



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option: Modélisation et Analyse numérique

Par: Aiad Fatma

Thème

**Approximation d'un problème
elliptique du second ordre dans \mathbb{R}^2 par
des éléments finis inversés**

Soutenu publiquement le: 19/06/2022

Devant le jury composé de:

Dr. Said Mohammed Said	M.C.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Dr. Rezzag bara Rayhana	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Dr. Kaliche Keltoum	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicace

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents qui ont sacrifié leur vie pour ma réussite.

À mon père pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices, À ma mère pour son soutien et ses encouragements. J'espère qu'un jour, je pourrais leurs rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que Dieu leur prête bonheur et longue vie.

Je dédie aussi de ce travail à mon mari "Said", ma famille, mes amies "Asma, Chifa, somia, Aida... ". La famille de mon mari, Département de mathématiques a tous ceux qui m'ont soutenu dans cette aventure, professeurs qui m'ont enseigné et à tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

Au début de ce mémoire, je remercie Dieu Tout-Puissant qui m'aide et m'a donné patience et courage pendant les années d'étude.

J'adresse mes sincères remerciements au à l'honorable Dr **Kaliche Keltoum**, que Dieu la protège et prolonge sa vie.

Ensuite, je voudrais remercier les honorables membres du comité de discussion Dr **Said Med Said** et Dr **Rezzag Bara Rayhana**, pour leur présence à mes côtés en ce jour spécial.

J'adresse également mes remerciements à tous mes professeurs qui m'ont enseigné et qui m'ont soutenu avec leur compétence dans la poursuite de mes études et qui ont contribué à ce couronnement, ainsi qu' à soutenu dans ce cheminement.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciement	ii
Notations	vi
Introduction	1
1 Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids	3
1.1 Notations et analyse fonctionnelle	4
1.2 Les espaces de Sobolev à poids	6
1.2.1 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$	7
1.2.2 Les espaces de traces	8
1.3 Inégalités de Hardy	9
2 Discrétisation du problème par les éléments finis inversés	11
2.1 La formulation variationnelle du problème	12
2.2 L'existence et l'unicité	13
2.3 Discrétisation du problème	15
2.3.1 Description de la méthode	15
2.3.2 Décomposition du domaine	15
2.3.3 L'espace discret	19
2.3.4 Estimation d'erreur	22

3	Quelques tests numériques	24
3.1	Fonctions de base. La matrice de rigidité	25

Table des figures

2.1	Une illustration du vecteur d'altitude, du triangle fini et de l'hyperplan de support associé à un les triangle infini 2D.	17
2.2	Partition d'un domaine extérieur de \mathbb{R}^2 en la réunion de quatre triangles infinis.	18
2.3	La transformation de Ω_∞ à Ω_\star	19
2.4	Une illustration de maillage gradué de triangle de référence quand, $\mu = 0.5$	22

Notations

- ✓ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert.
- ✓ $\partial\Omega$: frontière de Ω .
- ✓ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$: produit de dualité E', E .
- ✓ δ_{ij} : symbole de Kronecker.
- ✓ ∇u : gradient de u défini par $\nabla u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
- ✓ Δu : Laplacien de u .
- ✓ $\|\cdot\|_E$: la norme de E .
- ✓ $|\cdot|$: la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .
- ✓ $W^{1,p}(\Omega); W_\alpha^{1,p}(\Omega)$: espaces de Sobolev.
- ✓ $L_p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |u| dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.
- ✓ $a \lesssim b$: signifie qu'il existe une constante $c > 0$ tel que $a \leq c b$.

Introduction

Nos problèmes aujourd'hui dans divers domaines tels que la physique, la chimie et l'ingénierie se réfèrent aux équations aux dérivées partielles, qui ont été posées dans des domaines illimités tels que la zone entière et les domaines externes, où elles sont traitées par de nombreuses méthodes.

L'une de ces méthodes est la méthode des éléments finis inversés, cette méthode a été développée par Boulmzaoud [4], elle se caractérise par la préservation de l'infini du domaine, son idée de base est de diviser le domaine géométrique non borné en deux parties qui sont choisies librement, la première partie est bornée où il est facile pour utiliser des éléments finis usuelle, et la deuxième partie est non bornée où nous utilisons des éléments finis inversés. Cette dernière partie est convertie en une partie bornée par une transformation inverse.

La méthode est reposée sur l'utilisation des espaces de Sobolev à poids. Ces espaces représentent un cadre fonctionnel adéquat pour résoudre des problèmes elliptiques (voir [9], [1]). Ils sont des extensions des espaces de Sobolev classiques, mais qui sont munis de poids permettant de décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini.

La méthode des éléments finis inversés a été utilisée dans [5] pour approcher un problème elliptique du second ordre en demi-ligne, et dans [6] dans le cas des équations elliptiques dégénérées à coefficients singuliers ou non bornés et aussi dans [2] pour un domaine extérieur en dimension deux.

L'objectif de ce travail est d'utiliser cette méthode pour résoudre un problème elliptique du

second ordre de la forme

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Ce mémoire se compose de trois chapitre :

Le premier chapitre est devouè aux notations, définitions et quelques propriétés fondamentales des espaces de Sobolev à poids et quelques théories .

Le deuxième chapitre est cansacré à l'étude d'un problème du second ordre dans tout l'espace \mathbb{R}^2 , où nous donnons d'abord une formulation variationnelle, ensuite nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème. Après, nous présentons la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés et à la fin nous donnons une estimation de l'erreur.

Enfin, le troisième chapitre concerne le calcul de la matrice de rigidité.

Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids

Le but de ce chapitre est d'étudier les espaces de sobolev avec poids et les propriétés fondamentals de ces espaces et on rappel de quelques théories et inégalités.

1.1 Notations et analyse fonctionnelle

Soit Ω un domaine ouvert et connexe de \mathbb{R}^d , $n \geq 2$ non nécessairement borné ayant une frontière $\partial\Omega$ régulière.

On désigne $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ son dual (espace de distributions).

