$ , nous avons, en utilisant (3.25)

$$Z_j - h_j(v_j) = \beta_j - h_j(\alpha_j) \geq 0,$$

2<sup>eme</sup> cas :  $\lambda_j > 0$ , dans ce cas, et d'après (3.1), nous avons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial v} = h'_j(v_j) \left( \frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} v_j \right) \text{ sur } \partial\Omega$$

utilisant (3.16) et (3.17), nous obtenons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial v} = h'_j(v_j) \frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_j(v_j) \text{ sur } \partial\Omega$$

et d'après (3.4), (3.13), (3.8) et (3.17), nous avons

$$\lambda_j \frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial v} + (1 - \lambda_j) h_j(v_j) \leq h'_j(N_j) \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

ainsi la relation (3.25) entraîne que

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial v}(Z_j - h_j(v_j)) + (1 - \lambda_j)(Z_j - h_j(v_j)) \geq \beta_j - \alpha_j h'_j(N_j) \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et d'après le théorème

$$0 \leq h_j(v_j) \leq Z_j \text{ dans } \Omega]0, T[, \text{ pour tout } j = 1, \dots, m$$

et utilisant (3.26), il vient que

$$\|h_j(v_j)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|Z_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_j(t), \forall t \in ]0, T[$$

finale<sup>ment</sup>, (3.18) entraîne que

$$\|v_j(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N_j(t), \forall j = 1, \dots, m, \forall (x, t) \in \Omega]0, T[$$

par conséquent,  $T_{max} = +\infty$ .

#### Démonstration du théorème 4

Nous démontrons ici que, sous les conditions (3.2)-(3.13), (3.16)-(3.18), (3.21) et (3.22), il existe  $g \in C([0, \infty))$  telle que

$$\left\| \int_0^t H(v(x, s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(t), \forall 0 < t < T_{max}.$$

Pour cela, nous posons

$$Z(x, t) = \int_\tau^t \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i(x, s)) ds, 0 \leq \tau < t < T_{max}.$$

Nous avons d'une part

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i(x, t))$$

D'autre part

$$\Delta h_i(v_i) = h_i''(v_i) |\nabla v_i|^2 + h_i'(v_i) \Delta v_i$$

d'où

$$\Delta Z = \int_\tau^t \sum_{i=1}^m d_i [h_i''(v_i) |\nabla v_i|^2 + h_i'(v_i) \Delta v_i] ds$$

utilisant maintenant l'hypothèse (3.17), nous obtenons

$$-\Delta Z \leq - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \Delta v_i$$

d'après (3.1), il vient que

$$\begin{aligned} -\Delta Z &\leq \int_{\tau}^t \nabla H(v) (f(v) - \frac{\partial v}{\partial t}) \\ &= \int_{\tau}^t \langle \nabla H(v), f(v) \rangle - \int_{\tau}^t \langle \nabla H(v), \frac{\partial v}{\partial t} \rangle \end{aligned}$$

utilisons l'hypothèse (3.21) nous obtenons

$$-\Delta Z \leq K_5 \leq \int_{\tau}^t (H(v) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))) - H(v(x, t))$$

d'où

$$H(v(x, t)) - \Delta Z \leq K_5 \int_{\tau}^t H(v) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)).$$

D'autre part, si l'on pose

$$d_M = \max_{1 \leq i \leq m} d_i, \quad d_m = \min_{1 \leq i \leq m} d_i$$

il vient que

$$\frac{1}{d_M} \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i) \leq H(v) \leq \frac{1}{d_m} \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_M} \frac{\partial Z}{\partial t} - \Delta Z &\leq K_5 \int_{\tau}^t \frac{1}{d_M} \frac{\partial}{\partial t} Z(x, s) ds + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)) \\ &\leq \frac{K_5}{d_M} Z(x, t) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)) \end{aligned}$$

ainsi

$$-\frac{K_5}{d_M} Z(x, t) + \frac{1}{d_M} \frac{\partial}{\partial t} Z(x, s) - \Delta Z \leq K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))$$

