République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématique et des Science de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

Mémoire de Master

en Mathématique

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse fonctionnelle

Thème :

Résolution d'un problème non linéaire par la méthode d'homotopie

---

Réalisé par :

MEDJOUDJA SABILA

Soutenue le : 20/06/2022

Jury de soutenance :

Mr. Said Mohammed AL Said	M.C.B Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Dr. Meflah Mabrouk	M.C.A Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur
Mr. Akti Mohammed	M.C.B Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur

Année Universitaire : 2021-2022

DÉDICACE

je dédie ce travail à mes parents et à mes frères et soeurs , à tous les membres de ma famille , à mes Amies
A tous ceux qui a donné un mot pour la force de continuer ....

REMERCIEMENT

En préambule à ce mémoire, je remercie ALLAH qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude. En second lieu, je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur Mlle : khoukhi Alae Nour sur ses précieux conseils et je remercie également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions. Je remercie aussi mes parents, mes soeurs et mes frères, pour m'avoir encouragé et son soutien et ma famille et mes amis, pour son soutien et ses encouragements. Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'équation différentielle ordinaire non linéaire a été explorée par des mathéma-ticiens et des chercheurs utilisant des méthodes et des outils L'EDO non linéaire apparaît dans l'étude d'un certain nombre de branches des mathématiques appliquées telles que la rhéologie, la biologie quantitative et la théorie de la diffusion Les mathématiciens ont fourni de nombreuses méthodes pour obtenir une solution approximative pour les équipements de développement non linéaires de second ordre, telles que la méthode de perturbation symétrique (MPH), la méthode d'analyse d'homologie (MAH), la méthode de symétrie parfaite et la méthode de fréquence variable (MIV).

Dans cette mémoire, nous avons essayé d'étudier une équation différentielle non linéaire de la manière MAH et MPH, ceci dans le but de répondre au problème suivant :

Quelles meilleures méthode d'étudier les équations linéaires différen-tielles non linéaires ?

Pour répondre à ce problème, nous avons divisé le mémorandum en trois chapitres :

Chapitre I : Nous présenterons les Concepts généraux de la méthode d'homotopie et idée de base de la méthode du d'analys d'homotopie et Principe de la méthode d'homotopie...

Chapitre II : Nous appliquerons la méthode MAH à une équation différentielle non linéaire et comparerons la solution approximative de l'équation avec la solution exacte, en utilisant les résultats de MATLAB.

Chapitre III : Nous traiterons la même équation différentielle dans la méthode MPH et la comparerons ensuite avec la méthode MAH.

Nous avons conclu notre étude par une conclusion dans laquelle nous avons présenté le résultat de l’étude.

CHAPITRE I

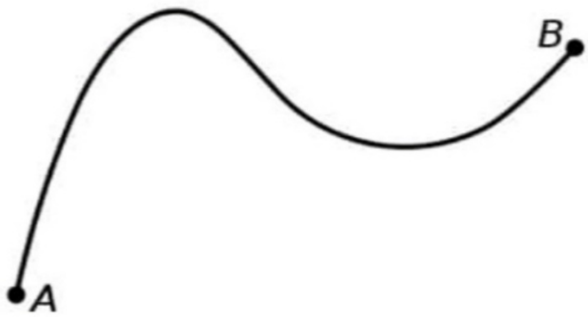
CONCEPTS DE BASE

Dans cette chapitre nous présentons quelques concepts fondamental dans topologie et définitions de base.

1 Le concept d'homotopie :

L'homotopie est un concept fondamental en topologie et en géométrie différentielle et remonte au mathématicien français Jules Henri Poincaré où il a décrit l'homotopie comme une sorte de changement continu ou de déformation en mathématiques.
En mathématiques, un chemin dans un espace topologique X est une fonction continue de l' intervalle unitaire fermé $[0, 1]$ dans X. Les chemins jouent un rôle important dans les domaines de la topologie et de l'analyse mathématique. Par exemple, un espace topologique pour lequel il existe un chemin reliant deux points quelconques est dit chemin connexe. Tout espace peut être décomposé en composants connectés par chemin . L'ensemble des composants connectés par chemin d'un espace X est souvent noté $\Pi_0(X)$. On peut aussi définir des chemins et des boucles dans des espaces pointés, qui sont importants dans la théorie de l'homotopie. Si X est un espace topologique avec le point de base x_0, alors un chemin dans X est celui dont le point est De même, une boucle dans X

est une boucle basée sur x_0.