Soit $(x = x_1, \dots, x_n)$ un point typique de \mathbb{R}^d , on not $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la distance entre x et l'origine.

Etant donné un n -uplet $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}}$$

avec $|\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, on note L^p l'espace des fonctions mesurables et de puissance p -ième sommable pour la mesure de Lebesgue sur Ω , que l'on munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

Pour tout réel $p \in]1, +\infty[$, on note p' le conjugué de p défini par la relation suivante :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Définition 1.1.1 Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n , $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$ un entier naturel, on définit l'espaces de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \text{tel que } |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

On munit cet espace vectorielle $W^{m,p}$ de la norme suivante :

$$\|U\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{1/p} & 1 \leq p < +\infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & p = +\infty \end{cases}$$

On note \mathbb{P}_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k et $\mathring{\mathbb{P}}_k$ le sous espace de \mathbb{P}_k formé par tout polynômes $p \in \mathbb{P}_k$ tel que $P(0) = 0$ (avec la convention $\mathbb{P}_k = 0$ pour $k < 0$).

Définition 1.1.2 (Inégalité de Hölder[7]).

Soient $p \in [1 + \infty[$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \end{cases}$$

Théorème 1.1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz[7])

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Remarque 1.1.4 Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.1.5 (Inclusion continue [7]). Soit X et Y deux espaces de Banach. On dit que X s'injecte continument dans Y , et on note par $X \hookrightarrow Y$ si :

i $X \subset Y$

ii $\exists c > 0, \|u\|_Y \leq c \|u\|_X \quad \forall u \in X$

Théorème 1.1.6 (Lax-Milgram[12])

Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$ et soit

i A est une forme bilinéaire continue coercive sur $V \times V$:

$$\exists c > 0, |A(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

et

$$\exists \alpha > 0, A(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

ii L est une forme linéaire continue sur V :

$$\exists \beta > 0, |L(v)| \leq \beta \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Alors, il existe une seule solution $u \in V$ tel que

$$A(u, v) = L(v)$$

lemme 1. 1. 1 (Lemme de Céa[2])

La forme bilinéaire $A(.,.)$ étant continue, de constante de majoration M , et coercitive, de constante de minoration α , il est aisé d'obtenir la majoration de l'erreur appelée lemme de Céa :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

1.2 Les espaces de Sobolev à poids

On définit les fonctions poids de base par :

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \log(\varrho) = \ln(|x|^2 + 2)$$

Définition 1.2.1 [9],[3] soit $m \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$, on définit l'espace de sobolev à poids suivant :

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \forall \lambda \in \mathbb{N}^n; 0 \leq |\lambda| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^2)\}$$

cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha \partial^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \right)^{1/p}$$

cette définition a été introduit par Hanouzet [9] et elle est utilisé dans le cas où $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$.

Dans le cas contraire c'est à dire $n/p + \alpha \in \{1, \dots, m\}$; on ajoute des poids logarithmiques. Donc, la définition 1.1.5 sera modifié comme suit :

Définition 1.2.2 Pour tous nombres entiers non négatifs n et m et $\forall p \in]1, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit l'entier k

$$k = k(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\} \\ m - n/p - \alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'espace

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq k; \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} (\log \varrho)^{-1} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n);$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n; k+1 \leq |\lambda| \leq m; \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\lambda|=0}^k \|\langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} (\log \varrho)^{-1} \partial^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{|\lambda|=k+1}^m \|\langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} \partial^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}$$

1.2.1 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Nous avons les propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ suivantes (voir [9]) :

1. Si $m = 0$ et $\alpha = 0$ alors :

$$W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

2. on a $W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$ si $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$ avec injection continues.

3. Pour $p = 2$, on note $W_\alpha^m(\Omega)$ au lieu de $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsque munit de produit scalaire :

$$(u, v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{|\lambda| \leq m} \int_\Omega \langle x \rangle^{(\alpha-m+|\lambda|)} D^\lambda u \overline{D^\lambda v} dx$$

.

4. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \rightarrow \varphi u \in W^{m,p}(\Omega)$$

est linéaire continue.

5. Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \leq m$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto D^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est linéaire et continue.

6. Pour α et $\beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \langle x \rangle^\beta u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est un isomorphisme. L'application $u \mapsto \langle x \rangle^\beta u$ est l'isomorphisme inverse.

7. L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.
8. L'espace $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ contient les polynômes de degré inférieur ou égale q avec

$$q = [m - \alpha - n/p].$$

Nous notons $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ et $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ son espace dual. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$ nous avons l'égalité

$$\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

1.2.2 Les espaces de traces

Afin de définir les traces des fonctions de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$, nous vous présentons les espaces, pour toute $\sigma \in]0, 1[$:

$W_0^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in D'(\mathbb{R}^N); w^{-\sigma}u \in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ et}$

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+\sigma p}} dx dy < \infty\};$$

où $w = \langle x \rangle$ si $\frac{n}{p} \neq \sigma$ et $w = \langle x \rangle (\log \varrho)^{1/\sigma}$ si $n/p = \sigma$. C'est un espace de banach réflexif doté de sa norme naturelle

$$\|u\|_{W_0^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\left\| \frac{u}{w^\sigma} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+\sigma p}} dx dy \right)^{1/p}$$

de même, pour tout nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit l'espace :

$$W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ \begin{array}{l} u \in D'(\mathbb{R}^N); w^{\alpha-\sigma}u \in L^p(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|\langle x \rangle^\alpha u(x) - \langle y \rangle^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{N+\sigma p}} dx dy < \infty \end{array} \right.$$

où $w = \langle x \rangle$ si $\frac{N}{p} + \alpha \neq \sigma$ et $w = \langle x \rangle (\log \varrho)^{1/(\sigma-\alpha)}$ si $\frac{N}{p} + \alpha = \sigma$

Théorème 1.2.3 ([9])

Il existe une application linéaire continue $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans

$\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-1,p}(\mathbb{R}^n - 1)$ avec les propriétés suivantes :

1. Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$,

$$\gamma u = (u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x', 0))$$

2. est application surjective.

