



UNIVERSITE KASDI MERBAH DE
OUARGLA
faculté de Mathématique et des Sciences de la
Matière



DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

MASTER

Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par : GUEMMOULA MOHAMMED

T H E M E

Hyper-chaotification des applications affine par morceaux

soutenu publiquement, le :08/06/2022

devant le jury composé de :

- | | | |
|---------------------|---------------------------------------|------------|
| . Mr A. Hocine | M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla | Président |
| . Mr A. K. Benchikh | M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla | Examineur |
| . Mr M. Kouidri | M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla | Examineur |
| . Mr M. Mammeri | M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla | Rapporteur |

Remerciement

Je tiens en premier lieu rendre grâce "Dieu" qui lui a été créé grâce à ce travail et remercier Monsieur Dr M. Mammeri, qui a dirigé cette mémoire. Grâce à ces incessants conseils et son information et inaltérable motivation cette formation par et pour la recherche a été des plus passionnantes. Mes remerciements vont également à Monsieur le professeur A. Hocine, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire. Mes remerciements vont aussi à Monsieur les professeurs A. K. Benchikh et M. Kouidri pour la participation au jury.

Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques l'université d'Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci à toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail. Pour finir c'est un grand merci à mes parents et toutes mes amis, ma famille, proches ou non des mathématiques.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Introduction	1
Notations générales	3
1 Systèmes dynamiques et chaos	4
prelimnaries	4
1.1 Introduction	4
1.2 Quelques définitions	4
1.2.1 Flot et trajectoires	4
1.2.2 Système déterministe	5
1.2.3 Systèmes discrets	5
1.2.4 Orbites	5
1.2.5 La section de Poincaré	6
1.3 Comportements asymptotiques	6
1.3.1 Invariance et attraction	7
1.3.2 Classifications des solutions des systèmes dynamiques	7
1.4 Stabilité des systèmes dynamiques	10
1.4.1 Exposant de Lyapunov	10
1.4.2 La méthode de l'espace de phase	14
1.5 Éléments de la théorie des bifurcations	15
1.5.1 Stabilité structurelle et bifurcation	15
1.5.2 Diagramme de bifurcations	15
2 Chaotification des systèmes discrets	18
2.1 Introduction	18
2.2 Méthode de chaotification	18
2.3 Application de l'algorithme pour l'application logistique	20
2.4 Application de Hénon	23

3	chaotification et Hyperchaotification des applications affine par morceaux	26
3.1	chaotification des applications affine par morceaux en utilisant la définition des exposants de lyapunov	26
3.1.1	Observation attracteur chaotique	28
3.2	hyperchaotification des applications affine par morceaux utilisant une fonction de contrôle linéaire par morceaux	30
3.2.1	Introduction	30
3.2.2	Méthode de hyperchaotification utilisant une fonction de contrôle linéaire par morceaux	31
3.2.3	Exemple	34
3.2.4	Étude numérique	36
	Conclusion	39
	Bibliographie	40
	Bibliographie	40

Introduction

La théorie de chaos déterministe est une expression à priori chargée de paradoxes et pourtant elle met à la disposition des chercheurs de toutes disciplines un ensemble de résultats mathématiques où ils peuvent puiser pour construire des modèles destinés à rendre compte de phénomènes d'apparence aléatoire. Depuis les travaux d'Isaac Newton (1642-1727) la science était dominée par le déterminisme, les scientifiques pensaient pouvoir prédire complètement et précisément l'évolution d'un système donné. Un siècle après Newton, Pierre Simon Laplace (1749-1827) fut le fervent apôtre du déterminisme affirmant que l'état présent de l'Univers permettait, en principe, de prédire complètement son futur. Mais la révolution intellectuelle et scientifique du début du XX^{ème} siècle allait lui donner tort. Les années 1900 marquent, en effet, la fin d'une époque. Ainsi que ce soit dans les sciences humaines ou en sciences fondamentales et plus particulièrement en Mathématiques, ce début de siècle est marqué par les travaux de Poincaré, pionnier du problème à trois corps. Il est le premier à mettre en évidence l'une des signatures les plus visibles du chaos : la sensibilité aux conditions initiales. Puis en 1963, Edward Lorenz, météorologue au Massachusetts Institute of Technology, met en évidence le caractère chaotique des conditions météorologiques. Pour prévoir ces dernières Lorenz étudie alors numériquement des équations différentielles représentant approximativement la convection thermique dans l'atmosphère. Il constate, par hasard, qu'une modification minime des données initiales (de l'ordre de un pour mille) sur son ordinateur entraînent des résultats très différents. Il illustrera ce fait caractéristique par la célèbre métaphore : « un battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas ». L'effet papillon sera par la suite souvent invoqué pour faire allusion à la sensibilité aux conditions initiales. Depuis la fin des années 70, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences : physique, chimie, mécanique, géophysique, astronomie, psychologie, économie, sociologie, ... elle a même envahi le flux et reflux de la vie élargissant considérablement les possibilités d'emploi des modèles déterministes. L'écologie est un domaine qui, depuis une vingtaine d'années, a reçu une stimulation décisive grâce aux mathématiques du chaos. Si le monde est un chaudron fait de millions d'espèces en interactions, alors comment ces diverses populations évoluent-elles ? Qu'arriverait-il à une population animale si les ressources venaient à manquer, si des prédateurs survenaient, si une épidémie se déclarait ? ... Ces questions ont trouvé, avec la théorie du chaos, outre des réponses mais également des modèles mathématiques qui permettent d'envisager une possibilité d'action sur des phénomènes jusqu'alors non maîtrisables en apparence. Le présent travail a pour sujet un

des thèmes les plus importants de L'écologie à savoir la coévolution d'espèces dans des chaînes alimentaires d'écosystèmes. L'étude des application linéaire par morceaux est une contribution intéressante au développement de la théorie des systèmes dynamiques avec de nombreuses applications possibles en science ingénierie [21],[22],[23]. Un grand nombre de systèmes physiques et techniques présentés par des applications linéaire par morceaux où l'état en temps discret est divisé en deux ou plusieurs comportements avec différentes formes fonctionnelles séparées par des frontières L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une nouvelle méthode de chaotification d'applications linéaire par morceaux en 2-D utilisant fonction de contrôleur linéaire par morceaux. Ce travail réalisé dans le cadre de ce mémoire porte "Hyper chaotification des applications affine par morceaux". Et notre mémoire est organisée travers trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre : on rappellera définitions des différents outils mathématiques qui nous servent à mieux comprendre le comportement chaotique, tels que : les ensembles attracteurs, les méthodes permettant la détermination du type de stabilité de leur état d'équilibre, la section de Poincaré, la théorie de bifurcation, les exposants de Lyapunov et les méthodes utilisées pour leur calcul surtout pour les systèmes de dimension élevée. Dans le deuxième chapitre : nous avons présenter la méthode de chaotification des systèmes discrets et application de l'algorithme pour l'équation logistique et application de Hénon Dans le troisième chapitre : dans ce chapitre nous avons présenter une méthode simple pour chaotifier une application linéaire par morceaux en 2D on utilise une fonction de contrôle linéaire par morceaux, nous prouvons le théorème et présentons un exemple.

Notations générales

$\|\cdot\|$: la norme

$P_B(\lambda)$: le polynôme caractéristique de la matrice B

$J(X)$: la matrice jacobienne

Systèmes dynamiques et chaos

1.1 Introduction

Un système dynamique présente deux aspects, son état et sa dynamique, c'est-à-dire son évolution en fonction du temps [4]. Il est défini par un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.1)$$

Avec f un champ de vecteurs. $x \in U \subseteq R^n$ le vecteur d'état, $\mu \in V \subseteq R^p$ le vecteur des paramètres et t la variable temporelle.

Lorsque le champ de vecteurs f ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

Remarque 1.1. *Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n + 1$.*

1.2 Quelques définitions

1.2.1 Flot et trajectoires

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in U \subset R^n \quad (1.2)$$

On appelle flot de (1.2) l'application :

$$\Phi : \begin{cases} R \times U \rightarrow R^n \\ (t, x_0) \rightarrow \phi(t, x_0) = x(t, x_0) \end{cases} \quad (1.3)$$

telle que :

- Pour chaque x_0 fixé, $t \rightarrow \phi(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle,
- $\phi(0, x_0) = x_0$.

En d'autres termes $\phi(t, x_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution qui vaut x_0 en $t = 0$. Soit $x_0 \in U$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de (1.2). L'ensemble des points $\{\forall t \in R, x(t, x_0)\}$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point x_0 à l'instant initial. Donc, deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial :

$$\forall t, \phi(t, x_1) = \phi(t, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad (1.4)$$

1.2.2 Système déterministe

Soit U l'ensemble des conditions initiales et $x_0 \in U$. Alors, si pour tout $x_0, x(t, x_0)$ existe et est unique, le système est dit déterministe. Lorsque le chaos se développe dans un tel système, on parle alors de chaos déterministe.

1.2.3 Systèmes discrets

La notion de système dynamique présentée au paragraphe précédent peut être étendue aux systèmes discrets. On appelle système dynamique discret tout système d'équations algébriques récurrentes défini par :

$$x_{k+1} = F(x_k, \mu) \quad (1.5)$$

Où F la fonction de récurrence. $x_k \in U \subseteq R^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k . $\mu \in V \subseteq R^p$ le vecteur des paramètres et $k \in N$.

Remarque 1.2. *Il est possible que le processus modélisé évolue de manière continue dans le temps. C'est d'ailleurs le cas le plus général. Cependant l'état du système n'est apprécié qu'aux instants t_k .*

1.2.4 Orbites

Considérons le vecteur d'état initial x_0 . Les itérations successives de F fournissent la suite des états du système aux instants t_k .

$$\begin{cases} x_1 = F(x_0) \\ x_2 = F(x_1) = F^2(x_0) \\ \vdots \\ x_{k+1} = F(x_k) = F^{k+1}(x_0) \end{cases} \quad (1.6)$$

On appelle orbite de F au point x_0 la suite des états $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ générés par F dans l'espace d'état.

Remarque 1.3. *La notion d'orbite en temps discret est équivalente à celle de trajectoire en temps continu.*

Remarque 1.4. *Contrairement aux systèmes en temps continu, les systèmes récurrents les plus simples, même unidimensionnels, peuvent produire des solutions chaotiques. La récurrence logistique est un célèbre exemple.*

1.2.5 La section de Poincaré

L'application de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système.

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et la trajectoire de sa solution en x_0 . Définissant dans cet espace une surface de dimension $n - 1$. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.

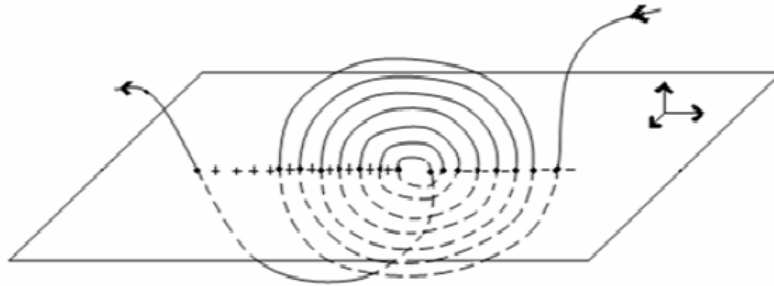


FIGURE 1.1 – Principe de la section de Poincaré

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface est appelé section de Poincaré. Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre. On peut définir trois applications de Poincaré différentes. p^+ décrit les points où ϕ traverse le plan dans le sens du vecteur normal, p^- dans le sens contraire et p^\pm décrit la suite des points d'intersection quel que soit le sens de traversée. Si ϕ est bornée sans tendre asymptotiquement vers un équilibre et définie sur un espace euclidien, alors il existe toujours une surface pour laquelle les trois applications de Poincaré sont définies.