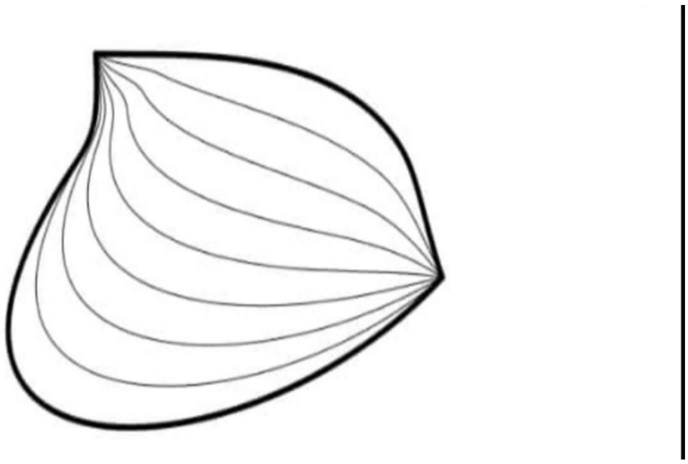
(1)

Figure 1.1 – Les point tracés par un chemin de A à $B \in \mathbb{R}^2$. cependant différents chemins peuvent tracer le même ensemble de points.

1.1.1 Définition

Une courbe dans un espace topologique X est une fonction continue $f : J \to X$ d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ non vide et non dégénéré. Un chemin dans X est une courbe $f : [a, b] \to X$ dont le domaine $[a, b]$ est un intervalle compact non dégénéré(ce qui signifie que $a < b$ sont des nombres réels), où $f(a)$ est appelé le point initial du chemin et $f(b)$ est appelé son point terminal. Un chemin de x à y est un chemin dont le point initial est et dont le point terminal est y . Tout intervalle compact non dégénéré $[a, b]$ est homéomorphe à $[0, 1]$, c'est pourquoi un chemin est parfois, notamment en théorie de l' homotopie , défini comme une fonction continue $f : [0, 1] \to X$ de la intervalle unitaire fermé $I : [0, 1]$ dans X. Un arc ou C^0-arc dans X est un chemin dans X qui est aussi un plongement topologique. Il est important de noter qu'un chemin n'est pas seulement un sous-ensemble de X qui $\ll$ ressemble $\gg$ à une courbe, il inclut également une paramétrisation. Par exemple, les applications $f(x) = X$ et $g(x) = x^2$ représentent deux chemins différents de 0 à 1 sur la droite réelle. Une boucle dans un espace X basée en x EX est un chemin de x vers x . Une boucle peut être aussi bien considérée comme une application $f : [0, 1] \to X$ avec $f(0) = f(1)$ ou comme une application continue du cercle unité S^1 à X $f : S^1 \to X$. En effet, S^1 est l'espace quotient de $I = [0, 1]$ lorsque 0 est identifié à 1. L'ensemble de toutes les boucles de X forme un espace appelé l'espace des boucles de X.

1.1.2 Homotopie des chemins



(2)

Figure 1.2 – une homotopie entre deux chemins

Les chemins et les boucles sont des sujets d'étude centraux dans la branche de la topologie algébrique appelée théorie de l'homotopie. Une homotopie de chemins précise la notion de déformation continue d'un chemin tout en gardant ses extrémités fixes. Plus précisément , une homotopie de chemins , ou chemin - homotopie , dans X est une famille de chemins $f_t[0, 1] \to X$ indexés par $[0, 1]$ tels que $f_t(0) = x_0$ et $f_t(1) = x_1$ sont fixes. l'application $F : [0, 1][0, 1] \to X$ donnée par $F(s, t) = f_t(s)$ est continue . Les chemins f_0 et f_1 reliés par une homotopie sont dits homotopes (ou plus précisément chemin homotope, pour distinguer la relation définie sur toutes les fonctions continues entre espaces fixes). On peut également définir une homotopie de lacets en gardant le point de base fixe. La relation d'être homotope est une relation d'équivalence sur des chemins dans un espace topologique. La classe d'équivalence d'un chemin f sous cette relation est appelée la classe d'homotopie de f, souvent notée $[f]$. .