3. $\gamma^{-1}(0) = \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

Nous pouvons alors définir l'espace

$$\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega); \gamma u = 0\}$$

Ensuite, on va rappeler la formule de Green, pour tout $u \in W_{\alpha-1}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ et pour tout $v \in W_{\alpha-1}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} v dx &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_n} dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 u \gamma_0 v dx' \end{aligned}$$

1.3 Inégalités de Hardy

lemme 1. 3. 2 (*Inégalité de Hardy*). Soit $f \in \mathcal{D}(]A, \infty[)$, on a

— si $\beta \neq -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $A \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$

$$\int_A^\infty |f(t)|^2 t^\beta (\log t)^\gamma dt \leq \left(\frac{4}{|\beta+1|}\right)^2 \int_A^\infty \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t^{\beta+2} (\log t)^\gamma dt$$

— $\gamma \neq -1$ et $A \geq 1$

$$\int_A^\infty |f(t)|^2 \frac{1}{t} (\log t)^\gamma dt \leq \left(\frac{2}{|\gamma+1|}\right)^2 \int_A^\infty \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t (\log t)^{\gamma+2} dt$$

— si $\beta \neq -1$

$$\int_A^\infty |f(t)|^2 t^\beta dt \leq \left(\frac{2}{|\beta+1|}\right)^2 \int_A^\infty \left|\frac{df}{dt}\right|^2 t^{\beta+2} dt$$

On peut trouver une démonstration simple, en utilisant une intégration par parties dans la définition de $\mathbf{f}(t)$ et l'inégalité de Holder (voir [1],[3], [11]). Une conséquence importante de ce Lemme, le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.1 (voir [10]) Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ou $\mathbb{R}^n \setminus \omega$ où ω un domaine borné non vide.

On suppose que $m \geq 1$ un entier et $\alpha, p \in]1; +\infty[$ deux réels tel que

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \dots, m\}.$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall u \in \dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \quad \|u\|_{\dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C_1 |u|_{m,\alpha,\Omega},$$

où

$$|u|_{m,\alpha,\Omega} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x \rangle^\alpha \partial^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Discrétisation du problème par les éléments finis inversés

Dans ce chapitre, nous étudions la résolution du problème suivant

$$-\Delta u + cu = f, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

par la méthode des éléments finis inversés. D'abord, on cherche la formulation variationnelle associée à ce problème, dans un espace approprié, qui est l'espace $W_0^1(\Omega)$.

Ensuite, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème par le théorème de Lax-Milgram. Après, on donne une discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés et à la fin on donne une estimation d'erreur.

2.1 La formulation variationnelle du problème

On considère le problème elliptique du second ordre suivant :

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.1)$$

avec Ω l'espace tout entier \mathbb{R}^2 , $c(x)$ et f des fonctions données.

On cherche une solution de (2.1) dans l'espace $W_{\log}^1(\Omega)$ dont ses fonctions vérifient

$$\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx < +\infty, \quad \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 < \infty$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\langle x \rangle^2 (\log(|x|^2 + 2))^2} + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On introduit les hypothèses suivantes :

(H1) f appartient à $W_{\log}^{-1}(\Omega)$ c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} (|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2 |f(x)|^2 dx < \infty$$

(H2) Il existe deux constants $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$ tel que

$$C_0 \leq \langle x \rangle^2 (\log(|x|^2 + 2))^2 c(x) \leq C_1 \quad \text{dans } \Omega$$

Proposition 2.1.1 *Supposons que les hypothèses H_1, H_2 sont satisfaites, une fonction $u \in W_{\log}^1(\Omega)$ est une solution de (2.1) si et seulement si elle est solution du problème variationnel*

$$\forall v \in W_{\log}^1(\Omega) \quad A(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (2.2)$$

avec

$$A(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c \cdot u \cdot v dx$$

Preuve. En multipliant l'équation (2.1) par une fonction test $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$, et en appliquant la formule de Green on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) = \int_{\Omega} f(x)v(x).$$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Donc, nous choisissons $v \in W_{\log}^1(\Omega)$. Alors $u \in W_{\log}^1(\Omega)$ est une solution du problème suivant :

$$(FV) \begin{cases} \text{trouver } u \in W_{\log}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ A(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W_{\log}^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.3)$$

Maintenant, supposons que $u \in W_{\log}^1(\Omega)$ solution du problème (2.2) comme $\mathfrak{D}(\Omega) \subset W_{\log}^1(\Omega)$ par intégration inverse on obtient :

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u(x) - c(x)u(x))v(x)dx = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

qui donne $-\Delta u + c(x)u = f$ au sens des distributions. Puisque $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$, alors

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$$

et par conséquence

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad p.p \text{ dans } \Omega$$

■

2.2 L'existence et l'unicité

Dans cette section, on va montrer l'existence et l'unicité du problème (2.1).

Proposition 2.2.1 *Supposons que les hypothèses H_1, H_2 sont vérifiées. Alors, le problème (2.1) admet une solution unique $u \in W_{\log}^1(\Omega)$*

De plus, on a

$$\|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}. \quad (2.4)$$

Preuve. On applique le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité du problème (2.1).

Montrons d'abord la continuité de la forme linéaire $L(\cdot)$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)v(x)|dx \\ &\leq \int_{\Omega} \langle x \rangle \log(|x|^2 + 2) |f(x)| \cdot \frac{|v(x)|}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} dx \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Swartz et l'hypotèse (H_1) on obtient

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \langle x \rangle \log(|x|^2 + 2) \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors, la forme lineaire est continue sur $W_{\log}^1(\Omega) \times W_{\log}^1(\Omega)$.

