UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Babaarbi.Hafnaoui

Théme

Modélisation du problème de Signorini avec frottement de Coulomb pour les coques piézoélectriques

Soutenu publiquement le : 15/06/2022

Devant le jury composé de :

Kaliche Kelthoum	M.B. université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Ghezal.Abderrazak	M.A. université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Mezabia Mohammed El Hadi	M.A. université KASDI Merbah-Ouargla	Rapporteur

Dedicace

Je dédie ce modeste travail à mon cher père.
A ma chère mère.
A mes chères.
A tous mes amies.
A tous les professeurs de l'univercité de Kasdi merbah Ouargla.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le professeur superviseur Hadi Mezabia pour tous les conseils qu'il nous a donnés qui ont contribué à enrichir le sujet de notre étude. Nous remercions également les membres du comité de discussion estimé....

Table des matières

Dédicace **1**

Remerciements **i**

0.1 Notations 2

1 La théorie linéaire de la piézoélectricité **6**

1.1 Définitions et applications 7

1.1.1 Matériaux piézoélectriques 7

1.1.2 Effet piézoélectrique 8

1.1.3 Applications 8

1.2 Géométrie différentielle tridimensionnelle 9

1.2.1 Cadre physique 9

1.2.2 Description de la géométrie et des efforts envisagés 9

1.2.3 Formulation du problème 10

1.2.4 Loi de frottement de Coulomb 13

1.3 Existence et unicité d'une solution 13

1.3.1 Deux formulations variationnelles du problème 13

1.3.2 Problème homogène 15
1.3.3 Théorème d'existence et d'unicité 16

2 L'analyse asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une coques mince piézoélectriques isotropp contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire 19

2.1 Préliminaires aux méthodes asymptotiques 19
2.1.1 Rappel du probléme tridimensionnel 19
2.2 le cas de contact avec frottement 20
2.2.1 Passage à un domaine de référence 21
2.2.2 Méthode des développements asymptotiques 23
2.2.3 Le problème membranaire 32

Table des figures

Notations et conventions

0.1 Notations

Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons les conventions suivantes :

➤ les indices latins (i, j, k, ...) varient de 1 à 3.

➤ les indices grecs (α, β , γ, λ, μ, ...) varient de 1 à 2.

➤ les composantes contravariantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) sont notées avec des indices supérieurs et les composantes covariantes avec indices inférieurs. La convention de sommation sur les indices répétés est utilisée.

➤ $u_i v^i = \sum_{i=1}^{i=3} u_i v^i$.

➤ $u = (u_i)$ vecteur de composantes u_i.

➤$u.v = u_i v_i$ produit scalaire euclidien.

➤n normale unitaire extérieure.

➤$u_N = u.n$ la composante normale du déplacement.

➤$u = (u_T, u_N)$, u_T la composante tangentielle du déplacement.

➤$\sigma_N = (\sigma(u)n)n$ la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

➤$\sigma(u)n = (\sigma_T, \sigma_N)$, σ_T la composante tangentielle du vecteur $\sigma(u)n$.

➤$\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ dérivée de u_j par rapport à x_i.

➤$div\sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij} e_i$ divergence du tenseur $\sigma(u)$.

➤$|u| = \sqrt{u.u}$ norme vectorielle euclidienne.

➤$A = (A_{ijkl})$: tenseur de rigidité d'ordre 4 .

➤$D(\Omega)$: l'espace des fonctions testes. Ω domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne) de $\mathbb{R}^3$.

➤ω : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne)de $\mathbb{R}^2$.

➤S : la surface moyenne de Ω.

➤(a_1, a_2, a_3) : (resp. (a^1, a^2, a^3)) base covariante (resp. contravariante) associée à la surface moyenne S.

➤(g_1, g_2, g_3) : (resp. (g^1, g^2, g^3)) base covariante (resp. contravariante) associée à Ω.

➤$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$: composantes covariantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure associées à S.

➤ g_{ij} : $(resp. g^{ij})$ composantes covariantes (resp. contravariante)du tenseur métrique associées à Ω.

➤ S désigne une surface dans l'espace Euclidien habituel.

➤ $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ désignent les symboles de Christoffel.

➤ Γ_0 désigne une partie de la frontière de mesure non nulle.

➤ le triplet (a^1, a^2, a^3) forme la base contravariante en tout point de S.

➤ $C(\Omega)$ espace des fonctions continues définies sur Ω.

➤ $C^k(\Omega), k > 0$ espace des fonctions continues définies sur Ω, dont les dérivées partielles d'ordres $\leq k$ sont continues .

➤ $C^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω

➤ $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.

➤ $\mathcal{D}'$: l'espace des distributions.

➤ $\rightharpoonup$: la convergence faible.

➤ $H^s(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre s.

➤ $b(u, v)$: la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion.

➤ $a(u, v)$: la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire.

Introduction

Un problème de contact est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement et la déformation des corps, ainsi que par des conditions aux limites modélisant des forces de contact et de frottement. Les premiers résultats sur le sujet des problèmes de contact dans la théorie d'élasticité ont été obtenus à la fin du 19 ème siècle . Pour plus de détails sur les études menées avant 1953 sur les problèmes de contact nous nous référons à [21] . Au cours des dernières décennies, des problèmes d'analyse de structure impliquant Les interfaces de contact ont reçu une grande importance en raison des énormes applications industrielles. Signorini (1933, 1959) a donné une formulation générale pour les problèmes de contact sans frottement. Il a énoncé des conditions aux limites et des conditions de contact prescrites pour un corps élastique contre une fondation rigide. Les premiers résultats de l'existence de ces problèmes ont été donnés par Fichera[9, 13]. L'étude du contact unilatéral sans frottement pour une plaque élastique avec obstacle rigide a été analysé par Caffarelli et Friedman [23], Caffarelli, Friedman et Torelli [24], Dal Maso et Paderni [22]. Dans le cas avec frottement, Paumier [17] a étudié la modélisation asymptotique du contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour la plaque Kirchhof-Love contre une fondation rigide. Il a prouvé que le problème tridimensionnel de Signorini avec frottement converge fortement vers la solution unique d'un problème de plaque de Signorini bidimensionnel sans frottement. Récemment, Léger et Miara [14] ont étudié

une coque linéaire peu profonde sans fortement en utilisant la méthode de convergence. Bensayah, Chacha et Ghezal [5] ont généralisé les résultats de Paumier [17]à une coque peu profonde et l'étude de Léger et Miara [14] au cas de frottement de Coulomb. Dans cette direction, nous nous référons à Ghezal et Chacha [4] et aux références citées dans ce document pour une coque non linéaire peu profonde. La piézoélectricité est un phénomène électromécanique qui couple les champs élastiques et électriques. En général, un matériau piézoélectrique répond à des forces / pressions mécaniques et génère une charge / tension électrique. Ce phénomène s'appelle l'effet piézoélectrique direct, il a été découvert en 1880 par Pierre et Jacques Curie. Inversement, une charge / un champ électrique appliqué au matériau induit des contraintes ou déformations mécaniques. Ce phénomène est appelé l'effet piézoélectrique inverse, avait été prédit en 1881 par Lippmann. Pour plus de détails sur la piézoélectricité, voir par exemple Ikeda [6] et les références citées dans celui-ci.

le comportement électromécanique couplé de matériaux piézoélectriques et leur disponibilité sous forme de feuilles ont entraîné une utilisation intensive de coques composites stratifiées avec des couches piézoélectriques dans les domaines civil, naval et aérospatial. Nous nous référons à Bernadou et Haenel [3], Yang [10] pour la théorie des coques piézoélectriques et leurs applications. Un dispositif piézoélectrique en contact avec ou sans frottement est fourni par les commutateurs ou systèmes microélectromécaniques et le problème de la stabilisation des vibrations dans les structures mécaniques. Il existe actuellement un intérêt considérable pour les problèmes de contact avec frottement impliquant des matériaux piézoélectriques. Il a une importance technologique en perspective : à titre d'exemple, le mouvement relative de deux corps peut être détecté par un capteur piézoélectrique en contact avec frottement avec eux. Cependant, il existe très peu de résultats mathématiques concernant les problèmes de contact avec frottement pour des matériaux piézoélectriques, voir par exemple Maceri et Bisegna [1], et Matei. Pour les structures piézoélectriques minces, les résultats sont limités. Nous citons les résultats importants de Yan et Miara [11, 12] .

Chapitre 1

La théorie linéaire de la piézoélectricité

1.1 Définitions et applications

1.1.1 Matériaux piézoélectriques

La piézoélectricité (du grec «piézein» presser, appuyer) est la propriété possédé par certains matériaux (naturels ou synthétique) qui se polarisent électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique, ou inversement, se déforment sous l'action d'un champ électrique.
La piézoélectricité est donc un phénomène électromécanique qui couple les champs élastique et électrique. Ce phénomène a été découvert et expliqué (par expérimentation sur le quartz et le sel de Rochelle) par les frères Jacques et Pierre Curie qui ont annoncé leur découverte le 2 aout 1880 à l'académie française des sciences.
Il existe beaucoup de matériaux naturels et synthétiques présentant les propriétés piézoélectriques, par exemple

- Cristaux naturels : quartz, sel de Rochelle, phosphate d'ammonium, ...
- Cristaux liquides
- Matériaux non cristallins : caoutchouc, paraffine, verre, ...
- Textures : bois, os, ...
- Matériaux piézoélectrique synthétiques : piézoceramics, cristallines, polymère piézoélectrique

1.1.2 Effet piézoélectrique

L'effet piézoélectrique se décompose en deux types :

Effet direct C'est la propriété de certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une force ou contrainte mécanique : des charges apparaissent sur les faces du matériau, c-à-d :

force $\Longrightarrow$ déformation $\Longrightarrow$ tension électrique.

Effet inverse Inversement le matériau se déforme lorsque on lui applique une tension électrique, c-à-d :

tension électrique $\Longrightarrow$ déformation.

1.1.3 Applications

L'effet piézo-électrique se trouve dans un très grand nombre d'applications dans la vie quotidienne et dans l'industrie :

— Le briquet : dans un briquet, la force exercée sur le cristal piézo-électrique produit une tension électrique qui se décharge brutalement sous forme d'étincelles.

— Le Capteur de pression piézoélectrique : est une application industrielle : ils sont notamment utilisés pour l'automobile (mesure de la pression des pneus), l'aéronautique (mesure de la pression dans les tuyères), ainsi que pour les mesures de niveau.

— Les Moteurs et actionneurs piézo-électriques utilisent l'effet inverse : transformation de la tension appliquée en déplacement. On les trouve par exemple dans les autofocus d'appareil photo, dans les mécanismes de vitres électriques des voitures.

— La piézo-électricité est également en acoustique pour transformer des ondes acoustiques en signal électrique : microphones, haut-parleurs

1.2 Géométrie différentielle tridimensionnelle

1.2.1 Cadre physique

On suppose que les variations de température et le champ magnétique sont négligeables. Cette hypothèse, qui est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques (céramiques, polymères et composites) utilisés habituellement, entraîne que l'on a seulement un couplage électromécanique. On se place dans le cadre de la piézoélectricité linéaire en petites déformations, et on choisit de formuler le problème en déplacement mécanique et potentiel électrique. En ce qui concerne l'inconnue électrique, ce choix est motivé par les conditions aux limites qui sont imposées sur le potentiel.

1.2.2 Description de la géométrie et des efforts envisagés

Soit $\widehat{\Omega}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$, occupé par le milieu piézoélectrique, c'est-à-dire la coque. On suppose qu'il peut être décrit par un système de coordonnées curvilignes, c'est-à-dire qu'il existe un domaine de référence tridimensionnel Ω et une application Θ définie sur $\bar{\Omega}$ à valeurs dans $\mathcal{E}^3$ tels que $\Theta(\bar{\Omega}) = \bar{\widehat{\Omega}}$. On suppose que le domaine Ω et l'application Θ vérifient les propriétés suivantes :

- Ω est un ouvert borné simplement connexe de frontière Γ continue de classe $\mathcal{C}^2$ et Ω est situé localement d'un seul côté de Γ ;
- $\Theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.

Les hypothèses sur Ω, Γ et Θ donnent un sens aux différentes définitions de géométrie différentielle introduites précédemment. L'hypothèse de simple connexité du domaine Ω et la régularité de sa frontière Γ, nous permettent par la suite d'écrire le champ électrique comme le gradient d'un potentiel scalaire.

On considère les deux décompositions suivantes de la frontière Γ de Ω, correspondant respectivement aux conditions aux limites mécaniques (indiquées par un exposant ^{M})et aux conditions aux limites électriques (indiquées par un exposant ^{E}) :

$$\Gamma = \Gamma_0^M \cup \Gamma_1^M \ avec\ \Gamma_0^M \cap \Gamma_1^M = \emptyset;\ \Gamma_1^M = \Gamma_2 \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$$

$$\Gamma = \Gamma_0^E \cup \Gamma_1^E \ avec\ \Gamma_0^E \cap \Gamma_1^E = \emptyset;$$

On suppose que la coque est :

i) soumise à une densité de force volumique $f = f^i g_i$ dans Ω ;

ii) encastrée sur la partie Γ_0^M de sa frontière ;

iii) soumise à une densité surfacique de force $h = h^i g_i$ agissant sur la partie Γ_+ de la frontière.

iv) soumise à un potentiel fixe φ_d sur la partie Γ_0^E de la frontière ;

v) libre de charges électriques dans le milieu et sur la partie Γ_1^E de la frontière.

vi) On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face inférieure Γ_- contre une fondation rigide $\mathfrak{D} = \{x \in \mathbb{R}/(x_1, x_2) \in \omega, x_3 \geq d\}$, où $d(\geq 0)$ est la fonction d'interstice définie sur Γ_- et qui désigne la distance entre la face inférieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normal,

1.2.3 Formulation du problème

On définit les quantités suivantes :

$$\underline{\sigma} = \sigma^{ij} g_i \otimes g_j \quad \text{: Tenseur des contraintes ;}$$

$$\underline{e} = e_{i\|j} g^i \otimes g^j \quad \text{: Tenseur des déformations ;}$$

$$G = G^i g_i \quad \text{: Représente la densité de force de pression et de frottement.}$$

$$U = U^i g_i \quad \text{: Vecteur déplacement mécanique ;}$$

$$D = D^i g_i \quad \text{: Vecteur déplacement électrique ;}$$

$$E = E_i g^i \quad \text{: Vecteur champ électrique ;}$$

$$\varphi \quad \text{: Potentiel scalaire électrique.}$$

Équation d'équilibre :

$$-\,div\underline{\sigma} = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

$$U = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^M, \tag{1.2}$$

$$\underline{\sigma}.n = h \quad \text{sur} \quad \Gamma_+. \tag{1.3}$$

Équations de Maxwell-Gauss :

$$divD = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.4}$$

$$D.n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^E, \tag{1.5}$$

$$\varphi = \varphi_d \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^E.$$

où $n = n_i g^i$ est la normale unitaire extérieure à Γ. Les différentes inconnues sont reliées par les lois de comportement des matériaux piézoélectriques suivantes :

Lois constitutives :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \underline{C}.\underline{e} - \underline{{}_p e}.E; \\ D &= \underline{{}_p.e^t}.\underline{e} + \underline{d}.E; \end{aligned} \tag{1.6}$$

Conditions de contact de Signorini

$$U_N \leq s, \; G_N \leq 0, \quad G_N(U_N - s) = 0 \quad \text{et} \quad G_T = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_- \tag{1.7}$$

où :

