UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences des Matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisationet analyse numérique

Par : ABBASSI Imane

Théme

Existence et unicité de la solution du probléme de Lamé bi dimensionnel dans un secteur angulaire contenant un point anguleux

Soutenu publiquement le : 15/06/2022

Devant le jury composé de :

Mohammed Kouidri	M.C.B.	Université KASDI Merbah - Ouargla	président
Hocine Abbassi	M.C.B.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Ghada Kouadri	M.C.B.	Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

L'année univarsitaire :2021/2022

REMERCIMENTS

Nous remercions tout d'abord notre Dieu qui nous a donné la force et la puissance pour terminer ce modeste travail.

Tout nos vifs remerciements à notre promoteur :

Mr Ghada Kouadri

qui nous a guidé à réaliser ce travail, pour son suivi, ses conseils judicieux et sa disponibilité.

Aussi un spécial remerciement à tous les enseignants du département des Mathématiques et à tous les enseignants de la faculté des Mathématiques et Sciences des Matière pour les efforts qu'ils ont fournis à tous les étudiants.

Nous profitons de l'occasion pour remercier aussi tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Abbassi Imane …………..

DEDICACES

***************A ma très chère mère******************

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

***************A mon très cher père****************

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

*************A mes très chers frères set mes belles sœurs***********

Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite

***********A mes meilleurs amies**********

qui m'ont encouragé et partagé avec moi tous les moments d'émotition lors de la réalisation de cette oeuvre.

******A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.******

TABLE DES MATIÈRES

Liste des symboles

Symbole	Sens
L	désigne l'opérateur de Lamé bidimensionnel et L_3 est un opérateur de Lamé tridimensionnel .
U	désigne le vecteur déplacement .
Ω	désigne un corps élastique, homogène et isotrope occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière polygonale $\Gamma = U\bar{\Gamma}_j$, $j = 1, n$ le coté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté Γ_{j-1} ou les S_h sont les sommets de Ω.
Ω_φ	désigne un secteur plan infini, d'ouverture φ de frontière Γ_φ .
$\lambda(r)$	désigne une fonction poids .
B	est un opérateur différentiel d'ordre 0 ou 1 défini sur la frontière Γ_φ .
$\tilde{f}$	désigne la transformation de Mellin de la fonction f .
η	désigne le vecteur normal à la frontière et dirigé vers l'extérieur de celle-ci .
M	est la compressibilité.

INTRODUCTION

Le monde de la modélisation mathématique a pris une importance considérable cette dernière décennie dans tous les domaines de la science et des applications industrielles.
La modélisation mathématique est l'art de représenter une réalité physique en des modèles abstrait accessible à l'analyse et au calcul numérique.
Le model que nous allons décrire dans ce mémoire est connu sous le nom système de Lame $L_3U = \mu\Delta U + (\lambda + \mu)\nabla(divU)$ en dimension trois.
On étudiera ce système dans l'espace usuel de dimension trois dans un domaine élastique homogène et isotrope à frontière présentant des points anguleux.
Le calcul directe et l'étude fonctionnelle sont très compliqués pour ce ci on utilisera une méthode dite de décomposition qui nous amènera à la décomposition du problème initial en deux problèmes bi dimensionnels dans un plan normal à l'arrête.
L'un est dite déformation plane est l'autre cisaillement qu'on appel souvent déformation antiplane.
D'après cette décomposition on aboutira aux problèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} LU = f \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{0.1}$$

$$(S_2) \begin{cases} \Delta U = f \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{0.2}$$

où L étant l'opérateur de Lamé bi dimensionnel et B est un opérateur d'ordre zéro ou un et Ω_φ est un secteur plan d'ouverture φ centré à l'origine 0 qui est un point anguleux.

La présence des points anguleux sur les sommets les deux opérateurs L et Δ ne sont pas bornés à l'origine et pour masquer ces singularités on utilise une méthode dite affectation d'une fonction poids notée $\lambda(r)$ indefinement différentiable sur Ω_φ et ne s'annule pas sur Ω_φ.

Après cette affectation on choisit un espace fonctionnel convenable dit espace poids noté E est défini par :

$$E = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) : rD^2u \in \mathbf{L}^2(\Omega_\varphi)\} \tag{0.3}$$

Où u est à support compact dans Ω_φ et D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre deux par rapport aux variables r et η .

On débute notre travail par un chapitre qui comporte quatre parties :

La première partie est un rappel sur l'élasticité linéarisée .

La deuxième partie c'est la fonction de Green .

La troisième partie est un rappel sur Espace de sobolev .

La quatriéme partie c'est les équations de Lamé.

Dans le deuxième chapitre on étudiera la Transformation d'un problème gouverné par un système de Lamé dans le cas tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels .

Dans le troisième chapitre on étudiera la question d'existence et d'unicité du système :

$$(S_1') \begin{cases} rLU = g \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{0.4}$$

avec les deux conditions aux limites condition de Dirichlet homogène et condition de Neumann homogène .

CHAPITRE 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

1.1 Rappels sur l'élasticité linéaire.

Définition 1.1. *(***Vecteur déplacement** $\vec{U}$ *)* :
On appelle déplacement, le vecteur dont l'origine coïncide avec la position initiale du point et l'extrémité avec la position du point après déformation et nous désignerons les projections par u, v et w c'est-à-dire :

$$\vec{U} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)). \tag{1.1}$$

Définition 1.2. Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^3$ On considère que les points x de $\bar{\Omega}$ représentent les points matériels d'un corps matériel (au repos). On dit que Ω est une configuration de référence du corps en question. Lorsque l'on travaillera sur Ω , on dira que l'on adopte la description lagrangienne sous l'action des forces qui s'exercent sur le corps matériel, celui-ci va se déformer dans l'espace.
Le point matériel initialement situé en x vient occuper une position $y = \varphi(x)$. L'application $\phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ s'appelle une déformation du corps.
L'ensemble $\varphi(\Omega)$ s'appelle la configuration déformée correspondante.
Lorsque l'on travaillera sur $\varphi(\Omega)$ en termes de la variable y on dira que l'on adopte la description eulérienne. Du point de vue mathématique, le passage de l'une à l'autre description n'est qu'un changement de variable.
Il est parfois commode d'introduire le déplacement $u(x) = \varphi(x) - x$ de telle sorte que

$\varphi = Id + u$ il est totalement clair d'écrire les équations en déformation ou en déplacement, mais les déformations ont un caractère plus intrinsèque que les déplacements en mécanique des solides.

Proposition 1.1. (**loi de Hooke**) :
Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope le tenseur des déformations est relié au tenseur des contraintes et l'expression la plus courante est donnée par la relation de Hooke :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+V}{E}.\sigma_{ij} - \frac{V}{E}.\sigma_{kk}.\delta_{ij} \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+V}.\varepsilon_{ij} - \frac{VE}{(1+V)(1-2V)}\varepsilon_{kk}.\delta_{ij} \tag{1.3}$$

δ_{ij} : Indice de Kronecker .
E : module d'Young .
$\sigma = \sigma_{ij}$: le tenseur des contraintes.
$\varepsilon = \varepsilon_{ij}$:le tenseur des déformations.

