رقم الترتيب:

رقم التسلسل:

# جامعة قاصدي مرباح ورقلة

---------------------------

## كلية الرياضيات و علوم المادة

### قسم الرياضيات

### مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماسترأكاديمي

ميدان : رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص :تحليل دالي

الموضوع

## طرق حل بعض مسائل المعادلات التكاملية غير الخطية لفولتيرا


من إعداد الطالبة :

❑ بوخالفة مريم الباتول

تحت إشراف الأستاذ :

❑ قرفي عمارة


نوقشت يوم 20 جوان 2022 من طرف أعضاء اللجنة :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ▪ مصطفى عسيلة | أستاذ محاضر ب | جامعة قاصدي مرباح -ورقلة- | رئيسا |
| ▪ محمد السعيد سعيد | أستاذ محاضر أ | جامعة قاصدي مرباح -ورقلة- | مناقشا |
| ▪ عمارة قرفي | أستاذ محاضر أ | جامعة قاصدي مرباح -ورقلة- | مشرفا |

السّـنة الجـامعية 2022-2021

# شكر و عرفان

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم: (مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاس لَم يَشْكُر الله) رواه " أحمد والترمذي "

نتقدم بالشكر الجزيل و العرفان الجميل إلى كل من علمنا علما به ينتفع و أدب به يرتفع.

إلى كل من ساهم بقريب أو من بعيد في تكويننا طيلة مسارنا الدراسي الابتدائي و المتوسط و الثانوي ،وإلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مسارنا الجامعي .

تحية عطرة و شكر خاص للأستاذ المشرف " د.عمارة قرفي " الذي لم يبخل علينا بنصائحه و توجيهاته، لك منا كل معاني التقدير و العرفان .

و تحية طيبة إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة و إثراء هذه المذكرة.

# إهداء

الحمد لله الذي وهبني عقلا مفكرا، ولسانا ناطقا وأنار دربي، ويسر أمري لانهاء هذا العمل، والصلاة والسلام على رسول الله صلى الله عليه وسلم.

إلى التي على بساط الأوجاع ولدتني وبأيدي الآلام ربتني وبعيون التعب رعتني وبصدر المشقات حمتني، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي: أمي أمي أمي.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار وعلمني العطاء دون الإنتظار، إلى الذي أحمل إسمه بكل إفتخار، إلى قدوتي في الحياة، والدي حفظه الله.

إلى من تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود، إخوتي و أخواتي ..لقد كنتم نعم السند.

إلى كل الأهل والأقارب.

إلى أصدقائي وزملائي و رفقائي في هذا المشوار، إلى من تقاسمت معهم مر و حلو الحياة طوال خمس سنوات.

إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد.

إلى كل من تصفح هذه المذكرة وانتفع بها وتذكرنا بدعائه.

# الفهرس

# مقدمة

تعرف معادلات فولتيرا التكاملية الخطية و غير الخطية بتطبيقاتها في العديد من المجالات العلمية مثل :ديناميكية السكان، إنتشار الأوبئة و أجهزة المواصلات. بدأفولتيرا العمل على المعادلات التكاملية سنة 1884، أما دراسته الجادة بدأت في 1896. أطلق اسم المعادلات التكاملية من طرف $Bois - Reymond$ سنة1988.

نشأت المعادلات التكاملية لفريد هولم عن العديد من تطبيقات العلوم. أتم عمله على أكمل وجه في النظرية الطيفية التي لعبت دورا أساسيا في حل بعض المشاكل الفيزيائية سنة 1927. هدفنا في هذه المذكرة هو دراسة طرق إيجاد الحل التحليلي و التقريبي للمعادلات التكامل-التفاضلية غير الخطية لفولتيرا من النمطين الأول و الثاني.

و لهذا خصصنا عنوان المذكرة: طرق حل بعض مسائل المعادلات التكاملية غير الخطية لفولتيرا .

قسمنا المذكرة إلى ثلاثة فصول،أشرنا في الفصل الأول إلى بعض من أشكال المعادلات التكاملية غير الخطية و نظرية وجود و وحدانية الحل.

الفصل الثاني: قمنا بدراسة طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا من النمطين الأول و الثاني، حيث في النمط الثاني ذكرنا ثلاثة طرق و هي: طريقة الجمع بين تحويل لابلاس و طريقة أدوميان التحليلية ،طريقة تكرار المتغير و الحل على شكل سلسلة. أما بالنسبة للنمط الأول ذكرنا طريقتين وهي: الجمع بين تحويل لابلاس و طريقة أدوميان التحليلية، تحويل معادلة فولتيرا غير الخطية إلى النمط الثاني.

الفصل الثالث: درسنا طرق إيجاد الحل التقريبي لمعادلات فولتيرا التكامل-تفاضلية و مقارنتها مع الحل التحليلي.

# الفصل الأول

# أصناف المعادلات التكاملية

قائمة المحتويات

**تعريف 1.0.1** معظم المعادلات الفيزيائية يمكن تصنيفها إلى تفاضلية كما يمكن تصنيفها إلى معادلات تكاملية سواء كانت خطية أو غير خطية مشهورة .

# 1.1 : المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا

الشكل العام للمعادلة التكاملية الخطية:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

حيث:
$\lambda$ ثابت يحمل معاني فيزيائية.
$k(x,t)$ تسمى نواة المعادلة و تكون معلومة.
$f(x)$ دالة معلومة، و $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة يجب تحديدها.

## 1.1 معادلة فولتيرا التكاملية

تكتب من الشكل

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2}$$

**ملاحظة** 1.1.1 تسمى معادلة فريد هولم إذا:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{3}$$

# 2.1 : المعادلات التكاملية غيرالخطية لفولتيرا

**تعريف 1.2.1** الشكل العام للمعادلة التكاملية غير الخطية

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \tag{4}$$

حيث تكون فيها الدالة المجهولة عبارة عن دالة مركبة، أي $F(\varphi(x))$ مثال الدوال التالية:
$\varphi(x)^2$ ، $\varphi(x)^3$ ، $\cos\varphi(x)$ ، $\sin\varphi(x)$ ، $\exp^{\varphi}(x)$ ........
و هناك العديد من الأشكال غير الخطية نذكر بعضا منها :

## 1.1 بعض أنواع المعادلات التكاملية غير الخطية لفولتيرا

من بينها:

**معادلة يورشون-فولتيرا**

تكتب من الشكل :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t,\varphi(t))dt \tag{5}$$

حيث $x \in [0,T]; T < \infty$ حيث $f(x), k(x,t,\varphi(t))$ دوال معلومة أي $f(x) \in C[0,T]$ ، $\lambda$ ثابت و $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة. نسمي المعادلة (6) بمعادلة فولتيرا الغير الخطية. و تكون من النمط الأول إذا كان $u = 0$. و تكون من النمط الثاني إذا كان $u = C^int \neq 0$ . و من النمط الثالث إذا كان $u = u(x)$ .

**معادلة هامر يشتين التكاملية**

تكتب معادلة هامرشتين من الشكل:

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_D k(x,t)F(t,\varphi(t))dt \tag{6}$$

حيث $D \in \Re^n$ ، $n \geq 1$ لما $u = 1$ تكتب المعادلة

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(t,\varphi(x))dt \tag{7}$$

هي معادلة هامر يشتين-فولتيرا التكاملية من النمط الثاني .
لما $u = 0$ تصبح المعادلة

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(t,\varphi(t))dt = 0 \tag{8}$$

هي معادلة هامر يشتين-فولتيرا التكاملية من النمط الأول .

## 3.1 : مسألة الوجود و الوحدانية لمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية

نتطرق في هذا الجزء بذكر شروط وجود و وحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية .

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x G(x,t,\varphi(t))dt \qquad (9)$$

يكفي تحقق نظرية لوجود و وحدانية الحل [1] للمعادلة السابقة من خلال الشروط التالية :

1) تكامل الدالة $f(x)$ محدود على المجال $x \in [a,b]$.

2) الدالة $f(x)$ تحقق شرط ليبشيتز على المجال $x \in [a,b]$ أي

$$|f(x) - f(t)| < k|x - t|$$

3) الدالة $G(x,t,\varphi(t))$ قابلة للمكاملة و محدودة أي $|G(x,t,\varphi(t))| < k$ من أجل $a \leq x, t \leq b$

4) الدالة $G(x,t,\varphi(t))$ تحقق شرط ليبشيتز أي

$$|G(x,t,z) - G(x,t,z')| < k|z - z'|$$

# الفصل الثاني

# بعض طرق حل المعادلات التكامل - تفاضلية غير الخطية لفولتيرا

قائمة المحتويات

# 1.2 : معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير خطية من النمط الثاني

لنفتتح دراستنا بمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني و التي تكتب من الشكل :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \qquad (1)$$

حيث :
في $u^{(i)}(x)$ ، $i$ تمثل درجة الإشتقاق ، $f(u(t))$ دالة غير خطية ، و الدالة $f(x)$ و النواة $k(x,t)$ معلومتان ، الدالة $u(x)$ هي الدالة المجهولة .

يتوجب علينا معرفة الشروط الأولية لتحديد الحل الخاص $u(x)$ لهذه المعادلة .
سنوظف ثلاثة طرق لحل هكذا معادلات :

1. طريقة الجمع بين تحويل لابلاس و طريقة أدوميان التحليلية .
2. طريقة تكرار المتغير .
3. طريقة الحل على شكل سلسلة .

## 1.2 طريقة الجمع بين تحويل لابلاس وطريقة أدوميان التحليلية

في هذا القسم سوف نعتبر النواة $k(x,t)$ كنواة الفرق الذي يعتمد على الفرق $(x-t)$ مثل $e^{(x-t)}$ ، $\cosh(x-t)$ و $\sin(x-t)$.
وبالتالي يمكن التعبير عن معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية الغير خطية ب

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)F(u(t))dt \qquad (2)$$

لحل المعادلة نستخدم طريقة تحويل لابلاس فنجد :

$$L(u^{(i)}(x)) = p^i L(u(x)) - p^{i-1}u(0) - p^{i-2}u'(0) - \cdots - u^{(i-1)}(0) \qquad (3)$$

و عليه :

$$p^i L(u(x)) - p^{i-1}u(0) - p^{i-2}u'(0) - \cdots - u^{(i-1)}(0) = L(f(x)) + L(K(x-t)) * L(F(u(t))) \qquad (4)$$

بالقسمة على $p^i$

$$L(u(x)) = \frac{1}{p}u(0) + \frac{1}{p^2}u'(0) + \cdots + \frac{1}{p^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{p^i}L(f(x)) + \frac{1}{p^i}L(K(x-t)) * L(F(u(t))) \qquad (5)$$

من أجل التغلب على صعوبة الغير الخطية $F(u(x))$ نطبق طريقة أدوميان التحليلية، في البداية نركز على الخطية $u(x)$ التي في الجانب الأيسر من السلسلة اللانهائية

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad (6)$$

حيث : $n \geq 0$
$u(x)$ يكون بشكل متكرر . و الغير الخطية $F(u(x))$ التي في الجانب الأيمن تمثلها السلسلة اللانهائية متعددة الحدود لأدوميان $A_n$ على الشكل

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \tag{7}$$

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, ..., \tag{8}$$

حيث $A_n$ ، $n \geq 0$
بتعويض (6)،(7)،(8) في (5) نجد

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) = \frac{1}{p}u(0)+\cdots+\frac{1}{p^i}u^{(i-1)}(0)+\frac{1}{p^i}L(f(x))+\frac{1}{p^i}L(K(x-t))*L(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)) \tag{9}$$

طريقة أدوميان التحليلية

$$L(u_0(x)) = \frac{1}{p}u(0) + \frac{1}{p^2}u'(0) + \cdots + \frac{1}{p^i}u^{i-1}(0) + \frac{1}{p^i}L(f(x)) \tag{10}$$

$$L(u_{k+1}(x)) = \frac{1}{p^i}L(k(x-t)) * L(A_k(x)); k \geq 0 \tag{11}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على الجزء الأول من (11) يعطي $u_0(x)$ ، الذي سيحدد $A_0$ .
وعند إستخدام الجزء الثاني من (11) نجد التصميم الكامل لمكونات $u_{k+1}$ ، $k \geq 0$ .

**مثال 2.1.1** لدينا :

$$u'(x) = \frac{17}{4} + \frac{9}{2}x - 2x^2 - 3e^x - \frac{1}{4}e^{2x} + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt \tag{12}$$

حيث :

$$u(0) = 3$$

بإدخال تحويل لابلاس نجد :

$$L(u'(x)) = L(\frac{17}{4} + \frac{9}{2}x - 2x^2 - 3e^x - \frac{1}{4}e^{2x}) + L((x-t) * u^2(x)) \tag{13}$$

حيث :

$$L(u'(x)) = pL(u(x)) - u(0) = pU(p) - u(0)$$

$$L(1) = \frac{1}{p}$$

$$L(x) = \frac{1}{p^2}$$

$$L(x^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$L(e^{ax}) = \frac{1}{p-a}$$

و منه :

$$pU(p) - u(0) = \frac{17}{4p} + \frac{9}{2p^2} - 2(\frac{2}{p^3}) - \frac{3}{p-1} - \frac{1}{4(p-2)} + \frac{1}{p^2}L(u^2(x)) \qquad (14)$$

من أجل $u(0) = 3$ نجد :

$$U(p) = \frac{3}{p} + \frac{17}{4p^2} + \frac{9}{2p^3} - \frac{4}{p^4} - \frac{3}{(p-1)} - \frac{1}{4p(p-2)} \qquad (15)$$

$$U_0(p) = \frac{3}{p} + \frac{17}{4p^2} + \frac{9}{2p^3} - \frac{4}{p^4} - \frac{3}{(p-1)} - \frac{1}{4p(p-2)} \qquad (16)$$

$$L(u_{k+1}(x)) = \frac{1}{p^3}L(A_k(x)), k \geq 0$$

نسمي هذا بكثير حدود أدوميان من أجل $F(u(x)) = u^2(x)$ :

$$A_0 = \frac{1}{0!}[F(u)_0]_{\lambda=0}$$

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}[F(u_0 + \lambda u_1)]'_{\lambda=0}$$

$$A_1 = [(u_0 + \lambda u_1)^2]'_{\lambda=0}$$

$$A_1 = [(u_0)^2 + \lambda^2(u_1)^2 + 2\lambda u_0 u_1]'_{\lambda=0} = [2\lambda(u_1)^2 + 2u_0 u_1]$$

$$A_1 = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}[F(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)]''_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^2]''_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[(u_0)^2 + \lambda u_0 u_1 + \lambda^2 u_0 u_2 + \lambda u_0 u_1 + \lambda^2 u_1^2 + \lambda^3 u_1 u_2 + \lambda^2 u_0 u_2 + \lambda^3 u_1 u_2 + \lambda^4 u_2^2]''_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(2u_0u_1 + 2u_1^2 + 6u_1u_2 + 2u_0u_2 + 6\lambda u u_1 u_2 + 12\lambda^2 u_2^2)_{\lambda=0} = \frac{1}{2}(4u_0u_2 + 2u_1^2)$$

$$A_2 = 2u_0u_2 + u_1^2$$

و منه:

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0u_1$$

$$A_2 = 2u_0u_2 + u_1^2$$

$$A_3 = 2u_0u_3 + u_1u_2$$

نكتب $A_3$ بنفس الطريقة التي حسبناها في [1] نستعمل تحويل لابلاس العكسي

لدينا :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$
$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+2)}$$

و منه :

$$U_0(p) = \frac{3}{p} + \frac{17}{4p^2} + \frac{9}{2p^3} - \frac{4}{p^4} + \frac{3}{p} + \frac{3}{p-1} + \frac{1}{8p} + \frac{1}{8(p-2)}$$
$$u_0(x) = 3 + \frac{17}{4}x + \frac{9}{2}\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^3 + 3[1-e^x] + \frac{1}{8}[1-e^2x]$$

$$u_0(x) = 3 + \frac{17}{4}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 3(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - ...) + \frac{1}{8}(-2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - ...)$$

$$u_0(x) = 3 + (\frac{17}{4}x - 3 - \frac{1}{4})x + (\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4})x^2 + (-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6})x^3$$

$$u_0(x) = 3 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + ...$$

نحسب $u_1$

$$L(u_1(x)) = \frac{1}{p^3} L[A_0(x)]$$

حيث $A_0 = u_0^2$

$$u_0^2 = (3 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3)^2$$

$$u_0^2 = 9 + 6x + 4x^2 - 2x^3$$

بإدخال تحويل لابلاس

$$= \frac{1}{p^3} L(u_0^2) = \frac{1}{p^3} L(9 + ..)$$

لأن(نبحث عن العامل $\frac{1}{p^4}$ فقط )

$$= \frac{1}{p^3} L(u_0^2) = \frac{1}{p^3} L(\frac{9}{p} + ..)$$

$$= \frac{9}{p^4} + ...$$

$$u_1(x) = 9\frac{1}{6}x^3 + ....$$

$$u_1(x) = \frac{3}{2}x^3 + ....$$

بإستعمال (6) نجد حل السلسلة

$$u(x) = 3 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^3 + ...$$

$$u(x) = 2 + (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...)$$

يتقارب هذا إلى الحل الدقيق

$$u(x) = 2 + e^x$$

## 2.2 طريقة تكرار المتغير

توفر الطريقة تقريبا متتاليا للحل الدقيق في حالة وجوده ، حيث تعالج طريقة تكرار المتغير المشاكل الخطية و غير الخطية .
تكتب معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير الخطية من الشكل :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \tag{17}$$

التصحيح الدالي للمعادلة التكامل-تفاضلية غير الخطية (17)

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(u_n^{(i)}(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi K(\xi,r)F(\tilde{u}_n(r))dr)d\xi \qquad (18)$$

نستخدم طريقة تكرار المتغير من خلال تطبيق الخطوات التالية:

- أولا نقوم بتحديد مضاعف لاغرانج $\lambda$ من خلال التكامل بالتجزئة وباستخدام تباين مقيد . قد يكون مضاعف لاغرانج $\lambda$ ثابت أو دالة .
- يجب إستخدام صيغة التكرار دون تباين مقيد ، لتحديد تقريب التتابع $u_{n+1}(x)$ , $n \geq 0$ للحل $u(x)$ .

التقريب الصفري $u_0$ يمكن أن يكون أي وظيفة إنتقائية، يفضل إستخدام القيم الأولية $u(0)$، $u'(0)$، .... للتقريب الصفري الانتقائي $u_0$. نلخص مضاعفات لاغرانج ، والتقديرات الانتقائية الصفرية:

$$u' + f(u(\xi), u'(\xi)) = 0 \qquad (19)$$

حيث:

$$u_0(x) = u(0); \lambda = -1$$

$$u'' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi)) = 0 \qquad (20)$$

حيث:

$$u_0(x) = u(0) + u'(0)x \ ; \ \lambda = \xi - x$$

$$u''' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)) = 0 \qquad (21)$$

حيث:

$$\lambda = -\frac{1}{2!}(\xi - x)^2; u_0(0) = u(0) + u'(0)x + \frac{1}{2!}u''(0)x^2$$

وهكذا يعطى الحل كالتالي:

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \qquad (22)$$

**مثال 2.1.2** لدينا :

$$u'(x) = 2\cos x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x u(t)dt \qquad (23)$$

$$u(0) = 0$$

نضع :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left( u_n'(t) - 2\cos t + \frac{1}{2}t^2 - \int_0^x u_n^2(r)dr \right) dt \tag{24}$$

حيث $\lambda = -1$
بوضع $u_0(x) = u(0) = 0$ يصبح

$$u_0(x) = 0$$

لحساب $u_1$ نعوض $u_0$ في المعادلة (23) نجد

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left( u_0'(t) - 2\cos t + \frac{1}{2}t^2 - \int_0^x u_0^2(r)dr \right) dt \tag{25}$$

$$= -\int_0^x (-2\cos t + \frac{1}{2}t^2)dt$$

نكامل نجد

$$u_1(x) = 2\sin x - \frac{1}{6}x^3$$

$$u_2(x) = 2\sin x - \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x \left( u_1'(t) - 2\cos t + \frac{1}{2}t^2 - \int_0^x u_1^2(r)dr \right) dt \tag{26}$$

$$= 2x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5$$

$$u_3(x) = 2x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

حل السلسلة هو

$$u(x) = x + (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...)$$

لدينا :

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

يتقارب هذا إلى الحل الدقيق

$$u(x) = x + \sin x$$

## 3.2 طريقة الحل على شكل سلسلة

يتم إستخدام هذه الطريقة للتعامل مع المعادلات التكاملية و التكامل -تفاضلية، حيث تنبع هذه الأخيرة من سلسلة تايلور للدوال التحليلية.
تسمى الدالة الحقيقية $u(x)$ بالتحليلية و يكون لديها مشتقات من جميع الدرجات مثل سلسلة تايلور في أي نقطة $b$ من مجالها.

$$u_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{u^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{27}$$

تتقارب إلى $u(x)$ بجوار $b$.
للتبسيط، نكتب الشكل العام لسلسلة تايلور لما $x = 0$ من الشكل:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{28}$$

نستخدم طريقة سلسلة تايلور، أو طريقة الحل المتسلسل لحل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا. نفرض أن الحل $u(x)$ من أجل معادلات فولتيرا التكامل -تفاضلية غير الخطية .

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \tag{29}$$

حيث :

$$0 \leq k \leq (n-1) \ ; \ u^k(0) = k!a_k$$

تحليلي، وبالتالي تمتلك سلسلة من النوذج الوارد في (28)، يتم تحديد المعاملات $a_n$ بشكل متكرر.
يمكن تحديد المعاملات الأولى $a_k$ بإستخدام الشروط الأولية أي :

$$a_0 = u(0), a_1 = u'(0), a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0), \tag{30}$$

و المعاملات المتبقية $a_k$ من (28) يتم تحديدها من خلال حل المعادلة على شكل سلسلة .
بتعويض (28) في (29) نجد :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n = T(f(x)) + \int_0^x k(x,t)F\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)dt \tag{31}$$

حيث : $T(f(x))$ هي سلسلة تايلور ل $f(x)$ .
نقوم بتحويل المعادلة التكامل-تفاضلية إلى التكامل التقليدي في (31) بدلا من التكامل الدالة المجهولة $F(u(x))$ ، تكون قابلة للتكامل. إذا كانت $f(x)$ تتضمن دوال أولية مثل الدالة المثلثية،الدالة الأسية ...إلخ .
أولا نكامل الطرف الأيمن من التكامل الموجود في(31) و نجمع معاملات قوى $x$ المتشابهة.