- $\underline{C} = C^{ijkl} g_i \otimes g_j \otimes g_k \otimes g_l$ est le tenseur d'ordre quatre des coefficients élastiques qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} C^{ijkl} \in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{klij}, \\ \exists \;\; c_m > 0 \;\; \text{constante}, \;\; C^{ijkl}(\xi) X_{ij} X_{kl} \geq c_m X_{ij} X_{ij}, \;\; \forall \xi \in \bar{\Omega}, \;\; \forall X_{ij} = X_{ji} \in \mathbb{R}; \end{gathered} \tag{1.8}$$

- $\underline{{}_p e} =_p e^{ikl} g_i \otimes g_k \otimes g_l$ est le tenseur d'ordre trois des coefficients piézoélectriques qui vérifie :

$$\begin{gathered} {}_p e^{ikl} \in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ {}_p e^{ikl} =_p e^{ilk}; \end{gathered} \tag{1.9}$$

- $\underline{d} = d^{ik} g_i \otimes g_k$ est le tenseur d'ordre deux des coefficients diélectriques qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} d^{ik} \in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ d^{ik} = d^{ki}, \\ \exists c_d > 0 \;\; \text{constante}, \;\; d^{ik} w_i w_k \geq c_d w_i w_i, \;\; \forall \xi \in \bar{\Omega}, \;\; \forall w_i \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Le problème aux limites se formule donc de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{c} \text{Trouver un déplacement mécanique } \; U \\ \text{et un potentiel électrique } \; \varphi \\ \text{et une densité de force de pression } \;\; G_N \;\; \text{vérifiant :} \\ -\sigma^{ij}_{\|j} = f^i \;\; \text{dans} \;\; \Omega \\ D^i_{\|i} = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega \\ U^i = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0^M, \\ \sigma^{ij} n_j = h^i \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_+, \\ \varphi = \varphi_d \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0^E, \\ D^i n_i = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_1^E, \\ \sigma^{ij} = C^{ijkl} e_{k\|l}(U) -_P e^{kij} E_k(\varphi), \\ D^i =_p e^{ikl} e_{k\|l}(U) + d^{ij} E_j(\varphi), \\ e_{i\|j}(U) = \frac{1}{2}(U_{i\|j} + U_{j\|i}), \\ E_i(\varphi) = -\varphi_{\|i} = -\varphi_{,i}. \\ \sigma^{ij} n_j = G^i \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_-, \\ U_N \leq s, \;\; G_N \leq 0, \;\; G_N(U_N - s) = 0 \;\; \text{dans} \;\; G_T = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_- \end{array} \right]. \tag{1.11}$$

1.2.4 Loi de frottement de Coulomb

Soit $\Lambda \geq 0$ le coefficient de frottement, la loi de frottement de Coulomb est :

$$\begin{cases} |\widehat{G}_T^\varepsilon| < \Lambda |\widehat{G}_N^\varepsilon| \Rightarrow \hat{u}_T^\varepsilon = 0 \ \ (\text{adhérence}) \quad sur \ \ \widehat{\Gamma}_-^\varepsilon, \\ |\widehat{G}_T^\varepsilon| = \Lambda |\widehat{G}_N^\varepsilon| \Rightarrow \exists \delta > 0, \widehat{u}_T^\varepsilon = -\delta \widehat{G}_T^\varepsilon \ \ (glissement) \ \ sur \ \widehat{\Gamma}_-^\varepsilon. \end{cases}$$

1.3 Existence et unicité d'une solution

1.3.1 Deux formulations variationnelles du problème

On définit les espaces suivants :

$$\mathbf{V}_M(\Omega) = \{v \in (H^1)^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^M\}; \tag{1.12}$$

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{v \in \mathbf{V}_M(\Omega) / v_N \leq s \text{ sur } \Gamma_-\} \tag{1.13}$$

$$V_{E_{\varphi_d}}(\Omega) = \{\psi \in H^1, \psi = \varphi_d \text{ sur } \Gamma_0^E\} \ \ \forall \varphi_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E); \tag{1.14}$$

avec en particulier

$$V_{E_0}(\Omega) = \{\psi \in H^1, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0^E\}. \tag{1.15}$$

On munit les espaces $\mathbf{V}_M(\Omega)$ et $V_{E_0}(\Omega)$des normes suivantes :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} = \left(\sum_i \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega); \tag{1.16}$$

$$\|\psi\|_{V_{E_0}(\Omega)} = \|\psi\|_{1,\Omega} \ \ \forall \psi \in V_{E_0}. \tag{1.17}$$

On suppose que les données du problème (1.11) sont suffisamment régulières par exemple $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $\varphi_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E)$, et que (U, φ, G_N) est une solution suffisamment régulière de ce problème. Soit v un élément de $\mathbf{V}_M(\Omega)$. En multipliant chacune des équations $(1.11)_1$ par les composantes covariantes v_i de v et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega -\sigma_{\|j}^{ij} v_i dx = \int_\Omega f^i v_i dx.$$

En appliquant la formule de Green , on a

$$\int_\Omega \sigma^{ij} v_{i\|j} dx - \int_\Gamma \sigma^{ij} v_i n_j d\Gamma = \int_\Omega f^i v_i dx.$$

Or $v \in \mathbf{V}_M(\Omega)$, donc $v = 0$ sur Γ_0^M et, d'après $(1.11)_{4,11,12}$, $\sigma^{ij} n_j = h^i$ sur Γ_+ et $\sigma^{ij} n_j = G^i$, $G_T = 0$ sur Γ_- . Donc on a, par symétrie du tenseur des contraintes,

$$\begin{array}{c} \int_\Omega \sigma^{ij} e_{i\|j}(v) dx = \int_\Omega f^i v_i dx + \int_{\Gamma_+} h^i v_i d\Gamma + \langle G_N, v_N \rangle \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \end{array} \tag{1.18}$$

où $e_{i\|j}(v) = \frac{1}{2}(v_{i\|j} + v_{j\|i})$.

De même, soit ψ un élément de $V_{E_0}(\Omega)$. En multipliant l'équation $(1.11)_2$ par ψ et en intégrant sur Ω, on obtient-

$$\int_\Omega D^i_{\|i} \psi dx = 0$$

En appliquant la formule de Green, on a

$$\int_\Omega D^i \psi_{\|i} dx = \int_\Gamma D^i \psi n_i d\Gamma.$$

Or $\psi \in V_{E_0}(\Omega)$, donc $\psi = 0$ sur Γ_0^E et, d'après $(1.11)_6$, $D^i n_i = 0$ sur Γ_1^E. D'où

$$\int_\Omega D^i E_i(\psi) dx = 0, \tag{1.19}$$

où $E_i(\psi) = -\psi_{\|i} = -\psi_{,i}$. En additionnant les équations (1.18) et (1.19), on obtient le problème variationnel suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \text{Trouver } (U, \varphi, G_N) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_{\varphi_d}}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-) \text{ tel que} \\ a_1[(U,\varphi),(v,\psi)] = f(v), \ \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \right] \tag{1.20}$$

avec, en utilisant les expressions $(1.11)_7$ et $(1.11)_8$ des σ^{ij} et D^i,

$$\begin{array}{c} a_1[(U,\varphi),(v,\psi)] = \int_\Omega \{[\mathbf{C}^{ijkl} e_{k\|l}(U) -_p e^{kij} E_k(\varphi)] e_{i\|j}(v) \\ +[_p e^{ikl} e_{k\|l}(U) + d^{ik} E_k(\varphi)] E_i(\psi)\} dx \end{array} \tag{1.21}$$

$$f(v) = \int_\Omega f^i v_i dx + \int_{\Gamma_+} h^i v_i d\Gamma + \langle G_N, v_N \rangle \tag{1.22}$$

En soustrayant les deux équations (1.18)et (1.19) on obtient un second problème variationnel :

$$\left[\begin{array}{c} \text{Trouver } (U, \varphi, G_N) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_{\varphi_d}}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-) \text{ tel que} \\ a_2[(U,\varphi),(v,\psi)] = f(v), \ \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \right] \tag{1.23}$$

avec

$$\begin{array}{c} a_2[(U,\varphi),(v,\psi)] = \int_\Omega \{[\mathbf{C}^{ijkl} e_{k\|l}(U) -_p e^{kij} E_k(\varphi)] e_{i\|j}(v) \\ -[_p e^{ikl} e_{k\|l}(U) + d^{ik} E_k(\varphi)] E_i(\psi)\} dx \end{array} \tag{1.24}$$

Proposition 1.3.1 *Les problèmes variationnels (1.20) et (1.23) sont équivalents.*

Preuve. Soit (U_1, φ_1, G_N) une solution de (1.20). Puisque pour tout ψ dans $\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, $-\psi \in \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, on a

$$\begin{array}{c} a_1[(U_1,\varphi_1),(v,-\psi)] = f(v), \ \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \tag{1.25}$$

Or pour tout $(v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, $a_1[(U_1,\varphi_1),(v,-\psi)] = a_2[(U_1,\varphi_1),(v,\psi)]$. Donc (U_1, φ_1, G_N) est aussi solution de (1.23). De même, on montre que toute solution (U_2, φ_2, G_N) de (1.23) est aussi solution de (1.20). ■

1.3.2 Problème homogène

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (1.20), il est intéressant de considérer le problème homogène correspondant.

Lemme 1.3.1 *Si φ_d est un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E)$, il existe un relèvement $\widehat{\varphi}$ de φ_d dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire une fonction $\widehat{\varphi} \in H^1(\Omega)$ telle que $\widehat{\varphi}|_{\Gamma_0^E} = \varphi_d$*

On pose alors

$$\bar{\varphi} = \varphi - \widehat{\varphi} \tag{1.26}$$

ce qui conduit à la proposition suivante :

Proposition 1.3.2 *La solution (U, φ, G_N) du problème (1.20) est donnée par $\varphi = \bar{\varphi} + \widehat{\varphi}$ avec $(U, \bar{\varphi}, G_N)$ solution du problème suivant :*

$$\left[\begin{array}{c} \textit{Trouver } (U,\bar{\varphi},G_N) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-) \textit{ tel que} \\ a_1[(U,\bar{\varphi}),(v,\psi)] = L_1(v,\psi), \quad \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \right] \tag{1.27}$$

où $a_1[.,.]$ est définie en (1.21) et $L_1(v,\psi)$ est définie par

$$\begin{aligned} L_1(v,\psi) &= \int_\Omega f^i v_i dx + \int_{\Gamma_+} h^i v_i d\Gamma + \langle G_N, v_N\rangle \\ &+ \int_\Omega \{{}_p e^{kij} E_k(\widehat{\varphi}) e_{i\|j}(v) - d^{ik} E_k(\widehat{\varphi}) E_i(\psi)\} dx. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Preuve. On a

$$a_1[(U,\varphi),(v,\psi)] = a_1[(U,\bar{\varphi}+\widehat{\varphi}),(v,\psi)], \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}(\Omega)\times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

Or

$$E_k(\varphi) = -\varphi_{,k} = -(\bar{\varphi}+\widehat{\varphi})_{,k} = -\partial_k\bar{\varphi} - \partial_k\widehat{\varphi} = E_k(\bar{\varphi}) + E_k(\widehat{\varphi}).$$

Donc en remplaçant $E_k(\varphi)$ par $E_k(\widehat{\varphi})$ dans (1.20) on a

$$a_1[(U,\varphi),(v,\psi)] - f(v) = a_1[(U,\bar{\varphi}),(v,\psi)] - L_1(v,\psi), \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega)\times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

■

1.3.3 Théorème d'existence et d'unicité

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel (1.27), on rappelle deux lemmes nécessaires pour sa démonstration, et on énonce quelques propriétés des formes linéaire $L_1(.)$ et bilinéaire $a_1[.,.]$ définies en (1.28) et (1.21).

Lemme 1.3.2 *Lemme du mouvement rigide en coordonnées curvilignes*

Si $mes\Gamma_0^M > 0$, $v \in \mathbf{V}_M(\Omega)$ et $e_{i\|j}(v) = 0$, alors v=0.

Lemme 1.3.3 *Inégalité de Korn en coordonnées curvilignes. Si $\Theta \in \mathbf{C}^2(\bar{\Omega},\mathbb{R})$ et $mes\Gamma_0^M > 0$, alors il existe une constante c>0 tel que*

$$\left(\sum_{i,j} \|e_{i\|j}(v)\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq c\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)}, \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega).$$

Lemme 1.3.4 *Si $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $G^i \in L^2(\Gamma_-)$, alors la forme linéaire $L_1(.,.)$ est continue sur $\mathbf{V}_M(\Omega)\times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$.*

Preuve. Par hypothèse $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $G^i \in L^2(\Gamma_-)$ et, d'après le lemme (1.3.1), $\widehat{\varphi} \in H^1(\Omega)$. Donc, puisque les coefficients ${}_pe^{kij}$ et d^{ki} sont dans $L^\infty(\bar{\Omega})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe une constante C >0 telle que

$$\begin{aligned} |L_1(v,\psi)| \leq g_1^{\frac{1}{2}} \left(\|f^i\|_{0,\Omega}\|v_i\|_{0,\Omega} + \|h^i\|_{0,\Gamma_+}\|v_i\|_{0,\Gamma_+} + \|G_N\|_{0,\Gamma_-}\|v_N\|_{0,\Gamma_-}\right) \\ +Cg_1^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \|\widehat{\varphi}_{,k}\|_{0,\Omega}\right) \left(\sum_{ij} \|e_{i\|j}(v)\|_{0,\Omega} + \sum_i \|E_i(\psi)\|_{0,\Omega}\right), \\ \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega), \end{aligned} \tag{1.29}$$

De plus, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\sum_{i,j} \|e_{i\|j}(v)\|^2_{0,\Omega} \leq C_2\|v\|^2_{\mathbf{V}_M(\Omega)} \quad et \quad \sum_i \|E_i(\psi)\|^2_{0,\Omega} \leq C_2\|\psi\|^2_{\mathbf{V}_{E_0(\Omega)}}.$$

Donc, d'après les propriétés d'injection continues $(H^1(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$, il existe une constant C>0 telle que

$$|L_1(v,\psi)| \leq C\left(\|V\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}\right), \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

■

Lemme 1.3.5 *Si mes$\Gamma_0^M > 0$ et mes $\Gamma_0^E > 0$, alors la forme bilinéaire $a_1[(.,.),(.,.)]$ est continue et elliptique sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$.*

Preuve. Continuité : Puisque les coefficients $\mathbf{C}^{ijkl}$, ${}_pe^{ikl}$ *et* d^{ik} sont dans $L^\infty(\bar{\Omega})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité $(0 < g_0 < g(x) < g_1, \forall x \in \bar{\Omega})$, il existe une constante C>0 telle que

$$\begin{aligned} |a_1[(v,\psi),(w,\theta)]| \leq C\left(\sum_{k,l} \|e_{k\|l}(v)\|_{0,\Omega} + \sum_k \|E_k(\psi)\|_{0,\Omega}\right)\left(\sum_{ij} \|e_{i\|j}(w)\|_{0,\Omega} + \sum_i \|E_i(\theta)\|_{0,\Omega}\right), \\ \leq C\left(\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}\right)\left(\|w\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\theta\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}\right), \\ \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega), \forall (w,\theta) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ellipticité :

Pour tout (v,ψ) dans l'espace $\mathbf{V}_M(\Omega)\times\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, $a_1[(v,\psi),(v,\psi)] = a_M(v,v)+a_E(\psi,\psi)$, avec $a_M(v,v) = \int_\Omega \mathbf{C}^{ijkl}e_{k\|l}(v)e_{i\|j}(v)dx$ *et* $a_E(\psi,\psi) = \int_\Omega d^{ik}E_k(\psi)E_i(\psi)dx$.