Compléments :
E et V sont deux paramètres de l'élasticité, mais on peut les substituer par le module volumique K et le module de cisaillement G par fois noté μ par les relations suivantes :

$$G = \frac{E}{2(1+V)} \tag{1.4}$$

$$\lambda = \frac{VE}{(1+V)(1-2V)} \tag{1.5}$$

Remarque 1.1. *:*

1. dans le cas de l'élasticité linéaire, les paramètres E,V,μ et K sont des constantes.

2. $\mu = \dfrac{E}{2(1+V)}$ module de cisaillement du matériau, le bon sens physique entraîne que $\mu > 0$ ceci entraîne par un calcul simple que $0 \leq \mu \leq \dfrac{1}{2}$.

3. la loi de Hooke s'écrit par une forme équivalente à (1.3) par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \qquad i,j = 1,2,3 \tag{1.6}$$

Qui s'écrit encore vectoriellement sous la forme [2] :

$$\varepsilon(U) = \frac{1}{2}[(\nabla\vec{U}) + (\nabla\vec{U})^t] \tag{1.7}$$

4. la divergence du déplacement $\vec{U}(u,v,w)$ s'écrit :

$$div\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.8}$$

Cette quantité sera dite compressibilité et est notée par M, et on remarque que :

$$KM = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \quad M = \frac{E}{1-2v}M \tag{1.9}$$

1.2 Fonction de Green et résolution de problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires .

Soient l'équation différentielle d'ordre n.

$$E[(y)] = p_0(x)(y)^n + p_1(x)(y)^{n-1} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{1.10}$$

Où les fonctions $p_0(x)p_1(x), ..., p_n(x)$ sont continues sur $[a.b]$
Avec $p_0(x) \notin 0$ sur $[a,b]$, et les conditions aux limites :

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \tag{1.11}$$

$k = 1,2,3,...,n$
Les formes linaires $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ en $y(a), y'(a), ..., y^{n-1}(a), y(b), ..., y^{n-1}(b)$ étant linéaires indépendantes.
Supposons que le problème aux limites homogènes (1.10) - (1.11), admet la seule solution triviale $y(x) = 0$.

Définition 1.3. On appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites (1.10) - (1.11) , la fonction $G(x,\xi)$ construite pour tout point ξ , $a < \xi < b$, et jouissant des 4 propriétés suivantes :

1. $G(x,\xi)$ est continue et possède des dérivés continues par rapport à x jusqu'à l'ordre $n-2$ inclus pour $a \leq x \leq b$.

2. Sa dérivée d'ordre $n-1$ par rapport à x présente au point $\xi = x$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\dfrac{1}{p_0(\xi)}$ c'est-à-dire :

$$\left.\frac{\partial^{(n-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{(n-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{n=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)} \tag{1.12}$$

3. Dans chacun des intervalles $[a;\xi)$ et $(\xi;b]$ la fonction $G(x,\xi)$ considéré comme une fonction de x est solution de l'équation (1.10) : $E[G] = 0$.

4. $G(x,\xi)$ vérifie les conditions aux limites (1.11) :

$$V_k(G) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{1.13}$$

Théorème 1.1. Si le problème $(1.10) - (1.11)$ n'a pas de solution autre que la solution triviale $y(x) \equiv 0$, l'opérateur E a une fonction de Green $G(x,\xi)$ et une seule.

preuve : Voir [7].

Soit l'équation différentielle :

$$E[y] = f(x)' \tag{1.14}$$

Avec les condition aux limites :

$$V_k(y) = 0 \qquad (k = 1; n) \tag{1.15}$$

Théorème 1.2. Si $G(x,\xi)$ est la fonction de Green du problème aux limites homogène (1.14), (1.15), alors la solution du problème aux limites $(1.10)' - (1.11)$ est donnée par la formule :

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{1.16}$$

preuve : Voir [7].

1.3 Rappels sur Espaces de Sobolev .

1.3.1 Définitions et principales propriétés :

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.
   $L^2(\Omega)$ muni de produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ est un espace de Hilbert muni de la norme :
$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
2. On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω . $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.
3. Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$.
   On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i = 1 \ldots n$ telles que :
$$\int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x})\frac{\partial(\phi)}{\partial X_i}(x)dx = -\int_\Omega \mathbf{w}_i(x)\phi(x)dx.$$
   Chaque w_i est appelée la $i - me$ dérivée partielle faible de v et notée désormais $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.
4. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :
$$H^1(\Omega) = \{V \in L^2(\Omega) \quad telque \quad \forall i = 1, ..., ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\} \tag{1.17}$$
   Où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de la fonction v.
5. Muni du produit scalaire suivant :
$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))dx$$
   L'espace $H^1(\Omega)$est un espace de Hilbert.
6. Espace $H_0^1(\Omega)$: C'est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet qui est la densité de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ on peut le définir par :
$$H_0^1(\Omega) = \{V \in H^1(\Omega) \qquad telque \quad v|_\Gamma = 0\} \tag{1.18}$$
7. Formule de Green : Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient :
$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x).\eta_i(x)ds$$

Où $\eta = (\eta_i)_{i=1,...,n.}$ est la normale unité extérieure de $\partial\Omega$.

8. Si Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , l'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

9. Espace $H^m(\Omega)$, m est un entier naturel, est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{V \in L^2(\Omega) \quad telque \quad \forall\alpha \leq m; D^\alpha v \in L^2(\Omega)\} \tag{1.19}$$

1.4 Les Équations de Lamé

1.4.1 Construction des équations de Lamé :

Théorème 1.3. La divergence de la relation :

$$\overrightarrow{\sigma} = \lambda tr(\overrightarrow{\varepsilon})I + 2\mu\overrightarrow{\varepsilon} \tag{1.20}$$

Dans laquelle $\overrightarrow{\varepsilon}$ est relié au champ $\vec{U}$ par :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2}({}^t grad\vec{U} + grad\vec{U}) \tag{1.21}$$

Peut s'exprimer sous la forme :

$$div\overrightarrow{\sigma} = (\lambda + \mu)grad(div\overrightarrow{U}) + \mu\Delta\overrightarrow{U} \tag{1.22}$$

preuve :

L'expression de la loi de Hooke en notation indexée est la suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.23}$$

Celle du vecteur $div\vec{\sigma}$ s'obtient a partir de la relation :

$$div\overrightarrow{\sigma} = \lambda grad(tr\vec{\varepsilon}) + 2\mu div\vec{\varepsilon} \tag{1.24}$$

Et s'écrit :

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\lambda\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.25}$$

En reportant l'expression du tenseur des déformations $\vec{\varepsilon}$ en fonction du déplacement $\vec{U}$, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{tr}\,\vec{\varepsilon}) &= \text{grad}(\text{div}\,\vec{U}) && (1.26)\\ \text{div}\,\vec{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\Delta\vec{U} + \text{grad}(\text{div}\,\vec{U})) && (1.27) \end{aligned}$$

Comme le montre l'expression des composantes suivantes :

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_j}\right) \tag{1.28}$$

L'expression du vecteur $div\vec{\sigma}$ en fonction du vecteur $\vec{U}$ s'écrit alors :

$$div\,\overrightarrow{\sigma} = (\lambda + \mu)grad(div\overrightarrow{U}) + \mu\Delta\overrightarrow{U}$$

Cette dernière équation est appelée équation de Lamé.