1.3 Comportements asymptotiques

Les paragraphes précédents ont introduit quelques définitions relatives aux systèmes dynamiques. Nous allons aborder maintenant, les caractéristiques essentielles de leurs solutions. Cependant il est important de rappeler qu'il n'existe aucune méthode générale d'intégration des systèmes différentiels non linéaires. Il n'est donc pas toujours possible d'en déterminer une solution analytique exacte. Fort heureusement, cela ne constitue plus aujourd'hui une difficulté majeure car une estimation, obtenue par simulation numérique, est souvent suffisante lorsque l'intégration n'est pas possible. Par contre, la connaissance qualitative des solutions est très utile lorsqu'il s'agit par exemple d'en déterminer les évolutions possibles à long terme, la stabilité, les bifurcations ou encore de disposer d'une vue d'ensemble des comportements dynamiques possibles selon l'état, l'excitation ou les paramètres.

1.3.1 Invariance et attraction

Régimes asymptotiques et invariants

Contrairement à un système linéaire, on ne peut considérer la solution d'un système non linéaire comme la simple superposition d'un régime libre et d'une réponse forcée. Cela conduit à reconsidérer la notion de régime transitoire. C'est pour cette raison que la notion de régime asymptotique est privilégiée à celle de solution permanente et par extension, la différence entre une solution et son régime asymptotique est appelée transitoire.

Définition 1.1. Soit E une région de l'espace d'état R^n et $x(t, x_0)$ une solution de (1.2). E est un ensemble invariant du flot si :

$$\forall x_0 \in E \subset R^n \text{ et } \forall t \in R, x(t, x_0) \in E \quad (1.7)$$

Remarque 1.5. La trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.

Ensembles attracteurs et attracteurs

Un ensemble attracteur est un ensemble invariant dont toutes les trajectoires qui y sont initialisées convergent vers lui. Un attracteur est un ensemble attracteur vérifiant les deux propriétés suivantes :

La récurrence : Toute trajectoire ayant son origine dans l'attracteur revient de manière répétitive aussi proche que l'on veut de l'état initial. Il suffit pour cela d'attendre suffisamment longtemps.

L'irréductibilité : L'union de deux attracteurs disjoints ne constitue pas un attracteur.

Remarque 1.6. La propriété de récurrence exclut la présence de phénomènes transitoires ou d'éventuelles solutions instables dans un attracteur.

Un attracteur ne peut pas être divisé en deux attracteurs élémentaires du fait de l'irréductibilité mais il est possible d'isoler plusieurs attracteurs dans un ensemble attracteur.

Bassin d'attraction

Soit A un attracteur. La région de l'espace B , telle que toutes les trajectoires qui y sont initialisées convergent vers A est appelée bassin d'attraction.

1.3.2 Classifications des solutions des systèmes dynamiques

orbites d'équilibre

Soit le système dynamique autonome (1.2), la solution d'équilibre x^* est définie par [5] :

$$x^* = f(x^*) = 0 \quad (1.8)$$

Les points de l'espace d'état vérifiant cette relation sont appelés points singuliers.

Propriété 1.1. *Une orbite d'équilibre correspond à un point fixe dans l'espace d'état. Il n'est pas nécessairement stable, mais Lorsqu'il l'est ce point représente un attracteur.*

orbites périodiques

Soit $x(t, x_0)$ l'orbite d'un système dynamique autonome ou non autonome. Elle représente une solution périodique si et seulement si :

$$\exists \tau > 0 \mid \forall t, x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0). \quad (1.9)$$

La plus petite valeur de τ si elle existe, est appelée période. On la note généralement T .

Une orbite périodique d'un système dynamique quelconque est dite orbite isolée s'il existe un voisinage ne comporte aucune autre orbite périodique. Si de plus le système est autonome, alors l'orbite isolée est appelée un cycle limite.

orbites quasi périodiques

Soit $x(t, x_0)$ une orbite du système dynamique (1.2) et soit $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble fini de réels linéairement indépendants.

On dit que $x(t, x_0)$ est une orbite quasi périodique de (1.2) si elle est périodique pour chacune des périodes T_i de T . L'orbite $x(t, x_0)$ est également dite n-périodique.

Remarque 1.7. — *La trajectoire d'une orbite n-périodique est une ligne infinie qui couvre densément un tore de dimension n.*

- *Tous les points du tore n'appartiennent pas à la trajectoire mais elle passe de manière répétitive dans tout voisinage d'un point quelconque du tore.*
- *Contrairement à l'attracteur périodique, l'attracteur quasi périodique est une surface. Il ne doit pas être confondu avec la trajectoire.*

orbite Chaotique

C'est au début des années 70 que le rapprochement entre les travaux de physiciens et de mathématiciens a permis la découverte de la réalité mathématique du chaos dans les systèmes physiques déterministes. La notion même d'orbite chaotique est difficile à formuler. Nous avons donc fait le choix de l'aborder sur la base des caractéristiques comportementales de ce type d'orbite.

Remarque 1.8. *Un système dynamique peut présenter des orbites chaotiques instables. Celles ci ne pouvant être ni observées ni même simulées, nous ne traiterons que des orbites chaotiques stables. Une orbite chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une orbite périodique ou quasi périodique. Le chaos peut donc être défini par défaut des autres types de orbites sachant qu'il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos.*

Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : attracteurs étranges, spectres, sensibilité aux conditions initiales ... etc.

Attracteurs chaotiques

De même que les autres types de trajectoires, la trajectoire d'une solution chaotique est un invariant du flot. De plus, on admettra l'existence d'un voisinage assurant la convergence des trajectoires. Autrement dit, initialisée dans le bassin d'attraction, toute trajectoire converge vers l'attracteur chaotique.

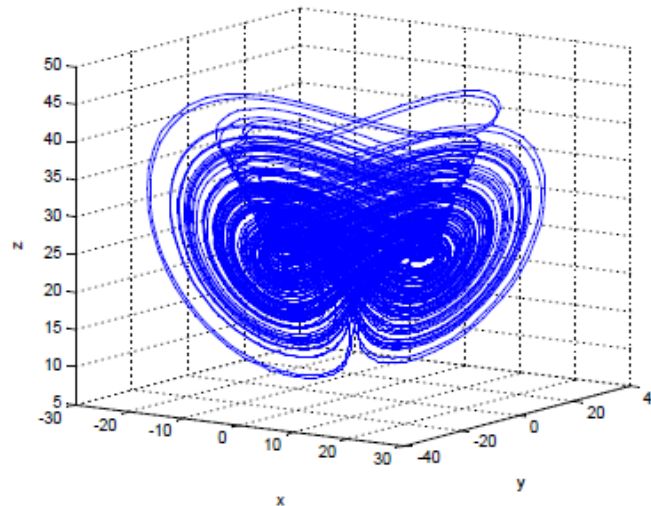


FIGURE 1.2 – Attracteur chaotique de Chen.

Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique. Quelle que soit la proximité de deux états initiaux, les trajectoires qui en sont issues divergent rapidement l'une de l'autre. Elles restent cependant liées au même attracteur donc confinées dans un espace borné. Cela a pour conséquences :

- Le bruit le plus infime altère complètement la connaissance des états futurs du système. En effet, la divergence des trajectoires dans un espace borné signifie qu'elles sont très rapidement décorrélées. Par conséquent, bien que le système soit déterministe, aucune prévision à long terme n'est possible.
- La moindre perturbation du système peut à terme conduire à des états extrêmement différents. Un événement insignifiant n'a donc pas toujours des conséquences insignifiantes. Cette propriété a été observée pour la première fois par E. Lorenz sur son modèle météorologique. Elle est connue sous le nom populaire d'effet papillon.

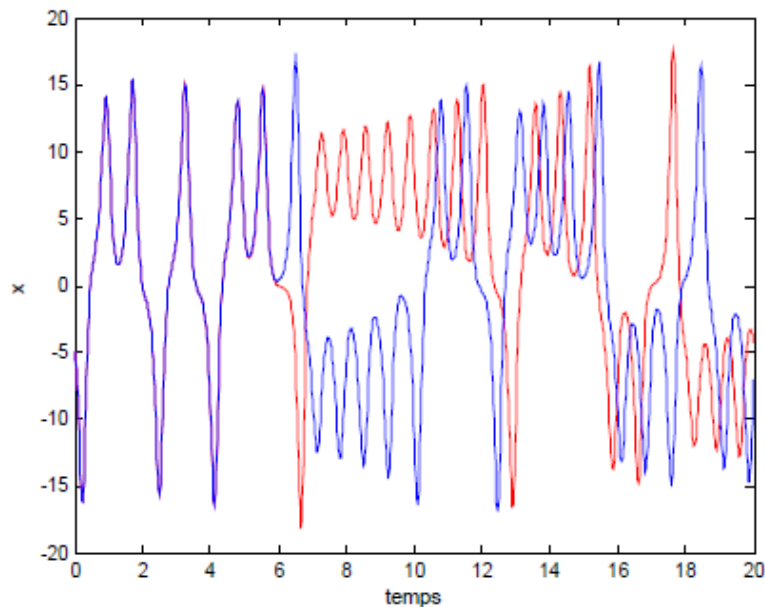


FIGURE 1.3 – Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz.

La figure (1.3) nous montre qu’une petite différence de 0.01 sur la condition initiale, peut faire évoluer le système d’une manière totalement différente.

1.4 Stabilité des systèmes dynamiques

On désigne par stable tout système qui reprend son état d’équilibre après une perturbation. La théorie des systèmes dynamiques non linéaires fait intervenir différentes notions de stabilité. Il faut rappeler que la stabilité d’un point stationnaire garantit une stabilité locale. C’est une condition nécessaire mais pas suffisante pour avoir une stabilité globale. Le système dynamique non linéaire est stable si tous ses états stationnaires sont stables.

Pour déterminer la stabilité d’un système dynamique non linéaire, on peut utiliser différentes méthodes mathématiques, parmi lesquelles on peut citer : la méthode de Lyapunov et la méthode de l’espace de phase. Elles permettent l’étude de la stabilité autour d’un point d’équilibre.

1.4.1 Exposant de Lyapunov

L’exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d’un système. Un système sensible à de très petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l’exposant est négatif si le système n’est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd donc l’information sur les conditions initiales.

Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l’espace de phase. L’apparition du chaos exige l’existence d’un exposant positif selon au moins un axe [6], tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

Un exposant de Lyapunov positif (respectivement négatif) selon une direction indique [7], qu'une divergence entre deux trajectoires voisines augmente (respectivement diminue) exponentiellement avec le temps. C'est une caractérisation d'un attracteur étrange ou non. Les différents types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représentés dans le tableau ci-dessous.

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	— —
Cycle limite	0 — —
Attracteur étrange	+0—

TABLE 1.1 – Caractérisation des attracteurs.

On considère le système discret :

$$X_{n+1} = f(X_n), X_n \in \mathbb{R}^3, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs (ou difféomorphisme) associé du système (1.10). Soient $J(X_n)$ sa Jacobienne en $X_n \in \mathbb{R}^3, n = 0, 1, 2, \dots$ et la matrice :

$$T_N(X_0) = J(X_{N-1})J(X_{N-2})\dots J(X_1)J(X_0).$$

D'autre part, soit $J_i(X_0, N)$ le module de la valeur propre i -ème de la matrice produit $T_N(X_0)$, où $i = 1, 2, 3$. et $N = 0, 1, 2, \dots$

D'après ce qui précède nous avons la définition :

Définition 1.2. *les exposants de Lyapunov du système discret en 3-D de la trajectoire issue du point X_0 sont définis s'il existe par :*

$$l_i(X_0) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} J_i(X_0, N)^{\frac{1}{N}}\right), i = 1, 2, 3. \quad (1.11)$$

Méthodes de Calcul des exposants de Lyapunov : Il existe plusieurs méthodes de calcul des exposants de Lyapunov tels que la méthode (QR), (HQR) et (HQRB) [8]. L'une des méthodes les plus utilisées est l'algorithme de Wolf [9].