D'après la propriété (1.8) d'ellipticité du tenseur des coefficients élastiques $\mathbf{C}$, il existe une constante C>0 telle que

$$a_M(v,v) \geq C\sum_{i,j} \|e_{i\|j}(v)\|^2_{0,\Omega}, \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega),$$

et puisque $mes\Gamma_0^M > 0$, d'après l'inégalité de Korn (lemme (1.3.3)) et le lemme du mouvement rigide (lemme (1.3.2)), il existe une constante C>0 tel que

$$a_M(v,v) \geq C\|v\|^2_{\mathbf{V}_M(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega).$$

De même d'après la propriété (1.10) d'ellipticité du tenseur des coefficients diélectriques d^{ik} , il existe une constante C>0 telle que

$$a_E(\psi,\psi) \geq C\sum_i \|E_i(\psi)\|^2_{0,\Omega}, \forall \psi \in \mathbf{V}_{E_0}(\Omega),$$

et puisque $mes\Gamma_0^E > 0$, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C>0 telle que

$$a_E(\psi,\psi) \geq C\|\psi\|^2_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}, \quad \forall \psi \in \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

D'où

$$a_1[(v,\psi),(v,\psi)] \geq C\left(\|v\|^2_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\psi\|^2_{\mathbf{V}_{E_0(\Omega)}}\right), \forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

■

Théorème 1.3.1 *Si $mes\Gamma_0^M > 0$ et $mes\Gamma_0^E > 0$, si $f^i \in L^2(\Omega)$ et $h^i \in L^2(\Gamma_+)$,$G^i \in L^2(\Gamma_-)$, alors le problème variationnel (1.27) admet une solution unique.*

Preuve. On a vu avec les lemmes (1.3.5) et (1.3.4) que la forme bilinéaire $a_1[.,.]$ est continue et elliptique et que la forme linéaire $L_1(.)$ est continue sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$. Donc, en appliquant le lemme de Lax Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème. ■

Remarque 1.3.1 *Si $mes\Gamma_0^E = 0$ alors le problème (1.27) a une solution unique dans l'espace $\mathbf{V}_M(\Omega) \times (\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)/\mathbb{R})$, c'est-à-dire que le potentiel électrique est déterminé à une constante près.*

Corollaire 1.3.1 *Si $mes\Gamma_0^M > 0$ et $mes\Gamma_0^E > 0$, si $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $G^i \in L^2(\Gamma_-)$, $\varphi_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E)$, alors le problème variationnel (1.20) admet une solution unique.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition (1.3.2) avec le lemme (1.3.1) et du théorème (1.3.1) ■

Chapitre 2

L'analyse asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une coques mince piézoélectriques isotropp contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire

2.1 Préliminaires aux méthodes asymptotiques

2.1.1 Rappel du probléme tridimensionnel

Soit Ω^ε le domaine tridimensionnel occupé par la coque piézoélectrique, $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ où ω est une surface de $\mathbb{R}^2$ représentant la surface moyenne et ε désigne la demi-épaisseur de la coque. Dans ce qui suit, on indique par un exposant $^\varepsilon$ les quantités qui dépendent de ce paramètre. En particulier, le déplacement mécanique et le potentiel électrique tridimensionnels sont notés respectivement u^ε et $\bar{\varphi}^\varepsilon$. On rappelle le problème tridimensionnel

formulé dans le premier chapitre (cf.problème homogène (1.27))pour une coque piézoélectrique occupant le domaine Ω^ε, encastrée sur une partie $\Gamma_0^{M,\varepsilon}$ de sa frontière, soumise à des forces de volume f^ε dans Ω^ε et de surface h^ε sur la faces Γ_+^ε et soumise à un potentiel φ_d^ε sur une partie $\Gamma_0^{E,\varepsilon}$de sa frontière dont on a considéré une fonction de relèvement $\widehat{\varphi}^\varepsilon$ dans Ω^ε (cf.Lemme (1.3.1)) , et l'on suppose que la face "inférieure" Γ_-^ε est susceptible d'entrer en contact (2.1)

$$v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\Phi^\varepsilon|_3 - \varepsilon \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon. \tag{2.1}$$

avec le plan horizontal situé à la cote $-\varepsilon$. Les conditions de contact unilatéral entre la coque et ce plan sont alors exprimées par les conditions (2.2),

$$\left\{\begin{array}{c} v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\Phi^\varepsilon|_3 - \varepsilon, \\ -[(G^{i,\varepsilon})g_i^\varepsilon]|_3 \geq 0, \\ (v_i g^{i,\varepsilon}|_3 + \Phi^\varepsilon|_3 + \varepsilon)[(G^{i,\varepsilon})g_i^\varepsilon]|_3 = 0. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

ce qui conduit classiquement au fait que l'équilibre est donné par l'unique solution $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ du problème (1.11)

jposé dans un cadre fonctionnel qui est le cône convexe (2.5).

2.2 LE CAS DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } (u^\varepsilon, \bar{\varphi}^\varepsilon, \dot{G}^\varepsilon) \in K_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times V_{E_0}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon))^3 \text{ tel que} \\ \int_{\Omega^\varepsilon}\{[C^{ijkl,\varepsilon}e_{k\|l}^\varepsilon(u^\varepsilon) -_p e^{kij,\varepsilon}E_k^\varepsilon(\bar{\varphi}^\varepsilon)]e_{i\|j}^\varepsilon(v) \\ +[_p e^{ijk,\varepsilon}e_{k\|l}^\varepsilon(u^\varepsilon) + d^{ik,\varepsilon}E_k^\varepsilon(\bar{\varphi}^\varepsilon)]E_i^\varepsilon(\psi)\}\sqrt{g^\varepsilon}dx^\varepsilon \\ = \int_\Omega f^{i,\varepsilon}v_i\sqrt{g^\varepsilon}dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon} h^{i,\varepsilon}v_i|g_1^\varepsilon \times g_2^\varepsilon|d\Gamma^\varepsilon + \langle \dot{G}^{i,\varepsilon}, \dot{v}_i\rangle \\ + \int_{\Omega^\varepsilon}\{_p e^{kij,\varepsilon}E_k^\varepsilon(\widehat{\varphi}^\varepsilon)e_{i\|j}^\varepsilon(v) - d^{ik,\varepsilon}E_k^\varepsilon(\widehat{\varphi}^\varepsilon)E_i^\varepsilon(\psi)\}\sqrt{g^\varepsilon}dx^\varepsilon, \forall (v,\psi) \in V_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times V_{E_0}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon). \\ \langle \dot{G}_N^\varepsilon, \dot{v} - \dot{u}_n^\varepsilon\rangle \geq 0 \ \forall v \in K_M(\Omega^\varepsilon) \\ \langle \dot{G}_T^\varepsilon, \dot{v}_T - \dot{u}_T^\varepsilon\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}_N^\varepsilon|, |\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^\varepsilon|\rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega^\varepsilon) \end{array}\right. \tag{2.3}$$

tel que :

$$\langle G^{i,\varepsilon}, v_i\rangle \text{ signifie l'appariement de la dualité}$$

$$\langle \dot{G}_N^\varepsilon, \dot{v}_N\rangle = \langle [(G^{i,\varepsilon})g_i^\varepsilon]|_3, v_i g^{i,\varepsilon}|_3\rangle$$

où les espaces fonctionnels sont définis par :

$$V_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{v \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3, v = 0 \ sur \ \Gamma_0^{M,\varepsilon}\}; \tag{2.4}$$

$$K_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) := \{v \in V_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon), v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\Phi^\varepsilon|_3 - \varepsilon \ sur \ \Gamma_-\}; \tag{2.5}$$

$$V_{E_0}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{\psi \in H^1(\Omega^\varepsilon), \psi = 0 \ sur \ \Gamma_0^{E,\varepsilon}\}, \tag{2.6}$$

avec $\Gamma_0^{M,\varepsilon} = \gamma_0^M \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ et (cf. (2.3.36)et la figure 2.3.1 de la répartition des électrodes)

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{E,\varepsilon} &= \Gamma_0^{E_0,\varepsilon} \cup \Gamma_0^{E_1,\varepsilon} \cup \Gamma_0^{E_2,\varepsilon} \cup \Gamma_0^{E_3,\varepsilon};\\
\Gamma_0^{E_0,\varepsilon} &= \gamma_0^E \times [-\varepsilon, \varepsilon];\\
\Gamma_0^{E_1,\varepsilon} &= \omega_1 \times \{\pm\varepsilon\};\\
\Gamma_0^{E_2,\varepsilon} &= \omega_2 \times \{+\varepsilon\};\\
\Gamma_0^{E_3,\varepsilon} &= \omega_3 \times \{-\varepsilon\},
\end{aligned}$$

et

$$e_{i\|j}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_i^\varepsilon v_j + \partial_j^\varepsilon v_i) - \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} v_k, \ \forall v \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3;$$

$$E_i^\varepsilon(\psi) = \partial_i^\varepsilon \psi, \ \forall \psi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$$

.

2.2.1 Passage à un domaine de référence

On considère le domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$ indépendant du paramètre d'épaisseur ε. A tout point $x^\varepsilon = (x_\alpha, x_3^\varepsilon)$ de $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, on associe le point $x = (x_\alpha, x_3)$ de Ω par $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$ et $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$. A toute fonction k^ε définie sur Ω^ε, on associe la fonction $k(\varepsilon)$ définie sur Ω par $k^\varepsilon(x^\varepsilon) = k(\varepsilon)(x)$, $\forall x \in \Omega$. On définit les espaces suivants :

$$V_M(\Omega) = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \ sur \ \Gamma_0^M\}; \tag{2.7}$$

$$\widetilde{K}_M(\Omega) := \{v \in V_M(\Omega), v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\theta_3 + \varepsilon a_3|_3 - \varepsilon\}; \tag{2.8}$$

$$V_{E_0}(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \ sur \ \Gamma_0^E\} \tag{2.9}$$

avec

$\Gamma_0^M = \gamma_0^M \times [-1,1], \quad \Gamma_0^E = \Gamma_0^{E_0} \cup \Gamma_0^{E_1} \cup \Gamma_0^{E_2} \cup \Gamma_0^{E_3},$

$\Gamma_0^{E_0} = \gamma_0^E \times [-1,1], \quad \Gamma_0^{E_1} = \omega_1 \times \{\pm 1\}, \quad \Gamma_0^{E_2} = \omega_2 \times \{+1\}, \quad \Gamma_0^{E_3} = \omega_3 \times \{-1\}.$

On pose :

$\Omega_1 = \omega_1 \times]-1,1[; \quad \Omega_2 = \omega_2 \times]-1,1[; \quad \Omega_3 = \omega_3 \times]-1,1[;$

$\Omega_0 = \Omega - (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) = \omega_0 \times]-1,1[;$ *avec* $\omega_0 = \omega - (\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3)$. Avec les fonctions u_i^ε, v_i^ε, φ^ε, ψ^ε, $f^{i,\varepsilon}$, $h^{i,\varepsilon}$, $C^{ijkl,\varepsilon}$, $e_{i\|j}^\varepsilon$, g^ε, $\dot{G}_N^\varepsilon$, et d^ε nous associons les fonctions correspondantes définies sur Ω à travers les relations :

$$\begin{aligned}
u_i^\varepsilon(x^\varepsilon) &= u_i(\varepsilon)(x),\ v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = v_i(x),\ \varphi^\varepsilon = \varphi(\varepsilon),\ \psi^\varepsilon = \psi(\varepsilon),\ f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^i(\varepsilon)(x) \\
h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) &= h^i(\varepsilon)(x),\ C^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) = C^{ijkl}(\varepsilon)(x),\ e_{i\|j}^\varepsilon(v^\varepsilon)(x^\varepsilon) = e_{i\|j}(\varepsilon; v)(x) \\
g^\varepsilon(x^\varepsilon) &= g(\varepsilon)(x),\ \langle \dot{G}_i^\varepsilon(x^\varepsilon),\ \dot{v}_i\rangle = \varepsilon\langle \dot{G}_i(\varepsilon)(x),\ \dot{v}_i\rangle,\ \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \Gamma_{ij}^k(\varepsilon)(x), \\
d^\varepsilon(x^\varepsilon) &= d(\varepsilon)(x) = d + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Alors, le problème variationnel (2.3) se reformule sur le domaine fixe Ω comme suit :

$$\left\{\begin{array}{c}
\text{Trouver } \ (u(\varepsilon), \bar{\varphi}(\varepsilon), \dot{G}(\varepsilon)) \in K_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\Omega))^3 \text{ tel que} \\
\varepsilon \int_\Omega \{[C^{ijkl}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) -_p e^{kij}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon))] e_{i\|j}(\varepsilon)(v) \\
+[_p e^{ijk}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) + d^{ik}(\varepsilon) E_K(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon))] E_i(\varepsilon)(\psi)\} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
= \varepsilon \int_\Omega f^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+} h^i(\varepsilon) v_i |g_1(\varepsilon) \times g_2(\varepsilon)| d\Gamma + \varepsilon \langle \dot{G}^i(\varepsilon), \dot{v}_i\rangle \\
+\varepsilon \int_\Omega \{_p e^{kij}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon)) e_{i\|j}(\varepsilon)(v) - d^{ik}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon)) E_i(\varepsilon)(\psi)\} \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \\
\forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \\
\varepsilon \langle \dot{G}_N(\varepsilon), \dot{v}_N - \dot{u}_N(\varepsilon)\rangle \geq 0 \ \forall v \in K_M(\Omega) \\
\varepsilon \left\{ \langle \dot{G}_T(\varepsilon), \dot{v}_T - \dot{u}_T(\varepsilon)\rangle + \langle \Lambda |\dot{G}_N(\varepsilon)|, |\dot{v}_T| - |\dot{u}_T(\varepsilon)|\rangle \right\} \geq 0 \ \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega)
\end{array}\right. \tag{2.10}$$

Le tenseur des déformations et le vecteur champ électrique mis à l'échelle sont définis par :

$$\forall v \in (H^1(\Omega))^3 \left\{\begin{array}{c}
e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^k(\varepsilon) v_k \\
e_{\alpha\|3}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} v_{\alpha,3} + v_{3,\alpha}) - \Gamma_{\alpha 3}^k(\varepsilon) v_k \\
e_{3\|3}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon} v_{3,3} - \Gamma_{33}^k(\varepsilon) v_k
\end{array}\right. \tag{2.11}$$

$$E_\alpha(\varepsilon)(\psi) = -\psi_{,\alpha}, \quad E_3(\varepsilon)(\psi) = -\frac{1}{\varepsilon}\psi_{,3}, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

on définit le tenseur des contraintes et le vecteur déplacement électrique relatifs au problème homogène (c'est-à-dire aux inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$) par