Maintenant, on montre la continuité du forme bilinéaire $A(., .)$. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \nabla v| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

D'autre part d'après l'hypothèse (H_2) on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx \right| &\leq \int_{\Omega} |c(x)u(x)v(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \langle x \rangle^2 (\log(|x|^2 + 2))^2 c(x) \frac{u(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \frac{v(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} dx \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \frac{v(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \right| dx \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Swartz, on obtient

$$\begin{aligned} A(u, v) &\leq \max(1, C_1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x)}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(1, C_1) \|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \|v\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Il reste de montrer la coercivité de la forme bilinéaire A , on a

$$\begin{aligned} A(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u^2 dx + \int_{\Omega} c(x)|u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x) \langle x \rangle^2 (\log(|x|^2 + 2))^2 \left| \frac{u}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \right|^2 dx \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \left\| \frac{|u|}{\langle x \rangle \log(|x|^2 + 2)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min(1, C_0) \|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Alors, la forme bilinéaire A est continue et coercive.

Donc toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème (2.1) admet une solution unique dans $W_{\log}^1(\Omega)$. ■

De plus, l'unique solution satisfait :

$$\|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}$$

2.3 Discrétisation du problème

Dans cette section nous allons exposer les détails de la discrétisation du problème (2.1) par la méthode des éléments finis inversés.

2.3.1 Description de la méthode

Nous décrivons maintenant la méthode des éléments finis inversés, de sorte que nous choisissons comme problème modulaire elliptique qui accepte une formulation variationnelle de la forme

$$\text{Trouver } u \in W \text{ tel que } A(u, v) = L(v) \quad (2.5)$$

tel que W est un espace de Sobolev avec poids ici, on prend par exemple $W = W_{\log}^1(\Omega)$ ou $W_{\alpha}^1(\Omega)$.

On suppose que (2.4) vérifiées les hypothèses du théorème de **Lax-Milgram**. Donc la méthode de Galarkin consiste de remplacer le problème (2.4) par le problème approché suivant

$$\text{Trouver } u_h \in W_h \text{ tel que } \forall v_h \in W_h \quad A(u_h, v_h) = L(v_h) \quad (2.6)$$

tel que $W_h \subset W$, est un sous espace de W de dimension finie, la construction de l'espace approché W_h consiste à décomposer le domaine Ω à deux parties, une partie bornée Ω_0 où on utilise des éléments finis classique et une partie non bornée Ω_{∞} ou utilisons des éléments finis inversés.

2.3.2 Décomposition du domaine

On décompose le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$ en deux parties tels que

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_{\infty}; \quad (2.7)$$

avec

- Ω_0 = une partie borné, polygonale.
- $\Omega_{\infty} = \Omega \setminus \Omega_0$ = une partie non bornée représente le domaine extérieur de Ω_0 dans Ω .

- $\Omega_0 \cap \Omega_\infty = \emptyset$

Nous introduisons la définition suivante

Définition 2.3.1 Soit $a_j = (a_{ij})_{i=0}^2, j = 0, \dots, 2$; une collection de 3 points de \mathbb{R}^2 qui ne sont pas dans un même hyperplan. On définit le triangle infini T de sommets a_0, a_1, a_2 par

$$T(a_0, a_1, a_2) = \left\{ x = \sum_{i=0}^2 \lambda_i a_i, \lambda_0 \leq 0, \lambda_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, 2, \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1 \right\}$$

Le sommet a_0 est appelé le sommet fictif de T et les autres sommets sont appelés les sommets réels de T . En effet, $a_0 \notin T$ tandis que $a_i \in T; \forall i = 1, 2$.

On appelle vecteur altitude associé à T le vecteur $h_T = \overrightarrow{a_0 P_0}$ où P_0 est la projection de a_0 sur l'hyperplan P_T contenant a_1, a_2 (voir figure(2.1)).

On note S_T le triangle fini associé à T défini comme suit :

$$S(a_0, a_1, a_2) = \left\{ x = \sum_{i=0}^2 \lambda_i a_i, \lambda_0 \leq 0, \lambda_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, 2, \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1 \right\}$$

On définit les triangles infini et fini de référence comme suit

$$\hat{T} = \left\{ x = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_2) \in \mathbb{R}^2, \hat{\lambda}_k \geq 0; \text{ pour } k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 \hat{\lambda}_k \geq 1 \right\}$$

$$\hat{K} = \hat{S} \left\{ x = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \hat{\lambda}_k \leq 1; \text{ pour } k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 \hat{\lambda}_k \leq 1 \right\}$$

Alors, la partie Ω_∞ sera décomposée en l'union de 4 triangles infinis tels que ;

- $\bar{\Omega}_\infty = \cup_{i=1}^4 T_i$.
- T_1, \dots, T_4 ont le même sommet fictif a_0 . On supposera, sans perdre de généralité que $a_0 = 0$.
- Pour tous $i; m \leq 4$ avec $i \neq m, T_i \cap T_m$ est soit vide, soit une arête infinie, soit une face infinie entière.

Cette hypothèse géométrique est satisfaite par l'espace \mathbb{R}^2 et par tout domaine extérieur. Il est important de préciser ici que les triangles infinis ne vont pas jouer le rôle des éléments finis en domaine borné. Ces triangles forment avec Ω_0 une décomposition de domaine Ω en sous-domaines.

Soit $S_i, 1 \leq i \leq 4$ les triangles associés à T_i et h_i le vecteur hauteur correspondant de T_i , on pose

$$\Omega_\star = \text{int}(\cup_{i=1}^4 S_i) \setminus \{0\}, \quad \Gamma = \bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_\infty.$$

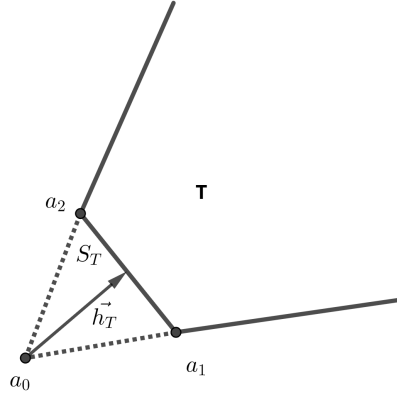


FIGURE 2.1 – Une illustration du vecteur d’altitude, du triangle fini et de l’hyperplan de support associé à un les triangle infini 2D.