Nous posons

$$w(x, t) = e^{\alpha t} Z(x, t) \text{ où } \alpha = -K_5 \frac{d_M}{d_m}$$

nous avons alors

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\alpha Z + \frac{\partial Z}{\partial t}) e^{\alpha t}$$

ainsi  $w$  vérifie pour tout  $(x, t) \in Q(\tau, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d_M \Delta w \leq d_M (K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))) e^{\alpha t} = \lambda(x, t)$$

de plus

$$w(x, t) = Z(x, \tau) e^{\alpha t} = 0$$

quant aux conditions sur le bord concernant  $w$ , nous avons à traiter trois cas :

1<sup>er</sup> cas : si pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_i > 0$ , dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial v} &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial v} \\ &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \left( \frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i \right) \\ &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i h'_i(v_i) \end{aligned}$$

d'après (3.16), (3.17) et (3.8), il vient que

$$\frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} h_i(v_i)$$

et en considérant  $\lambda^* = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i}$ , nous obtenons

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(N_i) = C(T - \tau), \text{ pour } x \in \partial\Omega, t \in ]0, T_{max}[$$

2<sup>eme</sup> cas : si  $\forall i = 1, \dots, m, \lambda_i = 0$ , dans ce cas  $v_i = \alpha_i$  sur  $\partial\Omega$  et donc

$$Z(x, t) = \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h_i(\alpha_i)$$

d'après (3.4),  $\alpha_i \in C^2(\bar{\Omega})$  et donc

$$Z(x, t) \leq C(T - \tau), \text{ pour } x \in \partial\Omega, t \in ]0, T_{max}[$$

3<sup>eme</sup> cas : si  $\exists I \subset 1, \dots, m, I \neq \emptyset$  tel que  $\forall i \in I, \lambda_i = 0$  et  $\forall j \notin I, \lambda_j > 0$ . Dans ce cas, et d'après (3.22),  $\alpha_i = 0$  et donc  $v_i = 0, \forall i \in I$ . Nous avons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \int_{\tau}^t \sum_{i \in I} d_i h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial v} + \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j h'_j(v_j) \left( \frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} v_j \right) \quad (3.27)$$

utilisant (3.16) et le fait que  $\frac{\partial v_i}{\partial v} < 0$ , pour tout  $i \in I$ , nous obtenons

$$\frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{\alpha_j}{\lambda_j} h'_j(v_j) - \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_j(v_j)$$

(3.26) entraîne que

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{\alpha_j}{\lambda_j} h'_j(N_j) + \lambda^* \int_{\tau}^t \sum_{i \in I} d_i h_i(v_i)$$

or,  $\forall i \in I, h_i(v_i) = h_i(0) = 0$ , ainsi

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial v} \leq C(T - \tau).$$

Finalement,  $w$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - d_M \Delta w \leq \lambda(x, t) & \text{dans } \Omega ]0, T_{max}[ \\ \lambda^* w + \frac{\partial w}{\partial t} \leq C(T - \tau) & \text{sur } \partial\Omega ]0, T_{max}[ \\ w(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), nous avons

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N(t), \in 0 < \tau < t < T_{max}$$

d'où le résultat.

### Démonstration du lemme 1

Notre objectif est de montrer que sous les conditions du lemme 1, (3.23) est satisfaite,  $\forall j = 1, \dots, m$ . Pour cela, nous considérons, pour tout  $1 < p < \infty$  et  $0 < \tau < t < T$ , une fonction  $\Theta \in L^p(\Omega[\tau, t])$  telle que  $\|\Theta\|_{L^p(Q(\tau, t))} = 1, \Theta \geq 0$ , et pour tout  $j = 1, \dots, m, \Psi_j$  solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \Delta \Psi_j(x, t) = \Theta(x, t) & \text{dans } \Omega[\tau, t] \\ (1 - \lambda_j) \Psi_j + \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega[\tau, t] \\ \Psi_j(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.28)$$