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon) = \sigma^{ij}(\varepsilon) -_p e^{kij}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)), \\ \bar{D}^i(\varepsilon) =_p e^{ijk}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) + d^{ik}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)), \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Le problème (2.10) se réécrit avec (2.12) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } \ (u(\varepsilon), \bar{\varphi}(\varepsilon), \dot{G}(\varepsilon)) \in K_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\Omega))^3 \text{ tel que} \\ \varepsilon \int_\Omega \{\bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)(v) + \bar{D}^i(\varepsilon)E_i(\varepsilon)(\psi)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ = \varepsilon \int_\Omega f^i(\varepsilon)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \int_{\Gamma_+} h^i(\varepsilon)v_i|g_1(\varepsilon) \times g_2(\varepsilon)|d\Gamma + \varepsilon\langle \dot{G}^i(\varepsilon), \dot{v}_i\rangle \\ +\varepsilon \int_\Omega \{{}_pe^{kij}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon))e_{i\|j})(\varepsilon)(v) - d^{ik}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon))E_i(\varepsilon)(\psi)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx, \\ \forall (v,\psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \\ \varepsilon\langle \dot{G}_N(\varepsilon), \dot{v} - \dot{u}_N(\varepsilon)\rangle \geq 0 \ \forall v \in K_M(\Omega) \\ \varepsilon\{\langle \dot{G}_T(\varepsilon), \dot{v}_T - \dot{u}_T(\varepsilon)\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}_N(\varepsilon)|, |\dot{v}_T| - |\dot{u}_T(\varepsilon)|\rangle\} \geq 0 \ \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.13}$$

2.2.2 Méthode des développements asymptotiques

On applique la méthode développée par Miara et Sanchez-Palencia[1996] pour les coques élastique. La solution $(u(\varepsilon), \bar{\varphi}(\varepsilon), G_N(\varepsilon))$ du problème (2.3)(ou (2.10))posé sur le domaine fixe Ω dépend du petit paramètre ε. On suppose donc que $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ admettent un développement asymptotique formel en ε, et puisque le problème est linéaire, on commence ce développement à l'ordre 0, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{c} u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ...; \\ \bar{\varphi}(\varepsilon) = \bar{\varphi}^0 + \bar{\varphi}^1 + \varepsilon^2\bar{\varphi}^2 + +...; \end{array} \right. \tag{2.14}$$

les termes des développements (2.14) étant a priori cherchés dans les espaces $V_M(\Omega)$ et $V_{E_0}(\Omega)$, i.e. $u^s \in V_M(\Omega)$ et $\bar{\varphi}^s \in V_{E_0}(\Omega)$ pour tout $s \geq 0$, ce qui impose en particulier que

$$\bar{\varphi}^s = 0 \text{ sur } \Gamma_0^E, \ \forall s \geq 0. \tag{2.15}$$

Les différentes quantités intervenant dans le problème (tenseurs des coefficients $C^{ijkl}(\varepsilon)$), ${}_pe^{kij}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$, symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k(\varepsilon), ...)$ dépendent également de ε. Elles admettent donc un développement au voisinage de $x_3 = 0$ (qui correspond à la surface

moyenne) :

$$\left\{\begin{array}{c} g_\alpha(\varepsilon) = a_\alpha + \varepsilon x_3 (g_\alpha)^1 + \varepsilon^2 x_3^2 (g_\alpha)^2 + ...; \\ g(\varepsilon) = a + \varepsilon x_3 g^1 + \varepsilon^2 x_3^2 g^2 + ...; \\ \Gamma_{ij}^k((\varepsilon) = \Gamma_{ij}^k + \varepsilon x_3 \Gamma_{ij}^{k,1} + \varepsilon^2 x_3^2 \Gamma_{ij}^{k,2} + ...; \\ C^{ijkl}(\varepsilon) = C^{ijkl} + \varepsilon x_3 C^{ijkl,1} + \varepsilon^2 x_3^2 C^{ijkl,2} + ...; \\ {}_p e^{kij}(\varepsilon) =_p e^{kij} + \varepsilon x_{3p} e^{kij,1} + \varepsilon^2 x_{3p}^2 e^{kij,2} ...; \\ d^{ik}(\varepsilon) = d^{ik} + \varepsilon x_3 d^{ik,1} + \varepsilon^2 x_3^2 d^{ik,2} + ...; \end{array}\right. \tag{2.16}$$

Les termes a_α, a, Γ_{ij}^k sont des éléments de géométrie différentielle de la surface moyenne , et les coefficients C^{ijkl}, ${}_p e^{kij}$ et d^{ik} sont respectivement les coefficients des tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_p e^{kij}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$ écrits dans la base (a_i). D'après (2.16), on peut également écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} C^{ijkl}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} = C^{ijkl}\sqrt{a} + \varepsilon \tilde{C}^{ijkl,1} + \varepsilon^2 \tilde{C}^{ijkl,2} + ..., \\ {}_p e^{ikl}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} =_p e^{ikl}\sqrt{a} + \varepsilon_p \tilde{e}^{ijkl,1} + \varepsilon_p^2 \tilde{e}^{ijkl,2} + ...; \\ d^{ik}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} = d^{ik}\sqrt{a} + \varepsilon \tilde{d}^{ik,1} + \varepsilon^2 \tilde{d}^{ik,2} + ...; \end{array}\right. \tag{2.17}$$

En combinant les développements (2.14)et (2.16), on a les développements suivants des tenseurs des déformations et des vecteurs champs électriques (2.11) :

-pour les inconnues :

$$\left\{\begin{array}{c} e_{i\|j}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}^{-1}(u) + e_{i\|j}^0(u) + \varepsilon e_{i\|j}^1(u) + \varepsilon^2 e_{i\|j}^2(u) + ...; \\ E_i(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} E_i^{-1}(\bar{\varphi}) + E_i^0(\bar{\varphi}) + \varepsilon E_i^1(\bar{\varphi}) + \varepsilon^2 E_i^2(\bar{\varphi}) + ...; \end{array}\right. \tag{2.18}$$

-pour les fonctions tests :

$$\left\{\begin{array}{c} e_{i\|j}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}^{-1}(v) + e_{i\|j}^0(v) + \varepsilon e_{i\|j}^1(v) + \varepsilon^2 e_{i\|j}^2(v) + ...; \\ E_i(\varepsilon)(\psi) = \frac{1}{\varepsilon} E_i^{-1}(\psi) + E_i^0(\psi) + \varepsilon E_i^1(\psi) + \varepsilon^2 E_i^2(\psi) + ...; \end{array}\right. \tag{2.19}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{c} e_{\alpha\|\beta}^{-1}(u) = 0, \\ e_{\alpha\|3}^{-1}(u) = \frac{1}{2}\partial_3 u_\alpha^0, \\ e_{3\|3}^{-1}(u) = \partial_3 u_3^0 \\ e_{\alpha\|\beta}^0(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0) - \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k^0, \\ e_{\alpha\|3}^0(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^1) - \Gamma_{\alpha 3}^\rho u_\rho^0, \\ e_{3\|3}^0(u) = \partial_3 u_3^1, \\ e_{\alpha\|\beta}^1(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta^1 + \partial_\beta u_\alpha^1) - \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k^1 - x_3 \Gamma_{\alpha\beta}^{k,1} u_k^0, \\ e_{\alpha\|3}^1(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^2) - \Gamma_{\alpha 3}^\rho u_\rho^1 - x_3 \Gamma_{\alpha 3}^{k,1} u_k^0, \\ e_{3\|3}^1(u) = \partial_3 u_3^2 - x_3 \Gamma_{33}^{k,1} u_k^0, \end{array}\right. \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} e^{-1}_{\alpha\|\beta}(v) = 0, \\ e^{-1}_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha, \\ e^{-1}_{3\|3}(v) = \partial_3 v_3 \\ e^{0}_{\alpha\|\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma^k_{\alpha\beta} v_k, \\ e^{0}_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 - \Gamma^\rho_{\alpha 3} v_\rho, \\ e^{0}_{3\|3}(v) = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} E^{-1}_\alpha(\bar\varphi) = 0, E^{-1}_3(\bar\varphi) = -\partial_3\bar\varphi \\ E^0_\alpha(\bar\varphi) = -\partial_\alpha\bar\varphi^0, E^0_3(\bar\varphi) = -\partial_3\bar\varphi^1, \\ E^1_\alpha(\bar\varphi) = -\partial_\alpha\bar\varphi^1, E^1_3(\bar\varphi) = -\partial_3\bar\varphi^2, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} E^{-1}_\alpha(\psi) = 0, E^{-1}_3(\psi) = -\partial_3\psi \\ E^0_\alpha(\psi) = -\partial_\alpha\psi, E^0_3(\psi) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\forall m \geq 1 \begin{cases} e^m_{i\|j}(v) = x^m_3 \Gamma^{k,m}_{ij} v_k, \\ E^m_i(\psi) = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Remarque 2.2.1 *Les inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar\varphi(\varepsilon)$ et les fonctions tests v et ψ n'ont pas le même rôle puisqu'on ne considère qu'un développement asymptotique des premières. C'est pourquoi les termes des développements des tenseurs des déformations et des vecteurs champs électriques (2.18)et (2.19) sont différents pour chacune.*

Avec les expressions (2.12) du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement électrique du problème homogène, et avec les développement (2.17) et (2.18), on a

$$\begin{aligned} \bar\sigma^{ij}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\bar\sigma^{ij,-1} + \bar\sigma^{ij,0} + \varepsilon\bar\sigma^{ij,1} + \varepsilon^2\bar\sigma^{ij,2}...; \\ \bar D^i(e)\sqrt{g(\varepsilon)} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\bar D^{i,-1} + \bar D^{i,0} + \varepsilon\bar D^{i,1} + \varepsilon^2\bar D^{i,2} + ...; \end{aligned} \tag{2.25}$$

avec, pour tout $s \geq -1$

$$\begin{aligned} \bar\sigma^{ij,s} &= (C^{ijkl} e^s_{k\|l}(u) +_p e^{kij} E^s_k(\bar\varphi))\sqrt{a} + \textstyle\sum_{m+n=s}{}_{m\geq 1, n\geq -1} (C^{ijkl,m} e^n_{k\|l}(u) +_p e^{kij,m} E^n_k(\bar\varphi)), \\ \bar D^{i,s} &= ({}_p e^{ikl} e^s_{k\|l}(u) + d^{ik} E^s_k(\bar\varphi))\sqrt{a} + \textstyle\sum_{m+n=s}{}_{m\geq 1, n\geq -1} ({}_p e^{ikl,m} e^n_{k\|l}(u) + d^{ik,m} E^n_k(\bar\varphi)). \end{aligned} \tag{2.26}$$

On prend pour les forces mécaniques appliquées $f(\varepsilon)$ et $h(\varepsilon)$ ainsi que pour le champ électrique imposé $E(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon))$, des ordres de grandeur en ε arbitraires, c'est-à-dire que l'on pose :

$$f(\varepsilon)=\sum_{s\geq a}\varepsilon^s f^s;\quad h(\varepsilon)=\sum_{s\geq b}\varepsilon^s h^s;\quad E(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon))=\sum_{s\geq c}\varepsilon^s E^s(\widehat{\varphi});\quad \langle\dot{G}(\varepsilon),\dot{v}\rangle=\sum_{s\geq d}\varepsilon^s\langle\dot{G}^s,\dot{v}\rangle. \tag{2.27}$$

où $f^s(s\geq a)$, $q^s(s\geq b)$ et $E^s(\widehat{\varphi})(s\geq c)$ $\dot{G}^s(s\geq d)$ sont indépendants de ε et,a,b , c et d (qui sont des entiers relatifs) sont des ordres de grandeur que l'on déterminera plus tard.

Remarque 2.2.2 *Les composantes du champ électrique n'interviennent pas toutes au même ordre (cf.(2.11)). C'est pourquoi dans (2.27) on a considéré une décomposition du champ électrique $E(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon))$ plutôt que de $\widehat{\varphi}(\varepsilon)$. On rappelle que $\widehat{\varphi}(\varepsilon)$ est la fonction de relèvement du potentiel électrique. Elle peut -être construite soit affine, soit constante en x_3 en fonction des conditions aux limites. Ce qui implique que*

$$E^c(\widehat{\varphi})\ \textit{est indpendant de}\ x_3,$$

et, en particulier,

$$\begin{cases} E^c_\alpha(\widehat{\varphi})=0 \quad si \quad \widehat{\varphi}(\varepsilon)\ \textit{est affine en}\ x_3,\\ E^c_3(\widehat{\varphi})=0 \quad si \quad \widehat{\varphi}(\varepsilon)\ \textit{est constante en}\ x_3.\end{cases}$$

De plus, dans Ω_1, elle est nécessairement affine puisque le potentiel est appliqué sur $\omega_1\times\{\pm1\}$, et donc

$$E^s_\alpha(\widehat{\varphi})=0\ \ \forall\ s\geq c\ \textit{dans}\ \Omega_1.$$

On remplace, dans le problème (2.13)posé sur le domaine fixe Ω, $\bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon)$ et $\bar{D}^i(\varepsilon)$ par leurs expressions (2.25), les $e_{i\|j}(\varepsilon)(v)$ et $E_i(\varepsilon)(\psi)$ par (2.19)et les seconds membres par (2.27). On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon\int_\Omega\sum_{s\geq-2}\varepsilon^s\sum_{m+n=s_{m\geq-1,n\geq-1}}\left(\bar{\sigma}^{ij,m}e^n_{i\|j}(v)+\bar{D}^{i,m}E^n_i(\psi)\right)dx\\ =\varepsilon\int_\Omega\left\{e^a f^{i,a}v_i\sqrt{a}+\sum_{s>a}\varepsilon^s\tilde{f}^{i,k}v_i\right\}dx+\int_{\Gamma_+}\left\{\varepsilon^b h^{i,b}v_i\sqrt{a}+\sum_{s>b}\varepsilon^s\tilde{h}^{i,k}v_i\right\}d\Gamma\\ +\varepsilon\left\{\varepsilon^d\langle\dot{G}^{i,d},\dot{v}_i\rangle+\sum_{s>d}\varepsilon^s\langle\tilde{\dot{G}}^{i,k},\dot{v}_i\rangle\right\}\\ +\varepsilon\int_\Omega\sum_{s\geq c-1}\varepsilon^s\left\{{}_{m\geq c,n\geq-1}\sum_{m+n=s}\left({}_pe^{kij}E^m_k(\widehat{\varphi})e^n_{i\|j}(v)-d^{ik}E^m_k(\widehat{\varphi})E^n_i(\psi)\right)\sqrt{a}\right\}dx\\ +\varepsilon\int_\Omega\sum_{s\geq c-1}\varepsilon^s\left\{{}_{l\geq1m\geq c,n\geq-1}\sum_{l+m+n=s}\left({}_pe^{kij,l}E^m_k(\widehat{\varphi})e^n_{i\|j}(v)-d^{ik,l}E^m_k(\widehat{\varphi})E^n_i(\psi)\right)\sqrt{a}dx\right\}dx\end{cases} \tag{2.28}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\left\{\varepsilon^d\langle\dot{G}_N^d,(\dot{v}_N-\dot{u}_N^0)\sqrt{a}\rangle+\sum_{s>d}\varepsilon^s\langle\tilde{\dot{G}}_N^k,\dot{v}_N-\dot{u}_N^0\rangle\right\}\geq 0\quad\forall v_N\in K_M(\Omega)\\ \varepsilon\left\{\varepsilon^d\left(\langle\dot{G}_T^d,(\dot{v}_T-\dot{u}_T^0)\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|\dot{G}_N^d|,(|\dot{v}_T|-|\dot{u}_T^0|)\sqrt{a}\right)\right\}\\ +\varepsilon\left\{\sum_{s>d}\varepsilon^s\left(\langle\tilde{\dot{G}}_T^k,(\dot{v}_T-\dot{u}_T^0)\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|\tilde{\dot{G}}_N^k|,(|\dot{v}_T|-|\dot{u}_T^0|)\sqrt{a}\right)\right\}\geq 0\quad\forall v\in\mathbf{V}_M(\Omega)\end{array}\right. \tag{2.29}$$

$$a_\alpha=\partial_\alpha\theta=\begin{pmatrix}\partial_\alpha\theta_1\\ \partial_\alpha\theta_2\\ \partial_\alpha\theta_3\end{pmatrix},\qquad a_3=\frac{1}{d}\begin{pmatrix}\partial_1\theta_2\partial_2\theta_3-\partial_2\theta_2\partial_1\theta_3\\ \partial_1\theta_3\partial_2\theta_1-\partial_1\theta_1\partial_2\theta_3\\ \partial_1\theta_1\partial_2\theta_2-\partial_1\theta_2\partial_2\theta_1\end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$d=(\partial_1\theta_2\partial_2\theta_3-\partial_2\theta_2\partial_1\theta_3)^2+(\partial_1\theta_3\partial_2\theta_1-\partial_1\theta_1\partial_2\theta_3)^2+(\partial_1\theta_1\partial_2\theta_2-\partial_1\theta_2\partial_2\theta_1)^2$$

puisque :

$$\dot{v}_N=v_ig^{i,\varepsilon}|_3\geq-\theta_3+\varepsilon a_3|_3-\varepsilon$$

alors :

$$\dot{v}_N=v_\alpha g^{\alpha,\varepsilon}|_3+v_3g^3|_3\geq-\theta_3+\varepsilon a_3|_3-\varepsilon$$

on obtient :

$$\dot{v}_N=v_\alpha a^\alpha|_3+v_3a^3|_3+O(\varepsilon)\geq-\theta_3+\varepsilon a_3|_3-\varepsilon$$

, on pose $\theta_3=c$ (c indépendant de x_1 et x_2) alors :

$$K_M(\Omega)=\{v\in\mathbf{V}_M(\Omega)/v_3\geq-\theta_3\}$$

la méthode des développements asymptotiques consiste à identifier les coefficients des mêmes puissances de ε dans (2.28), en cherchant les ordres de grandeur des seconds membres (c'est -à-dire a, b , c et d dans (2.27)) jusqu'à ce que l'on obtienne un problème bidimensionnel dont les premiers termes u^0 , $\bar{\varphi}^0$ et $\dot{G}_N^0$ des développements (2.14) et (2.27) de $u(\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ et $\dot{G}(\varepsilon)$ soient solutions, sans avoir de restrictions (c'est-à-dire de relations de compatibilités) sur les chargements mécaniques et électriques appliqués.