En notations indicées cette expression s'écrit alors :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Les coefficients d'élasticité de Lamé λ et μ sont indépendants de l'espace.

1.4.2 Quelques cas particuliers importants :

On suppose dans la suite la dimension est 3 c'est-à-dire l'espace usuel et on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point au lieu x_1, x_2, x_3 et par $\vec{U}(u, v, w)$ les composantes du déplacement $\vec{U}$

• Les équations de Lamé sont alors :

$$\mu\Delta u + (\lambda + x)\frac{\partial M}{\partial x} = f_1, \quad \mu\Delta v + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial y} = f_2, \quad \mu\Delta w + (\lambda + \mu)\frac{\partial M}{\partial z} = f_3 \tag{1.29}$$

où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions des variables x, y, z.

$$(\lambda + 2\mu) grad(div \overrightarrow{U}) - \mu rot(rot \overrightarrow{U}) = \overrightarrow{f} \tag{1.30}$$

CHAPITRE 2

TRANSFORMATION DU PROBLÈME DE LAMÉ EN DEUX PROBLÈMES BIDIMENSIONNELS

2.1 Les cordonnées curvilignes orthogonales et applications à l'analyse vectorielle.

Définition 2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Φ un difféomorphisme de U sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.
On appelle coordonnées curvilignes d'un point x de Ω , Les n-uplés $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, tel que $\Phi(u) = x$
On appelle repère associé a ces coordonnées curvilignes , a base de $\mathbb{R}^n$ constituée par les n vecteurs suivants :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial \Phi}{d\partial u_n}$$

Remarque 2.1. Si la base précédente est une base orthogonale (par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$), On dit que le système de coordonnées curvilignes est un système orthogonal .

Proposition 2.1. On reprend les notations précédentes avec $n = 3$.
On suppose en outre que le système de coordonnées est orthogonale.
On note par :

(u, v, w) les coordonnées curvilignes d'un point (x, y, z), on pose :

$$\ell_1 = \|\frac{\partial \Phi}{\partial u}\|, \ell_2 = \|\frac{\partial \Phi}{\partial v}\|, \ell_3 = \|\frac{\partial \Phi}{\partial w}\|$$

Où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne, et on définit la base ortho normale

$$e_u = \frac{1}{\ell_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}, e_v = \frac{1}{\ell_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, e_w = \frac{1}{\ell_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w} \tag{2.1}$$

Dans ces conditions

1. Si f est une fonction définie dans Ω à valeur réelle, le gradient de f est donné par :

$$\nabla f = \frac{1}{\ell_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} e_u + \frac{1}{\ell_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} e_v + \frac{1}{\ell_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w} e_w \tag{2.2}$$

2. Si A est un champ de vecteur donné par :

$$A = A_u e_u + A_v e_v + A_w e_w$$

   Alors la divergence de A est donnée par :

$$divA = \frac{1}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\ell_2 \ell_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\ell_1 \ell_3 A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (\ell_1 \ell_2 A_w) \right] \tag{2.3}$$

3. si f est une fonction définie dans Ω à valeur réelles, le laplacien de f est donné par :

$$\Delta f = \frac{1}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\ell_2 \ell_3}{\ell_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\ell_1 \ell_3}{\ell_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \tag{2.4}$$

preuve :

1. Puisque la base (e_u, e_v, e_w) est orthonormée, les composantes du gradient sont données par :

$$(\nabla f)_u = (\nabla f \mid e_u), (\nabla f)_v = (\nabla f \mid e_v), (\nabla f)_w = (\nabla f \mid e_w)$$

   Par définition des vecteurs de base, cela donne :

$$(\nabla f)_u = \frac{1}{\ell_1} \left(\nabla f \mid \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right), \quad (\nabla f)_v = \frac{1}{\ell_2} \left(\nabla f \mid \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right), \quad (\nabla f)_w = \frac{1}{\ell_3} \left(\nabla f \mid \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right)$$

Or par définition du gradient, on a :

$$\left(\nabla f \mid \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = f'(.)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = \frac{\partial f^*}{\partial u}$$
$$\left(\nabla f \mid \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = f'(.)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \frac{\partial f^*}{\partial v}$$
$$\left(\nabla f \mid \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) = f'(.)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) = \frac{\partial f^*}{\partial w}$$

Où $f' = fo\phi$ la formule (2.2) en résulte aussitôt avec l'abus de notation classique où f^* est remplacée par f .

2. Par utilisation de la formule de stokes.

3. Le laplacien de f n'est autre que la divergence du gradient de f La proposition est ainsi démontrée .

2.2 Exemples de changement de variables et application à certains opérateurs

2.2.1 Coordonnées cylindriques et applications

Le Laplacien vectoriel et la divergence en coordonnées cylindriques
Notons par T l'application différentiable définie par :

$$T :]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times] - \infty, +\infty[\to \mathbb{R}^3$$

Où :$(\rho, \theta, z) \to (x, y, z)$ tels que :

$$x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta, z = z \tag{2.5}$$

Soit V un champ vectoriel de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{\Delta V}$ le Laplacien vectoriel et d'après la théorie des champs on a

$$\overrightarrow{\Delta V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \tag{2.6}$$

On désigne par $\vec{V} = (u(x,y,z)), (v(x,y,z)), (w(x,y,z))$

Le champ $\vec{V}$ et u, v, w désignent les composantes de $\vec{V}$ qui sont des fonctions scalaires de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ et considérons le changement cylindrique (2.5) et on désigne par u_ρ, u_θ, u_z sont les composantes de $\vec{V}$ dans le repère (ρ, θ, z) on a alors d'après (2.3)

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{2.7}$$

Et d'après (2.7) et (2.4) les composantes de $\vec{V}$ dans le repère (ρ, θ, z) sont :

$$\begin{aligned}
\Delta u_\rho &= \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial z^2} \\
\Delta u_\theta &= \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \\
\Delta u_z &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2.2 Le Laplacien en coordonnées polaires :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors le Laplacien Δf est défini par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

s'écrit en coordonnées polaires comme suit d'après (2.2)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{2.9}$$

2.3 Réduction de probléme de Lamé bidimensionnel en utilisant les coordonnées curvilignes cylindriques

2.3.1 Les équations de Lamé en coordonnées curvilignes

(Cas général)

2.3.1.1 Utilisation de la proposition 2.1.

Les équations (1.22) s'écrivent voir [5] :