بعد ذلك نقوم بمساواة المعاملات التي من نفس القوة في كلا الجانبين للمعادلة لتحديد علاقة التكرار في $j \geq 0, a_j$ إن حل علاقة التكرار يؤدي إلى تحديد كامل للمعاملات $a_j$، $j \geq 0$، حيث سيتم إستخدام البعض من المعاملات للشروط الأولية .
بعد تحديد المعاملات $a_j$، $j \geq 0$، يتبع الحل المتسلسل فور استبدال المعاملات المشتقة في (28).

**مثال 3.1.2**

$$u'(x) = -\frac{1}{2}x + \sin x + \cos x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \int_0^x (x-t)(1-u^2(t))dt, u(0) = -1 \qquad (32)$$

لدينا :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (33)$$

نعوض في

(34)

$$\left(u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = T\left(-\frac{1}{2}x + \sin x + \cos x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right) + \int_0^x \left(T(x-t)\left(1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^2\right)\right) dt$$

حيث :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ... \qquad (35)$$

لدينا نشر تايلور

$$\sin x = 0 + x - \frac{1}{3!}x^3 \qquad (36)$$

$$\sin(2x) = 0 + \frac{2}{1!}x - \frac{8}{3!}x^3 + ... \qquad (37)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + ... \qquad (38)$$

$$\int_0^x (x-t)(1-(a_0 - a_1 t)^2)dt \qquad (39)$$

$$= \int_0^x (x-t)(1-(a_0^2 + a_1^2 t^2 - 2a_0 a_1 t))dt$$

نضع $a_0 = -1$

$$= \int_0^x (x-t)(1-1-a_1^2t^2+2a_1t))dt \tag{40}$$

$$= -\int_0^x (x-t)(a_1^2t^2+2a_1t)dt$$

$$= -\int_0^x a_1^2t^2x+2a_1tx-a_1t^2dt$$

نكامل بالتجزئة

$$= ([\frac{a_1^2}{3}t^3x]_0^x+[a_1t^2x]_0^x+[-\frac{a_1^2}{4}t^4]_0^x+[-\frac{2}{3}t^3]_0^x)$$

$$= -\frac{a_1^2}{3}x^4-a_1x^3+\frac{a_1^2}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3$$

تصبح المعادلة

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+... \tag{41}$$

$$= -\frac{1}{2}x+(x-\frac{1}{3!}x^3)+(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4)+(\frac{2}{4}x-\frac{2}{3!}x^3)-\frac{a_1^2}{3}x^4-a_1^3+\frac{a_1^2}{4}x^4+\frac{2}{3!}x^3)$$

$$1+x-\frac{1}{2!}x^2+(\frac{1}{3!}-a_1)x^3+(\frac{1}{4!}-\frac{a_1^2}{12})x^4+...$$

بالمطابقة نجد :

$$a_0=-1\ a_1=1\ a_2=\frac{1}{2!}\ \ -\frac{1}{3!}$$

و عليه :

$$u(x)=-1+x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+.... \tag{42}$$

و منه :

$$u(x)=\sin x-\cos x \tag{43}$$

## 2.2 : معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير خطية من النمط الأول

تكتب المعادلة من الشكل :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(i)}(t)dt = f(x) \quad (44)$$

حيث : في $u^{(i)}(x)$، $i$ تمثل درجة الإشتقاق، $F(u(x))$ دالة غير خطية ، و الدالة $f(x)$ و الأنوية $k_1(x,t)$ و $k_2(x,t)$ ذات قيم حقيقية . سوف نتطرق إلى طرق الحل التالية :

1 الجمع بين تحويل لابلاس و طريقة أدوميان التحليلية .

2 تحويل معادلة فولتيرا الغير الخطية إلى النمط الثاني .

### 1.2 طريقة الجمع بين تحويل لابلاس و طريقة أدوميان التحليلية

أستخدمت هذه الطريقة لحل المعادلات التكامل - تفاضلية الغير الخطية لفولتيرا من النمط الثاني. الأنوية $k_1(x,t)$ و $k_2(x,t)$ من (44) هي أنوية مختلفة،أي كل نواة تعتمد على الفرق $(x-t)$. بإدخال تحويل لابلاس نجد:

$$L(K_1(x-t)*F(u(x))) + L(K_2(x-t)*u^{(i)}(x)) = L(f(x)) \quad (45)$$

حيث

$$K_1(s)L(F(u(x))) + K_2(s)L(u^{(i)}(x)) = \phi(s) \quad (46)$$

أي

$$\phi(s) = L(f(x)), K_1(s) = L(K_1(x)), K_2(s) = L(K_2(x)) \quad (47)$$

$$L(u^{(i)}(x)) = s^i L(u(x)) - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - ....u^{(n-1)}(0) \quad (48)$$

و عليه

$$K_2(s)*s^iL(u(x)) - K_2(s)[s^{i-1}u(0) + ...u^{(n-1)}(0)] = \phi(s) - K_1(s)L(F(u(x))) \quad (49)$$

بحيث

$$\Gamma(s) = s^{i-1}u(0) + s^{i-2}u'(0) + ... + u^{(i-1)}u(0) \quad (50)$$

$$U(s) = L(u(x)) \quad (51)$$

$$U(s) = \frac{\phi(s) + K_2(s)\Gamma(s) - K_1(s)L(F(u(x)))}{s^iK_2(s)} \quad (52)$$

تستخدم هذه الطريقة في المعادلة (52)، بشرط:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{K_1(s)}{s^iK_2(s)}=0 \tag{53}$$

نطبق طريقة أدوميان التحليلية على (52) من أجل التغلب على صعوبة $F(u(x))$.
نقوم بتمثيل العبارة الخطية $u(x)$ بواسطة سلسلة غير منتهية من العناصر كالتالي:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \tag{54}$$

حيث العناصر $n\geq 0,u_n(x)$ يتم تحديدها بالتكرار. و العبارة الغير الخطية $F(u(x))$ التي في الجانب الأيمن من (52) نمثلها بسلسلة لانهائية من كثيرات الحدود لأدوميان $A_n(x)$ في العبارة:

$$F(u(x))=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x) \tag{55}$$

حيث كثيرات حدود أدوميان $n\geq 0,A_n$ تكتب من الشكل:

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F(\sum_{i=0}^{n}\lambda^iu_i)\right]_{\lambda=0},n=0,1,2,..., \tag{56}$$

نعوض (54) و (55) في (52) نجد:

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)=\frac{1}{s}u(0)+\frac{1}{s^2}u'(0)+\cdots+\frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0)+\frac{1}{s^iK_2(s)}\phi(s)-\frac{K_1(s)}{s^iK_2(s)}L\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\right) \tag{57}$$

تعرف طريقة أدوميان التحليلية بإستخدام مايلي:

$$U_0(s)=\frac{1}{s}u(0)+\frac{1}{s^2}u'(0)+\cdots+\frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0)+\frac{1}{s^iK_2}\phi(s) \tag{58}$$

$$L(u_{k+1}(x))=-\frac{K_1(s)}{s^iK_2(s)}L(A_k(x));k\geq 0 \tag{59}$$

إثبات ذلك:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{K_1(s)}{s^iK_2(s)}=0 \tag{60}$$

**مثال 1.2.2**

$$\int_0^x(x-t)u^2(t)dt+\int_0^x(x-t)u'(t)dt=\frac{1}{8}-x+\frac{1}{4}x^2+\sin x-\frac{1}{8}\cos(2x),u(0)=1 \tag{61}$$

بإدخال تحويل لابلاص

$$L((x-t)u^2(t)) + L((x-t)u'(t)) = L(\frac{1}{8} - x + \frac{1}{4}x^2 + \sin x - \frac{1}{8}\cos(2x)) \tag{62}$$

$$\frac{1}{p^2}L(u^2)(p) + \frac{1}{p^2}(pU(p) - u(0) = \frac{1}{8p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{8(p^2+4)} \tag{63}$$

حيث:

$$u(0) = 1$$

و عليه:

$$U(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{8} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2}\frac{p}{p^2+1} - \frac{p^2}{8(p^2+4)} - \frac{1}{p}L(u^2)(p) \tag{64}$$

إذا

$$u_0(p) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{p^2}{8(p^2+4)} \tag{65}$$

$$L(u_{k+1}(x)) = -\frac{1}{p}L(A_k(x))$$

حيث $k \geq 0$ بإستخدام تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$u_0(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

$$u_1(x) = -x - x^2 + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^5}{10} + ...$$

$$u_2(x) = x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + ...$$

$$u_3(x) = -\frac{6}{3!}x^3 - \frac{40}{4!}x^4 + ...$$

$$u_4(x) = \frac{4*3!}{4!}x^4 + ...$$

يكون حل السلسلة

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

يتقارب هذا إلى الحل الدقيق

$$u(x) = \cos x$$

## 2.2 طريقة تحويل معادلة فولتيرا الغير الخطية إلى النمط الثاني

في هذه الطريقة نقوم بتحويل المعادلة التكامل-تفاضلية الغير الخطية لفولتيرا من النمط الأول .