Remarque 2.2.3 *-Le problème est linéaire. C'est ce qui nous permet de partir de l'ordre 0 pour les développements de $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, et de déterminer les ordres de grandeur des seconds membres qui conviennent à ces développements, c'est-à-dire a, b , c et d ;*

-Puisque le membre de gauche du problème (2.28) commence à l'ordre -1, on a nécessairement $a\geq-2$, $b\geq-1$, et $c\geq-1$, $d\geq-2$ dans (2.27).

On énonce deux lemmes qui serviront dans les développements ultérieurs.

Lemme 2.2.1 *(Ciarlet [1990, p.19])*

Soit w une fonction de $L^2(\Omega)$(avec $\Omega = \omega\times]-1,+1[)$ tel que :

$$\int_\Omega w\partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \ v = 0 \ sur\ \partial\omega \times [-1,1].$$

Alors w=0

.

Remarque 2.2.4 *On appliquera le lemme (2.2.1) en utilisant le fait que ;*

$$\{v \in C^\infty(\bar{\Omega}), v = 0 \ \ sur \ \ \partial\omega \times [-1,+1])\} \subset V_M(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \ \ sur \ \ \Gamma_0^M\}.$$

Lemme 2.2.2

1. *Soit w une fonction de $L^2(\Omega_1)$ (avec $\Omega_1 = \omega_1\times]-1,+1[$) tel que :*
   $\int_{\Omega_1} w\partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}_1), v = 0$ *sur* $\partial\omega_1 \times [-1,+1] \cup \omega_1 \times \{\pm 1\}$.
   Alors w est indépendante de x_3 dans Ω_1.
2. *Soit w une fonction de $L^2(\Omega_2)$ (avec $\Omega_2 = \omega_2\times]-1,+1[$) tel que :*
   $\int_{\Omega_2} w\partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}_2),\ \ v = 0$ *sur* $\partial\omega_2 \times [-1,+1] \cup \omega_2 \times \{+1\}$.
   Alors w=0 dans Ω_2.
3. *Soit w une fonction de $L^2(\Omega_3)$ (avec $\Omega_3 = \omega_3\times]-1,+1[$) tel que :*
   $\int_{\Omega_3} w\partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}_3),\ \ v = 0$ *sur* $\partial\omega_3 \times [-1,+1] \cup \omega_3 \times \{-1\}$.
   Alors w=0 dans Ω_3.

Preuve.

Pour plus de détails voir [1,Lemme 2.2.2] ■

Remarque 2.2.5 *On rappelle que $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, avec $\Omega_i = \omega_i\times]-1,+1[$ pour i=0,...3, et que toute fonction ψ dans V_{E_0} vérifie :*
$\psi = 0$ *sur* $\gamma_0^E \times [-1,+1] \cup \omega_1 \times \{\pm 1\} \cup \omega_2 \times \{+1\} \cup \omega_3 \times \{-1\}$.

On appliquera le lemme (2.2.2) en utilisant le fait que $\int_\Omega w\partial_3\psi = 0,\ \forall\psi \in V_{E_0}(\Omega)$, *implique que pour i=0,...3, on a*

$$\int_{\Omega_i} w\partial_3\psi = 0,\ \forall\psi \in C^\infty(\bar{\Omega}_i),\ \psi = 0 \ sur\ \partial\omega_i \times [-1,+1] \cup \begin{cases} \omega_i \times \{\pm 1\} \ si\ i = 1; \\ \omega_i \times \{+1\} \ si\ i = 2; \\ \omega_i \times \{-1\} \ si\ i = 3; \end{cases}$$

et donk

$w = C,\ C$ *indépendante de* $x_3,$ *dans* Ω_1 *;*

$w = 0$ *dans* $\Omega_2 \cup \Omega_3$ *;*

$w = 0$ *dans* Ω_0 *(d'aprés le lemme (2.2.1)).*

Notation 2.2.1 *On utilise la notation tensorielle suivante qui à toute paire d'indices ou d'exposants pouvant être interchangés associe un entier selon le schéma suivant :*

$11 \to \underline{1}$ *;* $22 \to \underline{2}$ *;* $33 \to \underline{3}$ *;* $23 \to \underline{4}$ *;* $31 \to \underline{5}$ *;* $12 \to \underline{6}$. *On pose*

$\mathcal{C}_m = [C^{\underline{ij}}]_{(\underline{i},\underline{j}=1,2,6)}$, *;* $\mathcal{C}_t = [C^{\underline{ij}}]_{(\underline{i},\underline{j}=3,4,5)}$,

$\mathcal{C}_{mt} = [C^{\underline{ij}}]_{(\underline{i}=1,2,6)(\underline{j}=3,4,5)}$, *;* $\mathcal{C}_{tm} = [C^{\underline{ij}}]_{(\underline{i}=3,4,5)(\underline{j}=1,2,6)}$,

Soit $\mathcal{A}$ *la matrice* $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_m & \mathcal{A}_{mt} \\ \mathcal{A}_{tm} & \mathcal{A}_t \end{bmatrix}$ *où*

$$\mathcal{A}_m = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_m & -\left[{}_pe^{\lambda\underline{i}}\right]^t_{(\underline{i}=1,2,6)} \\ \left[{}_pe^{\alpha\underline{j}}\right]_{(\underline{j}=1,2,6)} & \left[d^{\alpha\lambda}\right] \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A}_{mt} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{mt} & -\left[{}_pe^{3\underline{i}}\right]^t_{(\underline{i}=1,2,6)} \\ \left[{}_pe^{\alpha\underline{j}}\right]_{(\underline{j}=3,4,5)} & \left[d^{\alpha 3}\right] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{tm} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{tm} & -\left[{}_pe^{\lambda\underline{i}}\right]^t_{(\underline{i}=3,4,)} \\ \left[{}_pe^{3\underline{j}}\right]_{(\underline{j}=1,2,6)} & \left[d^{3\lambda}\right] \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_t & -\left[{}_pe^{3\underline{i}}\right]^t_{5\underline{i}=3,4,5} \\ \left[{}_pe^{3\underline{j}}\right]_{(\underline{j}=3,4,5)} & \left[d^{33}\right] \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{A}$ est celle de loi de comportement des matériaux piézoélectriques qui relie le tenseur des contraintes σ et le vecteur déplacement électrique D avec le tenseur des déformations ε et le vecteur champ électrique E, où on a réordonné les composantes pour séparer celles dans le plan des autres. Elle exprime que

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma^{\underline{i}}\underline{i} = 1,2,6) \\ D^{\alpha} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (\sigma^{\underline{i}}\underline{i} = 3,4,5) \\ D^{3} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_m & \mathcal{A}_{mt} \\ \mathcal{A}_{tm} & \mathcal{A}_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\|\alpha} \\ 2e_{1\|2} \end{pmatrix} \\ E_{\lambda} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{3\|3} \\ 2e_{\lambda\|3} \end{pmatrix} \\ E_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.1 *Les matrices $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{C}_t$, $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{A}_t$ sont inversibles, $\mathcal{C}_{mt} = \mathcal{C}_{tm}^t$ et $\mathcal{A}_{mt} = \mathcal{A}_{tm}^t$.*

Preuve. Les tenseurs C^{ijkl}, ${}_pe^{ikl}$ et d^{ik} sont les tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_pe^{ikl}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$ pris en $x_3 = 0$. Les résultat de la proposition (2.2.1) découlent donc directement des propriétés d'ellipticité et de symétrie (1.8)-(1.10) de ces tenseurs. ■

Analyse asymptotique

Pour chacun des problème bidimensionnels obtenus par la méthode des développements asymptotiques, on montre que la moyenne dans l'épaisseur de la solution du problème tridimensionnel converge vers leurs solutions dans des espaces fonctionnels appropriés. On énonce dans le lemme suivant quelque résultats de Ciarlet, Lods [1996a] nécessaires aus démonstration

Lemme 2.2.3 *(Ciarlet, Lods[1996])*

1. *Soit $v \in L^2(\Omega)$, $\Omega = \omega\times]-1,+1[$. On définit sa moyenne dans l'épaisseur, que l'on note $\underline{v}$, pour presque tout y dans ω par*

$$\underline{v}(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} v(y, x_3)dx_3. \tag{2.31}$$

La fonction $\underline{v}$ est bien définie pour presque tout $y \in \omega$ et

$$\underline{v} \in L^2(\omega) \quad et \quad \|\underline{v}\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{2}\|v\|_{0,\Omega}. \tag{2.32}$$

2. *Il existe une constante* $C > 0$ *tell que :*

$$\|g(\varepsilon) - a\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq C_1\varepsilon. \tag{2.33}$$

3. *Il existe des constantes* g_0 *et* g_1 *tell que :*

$$0 < g_0 \leq g(\varepsilon)(y) \leq g_1, \quad \forall\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]; \quad \forall y \in \bar{\Omega}. \tag{2.34}$$

.

On énonce maintenant quelques propriétés des tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_pe^{kij}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$.

Lemme 2.2.4 1. *Propriétés* $L^\infty(\bar{\Omega})$.

Il existe des constantes $C>0$ *telles que :*

$$\begin{array}{c} \|C^{ijkl}(\varepsilon) - C^{ijkl}(0)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq C\varepsilon; \\ \|{}_pe^{ikl}(\varepsilon) -_p e^{ikl}(0)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq C\varepsilon; \\ \|d^{ij}(\varepsilon) - d^{ij}(0)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq C\varepsilon. \end{array} \tag{2.35}$$

2. *Propriétés d'uniforme ellipticité.*

Il existe des constantes $C>0$ *telles que, pour tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ *;*

$$\begin{array}{c} C^{ijkl}(\varepsilon)t_{kl}t_{ij} \geq Ct_{ij}t_{ij}, \quad \forall t_{ij} = t_{ji} \in \mathbf{R}; \\ d^{ij}(\varepsilon)t_it_j \geq Ct_it_j, \quad \forall t_i \in \mathbf{R}. \end{array} \tag{2.36}$$

.

Preuve.

1. Les propriétés (2.35) viennent du fait que les tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_pe^{ikl}(\varepsilon)$ et $d^{ij}(\varepsilon)$ sont écrits dans la base covariante tridimensionnelle $(g_i(\varepsilon))$, et les tenseurs $C^{ijkl}(0)$, ${}_pe^{ikl}(0)$ et $d^{ij}(0)$ sont écrits dans la base covariante (a_i) attachée à la surface moyenne. Or on a les relations suivantes :

$$g_\alpha(\varepsilon) = a_\alpha + \varepsilon x_3\partial_\alpha a_3 = a_\alpha + O(\varepsilon) \text{ et } g_3(\varepsilon) = a_3.$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, le tenseur $C^{ijkl}(\varepsilon)$ est défini positif uniformément par rapport à $x \in \bar{\Omega}$, i.e. il existe des constantes $C(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$C^{ijkl}(\varepsilon)(x)t_{kl}t_{ij} \geq C(\varepsilon)t_{ij}t_{ij}, \ \forall x \in \bar{\Omega}, \ \forall t_{ij} = t_{ji}.$$

De plus, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$C^{ijkl}(0)(x)t_{kl}t_{ij} \geq C_1 t_{ij}t_{ij}, \ \forall t_{ij} = t_{ji}.$$

Or l'application $(x, t_{ij}) \in \bar{\Omega} \times S_1 \to C^{ijkl}(\varepsilon)(x)t_{kl}t_{ij}$, où $S_1 := \{matrices\ t_{ij}$ symétriques $d'ordre\ 3\ telles\ que\ t_{ij}t_{ij} = 1\}$ étant continue, il existe une constante C>0 telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, et pour tout $t_{ij} = t_{ji}$,

$$C^{ijkl}(\varepsilon)(x)t_{kl}t_{ij} \geq Ct_{ij}t_{ij}.$$

On démontre de la même façon qu'il existe une constante C>0 telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, et pour tout t_i,

$$d^{ij}(\varepsilon)t_i t_j \geq Ct_i t_i.$$

■

2.2.3 Le problème membranaire

Construction du problème membrane par les développements asymptotiques

On va construire le problème membrane par la méthode des développement asymptotiques. Pour cela, on va identifier les coefficients des termes ε^{-1}, ε^0 et ε^1 dans l'équation (2.13). On commence par les résultats obtenus à chaque étape,

Identification des coefficients des termes en ε^{-1}

Le problème variationnel s'écrit alors, en identifiant les termes en ε^{-1} dans (2.13), $\int_\Omega \{\bar{\sigma}^{ij,-1} e^{-1}_{i\|j}(v) + \bar{D}^{i,-1} E^{-1}_i(\psi)\} dx = \int_\Omega f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \dot{G}^{i,-2}, \dot{v}_i \sqrt{a} \rangle + \int_\Omega \{{}_p e^{kij} E^{-1}_k(\widehat{\varphi}) e^{-1}_{i\|j}(v) - d^{ik} E^{-1}_k(\widehat{\varphi}) E^{-1}_i(\psi)\} \sqrt{a} dx, \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega)$,

et d'après les définitions (2.21), (2.23) des $e^{-1}_{i\|j}(v)$ et $E^{-1}_i(\psi)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega \{\bar{\sigma}^{i3,-1} v_{i,3} - \bar{D}^{3,-1} \psi_{,3}\} dx = \int_\Omega f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \dot{G}^{i,-2}, \dot{v}_i \sqrt{a} \rangle \\ \quad + \int_\Omega \{{}_p e^{ki3} E^{-1}_k(\widehat{\varphi}) v_{i,3} + d^{3k} E^{-1}_k(\widehat{\varphi}) \psi_{,3}\} \sqrt{a} dx, \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.37}$$