On définit l’inversion polygonal local associé à T par :

$$\phi_i : (S_i \cup T_i) \setminus \{0\} \rightarrow (S_i \cup T_i) \setminus \{0\}$$

$$x \mapsto \frac{x}{r_i(x)^2}$$

avec

$$r_i(x) = \frac{h_i \cdot x}{|h_i|^2} \text{ pour } x \in S_i \cup T_i$$

le rayon polygonal local.

On définit aussi l’inversion polygonal global ϕ et le rayon polygonal global $r(\cdot)$ par :

$$\phi(x) = \phi_i(x) \text{ et } r(x) = r_i(x) \text{ pour tout } x \in T_i \cup S_i, 1 \leq i \leq 4$$

qui vérifient les propriétés suivantes[2] :

1. $r(\cdot)$ est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. $r(\cdot) \sim |x|$, $x \in \mathbb{R}^2$ et $r(x) = 1$ pour $x \in \Gamma$.
3. pour tout $x \in \overline{\Omega}_\infty$, $r(\phi(x)).r(x) = 1$.

4. ϕ est continue.
5. $\phi(x) = x$ si et seulement si $x \in \bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_*$.
6. $\phi(T_i) = S_i \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq 4$
7. ϕ est un bijection de Ω_∞ dans Ω_* et $\forall x_* \in \Omega_*$, $\phi^{-1}(x_*) = \frac{x_*}{r(x_*)^2}$.

Ici, nous considérons la décomposition suivante (voir figure 2.2) du domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq R_1 \text{ et } |y| \leq R_2\} = [-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]$$

avec $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ deux réels.

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 = \{|x| > R_1 \text{ et } |y| > R_2\}.$$

On peut décomposer Ω_∞ comme suit

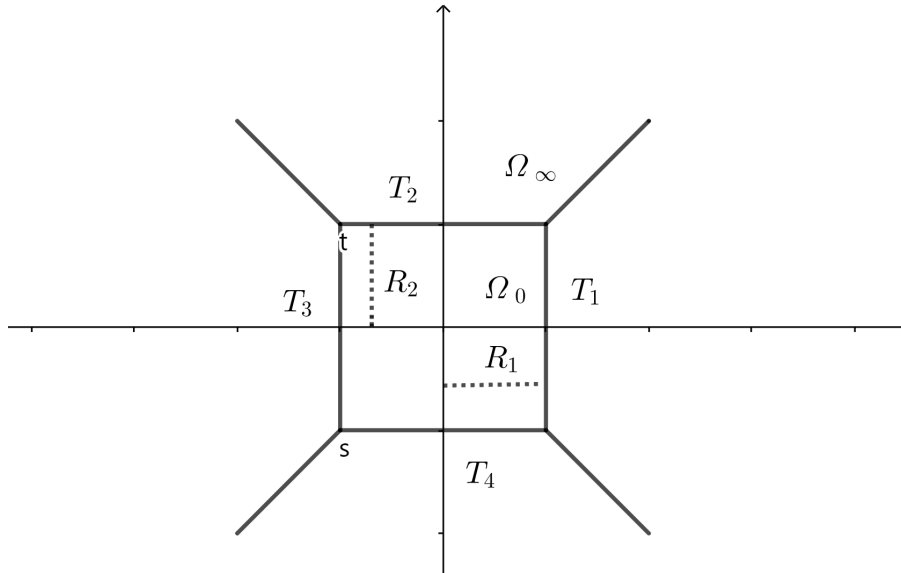


FIGURE 2.2 – Partition d'un domaine extérieur de \mathbb{R}^2 en la réunion de quatre triangles infinis.

$$\bar{\Omega}_\infty = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4;$$

avec

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x \geq R_1 \text{ et } x \geq \frac{R_1}{R_2}|y|\} \\ T_2 &= \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y \geq R_2 \text{ et } y \geq \frac{R_2}{R_1}|x|\} \\ T_3 &= \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x \leq -R_1 \text{ et } x \leq -\frac{R_1}{R_2}|y|\}; \\ T_4 &= \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -R_2 \text{ et } y \leq -\frac{R_2}{R_1}|x|\} \end{aligned}$$

Les vecteurs hauteurs de $T_1; T_2; T_3$ et T_4 sont :

$$h_1 = R_1 e_1; \quad h_2 = R_2 e_2; \quad h_3 = -R_1 e_1; \quad h_4 = -R_2 e_2;$$

avec $e_1 = (1; 0)^T$ et $e_2 = (0; 1)^T$ sont les vecteurs unitaires de la base canonique de \mathbb{R}^2 .