1.1.3 Définition

Une homotopie entre deux fonctions continues $F(x)$ et $g(x)$ d'un espace topologique X à un espace topologique Y est formellement définie comme :

Soit une fonction continue $H : X\,[0,1] \to Y$ du produit de l'espace X avec l'intervalle unitaire $[0,1]$ à Y tel que, si $x \in X$ alors :

$$H(x,0) = f(x)$$

et

$$H(x,1) = g(x)$$

Soit $C[a,b]$ désignent un ensemble de toutes les fonctions réelles continues dans l'intervalle $a \leq x \leq b$,
Si une fonction continue $f \in C\,[a,b]$ peut être déformé en continuement en une autre fonction continue $g \in C\,[a,b]$ on peut construire une homotopie

$$H : f(x) \sim g(x),$$

de la manière :

$$H(x,q) = (1-q)f(x) + qg(x),\; x \in [a,b]\,,\; q \in [0,1]\,,$$

ou alors :

$$H(x,q) = f(x) + q\,[g(x) - f(x)]\,,\; x \in [a,b]\,,\; q \in [0,1]\,,$$

pour cette homotopie, une dérivée d'homotopie du premier ordre est définie comme :

$$\frac{\partial H(x,q)}{\partial q} = g(x) - f(x),\; q \in [0,1]\,,$$

1.1.4 Définition

Le paramètre d'intégration $q \in [0,1]$ dans une homotopie de fonctions ou équations est appelé paramètre d'homotopie.
Pour illustrer l'idée, construisons une homotopie entre la fonction identité $f(x) = x$, et la fonction Zéro $g(x) = 0$, dans l'intervalle $X = [0,1]$, Puisque f et g sont continues dans l'intervalle $[0,1]$, alors $H = f(x)g(x)$ Définissons $H : X[0,1] \to Y$ par :

$$\begin{aligned} H(x,q) &= (1-q)f(x) + qg(x) \\ &= (1-q)x, \,\forall\, x \in X, \forall\, q \in [0,1], \end{aligned}$$

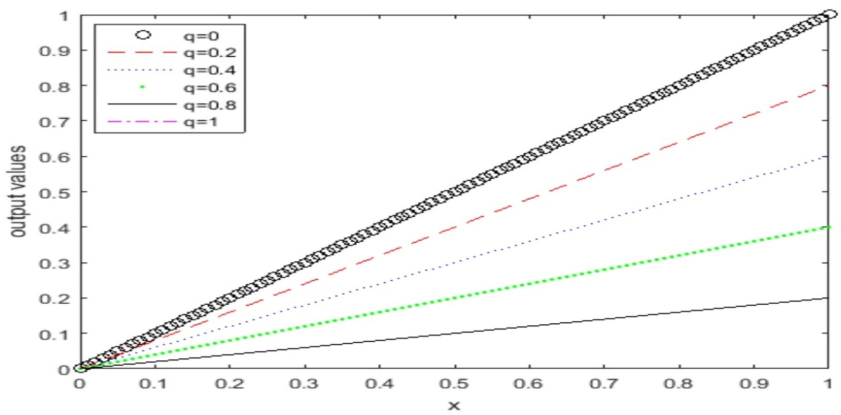
Alors H est une fonction continue et :

$$[H(x,0) = f(x) = x, \,\forall\, x \in X][H(x,1) = g(x) = 0, \,\forall\, x \in X]$$

La dérivée h'homotopie du premier ordre est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x,q)}{\partial q} &= g(x) - f(x) \\ &= -x, q \in [0,1]. \end{aligned}$$

Autre exemple, Soit X et Y des espaces topologiques quelconque, $f(x) = \cos\left(\pi(x+\frac{\pi}{2})\right)$ et $g(x) = 8x(x-1)$ dans l'intervalle $X = [0,1]$, puisque f et g Sont continues dans :



(3)

Figure 1.3 – Déformation continue de l'homotopie $H(x,q) = x \sim 0$ quand $q = 0, q = 0,2, q = 0,4, q = 0,6, q = 0,8$ et $q = 1$.

alors $H : f(x) \sim g(x)$ Définissons $H : X[0,1] \to Y$ par :

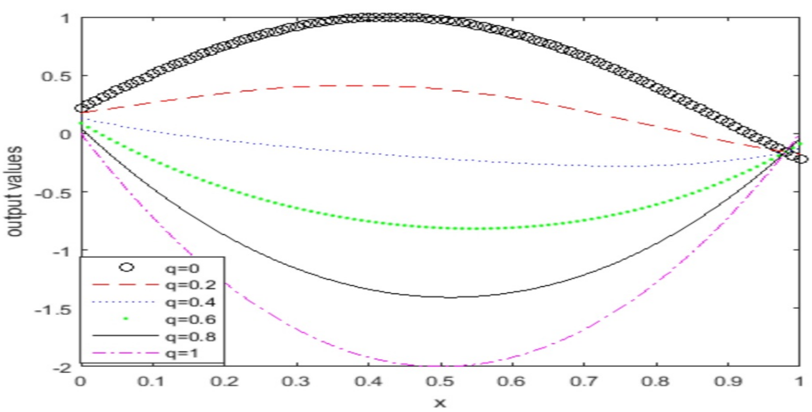
$$\begin{aligned} H(x,q) &= (1-q)f(x) + qg(x) \\ &= (1-q)\cos\left(\pi(x+\tfrac{\pi}{2})\right) + q[8x(x-1)], \forall x \in X, \forall q \in [0,1]. \end{aligned}$$