On considère un système discret à n dimensions

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Le i -ème exposant de Lyapunov est défini en fonction du taux de croissance du i -ème axe principale v_i par la formule [10]

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{\|v_i(N)\|}{\|v_i(0)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.13)$$

Les vecteurs $v_i(k)$ sont transformés d'après la formule

$$v_i(k+1) = J(k)v_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.14)$$

Où $J(k)$ est la jacobienne de f au point x_k

À $k = 0$ les vecteurs $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ sont définis par :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ v_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération les vecteurs $v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)$ seront ortho-normés par le procédé de Gram Schmidt :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ v'_2 &= \frac{v_2 - (v_2, v'_1) v'_1}{\|v_2 - (v_2, v'_1) v'_1\|} \\ &\vdots \\ v'_n &= \frac{v_n - (v_n, v'_{n-1}) v'_{n-1} - \dots - (v_n, v'_1) v'_1}{\|v_n - (v_n, v'_{n-1}) v'_{n-1} - \dots - (v_n, v'_1) v'_1\|} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Remarque 1.9. Le calcul des exposants de Lyapunov du système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f : R^n \rightarrow R^n \quad (1.17)$$

Se fait de façon analogue. Les équations (1.13) et (1.14) seront remplacées par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|v_i(t)\|}{\|v_i(t_0)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.18)$$

$$\dot{v}_i(t) = J(t)v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.19)$$

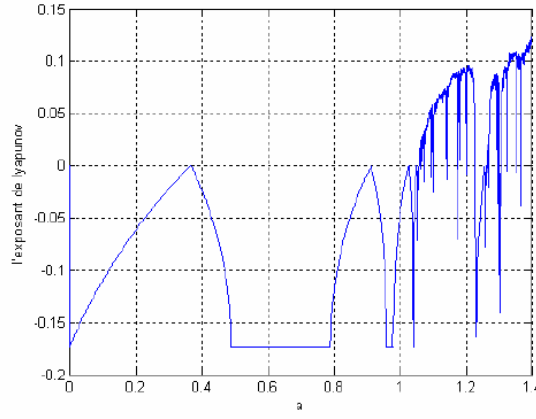


FIGURE 1.4 – Exposant de Lyapunov du système discret de Hénon.

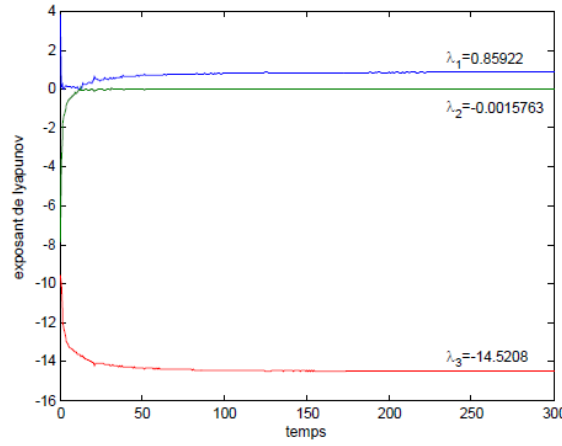


FIGURE 1.5 – Exposant de Lyapunov du système continu de Lorenz.

Exemple 1.1.

Dans certaines situations, il est important d'estimer la borne inférieure et la borne supérieure des exposants de Lyapunov d'un système dynamique donné en 3-D. Des résultats intéressants pour les applications discrètes ont été donnés par [8], [17] :

Théorème 1.1. *Si l'on considère la Système $X_{n+1} = f(X_n)$*

$(X_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, n = 0, 1, 2, \dots$

tel que

$$\|Df(x)\| = \|J\| = \sqrt{\lambda_{\max}(J^T J)} \leq N < +\infty$$

et que la plus petite valeur propre de $J^T J$ qui satisfait

$$\lambda_{\min}(J^T J) \geq \theta > 0,$$

où $N^2 \geq \theta$, alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, tous les exposants de Lyapunov à x_0 sont situés à l'intérieur de l'intervalle $\left[\frac{\ln \theta}{2}, \ln N\right]$, c'est-à-dire,

$$\frac{\ln \theta}{2} \leq l_i(x_0) \leq \ln N, i = 1, 2, 3.$$

où $l_i(x_0)$ sont les exposants de Lyapunov de l'application f et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans $J^T J$.

1.4.2 La méthode de l'espace de phase

La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants montre que la solution générale est obtenue à partir des valeurs propres de l'équation caractéristique déduite de la matrice des dérivées partielles du système. Ainsi, la méthode de l'espace de phase qui est une technique qualitative simple et efficace permet la détermination du type de stabilité du point d'équilibre, à partir de la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction f linéarisée au tour du point d'équilibre x_{eq} .

La linéarisation revient à prendre

$$x = x_{eq} + \delta x \quad (1.20)$$

Ce qui donne

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} \quad (1.21)$$

En remplaçant dans (1.18) on obtient

$$\dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} = f(x_{eq} + \delta x) \quad (1.22)$$

Par le développement de Taylor du premier ordre de $f(x)$, on obtient

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + f'(x_{eq}) \cdot (x - x_{eq}) \quad (1.23)$$

D'où

$$\delta \dot{x} = Df(x_{eq}) \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0 \quad (1.24)$$

$Df(x)$ représente la matrice jacobienne de $f(x)$ par rapport à x , tel que

$$Df = \left\{ \frac{df_i}{dx_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \quad (1.25)$$

Cette équation montre l'évolution dans le temps d'une perturbation δx_0 au voisinage du point d'équilibre. Il a été démontré que les parties réelles des valeurs propres de $Df(x_{eq})$ représentent la vitesse d'expansion $[\text{Re}(\lambda_i) > 0]$, ou de contraction $[\text{Re}(\lambda_i) < 0]$ d'une spirale alors que les parties imaginaires indiquent la fréquence de rotation [11].

Combinant les résultats démontrés pour des valeurs propres réelles et ceux correspondant à des valeurs propres complexes, il a été établi que quelle que soit la nature des valeurs propres, le type de stabilité est déterminé comme suit :

- Si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, pour toutes les valeurs propres, alors, toute perturbation suffisamment petite tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. On dit que le point x_{eq} est asymptotiquement stable. Toutes les trajectoires tendent vers ce point quelque soient les conditions initiales.
- Si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, pour toutes les valeurs propres, alors n 'importe quelle perturbation peut augmenter quand $t \rightarrow \infty$. On dit que le point x_{eq} est instable. Ici les trajectoires de

phase s'éloignent du point considéré.

- S'il existe i et j tel que $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, alors il s'agit d'un point d'équilibre non stable.

1.5 Éléments de la théorie des bifurcations

1.5.1 Stabilité structurelle et bifurcation

Un système est dit structurellement stable sur une portion de l'espace des paramètres si une petite perturbation du système étudié ne modifie pas le comportement global de la dynamique sur cette portion.

Tant que le système est structurellement stable, les variations de paramètres produisent des changements quantitatifs dans la solution : coordonnées d'un point fixe, amplitude ou fréquence d'une solution périodique par exemple. Cependant, il arrive aussi qu'une infime variation de paramètres produise un changement qualitatif de la solution : changement de stabilité d'un ensemble limite.

A la valeur particulière du paramètre où la solution change subitement de nature, le système est structurellement instable ce qui autorise un brusque changement de type de la solution. Ce phénomène est appelé bifurcation et les points où il se produit sont les points de bifurcation.

Remarque 1.10. *Des bifurcations sont fréquemment observées au niveau expérimental car la plupart des processus réels sont non linéaires et ont des paramètres qui subissent des altérations. Ces variations de paramètres sont le fait soit du réglage de la commande, soit d'une évolution naturelle sous l'action de grandeurs extérieures.*

1.5.2 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcations unidimensionnel est un tracé repérant la nature des différentes solutions du système et leur stabilité lorsqu'un paramètre varie.

Il est composé d'intervalles sur lesquelles les solutions asymptotiques (ou les ensembles limites qui leur correspondent) évoluent continument avec le paramètre et les intervalles sont séparés par les points de bifurcation.

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint.

Dans le cas d'un système autonome, ces valeurs particulières peuvent être obtenues en travaillant avec une section de Poincaré. Pour un système excité par une fonction périodique du temps, elles peuvent l'être en échantillonnant la variable à la fréquence d'excitation. On obtient ainsi pour chaque valeur du paramètre la suite des états discrets de la variable lorsque le régime asymptotique est atteint.

Un seul point sur une verticale indique un fonctionnement périodique fondamental. En effet,

si pour une valeur donnée du paramètre le régime est périodique, la variable échantillonnée à la fréquence fondamentale f prend une valeur unique. Les n points correspondants à la même abscisse se superposent donc exactement.

Lorsque les points se répartissent densément sur un segment de la verticale, on peut en déduire que la solution est apériodique mais il n'est pas possible de préciser si elle est quasi périodique ou chaotique.

Exemple 1.2. *diagramme de bifurcation du système de Rössler décrit par :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

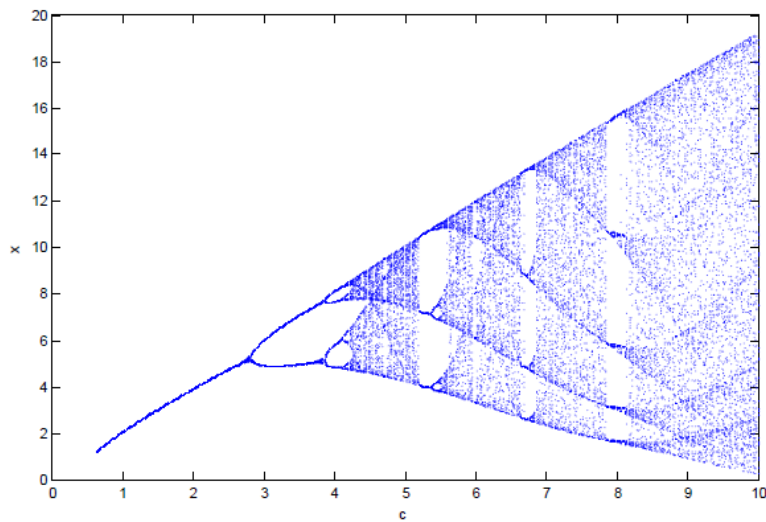


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcation du système de Rössler pour $a = 0.2$ et $b = 0.2$.