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x) \tag{66}$$

حيث : $k_2(x,x) \neq 0$ إلى معادلة فولتيرا تكامل-تفاضلية غير الخطية من النمط الثاني. ندرس الإشتقاق من الدرجة الأولى و الثانية

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u'(t)dt = f(x) \tag{67}$$

$$k_2(x,x) \neq 0$$

و

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u''(t)dt = f(x) \tag{68}$$

$$k_2(x,x) \neq 0$$

يمكن التعامل مع المعادلات من درجات أعلى بطريقة مماثلة . نكامل بالتجزئة المعادلة (67) نجد :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + k_2(x,x)u(x) - k_2(x,0)u(0) - \int_0^x \frac{\partial k_2(x,t)}{\partial t}u(t)dt = f(x) \tag{69}$$

إذا:

$$u(x) = \frac{f(x)}{k_2(x,x)} + \frac{k_{k2}(x,0)}{k_2(x,x)}u(0) + \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x \frac{\partial(k_2(x,t))}{\partial t}u(t)dt - \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt \tag{70}$$

حيث:

$$k_2(x,x) \neq 0$$

و هي معادلة من النمط الثاني. نكامل بالتجزئة المعادلة (68) نجد:

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t)) + k_2(x,x)u'(x) - k_2(x,0)u'(0) - \int_0^x \frac{\partial k_2(x,t)}{\partial t}u'(t)dt = f(x) \tag{71}$$

$$k_2(x,x) \neq 0$$

وعليه

$$u'(x) = \frac{f(x)}{k_2(x,x)} + \frac{k_2(x,0)}{k_2(x,x)}u'(0) + \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x \frac{\partial k_2(x,t)}{\partial t}u'(t)dt - \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt \tag{72}$$

حيث:

$$k_2(x,x) \neq 0$$

المعادلة (72) أصبحت من النمط الثاني.

**مثال 2.2.2** لدينا:

$$\int_0^x (t^2 - u^2(t))dt + \int_0^x e^{x-t}u'(t)dt = -\frac{5}{2} + e^x(3-x) - \frac{1}{2}e^{2x}, u(0) = 1 \qquad (73)$$

بتحويل المعادلة إلى النمط الثاني

$$u(x) = -\frac{5}{2} + e^x + e^x(3-x) - \frac{1}{2}e^{2x} - \int_0^x (t^2 - u^2(t))dt - \int_0^x e^{x-t}u(t)dt \qquad (74)$$

(وهي معالجة سابقا).

# الفصل الثالث

# بعض الطرق العددية لحل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا

قائمة المحتويات

الهدف من هذا العمل هو إيجاد الحل التحليلي و التقريبي لبعض أنواع المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية و المقارنة بينهم بإستخدام عدة طرق نذكر منها .

**تذكير 1.0.3** الغرض من هذا التذكير هو إعطاء طرق تسمح بحساب القيمة التقريبية للتكامل

$$\int_a^b f(t)dt$$

على المستوى العملي ، للحصول على تقدير تقريبي عندما لا يمكن حساب بدائل $f$. على المستوى النظري ، معرفة الطرق التي تسمح بالحصول على إطارات ذات سعة صغيرة حسب الرغبة. عندما تكون الدالة $f$ من الصنف $C^n$ على المجال $i = [a,b]$، نلاحظ $M_i = max|f^{(i)}|$ و $x \in [a,b], i = 1,2,3,...,n$ ، نقسم المجال $[a,b]$ إلى $n$ مجال $n \in N^*$ بنفس الطول $h = \dfrac{b-a}{n}$ و هو مايسمى خطوة التقسيم الفرعي . كل $i = 1,2,3,...,n$ لدينا $x_i = a + ih$.

## 1.3 : طريقة *raphson Newton*

عندما تكون مشتقة الدالة $f$ بسيطة ومن السهل إيجادها فإن الجذور الحقيقية للمعادلة $f(x) = 0$ يمكن إيجادها باستخدام طريقة نيوتن - رافسون.
نفرض بأن لدينا قيمة تقريبية أولية للجذر المطلوب $\lambda$ ولتكن $x_0$ ونفرض أن $h$ تمثل مقدار التصحيح الذي يجب أن نضيفه للقيمة $x_0$ لنحصل على الجذر المطلوب $\lambda$ ،أي إذن:

$$h = x_0 + h$$
$$f(x_0 + h) = f(\lambda) = 0$$

وبتطبيق توسيع تايلور للدالة $f$ حول $x_0$ نحصل على:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0+), 0 < \theta < 1$$

نحصل على

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$
$$h_1 = h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

فتصبح القيمة التقريبية

$$x_1 = x_0 + h_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

## 2.3 : طريقة شبه منحرف (*trapèzes*)

نستبدل المنحنى الذي يمثل $f$ ، على كل جزء من التقسيم الفرعي، بالقسم الذي يربط $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))a(x_i, f(x_i))$.
تحسب صيغة شبه المنحرف القيمة الفعلية للتكامل عندما تكون $f$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر. القيمة المطلقة للتكامل $f$ على $i$ بطريقة شبه منحرف يتم الحصول عليها بواسطة

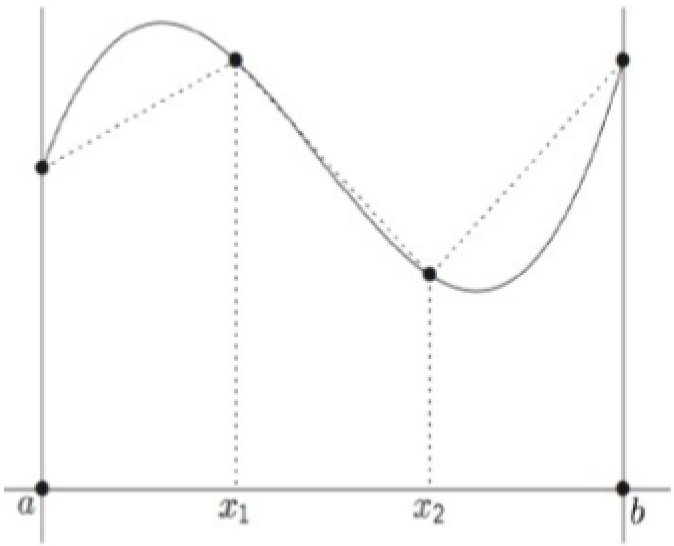
$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) \tag{1}$$

مساحة شبه منحرف في القاعدة $[x_i, x_{i+1}]$ هي

$$\frac{(x_{i+1}-x_i)(f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{h(f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \tag{2}$$

نستنتج

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_i)+f(x_{i+1})/2 = h\left(\frac{f(a)-f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) \tag{3}$$