la dérivée d'homotopie du premier ordre est :

$$\frac{\partial H(x,q)}{\partial q} = g(x) - f(x) \;\; q \in [0,1]$$

ou

$$\frac{\partial H(x,q)}{\partial q} = 8x(x-1) - \cos\left(\pi(x+\frac{\pi}{2})\right) \;\; q \in [0,1]$$



(4)

Figure 1.4 – Déformation continue de l'homotopie $H(x,q) = \cos\left(\pi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) \sim 8x(x-1)$ lorsque $q = 0, q = 0,2, q = 0,4, q = 0,6, q = 0,8$ et $q = 1$.

1.1.5 Définition

Soit une équation notée $\mathcal{E}_1$, qui admet au moins une solution u Soit $\mathcal{E}_1$ une équation propre plus simple, dite équation initiale, dont la solution u_0 est connue Si l'on peut construire une homotopie d'équation $\tilde{\mathcal{E}}_1(q) : \mathcal{E}_0 \sim \mathcal{E}_1$ telle que, lorsque le paramètre d'homotopie $q \in [0, 1]$ augmente de 0 à 1, $\tilde{\mathcal{E}}(q)$ se forme (ou varie) continûment à partir de l'initiale $\mathcal{E}_0$ à l'équation d'origine $\mathcal{E}_1$, tandis que sa solution varie continuellement de la solution connue u_0 de $\mathcal{E}_0$ à la solution inconnue u de $\mathcal{E}_1$, alors ce type d'homotopie d'équations est appelé équation de déformation d'ordre zéro.

1.1.6 Définition

Soit une équation non linéaire notée $\mathcal{E}_1$, qui a au moins une solution $u(z, t)$, où z et t désignent respectivement les variables indépendantes spatiales et temporelles Soit $q \in [0, 1]$ un paramètre d'homotopie et $\tilde{\mathcal{E}}(q)$ l'équation de déformation d'ordre zéro, qui relie l'équation originale $\mathcal{E}_1$ et une équation initiale $\mathcal{E}_0$ avec l'approximation initiale connue $u_o(z, t)$ En supposant que l'équation de déformation d'ordre zéro $\tilde{\mathcal{E}}(q)$ est si bien construite que sa solution $\phi(z, t, q)$ existe et est analytique en $q = 0$, nous avons la série d'homotopie de Maclaurin :

$$\phi(z, t, q) \sim u_o(z, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_o(z, t) q^n, q \in [0, 1]$$

et la série d'homotopie :

$$\phi(z, t; q) \sim u_o(z, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_o(z, t)$$

Les équations liées à l'inconnue $u_n(z, t)$ sont appelées équations de déformation d'ordre n.

1.1.7 Définition

Si la solution $\phi(z, t, q)$de l'équation de déformation d'ordre zéro $\tilde{\mathcal{E}}(q) : \mathcal{E}_0 \sim \mathcal{E}_1$ existe et est analytique autour de q dans $q \in [0, 1]$, alors on a la solution à en série d'homotopies de l'équation originale $\mathcal{E}_1$:

$$\phi(z,t) \sim u_o(z,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z,t),$$

et l'approximation d'homotopie d'ordre M :

$$\phi(z,t) \approx u_o(z,t) + \sum_{n=1}^{M} u_n(z,t).$$

2 Dérivation de la méthode itérative de Newton à l'aide de l'homotopie

Suite au livre de Liao , nous pouvons utiliser l'idée de l'homotopie pour déduire la méthode itérative de Newton pour résoudre les équations algébriques non linéaires Envisager une équation algébrique non linéaire

$$f(x) = 0, \tag{I.1}$$

où $f(x) \in C^1[a,b]$ et $f(x)$ est une fonction,
Supposons que l'équation I.1 a au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$ Laisser $x_0 \in [a,b]$ indique une première estimation de la solution inconnue x soit
$g(x) = f(x) - f(x_0) \in C^1[a,b]$ Puisque $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues en $C^1[a,b]$, alors nous pouvons construire un homotopie entre $f(x)$ et $g(x)$ comme :