Exemple 1.3. *Exemple 2 : diagramme de bifurcation du système de hénon*

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

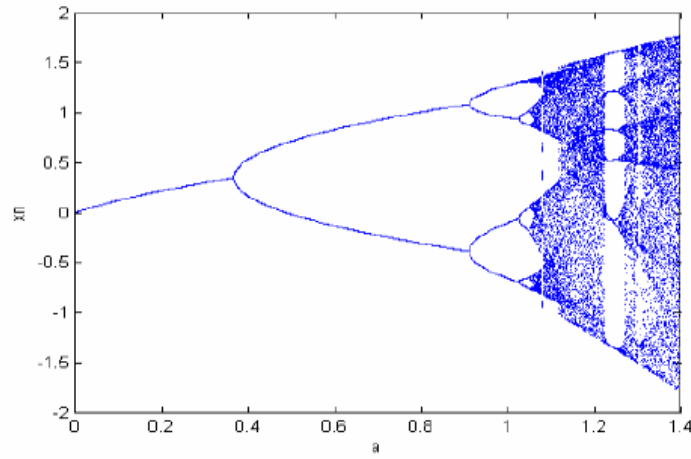


FIGURE 1.7 – Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b = 0.3$

Chaotification des systèmes discrets

2.1 Introduction

En général, le comportement chaotique est toujours indésirable. Pour cela, plusieurs méthodes de contrôle ont été développées dans le but de supprimer ce phénomène chaotique. Mais parfois le maintien et la génération du chaos est recherché pour certaines applications. On peut citer à titre d'exemple, le cryptage, la communication sécurisée, les processus épileptiques...etc.

L'anti-contrôle ou la chaotification des systèmes dynamiques est une méthode de contrôle qui permet de générer le chaos à partir d'un système non chaotique ou d'un système chaotique mais dans sa partie stable. Depuis l'apparition de cette nouvelle théorie en 1996 [17], les chercheurs accordent de plus en plus d'intérêts à cet aspect [18] [19]. Les méthodes de chaotification développées sont pratiquement toutes basées sur le calcul des exposants de Lyapunov. Nous présentons dans ce chapitre la méthode développée par Chen [17], qui est une méthode assez représentative des techniques proposées.

2.2 Méthode de chaotification

D'après les théorèmes de la stabilité des systèmes dynamiques, on dit qu'un système dynamique est stable si et seulement si, tout ses exposants sont inférieurs ou égaux à zéro. Par contre, s'il existe au moins un exposant positif, le système devient complètement instable (chaotique) [20]. Pour cela, pratiquement toutes les méthodes de chaotification des systèmes stables sont basées sur le changement de signe de l'exposant de Lyapunov.

Soit le système dynamique non linéaire défini par :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)), & x(k) \in R^n \\ x(0) = x_0, & \text{donné} \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec f : Fonction différentiable. Pour contrôler le système on lui ajouté un contrôleur de manière à ce que le système contrôlé soit de la forme [19] :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) + u(k), & x(k) \in R^n \\ x(0) = x_0, & \text{donné} \end{cases} \quad (2.2)$$

Et

$$u(k) = B(k)x(k) \quad (2.3)$$

B étant la matrice gain de dimension $(n \times n)$ Le système contrôlé s'écrit donc comme suit :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) + B(k)x(k), & x(k) \in R^n \\ x(0) = x_0, & \text{donné} \end{cases} \quad (2.4)$$

par $f'(x_f)$ la matrice jacobienne du système original au tour du point x_f

$$f'(x_f) = \left. \frac{\partial x(k+1)}{\partial x(k)} \right|_{x=x_f} \quad (2.5)$$

Et par J la jacobienne du système sous anti-contrôle

$$J = f'(x_f) + B(k) \quad (2.6)$$

Les exposants de Lyapunov de l'ensemble $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ sont donnés par

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln\{J\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Les exposants λ_i sont choisis tel que :

$$0 \prec \alpha \prec \lambda_i \prec \infty$$

α étant une constante strictement positive. L'objectif de la méthode, c'est d'appliquer au système la séquence $\{B(k)\}_{k=0}^{\infty}$ à condition qu'un ou plusieurs exposants du système soient strictement positifs. Pour rester dans le domaine de convergence, il faut que la séquence $\{B(k)\}_{k=0}^{\infty}$ soit bornée

$$\sup_{0 \leq k < \infty} \|B(k)\| \leq M \prec \infty \quad (2.8)$$

M : Constante

A chaque itération et avec une valeur désirée de l'exposant de Lyapunov, la matrice du gain d'anti-contrôle est calculée par

$$B(k) = -f'(x(k)) + \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.9)$$

L'algorithme de chaotification se résume donc à trois étapes principales :

- * Calcul des exposants de Lyapunov du système sans contrôle.
- * Fixer un des exposants λ_i à une valeur positive, et calculer la matrice du gain B
- * Appliquer le contrôle.

Pour garantir que la matrice B soit toujours bornée, on utilise la fonction (modulo).

Donc le système sous anti-contrôle devient

$$x(k+1) = f(x(k)) + B(k)x(k) \bmod (\varepsilon) \quad (2.10)$$

ε : Nombre positif très petit.

2.3 Application de l'algorithme pour l'application logistique

On va prendre comme premier exemple l'équation logistique décrit par :

$$x(k+1) = px(k)[1 - x(k)] \quad (2.11)$$

Cette équation représente un système dynamique du premier ordre qui peut être stable ou chaotique. Le but de l'anti-contrôle est de générer le phénomène chaotique dans une zone où le système est complètement stable. On applique au système (2.11), la loi suivante :

$$u(k) = B(k)x(k) \quad (2.12)$$

D'où

$$x(k+1) = px(k)[1 - x(k)] + B(k)x(k) \quad (2.13)$$

La jacobienne du système (2.11) est

$$f'(k) = p[1 - 2x(k)] \quad (2.14)$$

La jacobienne du système contrôlé est

$$J = e^\lambda$$

Où λ représente l'exposant de Lyapunov Donc

$$B(k) = -p[1 - 2x(k)] + e^\lambda, \quad (2.15)$$

Pour assurer que la matrice B soit toujours bornée, on injecte la fonction modulo tel que

$$u(k) = B(k)x(k) \bmod \varepsilon, \varepsilon = 0.9. \quad (2.16)$$

Le diagramme de bifurcation de l'application logistique présente trois phénomènes :

- point fixe

- système périodique
- système chaotique

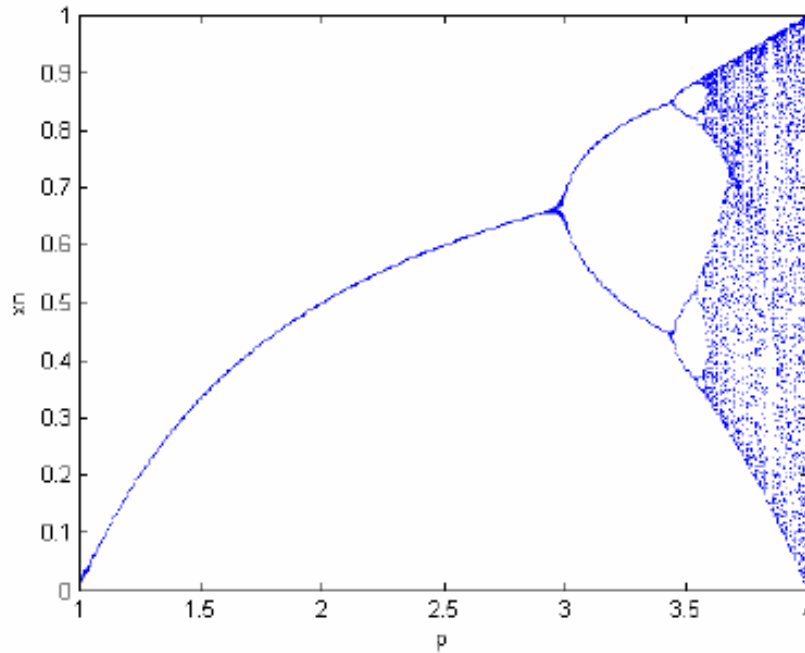


FIGURE 2.1 – Diagramme de bifurcation.

L'algorithme d'anti-contrôle sera appliqué pour chacun des trois cas de fonctionnement :

1^{er} cas : Point fixe ($p = 2.5$)

L'exposant de Lyapunov dans cette partie est négatif, pour réussir la chaotification il faut choisir une valeur de l'exposant strictement positif, on choisit $\lambda = 2$.

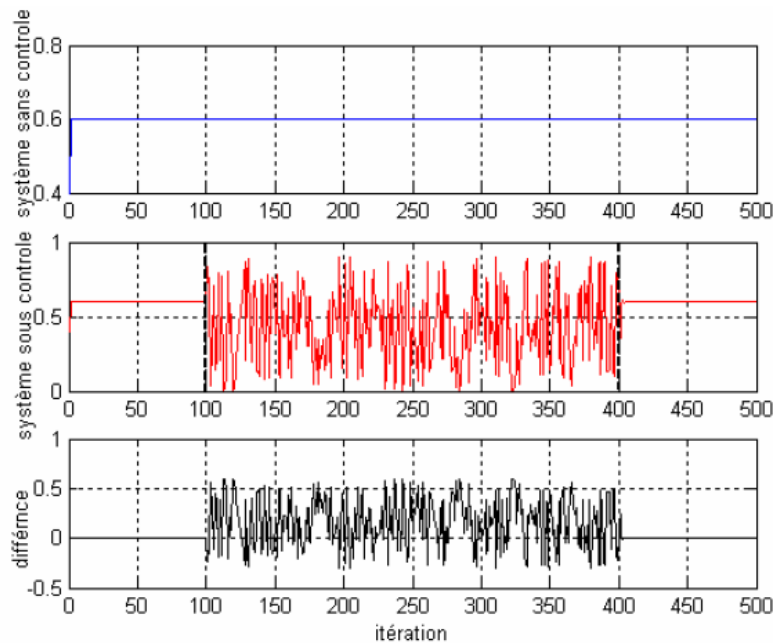


FIGURE 2.2 – Réponse temporelle du système sous anti-contrôle pour $p = 2.5$.

Au départ le système est stable sur son point fixe $x_f = 0.642$, mais dès que la loi d'anti-

contrôle est déclenchée, on remarque l'apparition du phénomène chaotique, donc on peut dire que le système a perdu sa stabilité à cause de son exposant de Lyapunov qui est devenu positif. Mais au moment du relâchement du contrôle le système revient à son état stable.

2^{eme} cas : Solution périodique ($p = 3.3$) avec toujours $\lambda = 2$

Dans ce cas, lorsque l'anti-contrôle est déclenché l'orbite périodique stable devient instable à cause du changement de signe de l'exposant de Lyapunov, pour cela le système va suivre une trajectoire chaotique. Dès que le contrôle est relâché le système change complètement sa trajectoire pour retrouver à nouveau l'orbite périodique stable.

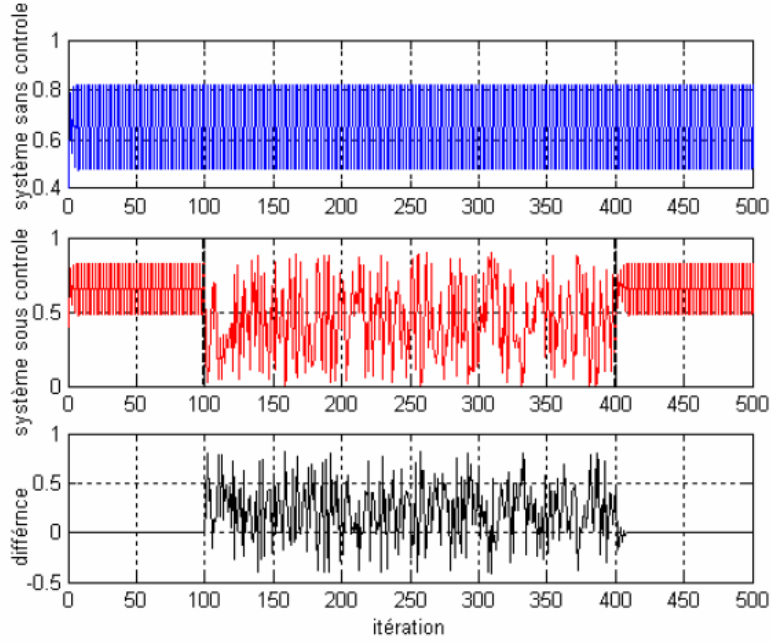


FIGURE 2.3 – Réponse temporelle du système sous anti-contrôle pour $p = 3.3$.