شكل الفصل الثالث.1: طريقة شبه منحرف

**مثال 1.2.3**

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{x^6}{6}e^{-x} + \int_0^x te^{-x}\varphi^2(t)dt \tag{4}$$

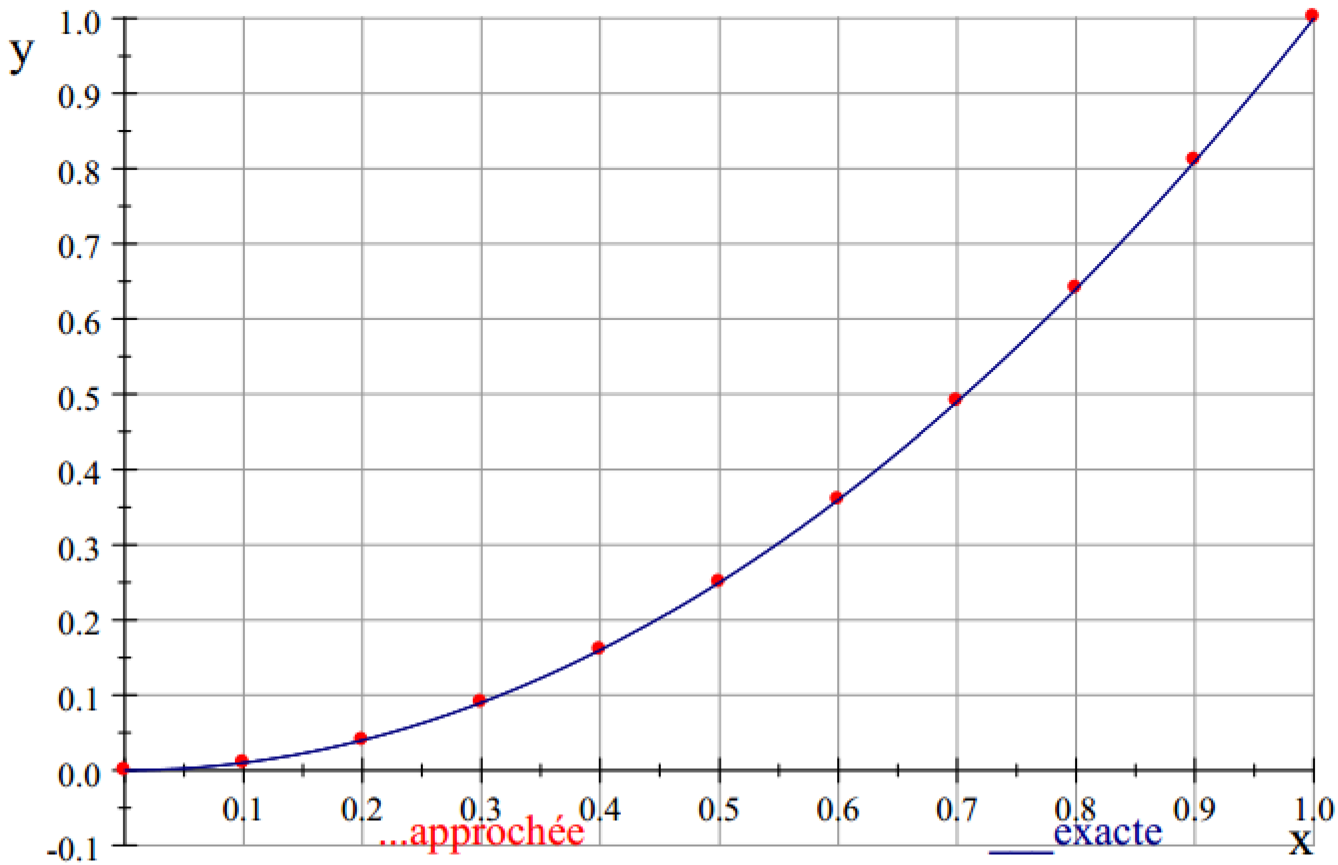
يعطى الحل الدقيق للمعادلة

$$\varphi(x) = x^2 \tag{5}$$

نبحث عن الحل التقريبي ،النتائج مدونة في الجدول التالي :

| الخطأ | الحل التقريبي | الحل الدقيق | x |
|---|---|---|---|
| $0.0000e+00$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $3.016e-7$ | 0.0100003 | 0.01 | 0.1 |
| $5.188e-6$ | 0.0400051 | 0.04 | 0.2 |
| $2.450e-5$ | 0.0900245 | 0.09 | 0.3 |
| $7.100e-5$ | 0.1600710 | 0.16 | 0.4 |
| $1.585e-4$ | 0.2501585 | 0.25 | 0.5 |
| $3.010e-4$ | 0.3603010 | 0.36 | 0.6 |
| $5.124e-4$ | 0.4905124 | 0.49 | 0.7 |
| $8.069e-4$ | 0.6408067 | 0.64 | 0.8 |
| $1.199e-3$ | 0.8111998 | 0.81 | 0.9 |
| $1.706e-3$ | 1.0017069 | 1.0 | 1 |

جدول الفصل الثالث.1: المقارنة بين الحل الدقيق و الحل التقريبي.



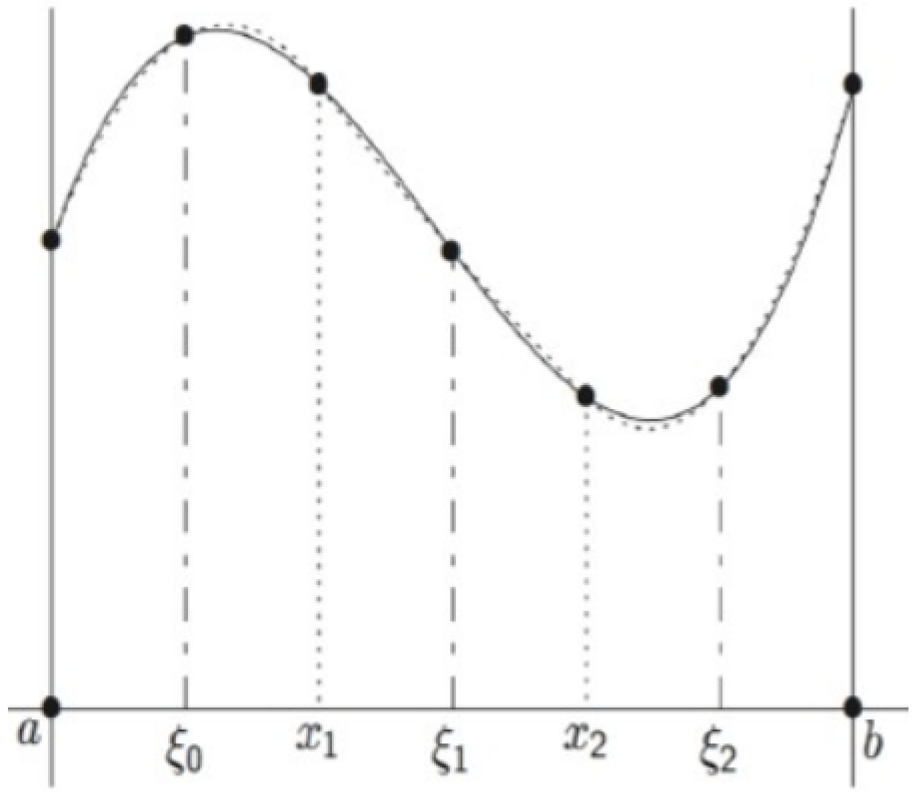

شكل الفصل الثالث،2: المقارنة بين الحل الدقيق و الحل التقريبي

## 3.3 : طريقة *Simpson*

تعتبر صيغة سمبسون من أكثر الصيغ استخداما حيث انها تستخدم على نطاق واسع لحل المسائل التطبيقية التي تتضمن تكاملات محدودة لدقتها الحسابية وسهولة استخدامها.