Le problème de Signorini d'oredre ε^{-1}

Les termes $\langle \dot{G}^{-2}, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle$ et $\langle G^{-2}, ((\dot{v}-\dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^{-2}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle$ dans (2.29) satisfis

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \dot{G}^{-2}, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^{-2}, ((\dot{v}-\dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^{-2}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.38}$$

En multiplie (2.29) par ε est âpre entend ε ver 0 on obtient le problème de Signorini d'ordre ε^{-1} :

$$P_c^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega \{\bar{\sigma}^{i3,-1} v_{i,3} - \bar{D}^{3,-1}\psi_{,3}\}dx = \int_\Omega f^{i,-2} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle \dot{G}^{i,-2}, \dot{v}_i\sqrt{a}\rangle \\ + \int_\Omega \{{}_p e^{ki3} E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) v_{i,3} + d^{3k} E_k^{-1}(\widehat{\varphi})\psi_{,3}\}\sqrt{a}dx, \forall (v,\psi) \in V_M \times V_{E_0}(\Omega), \\ \langle \dot{G}^{-2}, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^{-2}, ((\dot{v}-\dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^{-2}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.39}$$

En prenant des fonctions tests v indépendantes de x_3 et ψ nulle, on obtient la relation de compatibilité suivantte sur les données mécaniques :

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega f^{i,-2} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle \dot{G}^{i,-2}, \dot{v}_i\sqrt{a}\rangle = 0, \forall v \in V_M(\Omega), \quad v \ \text{ indépendant de } \ x_3. \\ \langle \dot{G}^{-2}, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^{-2}, ((\dot{v}-\dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^{-2}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.40}$$

Donc pour que les forces soient les plus générales possible, on impose $f^{-2} = 0$ et $h^{-1} = 0$, ie $a \geq -1$ et $b \geq 0$ dans (2.27) on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \dot{G}^{i,-2}, \dot{v}_i\sqrt{a}\rangle = 0, \forall v \in V_M(\Omega), \quad v \ \text{ indépendant de } \ x_3. \\ \langle \dot{G}^{-2}, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^{-2}, ((\dot{v}-\dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^{-2}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.41}$$

on obtient :

$$\dot{G}^{-2} = 0; \ i.e. \ d \geq -1 \tag{2.42}$$

En appliquant le lemme (2.2.1) avec la remarque (2.2.4) et le lemme (2.2.2) avec la remarque (2.2.5), on obtient respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\sigma}^{i3,-1} =_p e^{ki3} E_k^{-1}(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \text{ dans } \Omega; \\ \bar{D}^{3,-1} = \left\{ \begin{array}{c} -d^{3k} E_K^{-1}(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \text{ dans } \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_3; \\ -d^{3k} E_k^{-1}(\widehat{\varphi})\sqrt{a} + C^{-1}, \ C^{-1} \text{ indépendante de } x_3, \text{ dans } \ \Omega_1. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{2.43}$$

avec d'après (2.26),

$$\bar{\sigma}^{i3,-1} = (2C^{i3\lambda 3} e^{-1}_{\lambda\|3}(u) + C^{i333} e^{-1}_{3\|3}(u) -_p e^{3i3} E_3^{-1}(\bar{\varphi}))\sqrt{a},$$

$$\bar{D}^{3,-1} = (2_p e^{3\lambda 3} e^{-1}_{\lambda\|3}(u) +_p e^{333} e^{-1}_{3\|3}(u) + d^{33} E_3^{-1}(\bar{\varphi}))\sqrt{a}.$$

D'ou, avec la notation (2.2.1), $(e^{-1}_{i\|3}(u),\ E_3^{-1}(\bar{\varphi}))$ vérifie le système suivant :

$$\mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1}_{3\|3}(u) \\ 2e^{-1}_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \\ E_3^{-1}(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} ({}_p e^{kI}_{\underline{i}=3,4,5}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) \ \text{ dans } \ \Omega - \Omega_1; \\ \begin{pmatrix} ({}_p e^{k\underline{i}}_{\underline{i}=3,4,5}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) + \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1} \end{pmatrix} \ \text{ dans } \ \Omega_1. \end{cases} \tag{2.44}$$

Donc, puisque d'après la proposition (2.2.1) la matrice $\mathcal{A}_t$ est inversible, on peut, dans $\Omega - \Omega_1$, exprimer $e^{-1}_{i\|3}(u)$ et $E_3^{-1}(\bar{\varphi})$ en fonction des $E_k^{-1}(\widehat{\varphi})$ à l'aide du système (2.44), c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1}_{3\|3}(u) \\ 2e^{-1}_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \\ E_3^{-1}(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_t^{-1} \begin{pmatrix} ({}_p e^{k\underline{i}}_{\underline{i}=3,4,5}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) \ \text{ dans } \ \Omega - \Omega_1. \tag{2.45}$$

Dans Ω_1, d'après le système (2.44), puisque la matrice $\mathcal{A}_t$, $E_k^{-1}(\widehat{\varphi})$ (cf. remarque (2.2.2)) et C^{-1} sont indépendants de x_3, $E_3^{-1}(\bar{\varphi})$ et $e^{-1}_{i\|3}(u)$ sont aussi indépendants de x_3. Or $E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = -\partial_3 \bar{\varphi}^0$ et, d'après (2.15), $\bar{\varphi}^0 = 0$ sur $\omega_1 \times \{\pm 1\}$. Donk on a nécessairement

$$E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = 0 \ \text{ et } \ \bar{\varphi}^0 = 0 \ \text{ dans } \ \Omega_1, \tag{2.46}$$

c'est-à-dire que, dans Ω_1, C^{-1} est tel que $E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = 0$. On a donc en utilisant respectivement les seconde et première équations de (2.43) :

$$\left.\begin{aligned} C^{-1} &= (2_p e^{3\lambda 3} e^{-1}_{\lambda\|3}(u) +_P e^{333} e^{-1}_{3\|3}(u) + d^{33} E_3^{-1}(\widehat{\varphi}))\sqrt{a} \\ \begin{pmatrix} e^{-1}_{3\|3}(u) \\ 2e^{-1}_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} &= \mathcal{C}_t^{-1} ({}_p e^{3\underline{i}}_{(\underline{i}=3,4,5)}) E_3^{-1}(\widehat{\varphi}) \end{aligned}\right\} \text{ dans } \Omega_1. \tag{2.47}$$

Identification des coefficients des termes en ε^0

En égalant les coefficients en ε^0 dans l'équation (2.13), on obtient le problème variationnel

$$\begin{gathered}\int_\Omega\{\bar{\sigma}^{ij,-1}e^0_{i\|j}(v)+\bar{D}^{i,-1}E^0_i(\psi)+\bar{\sigma}^{ij,0}e^{-1}_{i\|j}(v)+\bar{D}^{i,0}E^{-1}_i(\psi)\}dx\\ =\int_\Omega f^{i,-1}v_i\sqrt{a}dx+\int_{\Gamma_+}h^{i,0}v_i\sqrt{a}d\Gamma+\langle\dot{G}^{i,-1},\dot{v}_i\sqrt{a}\rangle\\ +\int_\Omega\{{}_pe^{kij}E^0_k(\widehat{\varphi})e^{-1}_{i\|j}(v)-d^{ik}E^0_k(\widehat{\varphi})E^{-1}_i(\psi)\}\sqrt{a}dx\\ +\int_\Omega\{{}_pe^{kij,1}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})e^{-1}_{i\|j}(v)-d^{ik,1}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})E^{-1}_i(\psi)\}\sqrt{a}dx\\ +\int_\Omega\{{}_pe^{kij}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})e^0_{i\|j}(v)-d^{ik}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})E^0_i(\psi)\}\sqrt{a}dx,\quad\forall\quad(v,\psi)\in V_M(\Omega)\times V_{E_0}(\Omega).\end{gathered}\tag{2.48}$$

Le problème de Signorini d'oredre ε^0

Les termes $\langle\dot{G}^{-1},(\dot{v}_N-\dot{u}^0_N)\dot{n}\sqrt{a}\rangle$ et $\langle\dot{G}^{-1},((\dot{v}-\dot{u})-(\dot{v}_N-\dot{u}^0_N)\dot{n})\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|\dot{G}^{-1}|,(|\dot{v}_T|-|\dot{u}^0_T|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle$ dans (2.29) satisfis

$$\begin{cases}\langle\dot{G}^{-1},(\dot{v}_N-\dot{u}^0_N)\dot{n}\sqrt{a}\rangle\geq 0\quad\forall v_N\in K_M(\Omega)\\ \langle\dot{G}^{-1},((\dot{v}-\dot{u})-(\dot{v}_N-\dot{u}^0_N)\dot{n})\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|\dot{G}^{-1}|,(|\dot{v}_T|-|\dot{u}^0_T|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle\geq 0\quad\forall v\in\mathbf{V}_M(\Omega)\end{cases}\tag{2.49}$$

De même nous remplaçons (2.42) dans (2.29) et en multiplie le résulta par ε, est âpre entend ε ver 0 on obtient le probléme de Signorini d'ordre ε^0

$$P^0_c\begin{cases}\int_\Omega\{\bar{\sigma}^{ij,-1}e^0_{i\|j}(v)+\bar{D}^{i,-1}E^0_i(\psi)+\bar{\sigma}^{ij,0}e^{-1}_{i\|j}(v)+\bar{D}^{i,0}E^{-1}_i(\psi)\}dx\\ =\int_\Omega f^{i,-1}v_i\sqrt{a}dx+\int_{\Gamma_+}h^{i,0}v_i\sqrt{a}d\Gamma+\langle\dot{G}^{i,-1},\dot{v}_i\sqrt{a}\rangle\\ +\int_\Omega\{{}_pe^{kij}E^0_k(\widehat{\varphi})e^{-1}_{i\|j}(v)-d^{ik}E^0_k(\widehat{\varphi})E^{-1}_i(\psi)\}\sqrt{a}dx\\ +\int_\Omega\{{}_pe^{kij,1}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})e^{-1}_{i\|j}(v)-d^{ik,1}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})E^{-1}_i(\psi)\}\sqrt{a}dx\\ +\int_\Omega\{{}_pe^{kij}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})e^0_{i\|j}(v)-d^{ik}E^{-1}_k(\widehat{\varphi})E^0_i(\psi)\}\sqrt{a}dx,\quad\forall\quad(v,\psi)\in V_M(\Omega)\times V_{E_0}(\Omega).\\ \langle\dot{G}^{-1},(\dot{v}_N-\dot{u}^0_N)\dot{n}\sqrt{a}\rangle\geq 0\quad\forall v_N\in K_M(\Omega)\\ \langle\dot{G}^{-1},((\dot{v}-\dot{u})-(\dot{v}_N-\dot{u}^0_N)\dot{n})\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|\dot{G}^{-1}|,(|\dot{v}_T|-|\dot{u}^0_T|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle\geq 0\quad\forall v\in\mathbf{V}_M(\Omega)\end{cases}\tag{2.50}$$

En prenant des fonctions tests v et ψ indépendantes de x_3, donc $\psi=0$ dans $\Omega-\Omega_0$ (*car* $\psi=0$ *sur* $\omega_1\times\{\pm1\}\cup\omega_2\times\{+1\}\cup\omega_3\times\{-1\}$), $e^{-1}_{i\|3}(v)$ et $E^{-1}_3)(\psi)$ sont nuls, et le

problème variationnel (2.50) devient

$$P_c^0 \left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega \bar{\sigma}^{ij,-1} e^0_{i\|j}(v)dx + \int_\Omega \bar{D}^{\alpha,-1} E^0_i(\psi)dx \\ = \int_\Omega f^{i,-1} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,0} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \dot{G}^{i,-1}, \dot{v}_i \sqrt{a} \rangle \\ + \int_\Omega ({}_p e)^{kij} E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) e^0_{i\|j}(v) \sqrt{a} dx - \int_\Omega d^{ik} E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) E^0_i(\psi) \sqrt{a} dx, \quad \forall \quad (v,\psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), \\ v \text{ et } \psi \text{ indépendantes de } \ x_3. \\ \langle \dot{G}^{-1}, (\dot{v}_N - \dot{u}^0_N)\dot{n}\sqrt{a} \rangle \geq 0 \ \ \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^{-1}, ((\dot{v} - \dot{u}) - (\ddot{v}_N - \dot{u}^0_N)\dot{n})\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |\dot{G}^{-1}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}^0_T|)\dot{n}\sqrt{a}) \rangle \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.51}$$

D'après (2.26) $\bar{\sigma}^{\alpha\beta,-1}$ et $\bar{D}^{\alpha,-1}$ ne dépendent que des $e^{-1}_{i\|3}(u)$ et $E_3^{-1}(\bar{\varphi})$, donc, d'après (2.45), (2.46) et (2.47) des $E_k^{-1}(\widehat{\varphi})$. Le problème (2.51) ne fait donc pas intervenir les inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, mais seulement les chargements mécaniques et électriques appliqués, f^{-1},h^0, et $E_k^{-1}(\widehat{\varphi})$, $\langle \dot{G}^{-1}_N, \dot{v}_N \sqrt{a} \rangle$.