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-v)}{1-2v}\frac{1}{\ell_1}\frac{\partial M}{\partial \alpha}+\frac{2}{\ell_3\ell_2}\left(\frac{\partial \omega_3\ell_3}{\partial \beta}-\frac{\partial \omega_2\ell_2}{\partial \gamma}\right)=g_1(\alpha,\beta,\gamma)\\
\frac{2(1-v)}{1-2v}\frac{1}{\ell_2}\frac{\partial M}{\partial \beta}-\frac{2}{\ell_3\ell_1}\left(\frac{\partial \omega_1\ell_1}{\partial \gamma}-\frac{\partial \omega_3\ell_3}{\partial \alpha}\right)=g_2(\alpha,\beta,\gamma)\\
\frac{2(1-v)}{1-2v}\frac{1}{\ell_3}\frac{\partial M}{\partial \gamma}-\frac{2}{\ell_1\ell_2}\left(\frac{\partial \omega_2\ell_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial \omega_1\ell_1}{\partial \beta}\right)=g_3(\alpha,\beta,\gamma)
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Où :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{\ell_2\ell_3}\left(\frac{\partial w\ell_3}{\partial \beta}-\frac{\partial v\ell_2}{\partial \gamma}\right)\\
\omega]_2 &= \frac{1}{\ell_3\ell_1}\left(\frac{\partial u\ell_1}{\partial \gamma}-\frac{\partial w\ell_3}{\partial \alpha}\right)\\
\omega_3 &= \frac{1}{\ell_1\ell_2}\left(\frac{\partial v\ell_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial u\ell_1}{\partial \beta}\right)
\end{aligned}$$

Sont les composantes du rotationnelle, et la compressibilité M s'écrit dans le repère curviligne (α,β,γ) :

$$M=\frac{1}{\ell_1\ell_2\ell_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(\ell_2\ell_3u_\alpha)+\frac{\partial}{\partial \beta}(\ell_1\ell_3u_\beta)+\frac{\partial}{\partial \gamma}(\ell_1\ell_2u_\gamma)\right]\tag{2.11}$$

2.3.2 Décomposition du problème de Lamé :

Dans cette partie on décompose le système de Lamé en dimension trois, dans un domaine élastique homogène et isotrope à frontière présentant des points anguleux, pour ceci on utilisera une méthode dite de décomposition qui nous amènera à la décomposition du problème en deux problèmes l'un défini dans un plan et l'autre dans un antiplan.

2.3.2.1 La décomposition dans le cas où l'arête est rectiligne

Soient Ω_1 et Ω_2 deux corps élastiques homogènes et isotropes occupent un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière polyédrale.

Supposons que la surface latérale Γ_1 forme un angle φ avec la surface latérale Γ_2 , en plus supposons que Ω soit un corps homogène constitué de deux corps $(\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2)$ qui sont rigidement joints tout au long de la surface plane Γ_1 qui passe à travers l'arête A du corps.

Pour permettre d'énoncer des résultats sur le comportement de la solution d'un problème aux limites loin des sommets on fixe un intervalle I de A ouvert, dont

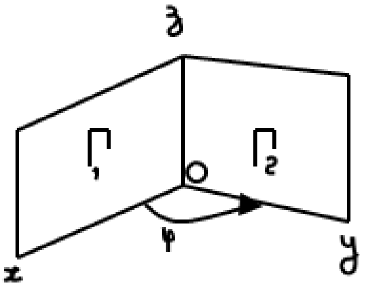

FIGURE 2.1

la fermeture est intérieur à A voir (figure 2.1) . De plus on fixe un voisinage V de O dans l'intersection de Ω avec le plan (xoy) de sorte que $\bar{V} \times \bar{I}$ ne contient aucun sommets de Ω .
Soient μ, v respectivement le module de cisaillement et le coefficient de poisson du milieu élastique pour le matériau du corps Ω
(limite par $\Gamma_1 et \Gamma_2$) la normale a $\Gamma_i, i = 1.2$ sera notée par η_i.
Pour la décomposition du problème (1.22) ,On introduit un repère curviligne particulier c'est le repère cylindrique (r, θ, z) et par utilisation du (1.13) et (2.10) , On aura alors :

$$\frac{1}{1-2v}\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \Delta u_r = C_1(r, \theta, z) \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{1-2v}\frac{\partial M}{r\partial \theta} + \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = C_2(r, \theta, z) \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{1-2v}\frac{\partial M}{\partial z} + \Delta u_z = C_3(r, \theta, z) \tag{2.14}$$

Les équations u_r, u_θ, u_z sont les composantes des déplacements dans le repère cylindrique. pour ramener les points singuliers à l'arête A, on effectuant le changement de variable $r = e^{-t}$, l'équation (2.12) prend la forme :

$$\begin{aligned} &\frac{2(1-v)}{1-2v}\left(-u_r + \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right) - \frac{3-4v}{1-2v}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{1-2v}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \\ &+ \frac{1}{1-2v}e^{-t}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t \partial z} + e^{-2t}\frac{\partial u_r}{\partial z^2} = J(r, \theta, z) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Supposons que le voisinage de l'arête A tellement petite qu'on peut négliger les termes en e^{-t} , nous obtenons alors :

$$\frac{2(1-v)}{1-2v}\left(-u_r+\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right)-\frac{3-4v}{1-2v}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}-\frac{1}{1-2v}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}=J_1(r,\theta,z) \tag{2.16}$$

D'une manière analogue transformons le équations (2.13) nous obtenons :

$$\frac{2(1-v)}{1-2v}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{1}{1-2v}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t\partial \theta}-u_\theta+\frac{3-4v}{1-2v}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}=J_2(r,\theta,z) \tag{2.17}$$

Les équations (2.16), (2.17) font voir que le problème se décompose en deux problèmes un problème de déformation plane auquel correspondent les équations (2.16) et (2.17) .

2.3.3 Le système de Lamé bidimensionnel (déformation plane)

2.3.3.1 Equivalence des équations (2.16) et (2.17).

on a trouvé un système de Lamé (2.16) et(2.17).

Et puisque $r=e^{-t}$ et utilisation de la dérivation des fonctions composées on trouve le système équivalent suivant :

$$\begin{cases}\left[\Delta u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}-\frac{u_r}{r^2}\right]+v_0\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left[u_r+r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]=f_1\\ \\ \left[\Delta u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r^2}\right]+v_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{r}\left[u_r+r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]=f_2\end{cases} \tag{2.18}$$

Où $v_0=\dfrac{1}{1-2v}$
et f_1 ef_2 sont des fonctions de deux variables r et θ

Remarque 2.2. Le système précédent s'écrit d'une manière condensée

$$\mathbf{LU}=\Delta U+v_0\nabla(divU)=f \quad o \quad f=(f_1,f_2) \quad \text{(Systéme de Lamé)}$$

Remarque 2.3. On pose dans la suite $u_r = u$ et $u_\theta = v$, alors le système (2.18) s'écrit :

$$\begin{cases} \left[\Delta u - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} - \dfrac{u}{r^2}\right] + v_0 \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\left[u + r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right] = f_1 \\ \\ \left[\Delta v + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} - \dfrac{v}{r^2}\right] + v_0 \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\dfrac{1}{r}\left[u + r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right] = f_2 \end{cases} \tag{2.19}$$

CHAPITRE 3

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE LAMÉ BIDIMENSIONNE.