حيث تحسب القيمة الفعلية للتكامل إذا كانت $f$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية أو أقل .

هذه الطريقة تمكننا من إستبدال $f$ على المجال $[x_i, x_{i+1}]$ بواسطة كثير الحدود لاغرانج $P_i$ من الدرجة الثانية لها نفس قيم $f$ في حدود الفترة وفي وسطها.




شكل الفصل الثالث.3: طريقة سمبسون

**مثال 1.3.3** لدينا المعادلة التكاملية التالية

$$\varphi(x) = -x\cos(x) + \sqrt{x+1} + \int_0^x \frac{\cos(x)}{(t+1)}\varphi^2(t)dt \tag{6}$$

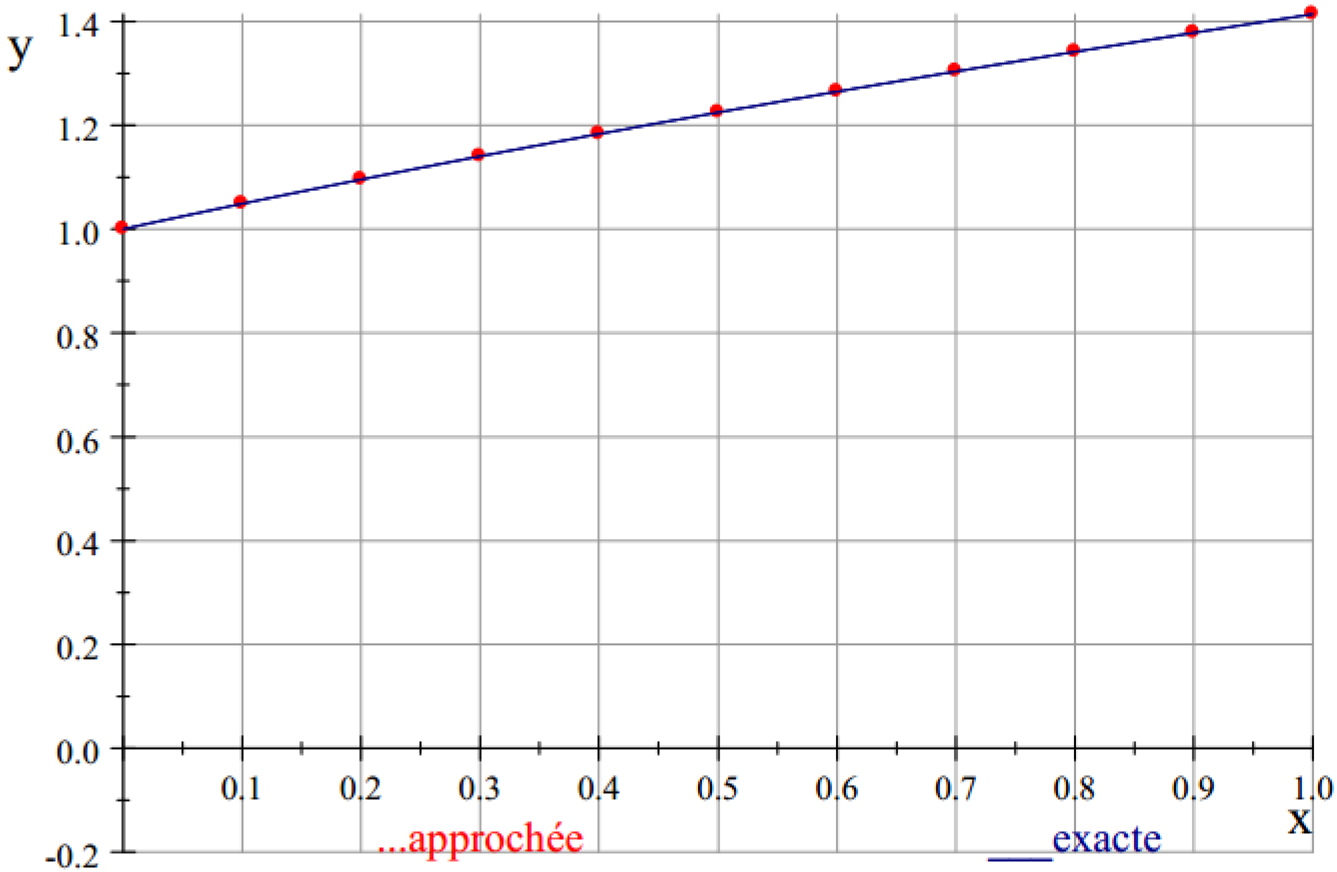
الحل الدقيق للمعادلة

$$\varphi(x) = \sqrt{x+1} \tag{7}$$

نبحث عن الحل التقريبي ،النتائج مدونة في الجدول التالي

| الخطأ | الحل التقريبي | الحل الدقيق | x |
|---|---|---|---|
| $0.0000e+00$ | 1.0000 | 1.0000 | 0.0 |
| $0.0000e+00$ | 1.0488088 | 1.0488088 | 0.1 |
| $0.0000e+00$ | 1.0954451 | 1.0954451 | 0.2 |
| $0.0000e+00$ | 1.1401754 | 1.1401754 | 0.3 |
| $0.0000e+00$ | 1.1832159 | 1.1832159 | 0.4 |
| $0.0000e+00$ | 1.2247448 | 1.2247448 | 0.5 |
| $0.0000e+00$ | 1.2649110 | 1.2649110 | 0.6 |
| $4.4408e-16$ | 1.3038404 | 1.3038404 | 0.7 |
| $1.1102e-15$ | 1.3416407 | 1.3416407 | 0.8 |
| $2.6645e-15$ | 1.3784048 | 1.3784048 | 0.9 |
| $4.88498e-15$ | 1.4142135 | 1.4142135 | 1 |

جدول الفصل الثالث.2: المقارنة بين الحل الدقيق و الحل التقريبي.




شكل الفصل الثالث.4: المقارنة بين الحل الدقيق و الحل التقريبي

**مثال 2.3.3**

$$u'(x)=1-e^x+e^{2x}+\int_0^x e^{x-1}(1-u^2(t))dt, u(0)=1 \tag{8}$$

بإستخدام نشر تايلور نجد الحل الدقيق للمعادلة
نستبدل $u(x)$ بالسلسلة

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9}$$

في طرفي المعادلة (6) نجد

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = T_1(1-e^x+e^2x)+\int_0^x \left(T_2(e^{x-t})\left(1-\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^2\right)\right) dt \tag{10}$$

حيث $T_1$و$T_2$ هي سلسلة تايلور بحيث $x=0$ ، $t=0$. بإيجاد التكامل في الطرف الأيمن باستخدام $a_0=1$، نجد

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^5+...$$

$$=1+x+\left(\frac{3}{2}-a_1\right)x^2+\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{3}a_1^2-\frac{2}{3}a_2-\frac{1}{3}a_1\right)x^3+\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{12}a_1^2-\frac{1}{6}a_2-\frac{1}{12}a_1-\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{2}a_1a_2\right)x^4+$$
$$\left(\frac{31}{120}-\frac{1}{60}a_1-\frac{1}{60}a_1^2-\frac{1}{30}a_2-\frac{1}{5}a_2^2-\frac{2}{5}a_4-\frac{2}{5}a_1a_3-\frac{1}{10}a_3-\frac{1}{10}a_1a_2\right)x^5+O(x^6)$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{n!}, n\geq 0.$$