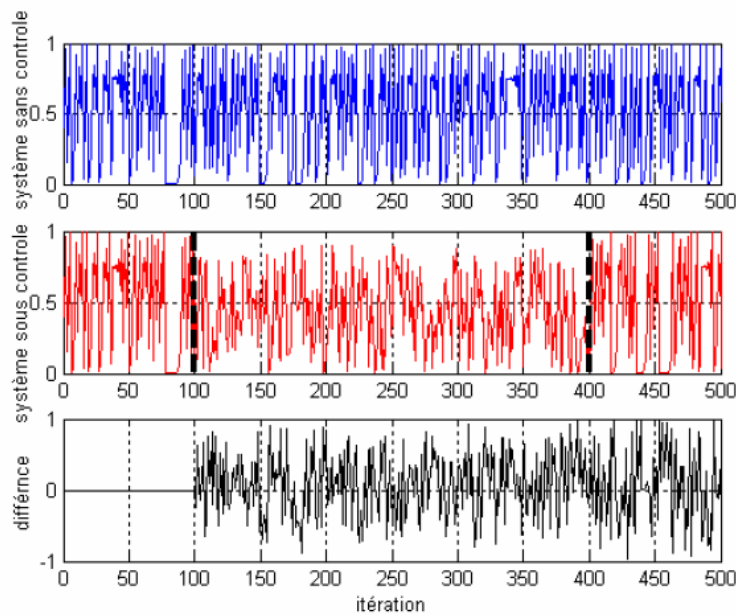


FIGURE 2.4 – Réponse temporelle du système sous anti-contrôle pour $p = 4$.

3^{eme} cas : Système chaotique ($p = 4$) Dans ce cas, dès le départ le système est chaotique. Mais on remarque qu'après le déclenchement du contrôle, la différence entre les deux systèmes reste nulle pour quelques itérations. Puis elle commence à varier parce que le système sous anti-contrôle va suivre une trajectoire différente mais elle est toujours chaotique. L'application de l'algorithme dans cette zone génère donc un système chaotique mais avec des trajectoires différentes. On remarque aussi, que même après relâchement du contrôle, la différence entre les deux trajectoires reste non nulle, parce que le système dans ce cas va prendre une condition initiale différente, ce qu'il le force à suivre une trajectoire différente.

2.4 Application de Hénon

L'application de Hénon est représenté par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (2.17)$$

Ce application possède aussi trois zones de stabilité en fonction du paramètre a , un point fixe, une orbite stable et une trajectoire chaotique. La variation de l'exposant de Lyapunov en fonction de a met bien en évidence ces trois types de fonctionnement.

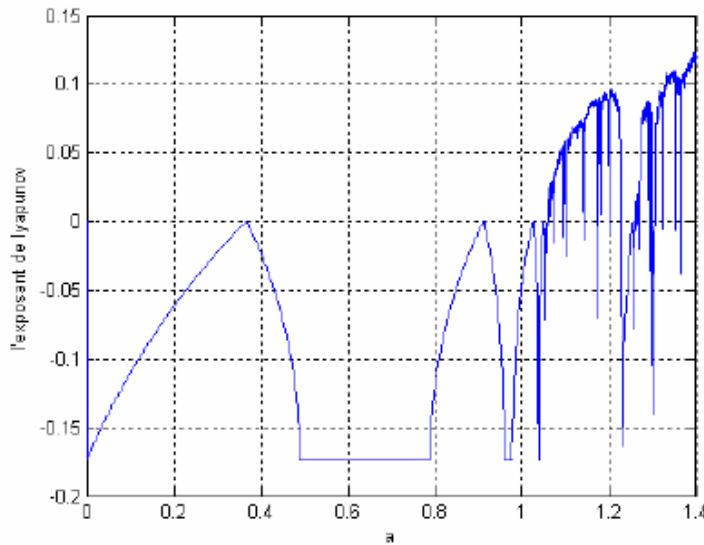


FIGURE 2.5 – Exposant de Lyapunov.

Les étapes du calcul sont les mêmes que celles effectuées dans l'exemple précédent, c'est-à-dire :

$$B(k) = -f'(k) + J \quad (2.18)$$

Avec

$$f'(k) = \begin{bmatrix} -2x(k) & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

Pour garantir l'apparition du phénomène chaotique on donne à λ_1 une valeur strictement positive, par exemple $\lambda_1 = 0.25$. La valeur de λ_2 garde la valeur obtenue par simulation c'est-à-dire $\lambda_2 = -2.31$. Donc on applique au système la loi de contrôle suivante :

$$u(k) = B(k) \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \bmod \varepsilon \quad (2.19)$$

Les résultats de simulation pour les différents cas sont représentés dans les figures (2.6) à (2.8).

Pour un fonctionnement sans anti-contrôle on a :

- pour $a = 0.2$ et $b = 0.3$, l'application converge vers un point fixe.
- pour $a = 0.6$ et $b = 0.3$, l'application stabilise sur une orbite périodique.
- pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, l'application suit une orbite chaotique.

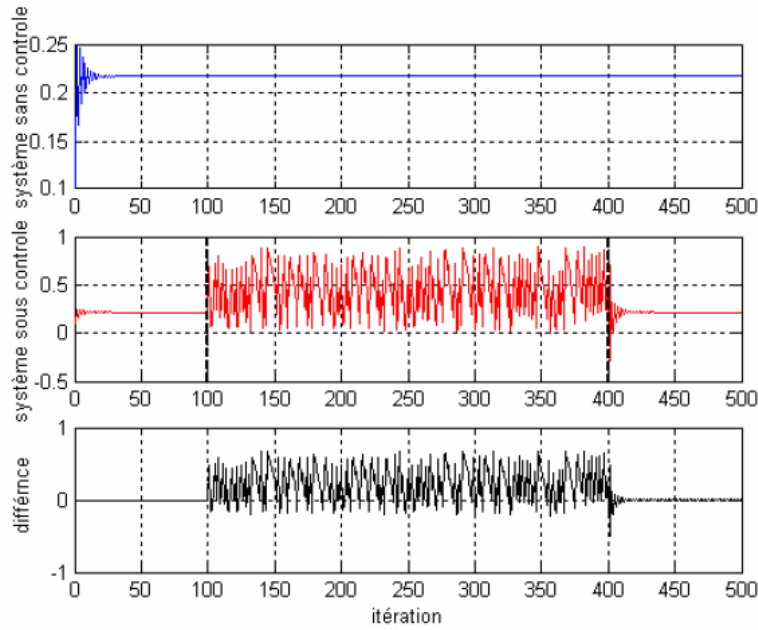


FIGURE 2.6 – Réponse temporelle du application sous anti-contrôle pour $a = 0.2$.

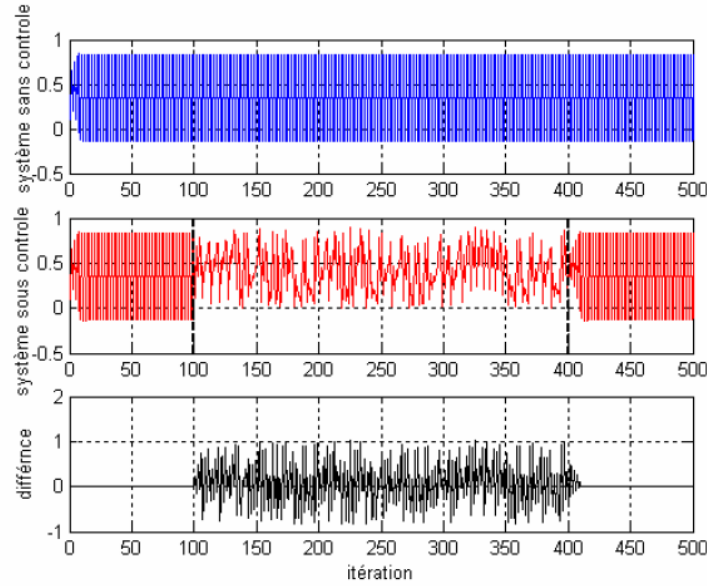


FIGURE 2.7 – Réponse temporelle du l'application sous anti-contrôle pour $a = 0.6$.

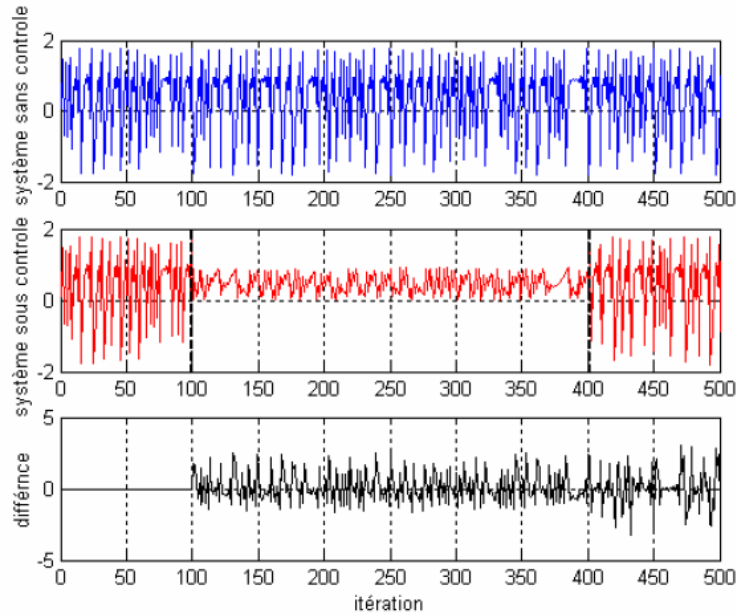


FIGURE 2.8 – Réponse temporelle du l'application sous anti-contrôle pour $a = 1.4$.

Avant l'activation de l'anti-contrôle, on remarque que les deux applications suivent une trajectoire identique. Au moment du déclenchement du contrôle l'application sous anti-contrôle obtient un exposant positif qui l'oblige de suivre une trajectoire différente et plus précisément chaotique, donc il va perdre sa stabilité soit sur le point fixe ou sur l'orbite périodique. Mais des que le contrôle est relâché l'application récupère ses caractéristiques originales de stabilité, donc il revient à son état avant contrôle.

chaotification et Hyperchaotification des applications affine par morceaux

3.1 chaotification des applications affine par morceaux en utilisant la définition des exposants de lyapunov

Dans cet section, une preuve rigoureuse du chaos dans une séquence discontinue par morceaux de fonction linéaire est donnée, par l'utilisation de la norme Lyapunov exposants. D'autre part, une formule analytique de la dynamique de ce fonction est également présentée en terme d'un seul paramètre de bifurcation.

On Considéré le système discret suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ah(y_n) + x_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (3.1)$$

Où la fonction h est définis par :

$$h(y) = \begin{cases} by - c & \text{si } y \geq 0 \\ by + c & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour $a, b, c \neq 0$, sont des paramètres de bifurcation positifs. on peut réécrire le système (3.1) comme suit :

$$X_{n+1} = f(X_n) = \begin{cases} AX_n + B & \text{si } y_n \geq 0 \\ BX_n - B & \text{si } y_n < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} ac \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Théorème 3.1. (1) l'application (3.1) converges vers stable point fixe pour $0 \leq \alpha < \frac{1}{b}$.
(2) Le comportement de l'application (3.1) est inconnu pour $\alpha = \frac{1}{b}$.
(3) l'application (3.1) converge vers un attracteur chaotique pour $\alpha > \frac{1}{b}$.