Notons que si  $W_j(x, t) = \Psi_j(x, T - t)$ , pour  $(x, t) \in \Omega[0, T - \tau]$ , alors  $W_j$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial W_j}{\partial t} - d_j \Delta W_j(x, t) = \Theta(x, t) & \text{dans } \Omega[0, T - \tau] \\ (1 - \lambda_j) W_j + \lambda_j \frac{\partial W_j}{\partial v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega[0, T - \tau] \\ W_j(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe),  $\forall j = 1, \dots, m, W_j$  existe donc  $\Psi_j$  aussi. De plus,  $\Psi_j \geq 0$  (par application directe du théorème 9,  $\Psi_j$  et donc  $\Psi_j$  sont positifs).

Pour  $i = 1, \dots, m$ , nous posons  $u_i = h_i(v_i), F_i = h'_i(v_i) f_i(v)$ . Démontrons alors la relation (3.23) par récurrence sur  $i$ .

Pour  $i = 1$ , nous avons d'après (3.28)

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta = \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \left( -\frac{\partial W_1}{\partial t} - d_1 \Delta W_1 \right) dx ds$$

utilisant la formule de Green, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta &= \int_0^T \int_{\Omega} -u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + d_1 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \Psi_1 - d_1 \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} -u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \int_0^T \int_{\Omega} d_1 \Delta u_1 \cdot \Psi_1 + d_1 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left( \Psi_1 \frac{\partial u_1}{v} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} u_1 \right) \end{aligned}$$



d'après le lemme 3 (voir annexe), nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \theta \leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \int_0^T \int_{\Omega} d_1 \Delta u_1 \cdot \Psi_1 + d_1 \int_0^T \int_{\partial \Omega} (\Psi_1 + C_{p,T}) \quad (3.29)$$

Utilisant (3.1) et (3.17), et après intégration par partie, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \cdot d_1 \Delta u_1 \, dx \, ds &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 (F_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t}) \, dx \, ds \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} (\Psi_1 F_1 + u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}) \, dx \, ds + \int_{\Omega} \Psi_1(x, 0) u_{10}(x) \, dx \end{aligned}$$

ainsi, (3.28) devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta \leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 F_1 \, dx \, ds + \int_{\Omega} \Psi_1(x, 0) u_{10}(x) \, dx + C_{p,T} \quad (3.30)$$

En multipliant (3.29) par  $a_{11}$ , et utilisant (3.3) et le lemme 3 (annexe)

$$\int_0^T \int_{\Omega} a_{11} u_1 \Theta \, dx \, ds \leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 a_{11} F_1 \, dx \, ds + C_{p,T} \quad (3.31)$$

d'après (3.19) nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} a_{11} u_1 \Theta \, dx \, ds &\leq a_{11} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 (K_1 H(v) + K_2) \, dx \, ds + C_{p,T} \\ &\leq a_{11} K_2 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \, dx \, ds + a_{11} K_1 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \, dx \, ds + C_{p,T} \\ &\leq a_{11} K_1 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \, dx \, ds + C_{p,T} \end{aligned}$$

utilisant l'injection de Sobolev,  $\exists L_{p,T} > 0$  tel que

$$\|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \leq L_{p,T} \|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^p(0,T)}, \forall x \in \Omega,$$

le lemme 3 (annexe) entraîne alors

$$\left\| \|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{p,T}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder et le lemme 3 (voir annexe), il vient que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \leq L_{p,T} C_{p,T} \|H(v)\|_{L^1(0,T,L^\infty(\Omega))}$$

et d'après le théorème 4, nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \leq L_{p,T} C_{p,T} g(T)$$

ainsi, nous obtenons

$$a_{11} \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta \, dx \, ds \leq C_{p,T}$$

d'où

$$\|u_1\|_{L^q(Q_T)} \leq C_1(T) + C_2 \|H(v)\|_{L^q(0,T,\Omega)}^{\delta_q} \text{ avec } 0 < \delta_q < 1.$$

Supposons alors que (3.23) est vrais jusqu'à  $i - 1$ , et montrons ce résultat pour  $i$ .