Donc, pour ne pas avoir de condition sur les chargements appliqués, on suppose que

$$f^{-1} = 0, \ \ h^0 = 0, \ \ E_k^{-1}(\widehat{\varphi}) = 0 \ \ et \ \langle \dot{G}^{i,-1}, \dot{v}_i \sqrt{a} \rangle = 0, \ \ i.e. \ \ a \geq 0, \ \ b \geq 1, \ \ et \ \ c \geq 0, \tag{2.52}$$

D'où, d'après (2.51) et (2.52)

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{G}^{i,-1}, \dot{v}_i \sqrt{a} \rangle = 0 \qquad \forall v \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \ \eta = 0 \text{ on } \partial\omega\} \\ \langle \dot{G}^{-1}, (\dot{v}_N - \dot{u}^0_N)\dot{n}\sqrt{a} \rangle \geq 0 \ \ \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^{-1}, ((\dot{v} - \dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}^0_N)\dot{n})\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |\dot{G}^{-1}|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}^0_T|)\dot{n}\sqrt{a}) \rangle \geq 0 \ \ \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.53}$$

on obtient respectivement :

$$\dot{G}^{-1} = 0, \ \text{i.e. } d \geqslant 0 \tag{2.54}$$

D'où, d'après (2.45),(2.46) et (2.47),

$$e^{-1}_{i\|3} = 0 \text{ et } E_3^{-1} = 0, \tag{2.55}$$

et d'après (2.20) , (2.22) et (2.15)

$$\begin{array}{c} u^0 \ \text{ et } \ \bar{\varphi}^0 \ \text{ sont indépendants de } \ x_3, \\ \bar{\varphi}^0 = 0 \text{ et } E^0_\alpha(\bar{\varphi}) = 0 \text{ dans } \Omega - \Omega_0 \end{array} \tag{2.56}$$

et d'après (2.26)

$$\bar{\sigma}^{ij,-1} = 0, \quad \bar{D}^{i,-1} = 0 \tag{2.57}$$

Le problème variationnel (2.48) s'écrit donc, en tenant compte de (2.57) et des définitions (2.21), (2.23) des $e^{-1}_{i\|j}(v)$ et des $E^{-1}_i(\psi)$,

$$\int_\Omega \{\bar{\sigma}^{i3,0} v_{i,3} - \bar{D}^{3,0}\psi_{,3}\}dx = \int_\Omega \{{}_p e^{ki3} E^0_k(\widehat{\varphi}) v_{i,3} + d^{3k} E^0_k(\widehat{\varphi})\psi_{,3}\}\sqrt{a}dx, \forall (u,\psi) \in V_M(\Omega)\times V_{E_0}(\Omega).$$

En utilisant le lemme (2.2.1) avec la remarque (2.2.4) et le lemme (2.2.2) avec la remarque (2.2.5) on obtient respectivement :

$$\bar{\sigma}^{i3,0} =_p e^{ki3} E^0_k(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \quad \text{dans} \quad \Omega;$$

$$\bar{D}^{3,0} = \begin{cases} -d^{3k} E^0_k(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \quad \text{dans} \quad \Omega_0 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3; \\ -d^{3k} E^0_k(\widehat{\varphi})\sqrt{a} + C^0, \ C^0 \ \text{ indépendante de } x_3 \text{ dans } \Omega_1; \end{cases} \tag{2.58}$$

avec, d'après (2.26)

$$\bar{\sigma}^{i3,0} = (C^{i3kl} e^0_{k\|l}(u) -_p e^{ki3} E^0_k(\bar{\varphi}))\sqrt{a} + (C^{i3kl,1} e^{-1}_{k\|l}(u) -_p e^{ki3,1} E^{-1}_k(\bar{\varphi})),$$

$$\bar{D}^{3,0} = ({}_p e^{3kl} e^0_{k\|l}(u) + d^{k3} E^0_k(\bar{\varphi}))\sqrt{a} + ({}_p e^{3kl,1} e^{-1}_{k\|l}(u) + d^{k3,1} E^{-1}_k(\bar{\varphi})).$$

Or, d'après (2.20) , (2.22) et (2.55), $e^{-1}_{k\|l}(u) = 0$ et $E^{-1}_k(\bar{\varphi}) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{i3,0} &= (C^{i3kl} e^0_{k\|l}(u) -_p e^{ki3} E^0_k(\bar{\varphi}))\sqrt{a}, \\ \bar{D}^{3,0} &= ({}_p e^{3kl} e^0_{k\|l}(u) + d^{k3} E^0_k(\bar{\varphi}))\sqrt{a}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

On cherche un problème dont les premiers termes u^0 , $\bar{\varphi}^0$ et G^0 des développements (2.14) et (2.27) de $u(\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ et $G(\varepsilon)$ soient solutions.

Or dans le système (2.58) avec les relations (2.59), les termes $e^0_{k\|3}(u)$ et $E^0_3(\bar{\varphi})$ font apparaître (cf. (2.20) et (2.22)) les termes d'ordre un, u^1 et $\bar{\varphi}^1$, de ces développements. On utilise donc ce système pour les exprimer en fonction des autres.

Avec la notation (2.2.1), le système (2.58) avec (2.59) peut s'écrire

$$\mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \\ E^0_3(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} = -\mathcal{A}_{tm} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \\ E^0_\lambda(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ({}_p e^{ki}_{(i=3,4,5)}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E^0_k(\widehat{\varphi}) + \begin{pmatrix} 0 \\ C^0 \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

où $C^0 = 0$ dans $\Omega - \Omega_1$ et est indépendante de x_3 dans Ω_1. Donc, puisque d'après la proposition (2.2.1) la matrice $\mathcal{A}_t$ est inversible, on peut, dans $\Omega - \Omega_1$, exprimer $e_{i\|3}(u)$, $E^0_\lambda(\bar\varphi)$ et $E^0_3(\bar\varphi)$ en fonction des $e^0_{\alpha\|\beta}(u)$, $E^0_k(\widehat\varphi)$, c'est-à-dire, en remarquant que

$$\begin{pmatrix} ({}_pe^{k\underline{i}}_{(\underline{i}=3,4,5)}) \\ \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E^0_k(\widehat\varphi) = \mathcal{A}_{tm} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ E^0_\lambda(\widehat\varphi) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_t \begin{pmatrix} 0 \\ \\ E^0_3(\widehat\Omega) \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

on a, d'après (2.60)

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \\ \\ E^0_3(\bar\varphi) \end{pmatrix} = -\mathcal{A}_t^{-1}\mathcal{A}_{tm} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \\ \\ E^0_\lambda(\bar\varphi) + E^0_\lambda(\widehat\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ E^0_3(\widehat\varphi) \end{pmatrix}, \text{ dans } \Omega - \Omega_1. \tag{2.62}$$

Dans Ω_1, d'après le système (2.60), puisque $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{A}_{tm}$, $E^0_k(\widehat\varphi)$ (cf. remarque (2.2.2)) et (cf.(2.56)) $e^0_{\alpha\|\beta}$ et $E^0_\lambda(u)$ sont indépendants de x_3, $E^0_3(\bar\varphi)$ est aussi indépendant de x_3. Or $E^0_3(\bar\varphi) = \partial_3\bar\varphi^1$ et, d'après (2.15), $\bar\varphi^1 = 0$ sur $\omega_1 \times \{\pm 1\}$. Donc on a nécessairement

$$E^0_3(\bar\varphi) = 0, \quad \bar\varphi^1 = 0 \text{ et } E^0_\alpha(\bar\varphi) = 0 \text{ dans } \Omega_1; \tag{2.63}$$

et C^0 est telle que $E^0_3(\bar\varphi) = 0$. On a donc en utilisant respectivement les seconde et première équations de (2.58) avec (2.59), et en tenant compte de (2.56),

$$\left.\begin{aligned} C^0 &= ({}_pe^{3kl}e^0_{k\|l}(u) + d^{33}E^0_3(\widehat\varphi))\sqrt{a} \\ \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} &= \mathcal{C}_t^{-1}\left[({}_pe^{3\underline{i}}_{(\underline{i}=3,4,5)})E^0_3(\widehat\varphi) - \mathcal{C}_{tm} \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}\right\} \text{ dans } \Omega_1. \tag{2.64}$$

Identification des coefficients des termes en ε^1

En égalant les coefficients en ε^1 dans l'équation (2.13), on obtient le problème variationnel

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega \{\bar\sigma^{ij,-1}e^1_{i\|j}(v) + \bar D^{i,-1}E^1_i(\psi) + \bar\sigma^{ij,0}e^0_{i\|j}(v) + \bar D^{i,0}E^0_i + \bar\sigma^{ij,1}e^{-1}_{i\|j}(v) + \bar D^{i,1}E^{-1}_i(\psi)\}dx \\ &+ \textstyle\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle \dot G^{i,0}, \dot v_i\sqrt{a}\rangle \\ &+ \textstyle\int_\Omega \{{}_pe^{kij}E^0_k(\widehat\varphi)e^0_{i\|j}(v) - d^{ik}E^0_k(\widehat\varphi)E^0_i(\psi)\}\sqrt{a}dx + \int_\Omega \{{}_pe^{kij,1}E^0_k(\widehat\varphi)e^{-1}_{i\|j}(v) - d^{ik,1}E^0_k(\widehat\varphi)E^{-1}_i(\psi)\}dx \\ &+ \textstyle\int_\Omega \{{}_pe^{kij}E^1_k(\widehat\varphi)e^{-1}_{i\|j}(v) - d^{ik}E^1_k(\widehat\varphi)E^{-1}_i(\psi)\}\sqrt{a}dx, \quad \forall (v,\psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Le problème de Signorini d'oredre ε^1

Les termes $\langle \dot{G}^0, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle$ et $\langle \dot{G}^0, ((\dot{v} - \dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^0|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle$ dans (2.29) satisfis

$$\begin{cases} \langle \dot{G}^0, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)n\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle G^0, ((\dot{v} - \dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^0|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{cases} \tag{2.66}$$

De même nous remplaçons (2.54) dans (2.29) et en multiplie le résulta par ε, est âpre entend ε ver 0 on obtient le probléme de Signorini d'ordre ε^1

$$\begin{cases} \int_\Omega \{\bar{\sigma}^{ij,-1} e^1_{i\|j}(v) + \bar{D}^{i,-1} E^1_i(\psi) + \bar{\sigma}^{ij,0} e^0_{i\|j}(v) + \bar{D}^{i,0} E^0_i + \bar{\sigma}^{ij,1} e^{-1}_{i\|j}(v) + \bar{D}^{i,1} E^{-1}_i(\psi)\} dx \\ + \int_\Omega f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \dot{G}^0_N, \dot{v}_N \sqrt{a}\rangle \\ + \int_\Omega \{{}_p e^{kij} E^0_k(\widehat{\varphi}) e^0_{i\|j}(v) - d^{ik} E^0_k(\widehat{\varphi}) E^0_i(\psi)\}\sqrt{a} dx + \int_\Omega \{{}_p e^{kij,1} E^0_k(\widehat{\varphi}) e^{-1}_{i\|j}(v) - d^{ik,1} E^0_k(\widehat{\varphi}) E^{-1}_i(\psi)\} dx \\ + \int_\Omega \{{}_p e^{kij} E^1_k(\widehat{\varphi}) e^{-1}_{i\|j}(v) - d^{ik} E^1_k(\widehat{\varphi}) E^{-1}_i(\psi)\}\sqrt{a} dx, \quad \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), \\ \langle \dot{G}^0, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle G^0, ((\dot{v} - \dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^0|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{cases} \tag{2.67}$$

En ne prenant que des fonctions tests v et ψ indépendantes de x_3, donc $\psi = 0$ dans $\Omega - \Omega_0$, on a $e^{-1}_{i\|j}(v) = 0$ et $E^{-1}_i(\psi) = 0$. D'où en utilisant (2.57) et (2.58), le problème variationnel (2.67) devient

$$\begin{cases} \int_\Omega \bar{\sigma}^{\alpha\beta,0} e^0_{\alpha\|\beta}(v) dx + \int_{\Omega_0} \bar{D}^{\alpha,0} E^0_\alpha(\psi) dx = \int_\Omega f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \dot{G}^{i,0}, \dot{v}_i \sqrt{a}\rangle \\ + \int_\Omega ({}_p e^{k\alpha\beta}) E^0_k(\widehat{\varphi}) e^0_{\alpha\|\beta}(v)\sqrt{a} dx - \int_{\Omega_0} d^{\alpha k} E^0_k(\widehat{\varphi}) E^0_\alpha(\psi)\sqrt{a} dx, \\ \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), v \text{ et } \psi \text{ indépendantes de } x_3, \\ \langle \dot{G}^0, (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n}\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega) \\ \langle \dot{G}^0, ((\dot{v} - \dot{u}) - (\dot{v}_N - \dot{u}_N^0)\dot{n})\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|\dot{G}^0|, (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T^0|)\dot{n}\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega) \end{cases} \tag{2.68}$$

on a :

$$\dot{G}^0_N = G^{i,0} g_i|_3 \tag{2.69}$$

$$= G^{\alpha,0} g_\alpha|_3 + G^{3,0} g_3|_3 \tag{2.70}$$

$$= G^{\alpha,0} a_\alpha + G^{3,0} a_3 + O(\varepsilon) \tag{2.71}$$

$$= G^{\alpha,0} \partial_\alpha \theta_3 + G^{3,0} a_3|_3 + O(\varepsilon) \tag{2.72}$$

piusque : $\theta_3 = c$ (c indépendant de x_1 et x_2) on a :

$$\dot{G}_N^0 = G^{3,0} + O(\varepsilon)$$

on obtient :

$$\dot{G}_T^0 = G_T^0 + O(\varepsilon)$$

avec, d'après (2.26) en utilisant (2.55),

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\alpha\beta,0} &= (C^{\alpha\beta ij} e^0_{i\|j}(u) -_p e^{i\alpha\beta} E_i^0(\bar{\varphi}))\sqrt{a}, \\ \bar{D}^{\alpha,0} &= ({}_p e^{\alpha ij} e^0_{i\|j}(u) + d^{\alpha i} E_i^0(\bar{\varphi}))\sqrt{a}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Les relations (2.73) s'écrivent avec la notation (2.2.1), en rappelant que d'après (2.63) $E_i^0(\bar{\varphi}) = 0$ dans Ω_1,

$$\begin{pmatrix} \left(\bar{\sigma}^{\underline{i},0}_{(\underline{i}=1,2,6)}\right) \\ \bar{D}^{\alpha,0} \end{pmatrix} = \left(\mathcal{A}_m \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \\ E^0_\lambda(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \\ E^0_3(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} \right) \sqrt{a} \text{ dans } \Omega - \Omega_1,$$

et

$$\left(\bar{\sigma}^{\underline{i},0}_{(\underline{i}=1,2,6)}\right) = \left(\mathcal{C}_m \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{mt} \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \right) \sqrt{a} \text{ dans } \Omega_1.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \left(\bar{\sigma}^{\underline{i},0}_{(\underline{i}=1,2,6)}\right) \\ \bar{D}^{\alpha,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -_p e^{k\underline{i}}_{(\underline{i}=1,2,6)} \\ d^{\alpha k} \end{pmatrix} E_k^0(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \\ &= \left[\mathcal{A}_m \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \\ E^0_\lambda(\bar{\varphi}) + E^0_\lambda(\widehat{\varphi}) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} \\ E^0_3(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt} \begin{pmatrix} 0 \\ E^0_3(\widehat{\varphi}) \end{pmatrix} \right] \sqrt{a} \quad \text{dans } \Omega - \Omega_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\left(\bar{\sigma}^{\underline{i},0}_{(\underline{i}=1,2,6)}\right) - ({}_p e^{3\underline{i}}_{(\underline{i}=1,2,6)}) E_3^0(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \\ &= \left[\mathcal{C}_m \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{mt} \begin{pmatrix} e^0_{3\|3}(u) \\ 2e^0_{\lambda\|3}(u) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt}[1,2] E_3^0(\widehat{\varphi}) \right] \sqrt{a} \quad \text{dans } \Omega_1, \end{aligned}$$

Soit, en utilisant les relations (2.62), (2.64),

$$\begin{pmatrix} \left(\bar{\sigma}^{\underline{i},0}_{(\underline{i}=1,2,6)}\right) \\ \\ \bar{D}^{\alpha,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -{}_p e^{k\underline{i}}_{(\underline{i}=1,2,6)} \\ \\ d^{\alpha k} \end{pmatrix} E^0_k(\widehat{\varphi})\sqrt{a}$$
$$= \left[(\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_{mt}\mathcal{A}_t^{-1}\mathcal{A}_{tm}) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \\ \\ E^0_\lambda(\bar{\varphi}) + E^0_\lambda(\widehat{\varphi}) \end{pmatrix} \right] \sqrt{a} \quad \text{dans} \quad \Omega - \Omega_1, \tag{2.74}$$

et

$$\begin{aligned} &\left(\bar{\sigma}^{\underline{i},0}_{(\underline{i}=1,2,6)}\right) - ({}_p e^{3\underline{i}}_{(\underline{i}=1,2,6)}) E^0_3(\widehat{\varphi})\sqrt{a} \\ &= [(\mathcal{C}_m - \mathcal{C}_{mt}\mathcal{C}_t^{-1}\mathcal{C}_{tm}) \begin{pmatrix} e^0_{\alpha\|\alpha}(u) \\ \\ 2e^0_{1\|2}(u) \end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad \Omega_1, \\ &+(\mathcal{A}_{mt}[1,2] - \mathcal{C}_{mt}\mathcal{C}_t^{-1}\mathcal{A}_t[1,2]) E^0_3(\widehat{\varphi})]\sqrt{a} \end{aligned} \tag{2.75}$$