Démonstration. La matrice jacobien $Df(X_n)$ de la fonction (3.1) est définis par :

$$Df(X_n) = A = \begin{pmatrix} 1 & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Et la matrice $T_n(X_0)$ est définis par :

$$T_n(X_0) = A^n \quad (3.6)$$

(I) Supposons que $0 \leq a \leq \frac{1}{4b}$, alors la matrice A deux nombres réels et distincts valeurs propres λ_1 et λ_2 , données par : $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2}$, et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2}$. Donc, si l'on considère la forme normale de Jordan pour la matrice A , c'est-à-dire $A = PJP^{-1}$, où P est la matrice dont les colonnes sont constitués des deux vecteurs propres de la matrice A , et J est donné par :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La formule $A = PJP^{-1}$ implique que $A^n = PJ^nP^{-1}$, alors A^n et J^n admettant les mêmes valeurs propres , donc, les valeurs propres de $T_n(X_0)$ sont :

$$\delta_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{1-4ab}}{2}\right)^n, \delta_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2}\right)^n \quad (3.8)$$

Et donc on a :

$$\begin{cases} J_1(X_0, n) = |\delta_1|^{\frac{1}{n}} = \left|\left(\frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2}\right)\right| < 1 \\ J_2(X_0, n) = |\delta_2|^{\frac{1}{n}} = \left|\left(\frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2}\right)\right| < 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

puisque $0 \leq a \leq \frac{1}{4b}$, et il découle de la définition de l'exposant de Lyapunov (1.2) que

$$\lambda_1(X_0) = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-4ab}}{2} \right| < 0, \lambda_2(X_0) = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2} \right| < 0, \quad (3.10)$$

dans chacune des régions linéaires D_1 et D_2 tel que :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$$

et

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 0\}$$

Alors, on obtient que l'application (3.1) est converge vers un point fixe stable pour tout $0 \leq a \leq \frac{1}{4b}$. (II) Supposons que $a > \frac{1}{4b}$, alors la matrice A deux complexes conjugués valeurs propres λ_1 et λ_2 , données par : $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2}$, et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2}$. Donc, si l'on considère la forme normale de Jordan pour la matrice A , c'est-à-dire $A = PJP^{-1}$, où P est la matrice dont les colonnes sont constitués des deux vecteurs propres de la matrice A , et J est donné par :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Pour

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4ab-1}}{2} \quad (3.12)$$

La formule $A = PJP^{-1}$ implique que $A^n = PJ^nP^{-1}$, alors A^n et J^n admettant les mêmes valeurs propres, donc, les valeurs propres de $T_n(X_0)$ sont :

$$\delta_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{-(1-4ab)i}}{2} \right)^n, \delta_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{-(1-4ab)i}}{2} \right)^n \quad (3.13)$$

Et donc on a :

$$J_1(X_0, n) = J_2(X_0, n) = |\delta_1|^{\frac{1}{n}} = |\delta_2|^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} \quad (3.14)$$

Et pour la définition de l'exposant de Lyapunov (1.2) nous obtenons :

$$\lambda_1(X_0) = \lambda_2(X_0) = \frac{1}{2} \ln(ab) \quad (3.15)$$

dans chacune des régions linéaires D_1 et D_2 tel que

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$$

et

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 0\}$$

Alors, on obtient que l'application (3.1) est :

converge vers un point fixe stable pour $\lambda_1(X_0) = \frac{1}{2} \ln(ab) < 0$ c'est à dire $\frac{1}{4b} < a < \frac{1}{b}$.

Et si on suppose que $a > \frac{1}{4b}$ le comportement n'est pas clair si $\lambda_1(X_0) = \frac{1}{2} \ln(ab) = 0$, c'est à dire $\alpha = \frac{1}{b}$.

Et converge vers à attracteur chaotique $\lambda_1(X_0) = \frac{1}{2} \ln(ab) > 0$, c'est à dire $\alpha > \frac{1}{b}$

Enfin, on peut déduire des deux cas (I) et (II) que l'application (3.1) converge vers un point fixe stable lorsque $+\leq \alpha < \frac{1}{b}$, et le comportement n'est pas clair quand $\alpha = \frac{1}{b}$ et converge vers un attracteur chaotique quand $\alpha > \frac{1}{b}$.

□

3.1.1 Observation attracteur chaotique

Dans cette section, nous allons illustrer certains attracteurs chaotiques, ainsi que avec quelques autres phénomènes dynamiques. Maintenant, les comportements dynamiques de l'application (3.1) sont étudiés numériquement, nous fixons les paramètres : $b = 0.5, c = 0.3$, et la

condition initiale $x_0 = y_0 = 0,01$, et a varier tel que $a \geq 0$.

l'application (3.1) montre ce qui suit comportements dynamiques :

- (i) Pour $0 \leq a < 2,0$, l'application (3.1) converge vers un point fixe stable.
- (ii) Pour $a = 2,0$, l'application (3.1) converge vers une orbite 5-périodique (dépend de la choix de la condition initiale $x_0 = y_0 = 0,01$).

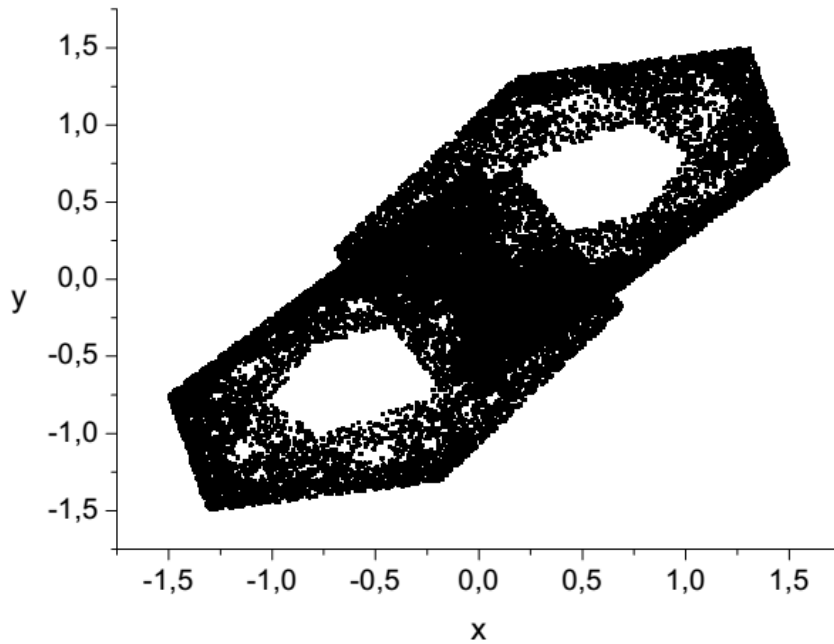


FIGURE 3.1 – Attracteur chaotique de l'application (3.1) pour : $a = 2,5$, $b = 0,5$, et $c = 0,3$, avec la condition initiale $x_0 = y_0 = 0,01$.

(iii) Pour $a > 2$, l'application (3.1) converge vers un attracteur chaotique comme indiqué dans Fig (3.1). l'attracteur chaotique est obtenue à partir d'une bifurcation par collision de frontière d'une orbite stable à 5 périodes à un régime chaotique pleinement développé (Voir Fig (3.2))

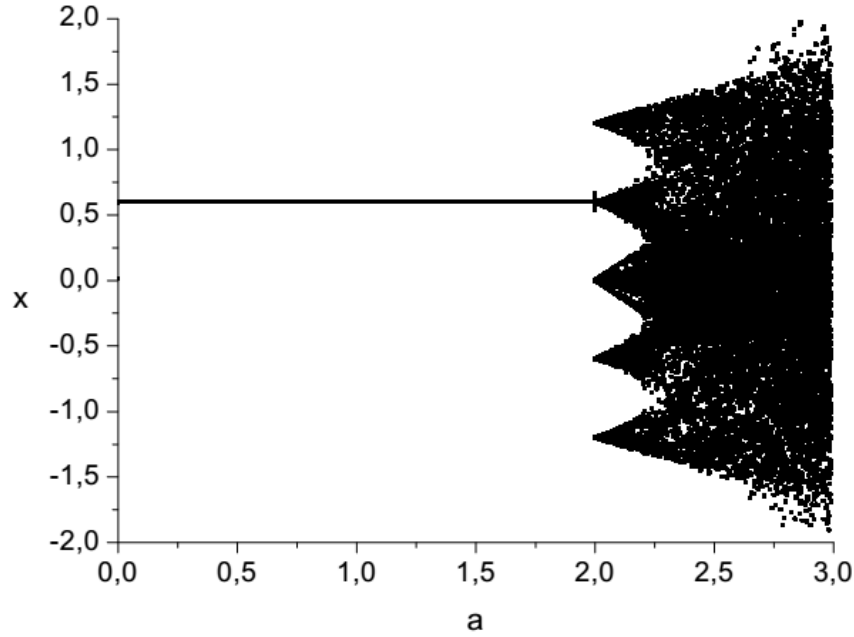


FIGURE 3.2 – Le diagramme de bifurcation de l’application (3.1) pour : $0 \leq a \leq 3,0$.

3.2 hyperchaotification des applications affine par morceaux utilisant une fonction de contrôle linéaire par morceaux

3.2.1 Introduction

le but de ce chapitre est de présenter une méthode simple pour l’hyper-chaotification une application linéaire par morceaux en 2-D (continue ou non) à l’aide d’une simple fonction de contrôle linéaire par morceaux, on utilisant la définition standard des exposant de lyapunov comme test de chaos et de l’hyper-chaos.

Soit l’application $f : D \rightarrow D$, et $D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^2$, définie par :

$$X_{k+1} = f(X_k) = \begin{cases} AX_k + b & \text{si } X_k \in D_1 \\ BX_k + c & \text{si } X_k \in D_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Tel que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Deux matrices à coefficients réels, et

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs à coefficients réels, et

$$X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

un variable.

Théorème 3.2. *La fonction de contrôle linéaire par morceaux $U(X_k)$ rend l'application $f(X_k)$ hyper chaotique si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} 2 < b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2 < (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^2 + 1 \\ |b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}| > 1. \end{cases}$$

Tel que

$$U(X_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} (b_{11} + b_{22} - a_{11} - a_{22})x_k \\ \left(\frac{-a_{12}a_{21} + b_{11}a_{22} - b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} - a_{22}^2}{a_{12}} \right) x_k \end{pmatrix} & \text{si } X_k \in D_1, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } X_k \in D_2. \end{cases} \quad (3.17)$$

3.2.2 Méthode de hyperchaotification utilisant une fonction de contrôle linéaire par morceaux

L'idée principale de la méthode de chaotification présenté dans ce travail est d'introduire une fonction de contrôle linéaire par morceaux pour que les deux matrices admettent les mêmes traces et les même déterminants, par conséquent les mêmes valeurs propres.

En effet la fonction définie par :

$$g(X_k) = \begin{cases} AX_k + b & \text{si } X_k \in D_1 \\ BX_k + c & \text{si } X_k \in D_2 \end{cases} + U(X_k) \quad (3.18)$$

où

$$U(X_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} (b_{11} + b_{22} - a_{11} - a_{22})x_k \\ \left(\frac{-a_{12}a_{21} + b_{11}a_{22} - b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} - a_{22}^2}{a_{12}} \right) x_k \end{pmatrix} & \text{si } X_k \in D_1, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } X_k \in D_2. \end{cases}$$

Alors la système (3.18) est définie par :

$$g(x_k) = \begin{cases} Qx_k + b & \text{si } X_k \in D_1 \\ Bx_k + c & \text{si } X_k \in D_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

où la matrice Q est définie par :

$$Q = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{22} - a_{22} & a_{12} \\ \frac{b_{11}a_{22} - b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} - a_{22}^2}{a_{12}} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

La matrice jacobienne de (3.19) est définie par

$$J(X_k) = \begin{cases} Q & \text{si } X_k \in D_1 \\ B & \text{si } X_k \in D_2 \end{cases} \quad (3.21)$$

Est ce que les deux matrices admettent les mêmes valeurs propres ?

$$P_Q(\lambda) = \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + \det Q$$

où

$$\begin{aligned} \det Q &= a_{22}(b_{11} + b_{22} - a_{22}) - (b_{11}a_{22} - b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} - a_{22}^2) \\ &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{aligned}$$

Et

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

Tel que $P_Q(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice Q et $P_B(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice B .