$$\begin{aligned} H(x,q) &= (1-q)g(x) + qf(x) \\ &= (1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) \end{aligned}$$

où $q \in [0,1]$ est le paramètre homotopie Lorsque $q = 0$, alors

$$H(x,0) = f(x) - f(x_0),$$

et $q = 1$, puis

$$H(x, 1) = f(x)$$

Ainsi, à mesure que q augmente de 0 à 1, $H(x, q)$ varie continuellement de $f(x) - f(x_0)$ à $f(x)$.
Maintenant, mettez $H(x, q) = 0$,

$$(1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0, q \in [0, 1]$$

La solution dépend de q Remplacer x par $\tilde{x}(q)$, puis

$$(1 - q)[\tilde{x}(q) - f(x_0)] + qf[\tilde{x}(q)] = 0 \tag{I.2}$$

Lorsque $q = 0$,

$$f[\tilde{x}(q)(0)] - f(x_0) = 0$$

ou

$$f[\tilde{x}(q)(0)] = f(x_0)$$

Puisque $f(x)$ est une fonction, alors $\tilde{x} = x_0$

$$\textit{Lorsque}\, q = 1, f[\tilde{x}(1)] = 0.$$

Puisque $f(x)$ est une fonction, $f(x) = 0$ et $f(\tilde{x}(1)) = 0$.
ce la signifie $f(x) = f(\tilde{x}(1))$, puis $\tilde{x}(1) = x$ Par conséquent, comme le paramètre q homotopy augmente de 0 à 1, définit une homotopie de la fonction $\tilde{x}(q) : x_0 \sim x$Notez que $\tilde{x}(q)$ est une fonction du paramètre homotopie q.
Supposons que $\tilde{x}(q)$ est analytique à $q = 0$, de sorte qu'il peut être étendu dans un série de Maclaurin par rapport au paramètre homotopie q,

$$\tilde{x}(q) \sim x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k q^k \tag{I.3}$$

où $\tilde{x}(0) = x_0$, et

$$x_k = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \tilde{x}(q)}{\partial q^k} \mid_{q=0} = D_k(\tilde{x}(q)) \tag{I.4}$$

Ici, la série I.3 est appelée homotopie-Maclaurin série, D_k est appelé l'opérateur dérivé homotopie, et $D_k(\tilde{x}(q))$ est appelé le k^{th}-ordre homotopie-dérivé de $\tilde{x}(q)$ Notez que $D_1(\tilde{x}(q)) = x_1$ En supposant que $\tilde{x}(q)$ est analytique pour $q \in [0, 1]$, alors

$$\tilde{x}(1) = x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

et l'approximation d'ordre M de x est donnée par :

$$x \approx x_0 + \sum_{k=1}^{M} x_k \tag{I.5}$$

Nous savons que $\tilde{x}(0) = x_0$ et $\tilde{x}(1) = x$ équation de différenciation I.2 avec respect du paramètre homotopie q, puis

$$f'[\tilde{x}(q)]\frac{\partial \tilde{x}(q)}{\partial q} + f(x_0) = 0 \tag{I.6}$$

Ensuite, mettre $q = 0$ dans l'équation ci-dessus et utiliser la relation $\tilde{x}(0) = x_0$, nous avons

$$[f'[\tilde{x}(q)]\frac{\partial \tilde{x}(q)}{\partial q}] \mid_{q=0} + f(x_0) \mid_{q=0} = 0$$

alors

$$f'[\tilde{x}(0)]\frac{\partial \tilde{x}(q)}{\partial q} \mid_{q=0} + f(x_0) = 0$$

ou

$$f'[x_0]\frac{\partial \tilde{x}(q)}{\partial q} \mid_{q=0} + f(x_0) = 0$$

En utilisant l'équation I.4, nous avons

$$\frac{\partial \tilde{x}(q)}{\partial q} \mid_{q=0} = x_1$$

Ainsi,

$$x_1 f_0'(x_0) + f(x_0) = 0;$$

dont la solution est

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

lisant I.5, nous avons le premier ordre homotopie-approximation

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Ce schéma est la méthode itérative bien connue de Newton-Raphson.