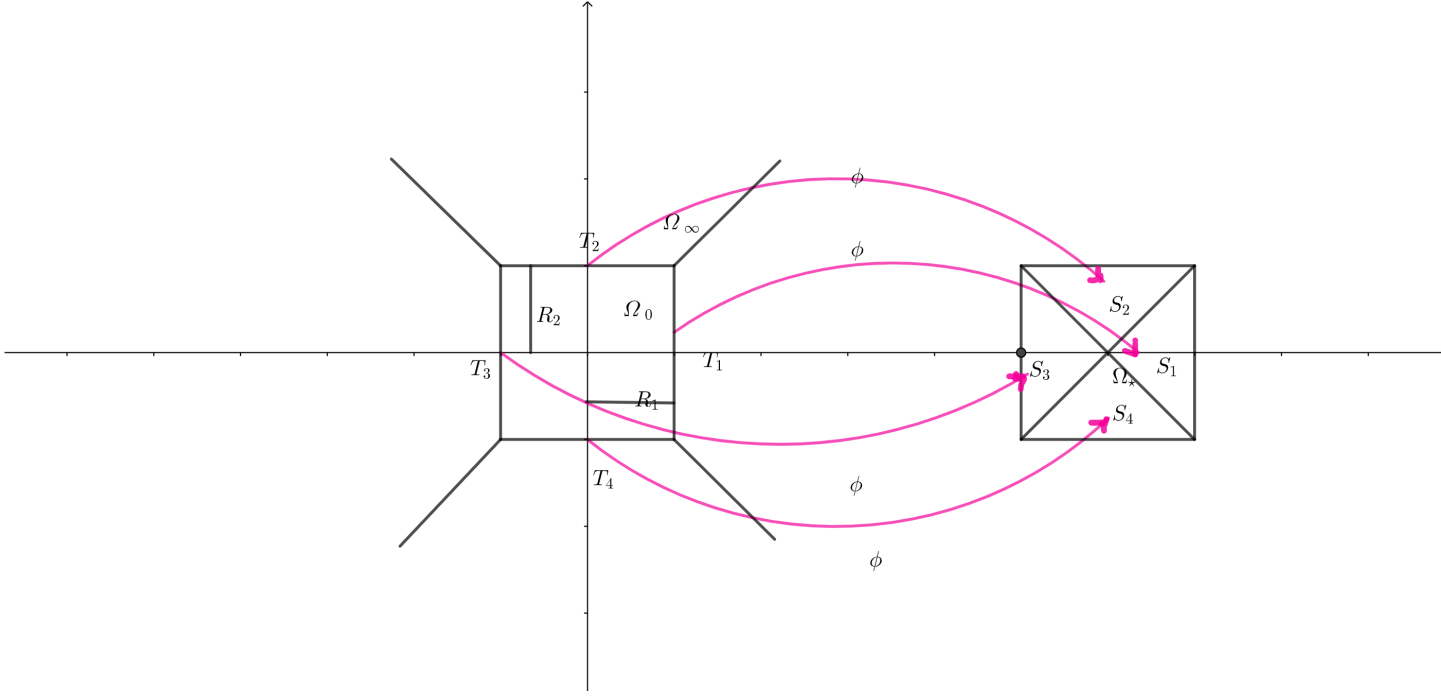


FIGURE 2.3 – La transformation de Ω_∞ à Ω_\star .

L'inversion ϕ et le rayon polygonal $r(\cdot)$ sont défini de la façon suivante :

$$r(x) = \max \left(\frac{|x|}{R_1}, \frac{|x|}{R_2} \right)$$

et

$$\phi(x, y) = \begin{cases} R_1^2 \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2} \right) & \text{si } \frac{|x|}{R_1} \geq \frac{|y|}{R_2}, \\ R_2^2 \left(\frac{x}{y^2}, \frac{1}{y} \right) & \text{si } \frac{|x|}{R_1} \leq \frac{|y|}{R_2}. \end{cases}$$

2.3.3 L'espace discret

Nous triangulons les sous-domaines Ω_0 et Ω_\star séparément comme suit

1. Dans le sous-domaine borné Ω_0 on construit une triangulation classique en éléments finis $\{K, K \in \mathcal{T}_h\}$ vérifiant les condition suivantes :

- (a) L'intersection de deux triangles adjacents est vide ou un sommet est une face entière ou une arête entière.
- (b) Il existe une constante ϱ telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \varrho$$

où h est le paramètre de discrétisation, il est défini par

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$$

h_K dénote la diamètre de K et ρ_K le rayon de sphère inscrite dans K .

2. Dans le domaine fictif Ω_* , on utilise un maillage gradué de chacun des sous-domaines $S_i; 1 < i < 4$, c'est-à-dire on construit une triangulation $\{K, K \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}$ satisfaisant en plus des conditions de la régularité, les hypothèses suivantes :

- (a) $\forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h^* = \{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h; 0 \notin K\}$

$$h_K \lesssim h d_K^{1-\mu},$$

$$h^{1/\mu} \lesssim d_K.$$

où d_K désigne la distance entre l'origine 0 et K . Le réel $\mu > 0$ est le paramètre de graduation, indépendant du raffinement.

- (b) $\forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*$ alors ;

$$h_K \lesssim h^{1/\mu}$$

- (c) Pour chaque $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ il existe $i \in \{1, \dots, 4\}$ tel que $K \subset S_i$. Cette condition signifie que chaque triangulation de Ω_* est une union conforme de triangulations des sous-domaines $S_i; i = \{1, \dots, 4\}$ c'est à dire :

$$\tilde{\mathcal{T}}_h = \bigcup_{i=1}^4 \tilde{\mathcal{T}}_h^i$$

où $\forall i \leq 4$, $\tilde{\mathcal{T}}_h^i$ est une triangulation graduée de sous-domaine S_i . De plus

- (d) les triangulations $\tilde{\mathcal{T}}_h^i$ et $\tilde{\mathcal{T}}_h^j$ doivent avoir la même trace sur l'intersection $S_i \cap S_j$, si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

Pour assurer que les deux triangulations \mathcal{T}_h et $\tilde{\mathcal{T}}_h$ introduisent la même trace à l'interfac $\Gamma = \bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_\infty = \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty$, on suppose que :

- (e) Si $K_1 \in \mathcal{T}_h$ et $K_2 \in \tilde{\mathcal{T}}_h$, alors $K_1 \cap K_2 \cap \Gamma$ est soit vide, soit un sommet commun ou soit une arête commun de K_1 et K_2 .

Dans la suite, donnons une manière pour construire un maillage gradué sur l'élément de référence

$$\hat{K}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Donc la première étape pour construire un maillage gradué est de considérer la suite croissante $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ définie par

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{i+1} = \alpha_i + \alpha_i^{1-\mu}.$$

Etant donné un entier $N \geq 2$; on pose $h_N = \alpha_N^{-\mu}$ et nous définissons la suite finie suivante :

$$d_i = \alpha_i h_N^{1/\mu} = \frac{\alpha_i}{\alpha_N}, \quad 1 \leq i \leq N$$

On considère les segments

$$D_i = \{(x, y) \in \hat{K}_2; x + y = d_i\} \quad 1 \leq i \leq N.$$

Ce qui suit pour tout $i \leq N$, nous subdivisons le segment D_i en i segments égaux. Après, on relie les sommets pour obtenir le maillage finale de \hat{K}_2 (voir la figure (2.4)). Maintenant, nous fixons une paramètre $\theta > 0$, on associe à toute fonction u définie sur Ω_∞ la fonction \hat{u} définie formellement comme suit

$$\forall x_\star \in \Omega_\star, \quad (\hat{u})(x_\star) = r(x_\star)^{1-\theta} u(\phi^{-1}(x_\star)).$$

Précisons tout de suite que :

$$u(x_\star) = \hat{u}(x_\star) \quad \text{pour } x \in \bar{\Omega}_\star \cap \bar{\Omega}_\infty.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace discrète associé au maillage dessus qui approche l'espace $W_{\log}^1(\Omega)$ comme suit :

$$W_h(\Omega) = \{u_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : u_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

$$\hat{u}_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \quad \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h^*, \hat{u}_h|_K \in \mathring{\mathbb{P}}_k(K), \quad \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*\}$$

on remarque que l'espace W_h dépend du choix de sous-domaines Ω_0 et Ω_∞ , des paramètres de maillage h et μ et de paramètre θ .