En effet, et comme nous avons fait dans le cas  $i = 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_i \Theta &= \int_0^T \int_{\Omega} u_i \left( -\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \Delta \Psi_j \right) \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j \Delta u_i + C_{p,T} \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j d_i \Delta u_i + C_{p,T} \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j \left( F_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + C_{p,T} \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} \Psi_j F_i + \frac{d_j}{d_i} \Psi_j(0) u_{i0} + C_{p,T} \Psi_j d_i \Delta u_i + C_{p,T} \\ &\leq \left( \frac{d_j}{d_i} - 1 \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j F_i + C_{p,T} \end{aligned}$$

multiplions par  $\frac{d_i}{d_j} a_{ji}$  et sommons de  $i = 1, \dots, j$ , nous avons, d'après (3.19)

$$\int_0^T \int_{\Omega} j \sum_{i=1}^j \frac{d_i}{d_j} a_{ji} u_i \Theta \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left( 1 - \frac{d_i}{d_j} \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j (K_1 H(v) + K_2) + C_{p,T} \quad (3.32)$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence, Hölder et le lemme 3 (annexe)

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left( 1 - \frac{d_i}{d_j} \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left| 1 - \frac{d_i}{d_j} \right| C_{p,T} (K_{1q}(T) + K_{2q}(T)) \|H(v)\|_{L^q(Q(\tau,T))}^{\delta_q}$$

où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

D'autre part, en appliquant toujours Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j H(v) \, dx \, ds &\leq \int_{\Omega} \left\| \Psi_j \right\|_{L^{\infty}(0,T)} \int_0^T H(v) \, dx \, ds \\ &\leq \left\| \Psi_j \right\|_{L^{\infty}(0,T)} \left\| \int_0^T H(v) \right\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq L_{p,T} C_{p,T} \left\| \int_0^T H(v) \right\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

le Théorème 4 entraîne alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j H(v) \, dx \, ds \leq L_{p,T} C_{p,T} |\Omega|^{\frac{1}{q}} g(T)$$

et donc (3.31) devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} j \sum_{i=1}^j \frac{d_i}{d_j} a_{ji} u_i \Theta \leq C_{1q}(T) + C_{2q}(T) \|H(v)\|_{L^q(Q(\tau,T))}^{\delta_q}$$

Comme  $\Theta \in L^p(\Omega[\tau, t])$  et que :  $\|\Theta\|_{L^q(Q(\tau,T))} = 1$  pour tout  $1 < p < \infty$ , (1.23) est vérifiée.

### 3.7 Annexe

**Lemme 4 (lemme linéaire)**

*Soit le problème parabolique linéaire suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u = g & \text{dans } \Omega]0, T[ \\ (1 - \lambda)u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha & \text{sur } \partial\Omega]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.33)$$

*et si nous désignons par  $z$  la solution du problème elliptique suivant*

$$\begin{cases} Z - d\Delta Z = 0 & \text{dans } \Omega \\ (1 - \lambda)Z + \lambda \frac{\partial Z}{\partial \nu} = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors nous avons

si  $g \in L^p([0, T]; L^q(\Omega))$ , avec  $1 < p, q < \infty, \alpha \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $u_0 \in L^q(\Omega)$ , le problème (3.32) admet une solution unique  $u$  telle que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\Delta u$  appartiennent à  $L^p([0, T]; L^q(\Omega))$  et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} + \|\Delta u\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} \leq C_{p,q} (\|g\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} + \|\alpha\|_{C^1(\partial\Omega)} + \|u_0\|_{L^q(\Omega)})$$

de plus  $u$  satisfait à

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 - z\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + c \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \|g(s) + z\|_{L^p(\Omega)} ds$$

pour tout  $p > \frac{n}{2}$ . Pour une preuve, voir par exemple [2], [17], [22].