3 Série Taylor

1.3.1 Définition

Soit $f(x)$ une fonction à dérivées de tous ordres dans un intervalle $[x_0, x_1]$ qui contient un point intérieur a La série de Taylor de $f(x)$ générée en $x = a$ est

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(a)(x-a)^n,$$

ou équivalent

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{"}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(n)}}{2!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

La série de Taylor engendrée par $f(x)$ en $a = 0$ est appelée série de Maclaurin et donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(0)x^n,$$

qui équivaut à

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{"}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{"'}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

4 Flexibilité sur le choix de l'opérateur linéaire auxiliaire

nous avons une grande liberté pour choisir l'opérateur linéaire auxiliaire $\mathcal{L}$ dans l'équation de déformation dite d'ordre zéro Comme indiqué dans l'opérateur linéaire $\mathcal{L}(x) = x'' + \lambda x$, qui est exactement la partie linéaire de l'équation directrice d'origine, ne peut pas donner d'approximations périodiques lorsque $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$ Cependant, en raison de la liberté de choix de l'opérateur linéaire auxiliaire $\mathcal{L}$ nous pouvons simplement choisir l'opérateur linéaire auxiliaire $\mathcal{L}(x) = x'' + x$ dans l'équation de déformation d'ordre zéro pour tous les paramètres physiques possibles liés aux solutions, compris même $\lambda \leq 0$ Ainsi, à la différence des techniques de perturbation, dont les opérateurs linéaires auxiliaires sont étroitement liés aux petits/grands paramètres physiques et aux types d'équations considérées, nous avons une assez grande liberté pour choisir un opérateur linéaire auxiliaire approprié pour obtenir des approximations précises au moyen du MAH.

5 Dérivé d'homotopie :

1.5.1 Définition

Soit φ une fonction du paramètre q alors :

$$D_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi}{\partial q^m} \mid_{q=0} .$$

d'homotopie d'ordre m^{th}de φ, où $m \geq 0$ est une entier positive, et D_m est appelé l'opérateur de la dérivée d'homotopie d'ordre m^{th}.

6 Équation de déformation d'ordre Supérieur

1.6.1 Définition

Une fonction analytique f du paramètre d'homotopie $q \in [0, 1]$ est appelée une fonction de déformation, si $f = 0$ quand $q = 0$, $f = 1$ quand $q = 1$, et sa Série Maclaurin

$$f \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k q^k$$

converge absolument en $q = 1$, c-à-d :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = 1,$$

où α_k peut être une constante ou une fonction de variables spatiales
et temporelles indépendantes.

7 Méthode d'analyse d'homotopie (MAH)

La MAH est une technique analytique utilisée pour résoudre des équations différentielle ordinaire non linéaires, en utilisant l'homotopie(déformation d'une fonction continue en une autre) pour générer une série d'équations linéaires convergentes à partir d'une équation non linéaire MAH a été développé pour la première fois en 1992 par Liao et a été modifié en 1997 pour inclure le paramètre auxiliaire $\bar{h}$, Ce paramètre non nul permet de contrôler la convergence de la série Parce que MAH est basé sur le concept d'homotopie, nous avons la liberté de choisir l'approximation initiale de la solution, l'opérateur linéaire auxiliaire et le paramètre de contrôle de convergence $\bar{h}$.

1.7.1 Choix du paramètre auxiliaire $\bar{h}$

En 1997 le paramètre auxiliaire non nul $\bar{h}$ a été introduit dans MAH, qui fournit une famille d'expressions en termes de $\bar{h}$ Le résultat est que le taux et la région de convergence dépendent de la valeur de $\bar{h}$ Cela nous fournit apparemment un moyen pratique de contrôler la convergence de la solution MAH Selon le livre de Liao Beyond Perturbation, déterminer la valeur optimale de $\bar{h}$ implique de tracer les courbes de la solution En traçant les sommes partielles de $f_m(t)$ évaluées à une valeur spécifique de t contre $\bar{h}$, on peut s'attendre à voir la courbe horizontale sur la plage pour laquelle la solution converge.

1.7.2 Principe de la méthode

Nous donnons ici une brève dérivation de MAH pour résoudre une équation différentielle non linéaire Si nous avons l'équation différentielle non linéaire :

$$N[f(t)] = 0,$$

oú N est un opérateur non linéaire, t est la variable indépendante et $f(t)$ est une fonction inconnue Nous pouvons construire l'homotopie :

$$H[\varphi(t,q); f_0(t); \bar{h}; q] = (1-q)L[\varphi(t,q) - f_0(t)] - q\bar{h}H(t)N[\varphi(t,q)],$$

oú $p \in [0,1]$ est le paramètre d'intégration, $\bar{h}$ est un paramètre auxiliaire non nul, $H(t)$ est une fonction auxiliaire ($H(t) \neq 0$), $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire auxiliaire, $f_0(t)$ est une approximation initiale de $f(t)$ (qui satisfait aux conditions initiales) et $\varphi(t,q)$ une fonction qui doit également satisfaire aux conditions initiales En fixant l'homotopie égale à zéro, nous construisons l'équation de déformation d'ordre zéros :