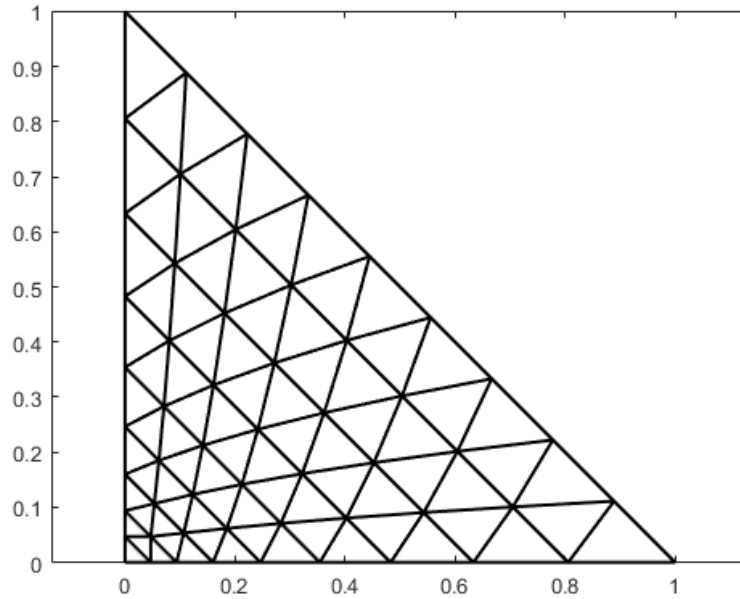


FIGURE 2.4 – Une illustration de maillage gradué de triangle de référence quand, $\mu = 0.5$.

lemme 2. 3. 3 [2] *Si $\theta > 0$, alors l'inclusion suivante est vraie*

$$W_h \hookrightarrow W_{\log}^1(\Omega).$$

Le problème discret s'écrit sous la forme.

$$\text{Trouver } u_h \in W_h \text{ tel que } \forall v_h \in W_h \quad A(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad (2.8)$$

Si $\theta > 0$, ce problème admet une solution unique dans W_h .

2.3.4 Estimation d'erreur

Théorème 2.3.2 [5] *Soit $u_h \in W_h$ une solution du problème (2.8) et $u \in W_{\log}^1(\Omega)$ solution du problème (2.3). Pour quelques nombre réel ϵ tel que $1 < \epsilon < \min(1, \theta)$, supposons que $u \in W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega)$, alors il existe une constant $C_\epsilon > 0$ ne dépendant pas de u et h tels que :*

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C_\epsilon (h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega_\infty)});$$

où $\mu_0 = \frac{\theta-\epsilon}{k}$.

Preuve. D'après le lemme de Céa on a :

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \lesssim \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)}.$$

Puisque $W_h \subset W_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_{\log}^1(\Omega)$, alors

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \lesssim \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{W_0^1(\Omega)}.$$

Nous considérons maintenant l'application d'interpolation suivant : $\Pi_h : \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \rightarrow W_h$, qui associé à chaque $w \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, l'élément unique $z \in W_h$ satisfaisant :

$$z|_K = \pi_K w, \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h$$

$$\hat{z}|_{K_\star} = \pi_{K_\star} \hat{w}, \text{ pour tout } K_\star \in \tilde{\mathcal{T}}^\star$$

où

- pour $K \in \mathcal{T}_h$ ou $K_\star \in \tilde{\mathcal{T}}$, π_K désigne l'opérateur d'interpolation local \mathbb{P}_k dans K .
- pour $K_\star \in \tilde{\mathcal{T}} - \tilde{\mathcal{T}}^\star$, ($a_0 \in K_\star$), π_{K_\star} désigne l'opérateur d'interpolation local $\mathring{\mathbb{P}}_k$ dans K_\star , avec $\mathring{\mathbb{P}}_k = \{p \in \mathbb{P}_k / p(a_0) = 0\}$.

Il est prouvé dans [4] (théorème 1) que

$$\|u - \Pi_h u\|_{W_0^1(\Omega)} \leq h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega_\infty)}$$

■

———— Chapitre 3 ————

Quelques tests numériques

Dans ce chapitre, nous verrons comment calculer la matrice de rigidité.

3.1 Fonctions de base. La matrice de rigidité

Notre objectif dans cette section est de donner quelques détails concernant le système linéaire issu du problème discret(2.8).

Soit $(x_i)_{i \in I}$, (*resp.* $(x_i^*)_{i \in I_\star}$), les noueds du maillage \mathcal{T}_h , (*resp.* $\tilde{\mathcal{T}}$). Certains des ces noueds sont communs à Ω_\star et Ω_∞ , on pose

$$J = \{i \in I, \quad x_i \in \partial\Omega_\star\};$$

$$J_\star = \{i \in I_\star, \quad x_i^* \in \partial\Omega_\star\};$$

Comme la triangulation \mathcal{T}_h et \mathcal{T}_h^\star ont les mêmes noueds sur le bord commun à

$$\partial\Omega_\star \cap \partial\Omega_\infty = \partial\Omega_\infty \cap \partial\Omega_0$$

on a :

$$\{x_i, \quad i \in J\} = \{x_i^*/i \in J_\star\}$$

On considère la famille $\{w_i, \quad i \in I\}$ des fonctions de W_h satisfaisant

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I$$

$$\hat{w}_i(x_j^*) = 0 \quad \forall j \in I_\star \setminus J_\star$$

Il résulte que $w_i = 0$ dans $\bar{\Omega}_\infty$ pour $i \notin J$.

on définit aussi la famille $\{w_i^*, \quad i \in I_\star\}$; des fonctions de W_h qui vérifie :

$$\hat{w}_i^*(x_j^*) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I_\star$$

$$w_i^*(x_j) = 0 \quad \forall j \in I \setminus J.$$

On a $w_i^* = 0$ dans $\bar{\Omega}_0$ pour $i \notin J_\star$.