Alors Q et B admettent les mêmes valeurs propres et ce le but de notre choix de la fonction de contrôle $U(X_k)$.

D'après la définition de la norme de la matrice

$$\|B\| = \sqrt{\lambda_{\max}(B^\top B)}, \text{ et } \|Q\| = \sqrt{\lambda_{\max}(Q^\top Q)}.$$

Et comme Q et B admettent les mêmes valeurs propres

$$\sqrt{\lambda_{\max}(B^\top B)} = \sqrt{\lambda_{\max}(Q^\top Q)}$$

Alors

$$\|Q\| = \|B\| = \sqrt{\lambda_{\max}(B^\top B)}.$$

En calculer cette norme

On à

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^\top = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Alors

$$B^\top B = \begin{pmatrix} b_{11}^2 + b_{21}^2 & b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} \\ b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} & b_{12}^2 + b_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$P_{B^\top B}(\lambda) = \lambda^2 - (b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2)\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^2 \quad (3.23)$$

$P_{B^\top B}(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $B^\top B$

$$\Delta = \left((b_{11} + b_{21})^2 + (b_{12} - b_{21})^2 \right) \left((b_{12} + b_{21})^2 + (b_{11} - b_{22})^2 \right) > 0 \quad (3.24)$$

Donc les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(B^\top B) &= \frac{1}{2}b_{11}^2 + \frac{1}{2}b_{12}^2 + \frac{1}{2}b_{21}^2 + \frac{1}{2}b_{22}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ \lambda_{\min}(B^\top B) &= \frac{1}{2}b_{11}^2 + \frac{1}{2}b_{12}^2 + \frac{1}{2}b_{21}^2 + \frac{1}{2}b_{22}^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Alors pour tous b_{11}, b_{12}, b_{21} et b_{22} la condition de la théorème (1.1) (le théorème des exposants de lyapunov) est vérifiée.

$$\|f'(x)\| = \|B\| = \|Q\| = \sqrt{\lambda_{\max}(B^\top B)} = N < +\infty$$

Parce que B et Q ont les mêmes valeurs propres et d'après le théorème (1.1) on obtient l'inégalité

$$\theta^2 - (b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2)\theta + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^2 \geq 0 \quad (3.26)$$

Avec la condition

$$\theta < \frac{b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2}{2} \quad (3.27)$$

Puisque la discriminant de (3.26) est égal à $\Delta > 0$.

D'après le théorème (1.1) on obtient :

$$\theta \geq \lambda_{\max}(B^\top B) \text{ ou } \theta \leq \lambda_{\min}(B^\top B) \quad (3.28)$$

Car

$$\lambda_{\max}(B^\top B) \geq \lambda_{\min}(B^\top B) \geq 0$$

Et $\lambda_{\max}(B^\top B) > \theta > \lambda_{\min}(B^\top B)$ est négative et c'est impossible.

Le cas $\theta \geq \lambda_{\max}(B^\top B)$ est impossible pour la condition (3.27) Donc :

$$\theta < \lambda_{\min}(B^\top B) = \frac{b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.29)$$

Maintenant si

$$2 < b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2 < (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^2 + 1, \quad |b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}| > 1, \quad (3.30)$$

$$\lambda_{\min}(B^\top B) > 1, \quad \theta = 1,$$

$$0 < l_i(x_0) \leq \ln N, \quad i = 1, 2 \quad (3.31)$$

C'est-à-dire la fonction (3.18) converge vers un attracteur hyper chaotique pour tous les paramètres b_{11}, b_{12}, b_{21} et b_{22} satisfaisant (3.30).

Alors le théorème (3.16) est prouvé.

3.2.3 Exemple

Dans ce section nous avons chaotifier la fonction linéaire par morceaux on utilisent ce méthode.

Soit $f : D \rightarrow D$, et $D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^2$ tel que $D_1 = \{y_k : y_k \geq 0\}$ et $D_2 = \{y_k : y_k < 0\}$ et

$$f(X_k) = \begin{cases} Ax_k + m & \text{si } y_k \geq 0 \\ Bx_k + n & \text{si } y_k < 0 \end{cases}$$

Et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad m = n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$f(x_k, y_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_k - ay_k + 1, \\ cx_k \end{pmatrix} & \text{si } y_k \geq 0 \\ \begin{pmatrix} x_k + ay_k + 1 \\ -bx_k \end{pmatrix} & \text{si } y_k < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

En utilisant la fonction de contrôle et nous obtenons :

$$g(x_k, y_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } y_k \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } y_k < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Tel que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$J(x_k, y_k) = \begin{cases} Q & \text{si } y_k \geq 0 \\ B & \text{si } y_k < 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

$J(x_k) = J(x_k, g_k)$ est un Jacobien matrice de $g(x_k)$

$$\begin{aligned} P_Q(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda + ab \\ P_B(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda + ab \end{aligned} \quad (3.35)$$

Tel que

$P_Q(\lambda)$ la polynôme caractéristique de la matrice Q , et $P_B(\lambda)$ la polynôme caractéristique de la matrice B , alors B et Q ont mêmes valeurs propres. et d'après la définition de la norme :

$$\|Q\| = \|B\| = \sqrt{\lambda_{\max}(B^T B)} \quad (3.36)$$

où

$$\begin{aligned}
 B^\top B &= \begin{pmatrix} 1 & -b \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \\
 P_{B^\top B}(\lambda) &= \lambda^2 - (1+b^2+a^2)\lambda + (1+b^2)a^2 - a^2 \\
 &= \lambda^2 - (1+b^2+a^2)\lambda + a^2 + a^2b^2 - a^2 \\
 &= \lambda^2 - (1+b^2+a^2)\lambda + a^2b^2
 \end{aligned}$$

$P_{B^\top B}(\lambda)$ la polynôme caractéristique de la matrice $B^\top B$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (1+b^2+a^2)^2 - 4a^2b^2 \\
 \Delta &= (1+b^2+a^2)^2 - (2ab)^2 \\
 \Delta &= (1+b^2+a^2+2ab)(1+b^2+a^2-2ab) \\
 \Delta &= (1+(a+b)^2)(1+(a-b)^2) > 0
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Donc les valeurs propres ont :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\max} &= \frac{(1+b^2+a^2) + \sqrt{\Delta}}{2} \\
 \lambda_{\min} &= \frac{(1+b^2+a^2) - \sqrt{\Delta}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Alors la condition est vérifiée

$$\|f'(x)\| = \|B\| = \|Q\| = \sqrt{\lambda_{\max}(B^\top B)} = N < +\infty \tag{3.39}$$

$$\theta^2 - (1+a^2+b^2)\theta + a^2b^2 \geq 0 \tag{3.40}$$

$$\theta < \frac{1+a^2+b^2}{2} \tag{3.41}$$

$$\theta < \lambda_{\min}(B^\top B) = \frac{1+a^2+b^2-\sqrt{\Delta}}{2} \tag{3.42}$$

$$2 < 1+a^2+b^2 < (ab)^2 + 1 \tag{3.43}$$

$$ab^2 > 1 \tag{3.44}$$

D'après (3.43)

$$\begin{aligned}
 1+a^2+b^2 &< (ab)^2 + 1 \\
 a^2+b^2 &< a^2b^2 \\
 b^2 &< a^2b^2 - a^2 \\
 b^2 &< a^2(b^2-1) \\
 \frac{b^2}{b^2-1} &< a^2 \\
 \frac{|b|}{\sqrt{b^2-1}} &< |a|
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Et d'après (3.44)

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &> 1 \\ a^2 &> \frac{1}{b^2} \\ |a| &> \frac{1}{|b|} \end{aligned} \tag{3.46}$$

D'après (3.45) et (3.46)

$$|a| > \max \left(\frac{|b|}{\sqrt{b^2 - 1}}, \frac{1}{|b|} \right), |b| > 1.$$

3.2.4 Étude numérique

Par exemple

$$b < -1$$

Alors

$$\frac{|b|}{\sqrt{b^2 - 1}} = \frac{-b}{\sqrt{b^2 - 1}} < \frac{1}{|b|} = \frac{-1}{b}.$$

Nous obtenons

$$|a| > -\frac{1}{b}, \quad b < -1$$

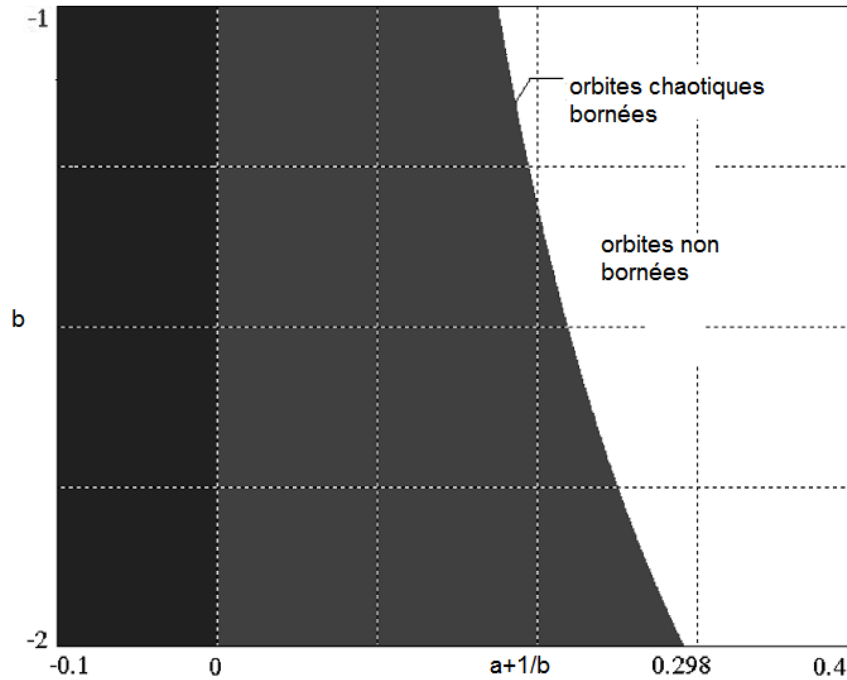


FIGURE 3.3 – Régions de comportements dynamiques dans le ab -plan pour la fonction (3.33) avec $-2 < b < -1$ et $-1 < a + 1/b < +0.4$