On définit les coefficients $\mathbf{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}_m$, ${}_p e^{k\alpha\beta}_m$ et $d^{\alpha\lambda}_m$ par :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{C}^{\underline{ij}}_{m(\underline{i},\underline{j}=1,2,6)}] & -[{}_p e^{\lambda\underline{i}}_{m(\underline{i}=1,2,6)}]^t \\ [{}_p e^{\alpha\underline{j}}_{m(\underline{j}=1,2,6)}] & [d^{\alpha\lambda}_m] \end{bmatrix} = \mathcal{A}_m - \mathcal{A}_{mt}\mathcal{A}_t^{-1}\mathcal{A}_{tm} \quad \text{dans} \quad \Omega - \Omega_1; \tag{2.76}$$

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{C}^{\underline{ij}}_{m(\underline{i},\underline{j}=1,2,6)}] &= \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_{mt}\mathcal{C}_t^{-1}\mathcal{C}_{tm} \\ ({}_p e^{3\underline{j}}_{m(\underline{j}=1,2,6)}) &= \mathcal{A}_{mt}[1,2] - \mathcal{C}_{mt}\mathcal{C}_t^{-1}\mathcal{A}_t[1,2] \end{aligned}\right\} \text{dans } \Omega_1. \tag{2.77}$$

Remarque 2.2.6 *Les coefficients* $\mathbf{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}_m$, ${}_p e^{m\lambda\mu}_m$ *et* $d^{\alpha\beta}_m$ *correspondent aux composantes des tenseurs des coefficients mécaniques, piézoélectriques et diélectriques modifiés par les hypothèses suivantes :*

- *dans* $\Omega - \Omega_1$*, les contraintes transverses sont nulles et le déplacement électrique transverse est constant dans l'épaisseur, i.e.* $\sigma^{i3} = 0$ *et* $\partial_3 D^3 = 0$ *;*
- *dans* Ω_1*, seules les contraintes transverses sont nulles,i.e.* $\sigma^{i3} = 0$*, et donc* $\mathbf{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}_m = \bar{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ *et* ${}_p e^{3\lambda\mu}_m =_p \bar{e}^{3\lambda\mu}$ *où les tenseurs* $\bar{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ *et* ${}_p\bar{e}^{3\lambda\mu}$ *sont ceux obtenus pour le problème bidimensionnel établi au chapitre 2 (cf.(2.3.10)).*

Avec les relations (2.74), (2.75), et avec le tenseur $\mathbf{C}_m$ défini en (2.77), le problème varia-

tionnel (2.68) s'écrit, en rappelant que d'après (2.56) $\bar{\varphi}^0 = 0$ dans $\Omega - \Omega_0$,

$$\left\{\begin{array}{l}
\int_{\Omega_0}\{[\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} e^0_{\lambda\|\mu}(u) -_p e_m^{\lambda\alpha\beta} E^0_\lambda(\bar{\varphi})] e^0_{\alpha\|\beta}(v) + [_p e_m^{\alpha\lambda\mu} e^0_{\lambda\|\mu} + d_m^{\lambda\alpha} E^0_\lambda(\bar{\varphi})] E^0_\alpha(\psi)\}\sqrt{a}dx \\
+ \int_{\Omega-\Omega_0} \mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} e^0_{\lambda\|\mu}(u) e^0_{\alpha\|\|\beta}(v)\sqrt{a}dx \\
= \int_\Omega f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \mathbf{G}^{i,0}, v_i\sqrt{a}\rangle \\
+ \int_{\Omega_0}\{_p e_m^{\lambda\alpha\beta} E^0_\lambda(\widehat{\varphi}) e^0_{\alpha\|\beta}(v) - d_m^{\lambda\alpha} E^0_\lambda(\widehat{\varphi}) E^0_\alpha(\psi)\}\sqrt{a}dx, \\
+ \int_{\Omega_2\cup\Omega_3} (_p e_m^{\lambda\alpha\beta}) E^0_\lambda(\widehat{\varphi}) e^0_{\alpha\|\beta}(v)\sqrt{a}dx + \int_{\Omega_1} (_p e_m^{3\alpha\beta}) E^0_3(\widehat{\varphi}) e^0_{\alpha\|\beta}(v)\sqrt{a}dx, \\
\forall (v,\psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega), \quad v \ \text{ et } \ \psi \text{ indépendantes de } \ x_3, \\
\langle G^0, (v_N - u^0_N) n\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall v_N \in K_M(\Omega); \\
\langle G^0, ((v-u) - (v_N - u^0_N)n)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda |G^0|, (|v_T| - |u^0_T|) n\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega).
\end{array}\right. \tag{2.78}$$

Les fonctions tests v et ψ sont prises indépendantes de x_3, donc, d'après (2.21) et (2.23), $e^0_{\alpha\|\beta}(v)$ et $E^0_\alpha(\psi)$ sont indépendants de x_3. Et, d,après (2.46) , (2.20) et (2.22), $e^0_{\lambda\|\mu}(u)$ et $E^0_\lambda(\bar{\varphi})$ sont aussi indépendants de x_3. En intégrant sur l'épaisseur, le problème variationnel (2.78) peut être considéré comme un problème bidimensionnel formulé sur ω. On pose

$$\gamma_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma^k_{\alpha\beta} v_k, \tag{2.79}$$

et on rappelle que

$$E_\alpha(\psi) = -\partial_\alpha \psi.$$

On a ainsi

$$e^0_{\lambda\|\mu}(u) = \gamma_{\lambda\mu}(u^0) \quad et \quad e^0_{\alpha\|\beta}(v) = \gamma_{\alpha\beta}(v),$$

$$E^0_\lambda(\bar{\varphi}) = E_\lambda(\bar{\varphi}^0) \quad et \quad E^0_\alpha(\psi) = E_\alpha(\psi).$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Si les deux premiers termes u^0 $\bar{\varphi}^0$ et u^1, $\bar{\varphi}^1$ et le terme $\mathbf{G}^0$ des développements (2.14),(2.27) des inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, $\mathbf{G}(\varepsilon)$ existent, et si les forces mécaniques appliqué sont de la forme*

$$f(\varepsilon) = f^0 \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3, \quad h(\varepsilon) = \varepsilon h^1 \in (\mathbf{L}^2(\Gamma^+))^3, \quad \mathbf{G}(\varepsilon) = \mathbf{G}^0 \in (\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}})^3,$$

et le champ électrique appliqué est de la forme

$$E(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon)) = \sum_{k\geq 0} e^k E^k(\widehat{\varphi}), E^0(\widehat{\varphi}) \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3, E^0_k(\widehat{\varphi}) \quad \text{indépendant de} \quad x_3,$$

alors

$$u^0 et \bar{\varphi}^0 \quad \textit{sont indépendant de} \quad x_3,$$

$$\bar{\varphi}^0 = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega - \Omega_0,$$

et $(u^0, \bar{\varphi}^0, G^0)$ *peut être identifié à la solution bidimensionnelle* (ζ^0, θ^0, G^0) *définie sur* $\bar{\omega}$ *des équations bidimensionnelles membranes de coques piézoélectriques suivant :*

$$\begin{array}{l}
\textit{Trouver} \quad (\zeta^0, \theta^0, G^0) \in \mathbf{V}_{M,mem}(\omega) \times \mathbf{V}_{E_0,mem}(\omega) \times (\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}})^3(\omega) \ \textit{tel que} \\
2\int_{\omega_0}\{[\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(\zeta^0) -_p e_m^{\lambda\alpha\beta}E_\lambda(\theta^0)]\gamma_{\alpha\beta}(\eta) + [_p e_m^{\alpha\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(\zeta^0) + d_m^{\alpha\lambda}E_\lambda(\theta^0)]E_\alpha(\psi)\}\sqrt{a}dy \\
+2\int_{\omega-\omega_0}\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(\zeta^0)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy \\
= \int_\omega(\int_{-1}^{+1} f^{i,0}dz)\eta_i\sqrt{a}dy + \int_{\Gamma_+} h^{i,1}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle \mathbf{G}_N^0, v_N\sqrt{a}\rangle \\
+2\int_{\omega_0}\{_p e_m^{\lambda\alpha\beta}E_\lambda^0(\widehat{\varphi})\gamma_{\alpha\beta}(\eta) - d_m^{\alpha\lambda}E_\lambda^0(\widehat{\varphi})E_\alpha(\psi)\}\sqrt{a}dy \\
+2\int_{\omega_2\bigcup\omega_3}(_p e_m^{\lambda\alpha\beta})E_\lambda^0(\widehat{\varphi})\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy + 2\int_{\omega_1}(_p e_m^{3\alpha\beta})E_3^0(\widehat{\varphi})\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy, \\
\forall(\eta,\psi) \in \mathbf{V}_{M,mem}(\omega) \times \mathbf{V}_{E_0,mem}(\omega) \\
\langle \mathbf{G}^{3,0}, \eta_3 - \zeta_3^0\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall\eta_3\mathbf{K}(\omega); \\
\langle G_T^0, ((\eta_T - \zeta_T^0))\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|G^{3,0}|, (|\eta_T| - |\zeta_T^0|)\sqrt{a})\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega). \\
\textit{où} \\
\mathbf{V}_{M,mem}(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\omega), \eta_\alpha = 0 \quad \textit{sur} \quad \gamma_0^M\}; \\
\mathbf{K}_M(\omega) = \{\eta \in \mathbf{V}_{M,mem}(\omega)/\eta_3 \leq d \quad \textit{sur} \quad \Gamma_-\} \\
\mathbf{V}_{E_0,mem}(\omega) = \{\psi \in H^1(\omega), \psi = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega - \omega_0, \psi = 0 \quad \textit{sur} \quad \gamma_0^E\}; \\
\gamma_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^k v_k; \\
E_\alpha(\psi) = -\partial_\alpha\psi; \\
\textit{et où les tenseurs} \quad \mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu}, \quad _p e_m^{k\alpha\beta} \quad \textit{et} \quad d_m^{\alpha\lambda} \ \textit{sont définis en} \ (2.77)
\end{array} \tag{2.80}$$

Conclusion

L'analyse asymptotique du problème piézoélectrique tridimensionnel effectuée dans ce chapitre conduit au problème de coques piézoélectriques membranaires dans le cas d'une coque uniformément elliptique encastrée sur partie de sa frontière latérale.

On a ensuite justifié le modèle bidimensionnel. Pour cela, en utilisant la méthode des développements asymptotiques formelles que dans le cas avec frottement, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini avec frottement.

Bibliographie

[1] **Maceri. F. Bisegna. B.**, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support, Math. Comput. Modelling 28 (1998) 19–28.

[2] **Bernadou.M.** *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, **1994** Masson (Paris Milan Barcelone)

[3] **Bernadou. M and Haenel. C**. Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells. I. The continuous problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192(2003) 4003–4043.

[4] **Ghezal. A. Chacha. D. A.** Justification and solvability of dynamical contact problems for generalized Marguerre-von Kármán shallow shells, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics 98(5) (2018) 749–780.

[5] **Bensayah. A. Chacha. D. A. Ghezal. A**. Asymptotic modeling of Signorini problem with Coulomb friction for a linearly elastostatic shallow shell, Math. Meth. Appl. 39 (2016) 1410–1424.

[6] **Ikeda. T**. Fundamentals of Piezoelectricity, Oxford University Press (Oxford, 1990).

[7] **Duvant. G. Lions. J. L.** *Les inéquations en mécanique et en physique.* , Dunod 1972

[8] **Eck.C. Jarušek.J.** *Existence results for the static contact problem with Coulomb friction,Math.*, Models Methods Appl. Sci., 8,445-468(1998).

[9] **Fichera. G.** Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser. VIII (7) (1953) 91–140.

[10] **Yang. G.** The mechanics of piezoelectric structures, World Scientific, 2006.

[11] **Yan. G. Miara. B.** , Mathematical justification of the obstacle problem in the cas of piezoelectric plate, Asymptot. Anal. 96 (2016) 283–308.

[12] **Yan. G. Miara. B.**, Mathematical justification of the obstacle problem in the cas of piezoelectric shallow shell, Asymptotic Anal. 102 (2017) 71–97.

[13] **Fichera. G** Boundary value problems of elasticity with unilateral constrains. In handbuch der physik, band 6a/2, Springer-Verlag (Berlin, 1972).

[14] **Ciarlet P.G. and Miara B.,** *Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell*, Comm. Pure Appl. Math, **45** (1992), 327-360.

[15] **Léger. A . Miar. B.** *Mathematica justification of the obstacle problem in the case of a shallow shell.* J. Elasticity. Vol. 90, 2008,Pages 241-257.

[16] **Léger. A . Miara. B.** *the obstacle problem for shallow shells in curvilignes coordinates .* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2010

[17] **Paumier. J. C.** Le problème de Signorini dans la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love, C. R. Acad. Ser. I 335 (2002) 567–570.

[18] **Nécas.J. Jarusek.J . Haslinger.J.,** *On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction,Boll.U.M.I. 5(17B), 796-811 (1980).*

[19] **Renard. Y.** *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction.*4th Contact Mechanics International Symposium, Hannover, 2005.

[20] **Rodríguez-Arós. Á.** Models of Elastic Shells in Contact with a Rigid Foundation : An Asymptotic Approach, journal J. Elast., year 2018, volume 130, number "Issue 2", pages "211–237",

[21] **Galin.I ;A** Contact problemes, solid mechanics and its applications. Volume155 Sprinner,2008.

[22] **Maso. G. D. Paderni. G.** Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles, Ann. J. Mat. Pura Appl 153 (1988) 203–227.

[23] **Caffarelli. L. A. Friedman. A**. The obstacle problem for the biharmonic operator, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV 6 (1) (1979) 151–184.

[24] **Caffarelli. L. A. Friedman. A. Torelli. A**, The two-obstacle problem for the biharmonic operator, Pacific J. Math. 103 (3) (1982) 325–335.

[25] **Signorini. A.** *Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata.* Rend de Matematica, Rome, 1959

RÉSUMÉ

L'analyse asymptotique du problème piézoélectrique tridimensionnel effectuée dans ce chapitre conduit au problème de coques piézoélectriques membranaires dans le cas d'une coque uniformément elliptique encastrée sur partie de sa frontière latérale . On a ensuite justifié le modèle bidimensionnel . Pour cela , en utilisant la méthode des développements asymptotiques formelles que dans le cas avec frottement , on trouve un problème bidimensionnel de Signorini avec frottement.

Mots-clés: problème, contact,développement asymptotique, frottement , piézoélectrique,

ABSTRACT

The asymptotic analysis of the three-dimensional piezoelectric problem carried out in this chapter leads to the problem of membrane piezoelectric shells in the case of a uniformly elliptical shell embedded on part of its lateral boundary. We then justified the two-dimensional model. For this , using the method of formal asymptotic expansions that in the case with friction , we find a two - dimensional Signorini problem with friction .

Keywords :Problem,Contact, formal asymptotic, friction, piezoelectric.

الخلاصة

أدى التحليل المقارب لمسألة كهروضغطية ثلاثية الأبعاد التي تم إجراؤها في هذه المذكرة إلى مشكلة الأصداف الغشائية الكهروضغطية في حالة غلاف بيضاوي موحد مدمج في جزء من حدوده الجانبية. ثم بررنا النموذج ثنائي الأبعاد لهذه المسألة ، باستخدام طريقة التوسعات المقاربة الشكلية التي في حالة الاحتكاك ، نجد مشكلة Signorini ثنائية الأبعاد مع الاحتكاك.

الكلمات المفتاحية :مسألة , الإتصال , التوسعات المقاربة,الإحتكاك, كهروضغطية.