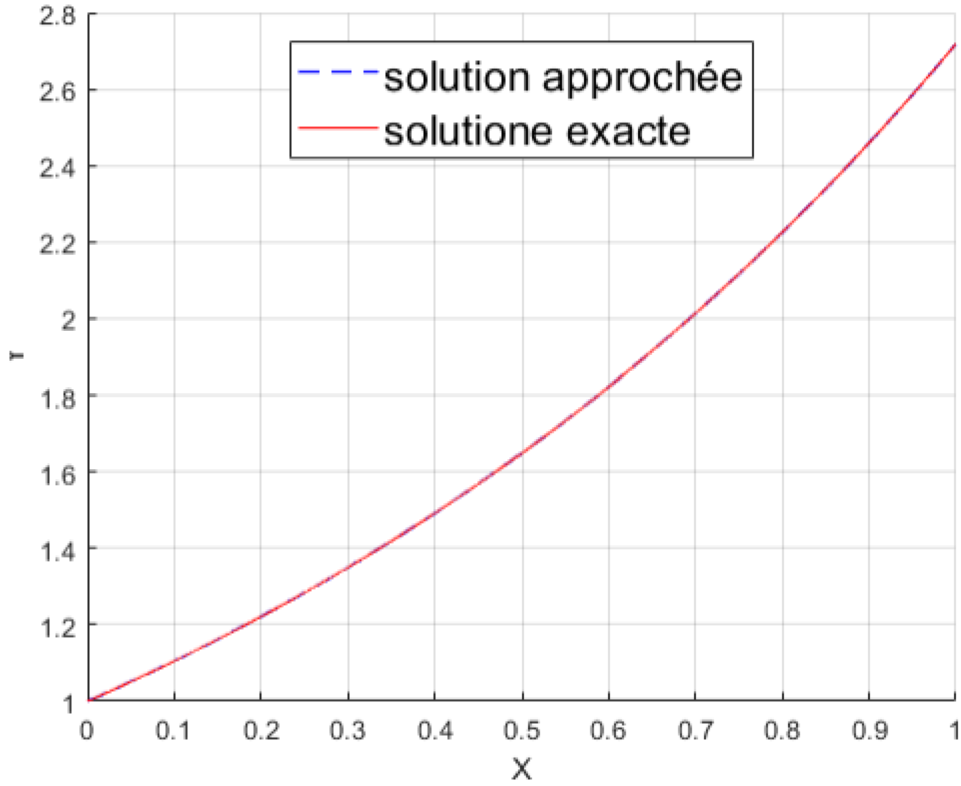
يعطى الحل الدقيق ب

$$u(x)=e^x$$

نبحث عن الحل التقريبي $u_n$ للمعادلة بإستخدام برنامج مطلاب $(matlb)$، القيم مدونة في الجدول التالي

| x | الحل الدقيق | الحل التقريبي | الخطأ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | $0.0000e+00$ |
| 0.1 | 1.1052 | 1.1052 | $1.0807e-11$ |
| 0.2 | 1.2214 | 1.2214 | $3.7288e-10$ |
| 0.3 | 1.3499 | 1.3499 | $3.7646e-10$ |
| 0.4 | 1.4918 | 1.4918 | $1.3496e-09$ |
| 0.5 | 1.6487 | 1.6418 | $2.8976e-09$ |
| 0.6 | 1.8221 | 1.8221 | $4.5582e-09$ |
| 0.7 | 2.0138 | 2.0138 | $6.2088e-09$ |
| 0.8 | 2.2255 | 2.2255 | $5.4026e-09$ |
| 0.9 | 2.4596 | 2.4596 | $4.0772e-09$ |
| 1 | 2.7183 | 2.7183 | $2.5756e-09$ |

جدول الفصل الثالث.3: المقارنة بين الحل الدقيق و الحل التقريبي.




شكل الفصل الثالث.5: التقدير الهندسي للحل

# خاتمة

تكمن أهمية مضمون هذا العمل في أننا تعرفنا على البعض من أشكال المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية و التي تكمن أهميتها على العموم في المسائل الفيزيائية .

كما درسنا المعادلات التكامل-تفاضلية غير خطية لفولتيرا من النمطين الأول و الثاني و طرق حلها بشكل مفصل .

و في الأخير تطرقنا إلى البحث عن الحل التقريبي للمعادلات التكامل-تفاضلية و مقارنتها مع الحل التحليلي .

# المراجع العلمية


[1] *Abdul-majid Wazwaz ,Linear and non-linear integral equations methods and application ,saint xavier university chicago.USA April* 20 ,2011

[2] *Birlin heidelberg , volterra-stieltjes integral equations and generalized ,Ordinary differential expressions springer-vealag ,New york ,Tokyo* 1983.

[3] *B. Basirat, M. Amin Shadadi, Numerical solution of a singular integro-differential equation, Int. Jou. Mod. N. L. Th. App., (2), (2013), 141-149.*

[4] *B. Golubov, A. Efimov and V. Skvortsov, Walsh Series and Transforms (Theory and Applications), Springer Netherlands, 1991.*

[5] *C. Baker, The Numerical Treatment of Integral Equations, Oxford University Press, London,* (1977).

[6] *C. CORDUNEANU. Integral equations and applications The University of Texas at Arlington.*

[7] *Gabriel Peyré.Résolution numérique d'équations intégrales Exemple de la radiosité 2001.*

[8] *G. Ebadi, M. Y. Rahimi-Ardabili, S. Shahmorad, Numerical solution of the nonlinear Volterra integro-dfferential equations by the Tau method, Appl. Math. Comput. 188(2007) 1580- 1586.*

[9] *H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publications, New York.* 1962.

[10] *Juren appell espedito de pascale alfonso vignoli ,Non-linear spectral theory ,walter de gruyter ,berlin ,New york* 1993.

[11] Jean-Paul Chehab. *Résolution numérique d'une équation non linéeaire (notes de cours) Université de Picardie Jules Vernes LAMFA CNRS* 6140 *version* 2009.

[12] *J. S. Duan, Recurrence triangle for Adomian polynomials, Appl. Math. Comput. 216(2010) 1235-1241.*

[13] *J. Zhao, R.M. Corless, Compact Önite di§erence method for integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 177 (2006) 271-288.*

[14] *khirani A. Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magister université de M sila* 2011.

[15] *Krasnov M, Kissélev A, Makarenko G. Equations intégales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou,* 1977.

[16] *K. Maleknejad and Y. Mahmoudi, Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, Appl. Math. Comput.* 145 $(2003)641-653$.

[17] *M.rahman ,integral equations and their applications ,Dalhousie university ,Canada* 1988.

[18] *M. Cakir and D. Arslam, The Adomian decomposition method and the differential transform method for numerical solution of multi-pantograph Delay differential equations, Apllied Methematics, (6) (2015) 1332-1343.*

[19] *M. T. Rashed, Numerical solution of functional, integral and integro-differential equations, Appl. Numer. Math. 156 (2004).*

[20] *Peter J.collins . Differential and integral equations ,Senior st edmund , Oxford* 1990.

[21] *S. H. Behiry, Nonlinear Integro-defferential equations by differential transform method with Adomian polynomials, Math. Sci. Lett,* $2(3)(2013), 209-221$.

[22] *T.A.burton , volterra integral and differential equations ,Southern illnios university carbondale , USA 1993.*

## ملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة بعض طرق حل المعادلات التكاملية و التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا من النمطين الأول و الثاني .
كما قمنا بدراسة طرق إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات تكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا و مقارنتها مع الحل التحليلي.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية غير الخطية لفولتيرا، المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا، غير خطية من النمط الأول، غير خطية من النمط الثاني.

## Abstract

*The main objective of this work is to Study some of methods for solving nonlinear integral-differential equations of Volterra of the first and second kind.*
*We also studied methods for finding approximate solutions to nonlinear Integral-Differential Equations of Volterra and compare it with the analytical solution.*

**The keys words:** *nonlinear volterra integral equations, nonlinear volterra integro-differentiol equations, nonlinear first kind, nonlinear second kind.*