**Lemme 5**  $\forall 1 < p < \infty, \forall 1 \leq i, j \leq m$ , il existe  $C_p(T - \tau) > 0$  indépendante de  $\Theta$ , telle que  $\Psi_j$  solution de (2.28) vérifie

$$1. \ \|P\Psi_j(\cdot, \tau)\|_{L^p(\Omega)}, \|P\Psi_j\|_{L^p(Q(\tau, t))}, \|\Delta\Psi_j\|_{L^p(Q(\tau, t))} \leq C^p(T - \tau), \text{ où}$$

$$P\Psi_j(\cdot, t) = \begin{cases} \Psi_j(\cdot, t) & \text{si } \lambda_j > 0 \\ \Psi_j(\cdot, t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Psi_j(x, t) dx & \text{si } \lambda_j = 0 \end{cases}$$

$$2. \ \int_{\tau}^T [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\Psi_j}{v}] \leq C_p(T - \tau),$$

et si  $1 < p < \frac{n+2}{2}, q = \frac{p(n+2)}{n+2-2p}$ , alors il existe  $K_q(T - \tau)$  telle que

$$3. \ \|\Psi_j\|_{L^q(Q(\tau, t))} \leq K_q(T - \tau).$$

Preuve du résultat : 1 et 3 se déduisent immédiatement de la définition de  $\Psi_j, W_j$  et de [26] et [20].

Pour l'estimation 2, nous avons à traiter les cas suivants :

1<sup>er</sup> cas :  $\lambda_i > 0$  et  $\lambda_j > 0$ , dans ce cas, et d'après (3.1), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\Psi_j}{v}] &= \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [\frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i)] \\ &= \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [h'_i(v_i) (\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i) + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

d'après (3.16) et (3.17), il vient que  $h'_i(v_i) \geq 0$ , et comme  $v_i \geq 0$ , nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\Psi_j}{v}] \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [h'_i(v_i) (\frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i))]$$

d'après (3.8) et (3.17)

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\Psi_j}{v}] \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [h'_i(N_i) (\frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(N_i))]$$

utilisant Hölder puis 1), nous obtenons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v}] \leq C_p(T - \tau).$$

2<sup>eme</sup> cas :  $\lambda_i = \lambda_j = 0$ , dans ce cas :  $v_i = \alpha_i$  et  $\Psi_j = 0$ , et donc

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v}] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(\alpha_i) (-\frac{\partial\Psi_j}{\partial v})$$

utilisant Hölder, le théorème de trace et 1), nous obtenons 2).

3<sup>eme</sup> cas :  $\lambda_i = 0, \lambda_j > 0$ , dans ce cas, (3.22) entraîne que  $\alpha_i = 0$ , ainsi, et d'après (3.16), il vient que

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v}] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial v}$$

comme  $\Psi_j \geq 0, h'_i(v_i) \geq 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial v} < 0$ , nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v}] \leq 0.$$

4<sup>eme</sup> cas :  $\lambda_j = 0$  et  $\lambda_i > 0$ , dans ce cas :  $\Psi_j = 0$  et d'après (3.8) et le fait que  $\frac{\partial\Psi_j}{\partial v} < 0$ , nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v}] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(\alpha_i) (-\frac{\partial\Psi_j}{\partial v}) \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(N_i) (-\frac{\partial\Psi_j}{\partial v})$$

on suit les mêmes démarches que dans le 2<sup>eme</sup> cas pour aboutir au résultat.

## Conclusion

Dans ce travail, on a montré l'existence locale, globale, unicité et positivité des systèmes paraboliques périodiques pour le système de réaction-diffusion, en utilisant l'existence d'une solution faible à ce dernier modèle est prouvée par la méthode des sous-solution sur-solution, nous construisons une sur-solution faible du problème considéré, puis en passant à l'utilisation de la méthode de troncatures pour montrer l'existence d'une solution faible.