3.1 Fonctions poids et espaces avec poids

3.1.1 Exemples de singularités

3.1.1.1 Exemple 1 :

Voyons maintenant un exemple de solutions singulières i.e., non régulières.
Il s'agit d'un problème posé dans un ouvert non régulier pour lequel le théorème de régularité et son corollaire sont faux. En particulier, bien qu'il existe des solutions faibles (c'est -à- -dire appartenant à $(H^1(\Omega))$. Il n' y a pas des solutions fortes (c'est-t- à -dire deux fois dérivables).
Nous nous plaçons en dimension $n = 2$ d'espace, et nous considérons un secteur angulaire Ω^*_φ défini en coordonnées polaires (voir figure (3.1))

$$Avec: \qquad \Omega^*_\varphi = \{(r, \theta)/0 < r < r_0 \quad et \quad 0 < \theta < \varphi \leq 2\pi\}$$

On note Γ_0 une partie du bord de Ω^*_φ où $r = r_0$, Γ_1 celle où $\theta = 0$ et Γ_2 celle où $\theta = \varphi$.
Cet ouvert Ω^*_φ présente trois $\ll coins \gg$, mais seule l'origine (le coin entre les bords Γ_1 et Γ_2), peut poser problème pour la régularité ci-dessous.

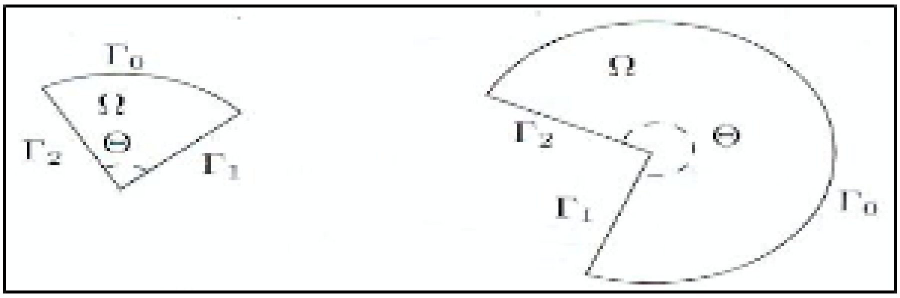

FIGURE 3.1

Physiquement le cas d'un angle $\varphi < \pi$ et représentatif d'un effet de pointe, tandis que le cas $\varphi > \pi$ correspond a une encoche (où même à une fissure si $\varphi = 2\pi$).

On considère les deux problèmes aux limites suivantes :

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans} \qquad \Omega_\varphi^* \\ u = \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right) & \text{sur} \quad \Gamma_0 \quad \textit{pour} \quad k \geq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \qquad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans} \qquad \Omega_\varphi^* \\ u = \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right) & \text{sur} \quad \Gamma_0 \quad \textit{pour} \quad k \geq 1 \\ u = 0 & \text{sur} \qquad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

Nous étudierons la régularité des solutions (P_1) et (P_2) en termes d'appartenance ou non aux espaces H^m .

Nous allons simplement nous intéresser au comportement du gradient ∇u au voisinage de l'origine.

Il est facile de vérifier que (P_1) et (P_2) admettent des solutions uniques dans $H^1(\Omega_\phi^*)$ qui sont données respectivement par les expressions :

$$u(r,\theta) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)$$
$$u(r,\theta) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)$$

dans le cas $k = 1$ et $\varphi > \pi$ le gradient ∇u n'est pas borné à l'origine, mais si on multiplie ∇u par une fonction $\lambda(r)$ la quantité $\lambda(r)\nabla u$ devient bornée à l'origine cette fonction est dite fonction poids.

3.1.1.2 Solution du problème (P_2) :

C'est la résolution du problème P_2 problème de Neumann dans le coin.
On commence par relever la condition aux limites non homogène en définissant une fonction $u_0 \in H^1(\Omega_\varphi^*)$ dont la trace sur le bord coïncide avec cette condition aux limites.
On vérifie aisément que $u(r,\theta) = \frac{r^2}{r_0^2}\cos(\frac{k\pi\theta}{\varphi})$ répond à la question , c'est-à-dire que $u = u_0 + v$ où v est la solution d'un problème homogène

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta v = \Delta u_0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi^* \\ v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

Comme $\Delta u_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega_\varphi^*)$, il existe une unique solution de P_3 dans $H^1(\Omega_\varphi^*)$ et par conséquent P_1 admet une unique solution dans (Ω_φ^*) .
Vérifions que P_2 est précisément cette unique solution.

Rappelons que : $\quad \Delta\phi(r,\theta) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$

Un calcul simple montre que $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}} = \left(\frac{k\pi}{\varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}}$

Donc P_2 est bien solution de P_1 est un élément de $H^1(\Omega_\varphi^*)$.
D'après l'expression (2.2), dans la base (e_r, e_θ) , on a :

$$\nabla u = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{k\pi}{\varphi}-1} \frac{k\pi}{\varphi}\left[\left(\cos\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)\right)e_r - \left(\sin\left(\frac{k\pi\theta}{\varphi}\right)\right)e_\theta\right]$$

qui clairement, n'est pas borné à l'origine si $0 < k\pi < \varphi$.

3.1.1.3 Exemple 2 :

L'exemple qu'on va donner est une généralisation de l'exemple précédent et sera très important dans la suite.
On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$(P_4) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω est un polygone et Γ sa frontière, f est donnée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

La solution du problème P_4 n'existe dans $H^2(\Omega) \cup H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe, c'est-à-dire que tout les angles du polygone sont saillants, cela découle du fait que la solution de ce problème est de la forme $u = u_0 + ar^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin \frac{k\pi\theta}{\varphi}$.

Cette solution n'est pas nécessairement dans $H^2(\Omega)$ lorsque $\pi < \varphi$, car $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \notin \mathbf{L}^2(\Omega)$ et par suite la solution du dernier problème n'est pas nécessairement dans $H^2(\Omega)$ lorsque le polygone n'est pas convexe, car $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \notin \mathbf{L}^2(\Omega)$, mais on constate que $r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ce qui nous donne l'idée d'affecté le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de r et est définie en coordonnées polaires par :

$$\lambda(r) = \begin{cases} r & si \quad 0 < r < r_0 \\ \delta(r) & si \quad r_0 < r < r_1 \\ 1 & si \quad r > r_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

r_0 est suffisamment petit et r_1 suffisamment grand.

La fonction poids $\lambda(r)$ est indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω et ne s'annule pas dans Ω.

Et pour étude de (P_4) dans le polygone Ω tout entier, on choisit l'étude sur un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ qui est défini par :

$$\Omega_\varphi = \{(r, \theta)/0 < r; 0 < \theta < \varphi\} \tag{3.3}$$

On désigne par Γ_φ sa frontière et l'étude sera ensuite généralisée au polygone tout entier, en utilisant une partition de l'unité de celui-ci.