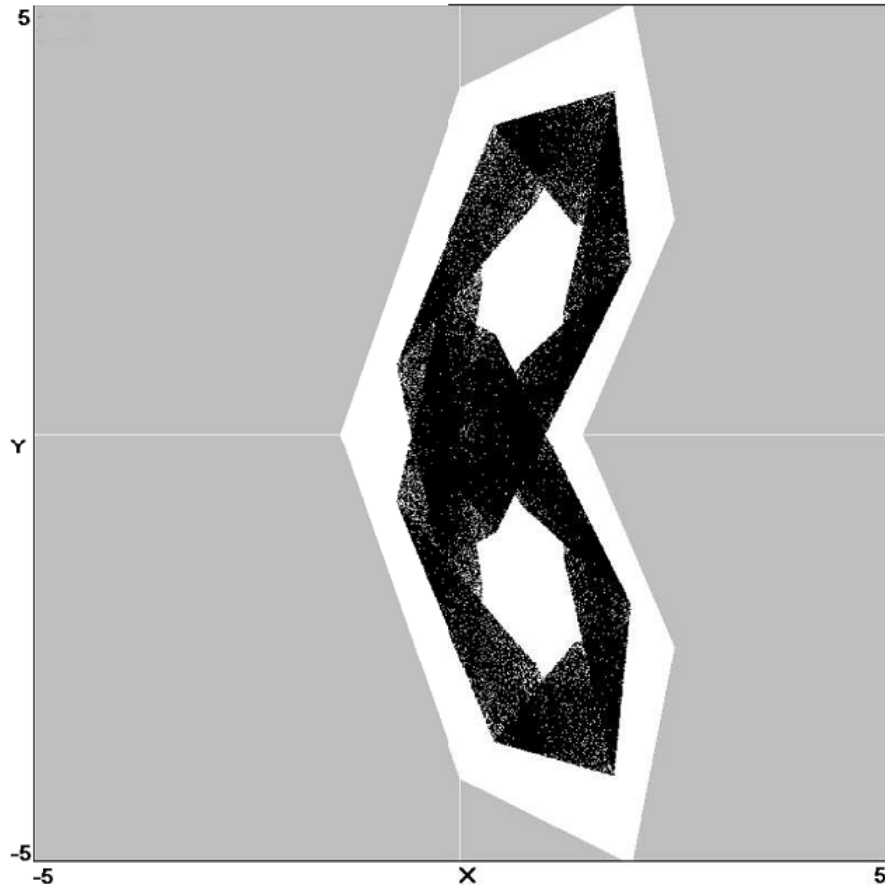


FIGURE 3.4 – La nouvel attracteur chaotique linéaire par morceaux obtenu à partir de la fonction (3.33) avec son bassin d'attraction pour $a=0.6$, $b=-2$ et la condition initiale $x_0 = y_0 = 0.01$.

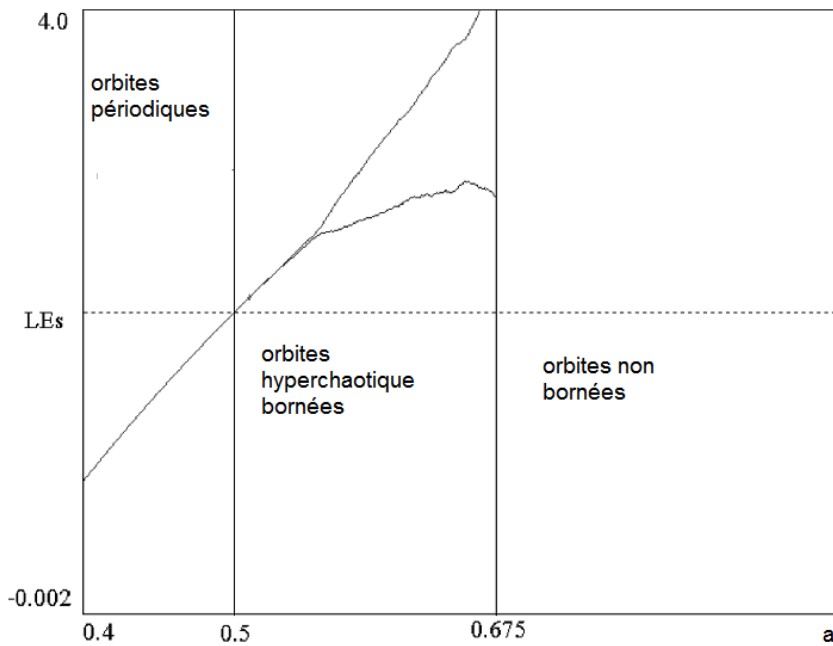


FIGURE 3.5 – Variation des exposants de Lyapunov de la fonction (3.33) du paramètre $0.4 \leq a \leq 0.9$ avec $b = -2$. où le deux lignes verticales indiquent la frontière entre les comportements dynamiques mentionnés.

On utilise le résultat analytique dans la figure (3.3)

$$-2 \leq b < -1 \text{ et } -0,1 - \frac{1}{b} < a < \frac{-1}{b} + 0,4.$$

La fonction (3.33) converge vers des attracteurs hyperchaotiques bornés ou des orbites non bornées pour $a < \frac{-1}{b}$. Dans ce chiffre les solutions bornées, les solutions périodiques et les solutions chaotiques sont affichées dans le ab-plan pour la fonction (3.33) où nous utilisons 5000 conditions initiales différentes et 10^6 itérations pour chaque point. Un attracteur chaotique pour le cas $a = 0.6$ et $b = -2$ est illustré à la figure (3.4). Par contre, il faut vérifier l'hyperchaoticité des attracteurs en calculant à la fois Lyapunov exposants utilisant la formule $l_1(x_0) + l_2(x_0) = \ln | \det(J) | = \ln | ab |$ moyennés le long de l'orbite, où $\det(J)$ est le déterminant de la matrice jacobienne. Le résultat est représenté sur la figure (3.5) pour $0.4 \leq a \leq 0.9$, avec $b = -2$.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une nouvelle méthode de chaotification d'applications linéaires par morceaux à l'aide un fonction de contrôle linéaire par morceaux a été présentée. Une preuve rigoureuse du chaos dans la fonction contrôlée résultante en utilisant la définition standard de le plus grand exposant de Lyapunov.

Bibliographie

- [1] E. Ott, C. Grebogi and J. A. York, "*Controlling chaos*," Phys. Rev. Lett., Vol. 64, No. 11, pp. 1196 – 1199, 1990.
- [2] M. Chen and Z. Han, "*An iteration method for chaotifying and controlling dynamical systems*," Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol. 12, pp. 1173-1180, 2002 .
- [3] K. Starkov and G. Chen, "*Chaotification of polynomial continuous-time systems and rational normal forms*," Chaos, Solution and Fractals, Vol. 22, pp. 849-856, 2004.
- [4] P. Maneville, "*Systèmes dynamiques et chaos*," Ecole polytechnique, Palaiseau, 1999.
- [5] F. Alain, "*Contribution à la prédiction et au contrôle des comportement apériodiques dans les convertisseurs électromécanique. Application de la théorie du chaos*," Thèse de doctorat, Université de Reims France, 2005.
- [6] G. Qi, S. Du, G. Chen, Z. Chen and Z. Yuan, "*On a four-dimensional chaotic system*," Chaos, Solution and Fractals, Vol. 23, pp. 1671-1682, 2005 .
- [7] K. Mesbah, "*Etude des systèmes dynamiques chaotiques*," Thèse de magistère, Université de Constantine, 2005.
- [8] H. F. V. Bremen, F. E. Udawadia and W. Proskurowski, "*An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents*," Phys. D. 101, pp. 1-16, 1997.
- [9] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano, "*Determining Lyapunov exponents from a time series*," Physica, D. 16, pp. 285-317, 1985.
- [10] H. Dang-Vu et C. Delcarte, "*Bifurcation et Chaos*," Ellipses, Paris, 2000.
- [11] T. S. Parker and L. O. Chua, "*Practical numerical algorithm for chaotic systems*," Springer-Valerg, 1989.
- [12] K. S. Park, J. B. Park, Y. H. Choi, T. S. Yoon and G. Chen, "*Generalized predictive control of discrete time chaotic systems*," Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 8, pp. 1587 – 1591, 1998.
- [13] K. Pyragas, "*Control of chaos via extended delay feedback*," Phys. Rev. Lett. A, pp. 206-223, 1995.
- [14] J.L. Kuang, P. A. Meehan and A. Y. T. Leung, "*Suppression chaos via LyapunovKrasovskii's method*," Chaos, Solution and Fractals, V. 27, pp. 1408-1414, 2006.

- [15] S. Yu, J. Lü and G. Chen, "*Generation of hyperchaos from the Chen-Lee system via sinusoidal perturbation*," Chaos, Solution and Fractals, in press, 2007.
- [16] A. Boukabou and N. Mansouri, "*Controlling chaos in higher-order dynamical systems*," Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol. 14, pp. 4019-4025, 2004.
- [17] G. Chen and D. Lai, "*Anticontrol of chaos via feedback*," IEEE, CDC. 36, San Diego, pp. 367-372.
- [18] G. Chen and D. Lai, "*Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time chaotic dynamical systems*," Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol. 6, pp. 1341-1349, 1996.
- [19] G. Chen and D. Lai, "*Making a dynamical system chaotic : Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems*," IEEE trans. Circuits syst. I, vol. 44, No. 3, pp. 250-253, 1997.
- [20] T. Ushio and S. Yamamoto, "*Prediction based control of chaos*," Phys. Lett. A. 246, pp. 30 – 35, 1999.
- [21] M. Mammeri, "*A novel piecewise linear version of the 3D Hénon map*," Far East Journal of Mathematical Sciences. Vol. 96, no. 7, 843-853, 2015.
- [22] M. Mammeri, "*A Novel Chaotic Attractors in Piecewise Version of the 3D Hénon Map*," Advanced Studies in Theoretical Physics. Vol. 9, no. 10, 46-473, 2015.
- [23] M. Mammeri, "*Sur les applications discrètes en dimension N , $N > 1$* ," thèse de doctorat, 2017.
- [24] I. Ameer , "*CONTROLE, CHAOTIFICATION ET HYPERCHAOTIFICATION DES SYSTEMES DYNAMIQUES*," thèse de Magister, 2007.

Abstract :

The main objective of this thesis is to present a new method for the chaotification of piecewise linear maps in 2-D using piecewise linear control function.

We presented some definitions and theories, the main one is the theory and the definition of Lyapunov exponents, then we gave the method of chaotification of discrete systems, after that we presented a new method of chaotification of piecewise linear maps in 2-D using piecewise linear control function, we prove this theory and present an example that illustrates it.

Keywords: *Lyapunov exponents, discrete systems, chaos, attractor, orbits.*

Résumé :

L'objectif principal de ce mémoire est de présente une nouvelle méthode de chaotification d'applications linéaire par morceaux en 2-D utilisant fonction de contrôle linéaire par morceaux.

Nous avons présenté quelques définitions et théories, la principale est la théorie et la définition des exposant de Lyapunov, puis nous avons donnons la méthode de chaotification des systèmes discrets, après cela nous avons présenté une nouvelle méthode de chaotification d'applications linéaire par morceaux en 2-D utilisant fonction de contrôle linéaire par morceaux, nous prouvons cette théorie et présentons un exemple qui l'illustre.

Mots clés : *Exposants de Lyapunov, systèmes discrets, chaos, attracteur, orbites.*

ملخص:

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو تقديم طريقة جديدة لإحداث فوضى للتطبيقات الخطية معرفة على مجالات منفصلة ثنائية البعد باستخدام دالة تحكم خطية. قمنا بعرض بعض التعريفات و النظريات أمها نظرية وتعريف أسس ليايونوف، ثم تطرقنا إلى كيفية و طريقة إحداث فوضى في الأنظمة المتقطعة، بعدها قدمنا طريقة جديدة لإحداث فوضى للأنظمة الخطية المتقطعة المعرفة على مجالات منفصلة ثنائية البعد باستخدام دالة تحكم خطية، إثبات هذه النظرية وتقديم مثال يوضح ذلك.

الكلمات المفتاحية: أسس ليايونوف ، أنظمة منفصلة ، فوضى ، جاذب ، مدارات.