$$(1-q)\mathcal{L}[\varphi(t,q) - f_0(t)] = q\bar{h}H(t)N[\varphi(t,q)] \tag{I.7}$$

dont la solution se transforme en continu par rapport à q Lorsque $q = 0$ il s'ensuit que :

$$\mathcal{L}[\varphi(t,0) - f_0(t)] = 0,$$

Maintenant, d'après les définitions de $\mathcal{L}[f(t)], \varphi(t,q)$ et $f_0(t)$:

$$\varphi(t,0) = f_0(t),$$

De même lorsque $q = 1$,

$$N[(t,1)] = 0 \tag{I.8}$$

Depuis $\varphi(t,q)$ doit satisfaire aux conditions initiales de l'équation diérentielle, à partir de I.8 il s'ensuit que $\varphi(t,1)=f(t)$ De cela, nous pouvons voir que $\varphi(t,q)$ varie continuellement de l'approximation initiale $f_0(t)$ à la solution à mesure que le q augmente de 0 à 1 Comme indiqué précédemment, nous voulons prendre l'équation non linéaire et former une série d'approximations convergentes linéaires. Nous ne déclarons pas l'approximation linéaire de l'ordre de m $f_m(t)$ donnée comme :

$$f_m(t)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\varphi(tq)}{\partial q^m}|_{q=0} \tag{I.9}$$

qui est appelé dérivé de déformation d'ordre m. Maintenant nous pouvons élargir $\varphi(t,p)$ utiliser la série Taylor en ce qui concerne q :

$$\varphi(t,q)=\varphi(t;0)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\varphi(tq)}{\partial q^m}|_{q=0}\,q^m$$

Par conséquent en utilisant les équations I.9 et $\varphi(t;0)=f_0(t)$ la série de puissance devient

$$\varphi(t,q)=f_0(t)+\varphi(t,0)+\sum_{m=1}^{\infty}f_m(t)q^m$$

Si l'opérateur linéaire auxiliaire deviner initiale $\bar{h}$ et la fonction auxiliaire sont choisis de sorte que la série converge à $q=1$

$$f(t)=f_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty}f_m(t)$$

Nous passons maintenant à une expression pour le $f_m(t)$ par diérenciation de l'équation I.7 en ce qui concerne q :

$$(1-q)(\frac{\partial(\varphi(tq))}{\partial q})-\mathcal{L}(\varphi(t,q)-f_0(t))=\bar{h}H(t)N[\varphi(t,q)]+q\bar{h}H(t)\frac{\partial\varphi(tq)}{\partial q}]$$

En définissant $q=0$ et en utilisant l'équation I.9

$$\mathcal{L}[f_1(t)]=\bar{h}H(t)N[f_0(t)]$$

Autrement dit la valeur linéaire de $f_1(t)$ peut être obtenue à partir d'une transformation non linéaire de $f(t)$. En prolongeant ce processus nous pouvons obtenir

$$\mathcal{L}[(f_m(t) - f_{m-1}(t))] = \bar{h}H(t)\frac{\partial^{m-1}N[\varphi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}|_{q=0}$$

En réarrangeant cette équation et en introduisant le terme $\mathcal{X}(m)$

$$\mathcal{X}(m) = \begin{cases} 0 & : \ n \leq 1 \\ 1 & : \ n > 1 \end{cases}$$

on peut former l'équation de déformation d'ordre m :

$$\mathcal{L}[(f_m(t) - \mathcal{X}(m)f_{m-1}(t))] = \bar{h}H(t)\frac{\partial^{m-1}N[\varphi(tq)]}{\partial q^{m-1}}|_{q=0}$$

ce qui est vrai pour $m \geq 1$ Réarrangement

$$\mathcal{L}[f_m(t)] = \mathcal{X}(m)f_{m-1}(t)) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{h}H(t)\frac{\partial^{m-1}N[\varphi(tq)]}{\partial q^{m-1}}|_{q=0}\right\}$$

oú L^{-1} est l'inverse de l'opérateur linéaire (i.e. l'inverse de la diérenciation est l'intégration). La solution à $u(t)$ peut s'exprimer comme suit :

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t),$$

qui est valable partout oú la solution converge.