3.1.2 Les espaces fonctionnels avec poids

Après affectation d'une fonction poids de (P_4) , l'étude de l'existence et l'unicité sera dans un espace fonctionnel convenable dit espace avec poids qu'on note E et qu'on définit par :

$$E(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) \quad \text{tel que} \quad rD^2 u \in \mathbf{L}^2(\Omega_\varphi)\} \tag{3.4}$$

Où u à suppor compact dans $\bar{\Omega}_\varphi$ et D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables r et η

3.1.2.1 Propriétés de l'espace $E(\Omega_\varphi)$

1. Puisque $D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2}{\partial r \partial \eta}\right)$ et comme $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ alors [9] :

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\right) \tag{3.5}$$

   Et par suite :

$$rD^2 = \left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\right) \tag{3.6}$$

2. d'après (1) ,la formule (3.4) s'écrit alors :

   En coordonnées polaires :

$$E(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) \quad \text{tel que} \quad \left(r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\right) \in \left(\mathbf{L}^2(\Omega_\varphi)\right)^3\}$$

   Où u est à suppor compact dans $\bar{\Omega_\varphi}$

3. on pose :

$$E_0(\Omega_\varphi) = E(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi) \tag{3.7}$$

4. $H_0^2(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach réflexif

5. On montre dans [9], que l'espace défini par la formule (3.4) coïncide avec l'espace suivant :

$$E_0(\Omega_\varphi) = \{u \in H_0^1(\Omega_\varphi)/ru \in H_0^1(\Omega_\varphi)\} \tag{3.8}$$

   Où les fonctions u sont toujours à support compact dans $\bar{\Omega_\varphi}$

6. l'espace $E(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre $H^2(\Omega_\varphi)$ et $H^1(\Omega_\varphi)$

   L'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre $H_0^2(\Omega_\varphi)$ et $H_0^1(\Omega_\varphi)$.

3.2 Etude de l'existence et de l'unicité de la solution de système de Lamé bidimensionnel

En munissant le système (2.19) par la condition initiale B on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \left[\Delta u - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2}\right] + v_0 \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left[u + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right] = f_1 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \left[\Delta v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2}\right] + v_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{r}\left[u + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right] = f_2 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = Bv = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.9}$$

Où B c'est l'opérateur différentiel d'ordre zéro ou un.
Les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ. Pour absorber les singularités qui se produisent au voisinage de l'origine, vu la présence du point anguleux en 0, on multiplie (3.9) par une fonction poids (voir (3.2)).
au voisinage de l'origine on obtient alors :

$$\begin{cases} r\Delta u - \frac{2+v_0}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1+v_0}{r}u + v_0 r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v_0\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + v_0\frac{\partial u}{\partial r} = rf_1 & \text{dans } \Omega^*_\varphi \\ r\Delta v + \frac{2+v_0}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r}v + \frac{v_0}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + v_0\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = rf_2 & \text{dans } \Omega^*_\varphi \\ Bu = Bv = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.10}$$

Où $\quad \Omega^*_\varphi = \{(r,\theta) \quad / \quad 0 < r < r_0 \quad et \quad 0 < \theta < \varphi \leq 2\pi\}$

3.2.1 Position du problème

On se propose d'étudier le problème (3.10) dans l'espace fonctionnel convenable pour la condition de Dirichlet homogène, il est commode de travailler dans l'espace fonctionnel $(E(\Omega_\varphi))^2$ tel que :

$$E_0(\Omega_\varphi) = E(\Omega_\varphi) \cup H^1_0(\Omega_\varphi)$$

Les calculs avec les expressions qui renferment des termes de la forme $\frac{u}{r}$ et $\frac{v}{r}$ ont aussi un sens, car il suffit de remarquer que :

$$u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial\tau} u(r\cos\tau, r\sin\tau)d\tau$$

Donc

$$\left|\frac{u(x,y)}{r}\right| \leq \int_0^\varphi \nabla|u(r\cos\tau, r\sin\tau)|d\tau$$

Donc si $u \in E(\Omega_\varphi)$, les intégrales en ∇u ont un sens, car par définition , $E(\Omega_\varphi)$ est un sous espace de $H^1(\Omega_\varphi)$, et par la suite les intégrales où interviennent les expressions en $\frac{v}{r}$ et $\frac{u}{r}$ ont aussi un sens.
Donc l'espace fonctionnel $E(\Omega_\varphi)$ comme on l'a choisi est suffisant pour que toutes les intégrales qui interviennent dans les calculs soient convergentes.

Remarque 3.1. Le calcul reste valable dans l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ Pour l'étude de l'existence du problème (3.10) on a besoin de lemme suivant :

Lemme 3.1. (de peetre) :
Soient E, F, G trois espaces de Banach réflexifs,tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit T un opérateur linéaire continu de E dans F .Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1- L'image de T est fermée dans F et L a un noyau de dimension finie.

2- Il existe une constante K positive, telle que :

$$\|u\|_E \leq K\left\{\|Tu\|_F + \|u\|_G\right\} \tag{3.11}$$

preuve : Voir [10].

3.2.2 Etude de l'existence de la solution du problème dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ avec la condition de Dirichlet homogène

On se propose de chercher la solution si elle existe du problème (3.10) avec la condition de Dirichlet homogène (c'est à dire que B est l'opérateur identité) dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

Comme on a $U = 0$ sur Γ_φ, il est commode de chercher la solution du problème (3.10) dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

Pour étudier l'existence des solutions de ce problème dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$, on va d'abord étudier la fermeture de l'image de l'opérateur rL dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, (où L est l'opérateur de Lamé).

Pour prouver que l'image de rL est fermée dans $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, on appliquera le théorème suivant :

Théorème 3.1. Pour l'opérateur : $rL : (E_0(\Omega_\varphi))^2 \to (L^2(\Omega_\varphi))^2$

Il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$\|U\|_{(E_0(\Omega_\varphi))^2} \leq K \left[\|rLU \quad \|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2} + \|U\|_{\left(H_0^1(\Omega_\varphi)\right)^2} \right] \tag{3.12}$$

preuve :

Il est clair que toutes les hypothèses du Lemme de Peetre sont vérifiées car : Les espaces $E_0(\Omega_\varphi), L^2(\Omega_\varphi), H_0^1(\Omega_\varphi)$ sont des espaces de Banach réflexifs car ce sont des espaces de Hilbert et l'opérateur rL est linéaire et continu de $(E_0(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et de plus l'injection de l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ dans $(H_0^1(\Omega_\varphi)$ est compacte [9].