# Bibliographie

- [1] N Alaa and I Mounir. Global existence for reaction-diffusion systems with mass control and critical growth with respect to the gradient. *Journal of mathematical analysis and applications*, 253(2) :532–557, 2001.
- [2] Herbert Amann. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered banach spaces. *SIAM review*, 18(4) :620–709, 1976.
- [3] WF Ames and C Brezinski. Nonlinear equations in the applied sciences : Wf ames and c. rogers (eds.), academic press, boston, ma, 1992. 474 pp., us 49.50, isbn0 – 1205 – 6752 – 0, 1992.
- [4] Abderrahim Charkaoui, Ghada Kouadri, Omar Selt, and Nour Eddine Alaa. Existence results of weak periodic solution for some quasilinear parabolic problem with 11 data. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 46(1) :66–77, 2019.
- [5] EN Dancer. Multiple fixed points of positive mappings. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1986(371) :46–66, 1986.
- [6] EN Dancer. Upper and lower stability and index theory for positive mappings and applications. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 17(3) :205–217, 1991.
- [7] EN Dancer and P Hess. On stable solutions of quasilinear periodic-parabolic problems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 14(1) :123–141, 1987.
- [8] Daniel Daners. Principal eigenvalues for some periodic-parabolic operators on  $\mathbb{R}^n$  and related topics. *Journal of differential equations*, 121(2) :293–313, 1995.
- [9] Daniel Daners and Pablo Koch Medina. Exponential stability, change of stability and

- eigenvalue problems for linear time-periodic parabolic equations on  $\mathbb{R}^n$ . *Differential and Integral Equations*, 7(5-6) :1265–1284, 1994.
- [10] Georges Duvaut and Hélène Dumontet. *Mécanique des milieux continus*, volume 34. Masson Paris, 1990.
- [11] P Hess. Periodic-parabolic boundary-value problems and positivity (pitman research notes in mathematics, vol. 247) harlaw, langman sci, 1991.
- [12] P Hess and EN Dancer. Stability of fixed points for order-preserving discrete-time dynamical systems. 1991.
- [13] Selwyn L Hollis, Robert H Martin, Jr, and Michel Pierre. Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 18(3) :744–761, 1987.
- [14] Gérard Iooss. *Bifurcation of maps and applications*. Elsevier, 1979.
- [15] Pablo Koch-Medina and Daniel Daners. *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*. Chapman and Hall/CRC, 1992.
- [16] Pablo Koch-Medina and Daniel Daners. Superconvexity of the evolution operator and parabolic eigenvalue problems on  $\mathbb{R}^n$  differential and integral equations. *Differential and Integral Equations*, 7(1) :235–255, 1994.
- [17] Damien Lambertson. Equations d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces  $l_p$ . *Journal of functional analysis*, 72(2) :252–262, 1987.
- [18] Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle : avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 2013.
- [19] Sam R Logan. Introduction à la cinétique chimique. 1998.
- [20] MEBARKI MAROUA. *SUR L'EXISTENCE GLOBALE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME DE RÉACTION-DIFFUSION AVEC MATRICE DE DIFFUSION PLEINE EN*. PhD thesis, UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA, 2017.
- [21] Pablo Koch Medina and Guido Schätti. Long-time behaviour for reaction-diffusion equations on  $\mathbb{R}^n$ . *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 25(8) :831–870, 1995.



- 
- [22] Amnon Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] Achilles Tertikas. Global bifurcation of positive solutions in  $\mathbb{R}^n$ . In *Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States*, 3, pages 513–535. Springer, 1992.

## ملخص

العمل الرئيسي لهذه المذكرة هو دراسة الوجود المحلي الكلي و الوحدانية والإيجابية للجمل الدورية المكافئة لجمل التفاعل والانتشار.  
الكلمات المفتاحية: المعادلات المكافئة ، المعادلات الدورية ، جمل التفاعل والانتشار

## Abstract

The main work of this dissertation is the study of the local, global existence , uniqueness and positivity of parabolic periodic systems for the reaction-diffusion system.

**Key words** : parabolic equations, periodic equations, reaction-diffusion systems

## Résumé

Le travail principal de ce mémoire est l'étude de l'existence local, globale , unicité et positivité des système parabolique périodique pour le système de réaction-diffusion.

**Les mots clés** : les équations paraboliques, les équations périodiques , les systèmes de réaction-diffusion