Donc, la famille $\{w_i \mid i \in I\} \cup \{w_i^* \mid i \in I_\star/J_\star\}$ forme une base de W_h .

et chaque fonction $v \in W_h$ peut être décomposée sous la forme

$$v(x) = \sum_{i \in I} v(x_i) w_i(x) + \sum_{i \in I_\star/J_\star} v(x_i^*) w_i^*(x) \quad \text{pour } x \in \Omega.$$

On pose

$$\varphi_{i|K} = w_i, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h; \quad \varphi_{i|K} = w_i^*, \quad \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}$$

Proposition 3.1.1 *le problème discret (2.8) est équivalent au système linéaire*

$$\text{trouver } U = \{u_1, \dots, u_{DOF}\}; \quad \text{telque } AU = B \quad (3.1)$$

où $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq DOF}$ et $B = (B_i)_{1 \leq i \leq DOF}$ avec $A_{ij} = A(\varphi_i, \varphi_j)$ et $B_i = L(\varphi_i)$,
 $DOF =$ nombre de degré de liberté.

Preuve. On a

$$u_h = \sum_{i=1}^{DOF} u_i \varphi_i$$

donc, on remplace u_h dans le problème approché (2.8), on obtient

$$A\left(\sum_{i=1}^{DOF} u_i \varphi_i, v_h\right) = L(v_h), \quad \forall v_h \in \dot{W}_h(\Omega)$$

On choisit $v_h = \varphi_j$ alors

$$A\left(\sum_{i=1}^{DOF} u_i \varphi_i, \varphi_j\right) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N$$

et comme $A(.,.)$ est une forme bilinéaire, alors

$$\sum_{i=1}^{DOF} u_i A(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N$$

qui est un système linéaire avec

$$A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq DOF} = (A(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq DOF} \text{ et } B = (B_j)_{1 \leq j \leq DOF} = L(\varphi_j)_{1 \leq j \leq DOF}. \quad \blacksquare$$

Le calcul des coefficients de la matrice A et la création d'un code de calcul 2D pour faire des testes numériques rest comme perspective.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'approximation de la solution d'une équation elliptique du second ordre par la méthode des éléments finis inversés. Elle s'est avérée particulièrement efficace pour résoudre des problèmes elliptiques posés en domaines non bornés sans imposer une frontière artificielle.

Bibliographie

- [1] C. Amrouche, V.Girault, J.Giroier. Weighled Sobolev spaces for the Laplace equation in \mathbb{R}^3 J.Math.Pures et Appliquées 20 :579-606,1994.
- [2] S. K. Bhowmik, R.Belbaki, T.Z. Boulmezaoud, and S.Mziou. Solving two dimensional second order elliptic equations in exterior domaind using the inverted finite elements method. Computers & Mathematics with. Applications, 72(9) :2315-2333, 2016.
- [3] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space: an approach using weighted spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26(8) : 633–669, 2003.
- [4] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1) :109–145, 2005.
- [5] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 60(2): 295-312, 2014.
- [6] T. Z. Boulmezaoud, B. Boudjedaa, S. Mziou, and M. M. Babatin. Approximation of singular and radial elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 32(1) : 237–261, 2015.
- [7] H. Brezis.: Functional Analysis,Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York 2011.
- [8] J. Camus. Bolley, Quelque résultat sur les espaces de Sobolev avec poids. Pub. Sémin. Mat. Inf. Univ. Rennes, 1968-1969.

-
- [9] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 46: 227–272, 1971.
- [10] G. H. Hardy ; J. E. Littlewood ; G. Pòlya : Inequalities ,Cambridge University Press, 1952.
- [11] J. Giroier. Etude de quelques problèmes aux limites extérieures et résolution par équations intégrales. PhD thesis, Université Paris VI, 1987.
- [12] J-L. Guermond A. Ern. Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre. Springer, 2001.

ملخص

العنوان: دراسة تقريب مسألة اهليجية من الدرجة الثانية في المجال R^2 بواسطة طريقة العناصر المنتهية المعكوسة

الكلمات المفتاحية: مسألة اهليجية. مجال غير محدود. فراغات سوبوليف ذات الأوزان

الملخص: الهدف من هذا العمل هو تطبيق طريقة العناصر المنتهية المعكوسة لحل مسألة اهليجية من الدرجة الثانية على المجال R^2 ، تتميز هذه الطريقة أنها تحافظ على لا محدودية المجال. بداية نعرف فضاءات سوبوليف ذات الأوزان فيما بعد نطبق هذه الطريقة وندرس تقاربها.

Résumé

Titre : Approximation du problème elliptique de second ordre dans R^2 par les éléments finis invers.

Mots clés : éléments finis inversés, problème elliptique, domaine non bornés, espaces de sobolev avec poids.

Résumé : L'objectif de ce travail est d'appliquer la méthode des éléments finis inverses pour résoudre un problème elliptique du second ordre sur le domaine R^2 . Nous définissons d'abord les espaces de Sobolev avec des poids, ensuite nous appliquons cette méthode et nous étudions leur convergence.

Abstract

Title: approximation of the second-order elliptic problem in R^2 by inverted finite elements.

Keywords: Unbounded domains, elliptic problem, inverted finite elements, weighted sobolev.

Arstract: The objective of this work is to apply the inverse finite element method to solve a second-order elliptic problem on the domain R^2 . First, we define the weighted sobolev spaces, then we apply this method and we study their convergence.