Pour établir l'inégalité (3.12) on appliquera la transformation de Mellin au problème (3.10), on obtient :

$$\begin{cases} \widetilde{rLU}(\sigma) = \widetilde{g}(\sigma) \\ \widetilde{U}(\sigma, 0) = \widetilde{U}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

On pose $U = (u, v)$ et $g = (g_1, g_2)$. Après calculs dans (3.13), il vient :

$$\begin{cases} (1 + v_0)(\sigma^2 - 2\sigma)\tilde{u}(\sigma - 1) + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\sigma-1)}{\partial \theta^2} - (2 + \sigma v_0)\frac{\partial \tilde{v}(\sigma-1)}{\partial \theta} = g_1(\sigma) \\ \\ (\sigma^2 - 2\sigma)\tilde{v}(\sigma - 1) + (1 + v_0)\frac{\partial^2 \tilde{v}(\sigma-1)}{\partial \theta^2} - (2 + \sigma v_0)\frac{\partial \tilde{u}(\sigma-1)}{\partial \theta} = g_2(\sigma) \\ \\ \tilde{u}(\sigma, 0) = \tilde{u}(\sigma, \varphi) = 0 \\ \tilde{v}(\sigma, 0) = \tilde{v}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

L'écriture matricielle du système (3.14) est la suivante :

$$\begin{cases} A(\sigma)\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \theta^2} + B(\sigma)\frac{\partial U}{\partial \theta} + C(\sigma)\widetilde{U} = \widetilde{g} \\ \widetilde{U}(\sigma, 0) = \widetilde{U}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Les matrices A,B et C sont définies par :

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + v_0 \end{bmatrix} \quad B(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -(2 + v_0\sigma) \\ -(2 + v_0\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$C(\sigma) = \begin{bmatrix} (1 + v_0)(\sigma^2 - 2\sigma) & 0 \\ 0 & (\sigma^2 - 2\sigma) \end{bmatrix}$$

D'après la théorie des équations différentielles on montre voir [11] , que ce type d'équation différentielle avec la condition de Dirichlet admet une fonction de Green.
Le problème (3.15) admet une fonction de Green K qui est bornée et vérifie :

$$\widetilde{U}(\sigma, \theta) = \int_0^{\varphi} \widetilde{K}(\sigma, \alpha, \theta)\widetilde{g}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

D'où il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|\widetilde{U}\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2} \leq M \|\widetilde{g}\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}$$

C'est t à dire :

$$\|\widetilde{U}\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2} \leq M \|\widetilde{rLU}\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}$$

On muni l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ de la norme suivante :

$$\|U\|_{(E^2(\Omega_\varphi))^2} = \|U\|_{(H^1(\Omega_\varphi))^2} + \sum_{|\alpha|=2} \|rD^\alpha U\|$$

Le symbole D désigne l'opérateur de dérivation par rapport aux variables r et η (η étant le vecteur normal à la frontière du domaine et dirigé vers l'extérieur de celle- ci) . C'est-à-dire :

$$D^2 = \{\frac{\partial^2}{\partial r^2}; \frac{\partial^2}{\partial r \partial \eta}; \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Comme les fonctions de l'espace $E(\Omega_\varphi)$ sont à support compact on a si S est le support de ces fonctions :

$$\sum_{|\alpha|=2} \|rD^\alpha U\|^2 = \sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\infty r^2 |D^\alpha U|^2 r dr d\theta = \sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\beta r^2 |D^\alpha U|^2 r dr d\theta$$

où β est la plus grande valeur de r sur S, on a donc :

$$\sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\infty r^2 |D^\alpha U|^2 r dr d\theta \leq \beta^2 \sum_{|\alpha|=2} \int_0^\varphi \int_0^\beta |D^\alpha U|^2 r dr d\theta$$

D'où il existe une constante $\mu > 0$ telle que :

$$\|U\|_{(E^2(\Omega_\varphi))^2} \leq \mu \|rLU\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2}$$

Et comme $\quad \|\widetilde{U}\|_{(H^2(\Omega_\varphi))^2} \leq M \|\widetilde{rLU}\|_{(L^2(\Omega_\varphi))^2}$

Donc on a l'inégalité (3.12) est vérifiée, donc d'après le Lemme de Peetre l'image de l'opérateur rL est fermée dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, et son noyau est de dimension fini dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

D'où l'opérateur rL est surjectif sur $(L^2(\Omega_\varphi))^2$, et donc le problème (3.10) admet au moins une solution dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$.

3.2.3 Etude de l'existence de la solution du problème de Lamé avec la condition de Neumann homogène .

On se propose de chercher la solution si elle existe du problème (3.10) avec la condition de Neumann homogène ($B = \frac{\partial}{\partial \eta}$) , dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$.

Pour l'étude de ce problème on suit exactement la méthode que celle utilisée dans le paragraphe précédent, et par utilisation du lemme de Peetre aux espaces $(E(\Omega_\varphi))^2$, $(L^2(\Omega_\varphi))^2$ et $(H^1(\Omega_\varphi))^2$, et à l'opérateur rL .

on obtiendra un résultat analogue au résultat obtenu pour le cas de la condition de Dirichlet étudiée dans le paragraphe précédent, le seul changement est qu'on travaille dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$ au lieu de $(E_0(\Omega_\varphi))^2$.

3.2.4 Etude de l'unicité de la solution du problème de Lamé avec la condition de Dirichlet homogène.

Pour le cas de la condition de Dirichlet homogène Il s'agit de chercher le noyau du problème (3.10), et de voir s'il est réduit à 0 dans l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$, et dans ce cas, l'opérateur rL serait injectif sur l'espace $(E_0(\Omega_\varphi))^2$ et par la suite le problème (3.10) avec la condition de Dirichlet, admet une solution unique U dans $(E_0(\Omega_\varphi))^2$, ou bien la dimension de ce noyau n'est pas nulle, mais elle est finie d'après le Lemme de Peetre ,et dans ce cas là, le problème (3.10) admet des solutions singulières.

Les éléments du noyau du problème (3.10) avec la condition de Dirichlet, sont solution du problème :

$$\begin{cases} rLU = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.16}$$

Et comme r ne s'annule pas dans Ω_φ, ce problème est équivalent à :

$$\begin{cases} LU = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.17}$$

Ce type de problème a été étudié par Merouani [3],[12] ,et ceci pour différentes conditions au limites et a récapitulé les résultats dans un tableau à sept colonnes.

On va résoudre ce problème en posant $U = r^\alpha W$ avec $W = (w_1, w_2)$, et α est un paramètre complexe, on obtient donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_1(\theta)}{\partial\theta^2} + (1+v_0)(\alpha^2-1)w_1(\theta) + \rho_0\frac{\partial w_2(\theta)}{\partial\theta} = 0 \\ \\ (1+v_0)\frac{\partial^2 w_2(\theta)}{\partial\theta^2} + (\alpha^2-1)w_2(\theta) + \rho_1\frac{\partial w_1(\theta)}{\partial\theta} = 0 \\ \\ w_1(0) = w_2(0) = 0 \\ w_1(\varphi) = w_2(\varphi) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Avec $\rho_0 = v_0(\alpha-1) - 2$ et $\rho_1 = v_0(\alpha+1) + 2$.

Le problème (3.18), est un problème différentiel ordinaire du second ordre par rapport à la variable θ, et dépendant d'un paramètre complexe α, avec condition de Dirichlet homogène, la solution générale de ce problème est de la forme :

$$W(\theta) = \begin{cases} C_1\rho_0\cos(\alpha-1)\theta + C_2\rho_1\sin(\alpha-1)\theta - C_3\sin(\alpha+1)\theta + C_4\cos(\alpha+1)\theta \\ \\ -C_1\rho_1\sin(\alpha-1)\theta + C_2\rho_1\cos(\alpha-1)\theta - C_3\cos(\alpha+1)\theta + C_4\sin(\alpha+1)\theta \end{cases} \tag{3.19}$$

avec $\alpha \notin \{0,-1,1\}$, ces valeurs sont des cas simples.
On détermine les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4, à l'aide des conditions aux limites, le déterminant du système linéaire ainsi obtenu est proportionnel à l'expression :

$$\sin^2\alpha\varphi - [\frac{\alpha}{3-4v}]^2\sin^2\varphi \quad \text{où} \quad v = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{v_0}) \tag{3.20}$$

D'où la proposition :

Proposition 3.1. Le problème (3.18) détermine $W = (w_1, w_2)$ non nulle lorsque α est une solution de l'équation suivante :

$$\sin^2\alpha\varphi - [\frac{\alpha}{3-4v}]^2\sin^2\varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha \notin \{0,-1,1\} \tag{3.21}$$

Ce que veut dire que le comportement singulier des solutions du problème (3.10) est gouverné par l'équation transcendante (3.21).
L'équation (3.21) ne peut être résolue que numériquement , et ceci en utilisant l'une des méthodes connues telles que la méthode de Newton et ça donne de bons résultats.
R Lozi [4] a élaboré un algorithme de résolution numérique pour ce type d'équation.
Dans Merouani , on trouve un tableau qui récapitule suivant les valeurs de φ et suivant les conditions aux limites les termes les plus singuliers d'un développement de toute solution variationnelle du problème (3.10) au voisinage de l'origine [2].

3.2.5 Etude de l'unicité du problème de lamé avec la condition de Neumann homogène

Il s'agit de chercher le noyau du problème (3.10) avec la condition de Neumann et de voir s'il est réduit à 0 dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$ on utilise la même méthode que celle du paragraphe $(3.2.2)$, on aura donc :
On détermine les constantes : c_1, C_2, C_3 , et C_4 contenues dans la solution générale du pro-

blème (3.18) , à l'aide des conditions aux limites de Neumann , le déterminant du système linéaire est proportionnel à l'expression :

$$\sin^2 \alpha\varphi - \alpha^2 \sin^2 \varphi$$

D'où la proposition (3.2).

Proposition 3.2. Le problème (3.18) détermine W non nulle lorsque α est solution de l'équation suivante :

$$\sin^2 \alpha\varphi - \alpha^2 \sin^2 \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha \notin \{0, -1, 1\} \tag{3.22}$$

preuve [2]

Ce qui veut dire que le comportement singulier du problème (3.10) avec la condition de Neumann , est gouvernée par l'équation transcendante (3.22).

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un problème d'élasticité tridimensionnelle gouverné par un opérateur de Lamé dans un domaine élastique homogène et isotrope à frontière présentant des points anguleux.
Dans cette étude on a utilisé la méthode décomposition, et on a trouvé que le problème se décompose en deux problèmes l'un des deux est un problème de Lamé bidimensionnel et l'autre est un problème antiplan (cisaillement).
On a établi un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Lamé (problème plan) et on a montré que les fonctions poids jouent un rôle très important dans cette étude, elles masquent les singularités , et allègent les calculs .
On a obtenu nos résultats dans un espace fonctionnel avec poids qui est plus riche que les espaces classiques, cette étude est originale et de plus elle recouvre le cas classique.
Les extensions prévues de notre étude peuvent être exploité dans les domaines suivants :

- Domaine de mécanique de rupture fragile.
- Domaine de thermoélectricité tridimensionnel.
- Domaine des équations de NAVIER-STOCKS en mécanique des Fluides.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOUADRI GHADA , résolution d'un probléme d'élasticité en dimension trois affecté d'un poids dans un domaine présentant des points anguleux par une méthode de décomposition .

[2] H.BENSRIDI , B.MEROUANI . Singularité des solutions d'un problème aux limites relatifs au système de Lamé au voisinage d'une arête d'un corps non homogène . 01.2000 Cairo International seminary Maths of the 21th century.

[3] MEROUANI .B , Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites. Maghreb math. Rev. Vol 5, Nos 1 / 2, PP 95-112. (1996)

[4] LOZI.R. Résultats numériques de la régularité du problème de Stockes et du Laplacien itéré dans un polygone, Jour of applied Math. R.A.I.R.O. Nairobi. Vol 12, P 267. (1978).

[5] LOFFICIAL. M et TANRE. D. Intégrales curvilignes et de surfaces. Ellipses. France. (2006).

[6] MILAMI. R, QUATERONI. A, GIANLUIZI. R, Reduced basis method for linear elasticity problems with many parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 197, Issues 51-52, 15 October 2008, Pages 4812-4829.

[7] KRASNOV.M, KISSELEV.A et MAKARENKO.G. Equations intégrales. Ed MIR. Moscou. (1977).

[8] PARTON. V. et PERLINE. P. Méthodes de la théorie mathématique de l'elasticité-Tome1. Ed Mir. Moscou. (1984).

[9] REGHIOUA. M . Etude du bilaplacien dans un domaine non régulier.Thèse de Doctorat d'état Université de Constantine .Février 2006.

[10] LIONS J.L. et MAGENES. E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol I . Dunod, 1968.

[11] GRISVARD. P. Singularities in boundary value problem. Masson.Paris. (1992).

[12] MEROUANI. B. Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, C.R.A.S, t.304, série I, N0 13.(1987).

ملخص:

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة مسألة المرونة في الفضاء المعتاد ذي ثلاثة أبعاد في نطاق يحوي نقط زاويه بطريقة تجزئة المسألة الابتدائية إلى مسألتين إحداهما جملة لامي المستوية و عند دراستنا لوجود و وحدانية الحل للمسألة السابقة المرفقة بالشروط الحدية لـ : ديريشلي و نومان المتجانسة و ذلك باستعمال دوال الوزن في فضاءات دالية للوزن و التي تلعب دورا هاما في امتصاص النقاط الشاذة المتواجدة في المبدأ توصلنا للوجود و الوحدانية بسهولة.

الكلمات المفتاحية : مسالة لامي المرونية - دوال الوزن – فضاءات صوبولاف المزودة بوزن.

Abstract :

In this disquisition we have studied three dimensional elasticity problems on area with singular points by using the decomposition of the initial problem to two problems on of them is a two dimensional Lame system. We have remarked that the use of weight functions can simplify the difficulties of the study of singularities situated in the principle we have found that the existence and the uniqueness can be proved easily.

Key-words: Elastic Lame problem, weight functions, weight Sobolev spaces.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème d’élasticité tridimensionnelle sur la zone avec des points anguleux en utilisant la décomposition du problème initial en deux problèmes l'un des deux est un problème de Lamé bidimensionnel. Nous avons remarqué que l’utilisation fonction de poids peut simplifier les difficultés de l’étude des singularités situées dans le principe nous avons trouvé que l’existence et l'unicité peuvent être prouvées faciles.

Mots-clés : Problème d'élasticité de Lamé - Fonctions de poids - Espaces Sobolav avec poids.