8 La Méthode de perturbation d'homotopie

Cette méthode a été appliquée par de nombreux auteurs à diverses équations linéaires et non linéaires. La solution selon la méthode MPH consiste à considérer une suite de fonctions qui convergent rapidement vers la solution exacte (lorsqu'elle est présente). Cette méthode permet de transformer la solution d'un problème difficile en un problème simple à résoudre. La méthode MPH est basée sur l'hypothèse qu'il existe un petit paramètre

$p \in [0,1]$ associé à l'équation étudiée.

1.8.1 Principe de la méthode

Pour illustrer le principe de la méthode de pertubation d'homotopie considérons l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$L(y(t)) + N(y(t)) = h(t);\ t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}, \tag{I.10}$$

où L est un opérateur linéaire N est un opérateur non linéaire et h est une fonction analytique donnée. La méthode MPH consiste à introduire un paramètre artificiel
$p \in [0,1]$ déformant le problème de départ en construisant une homotopie :

$$v(t,p) : \mathcal{I}[0,1] \to \mathbb{R}$$

comme suit :

$$H(v(t,p),p) = (1-p)L[v(t,p) - L(y_0(t))] + pL[v(t,p) + N(v(t,p)) - h(t)] = 0$$

$t \in \mathcal{I}, p \in [0,1]$. qu'on peut arranger pour obtenir :

$$H(v(t,p),p) = L(v(t,p)) - L(y_0(t)) + pL(y_0(t)) + p[N(v(t,p)) - h(t)] = 0, \tag{I.11}$$

où $y_0(t)$ est l'approximation initiale de la solution du problème de départ.
Supposons que la solution de l'équation est donnée sous la forme d'une série de puissance de la forme :

$$v(t,p) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \tag{I.12}$$

et le terme non linéaire $N(v(t,p))$ est donné sous la forme d'une série infinie de polynômes

$$N(v(t,p)) = N(v_0(t)) + pN(v_0(t), v_1(t)) + p^2 N(v_0(t), v_1(t), v_2(t)) + \dots \tag{I.13}$$

où $N(v_0(t)), N(v_0(t), v_1(t)), \ldots, N(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_m(t))$ sont les polynômes de He qui sont définis comme suit :

$$N(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)) = \left[\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\Big(\sum_{i=0}^{n} p^i v_i(t)\Big)\right]_{p=0}; n = 0, 1, 2, \ldots$$

En remplaçant les équations I.12 et I.13 dans I.11 et en regroupant les coefficients p de même puissance on obtient :

$$\begin{aligned}
p^0 &: L(v_0(t)) - L(y_0(t)) = 0 \\
p^1 &: L(v_1(t)) - L(y_0(t)) + N(v_0(t)) - h(t) = 0 \\
p^2 &: L(v_2(t)) + N(v_0(t) v_1(t)) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En résolvant ce système d'équations on déduit les composantes $v_i(t)(i = 0, 1, \ldots)$. Alors, en posant $p = 1$, on obtient une approximation de la solution de équation I.10 donnée par :

$$y(t) \approx y^N(t) = \lim_{p \to 1} \sum_{i=0}^{n} p^i v_i(t).$$

CHAPITRE II

MÉTHODE D'ANALYSE D'HOMOTOPIE

Lorsque les méthodes analytiques sont très complexes pour trouver, la solution, on a recours à des méthodes semi-analytiques pour résoudre des équations différentielles ordinaires non linéaires, comme la méthode d'analyse d' homotopie. La méthode d'analyse d'homotopie(MAH) est une méthode d'approximation analytique pour les problèmes hautement non linéaires, proposée par l'auteur en $\mathbf{1992}$. Contrairement aux techniques de perturbation, la MAH est indépendante de tout petit grand paramètre physique : on peut toujours transférer un problème non linéaire en un nombre infini de sous-problèmes linéaires au moyen du MAH. différent de toutes les autres techniques analytiques, le MAH nous fournit un moyen pratique de garantir la convergence des séries de solutions de sorte qu'elle soit valide même si la non-linéarité devient assez forte. En outre, basé sur l'homotopie en topologie, il nous offre une liberté extrêmement grande pour choisir le type d'équation des sous-problèmes linéaires, la fonction de base de la solution, la supposition initiale.

Dans cette chapitre on va résolu une équation différentielle ordinaire avec MAH Soit l'équation différentielle de seconde ordre suivante :

$$\boldsymbol{y''(x) - y(x) = 2,\ 0 \leq x \leq 10} \tag{II.1}$$

Avec les conditions initiales :

$$y(0) = y'(0) = 0$$

la solution exacte est :

$$y(x) = e^{x} + e^{-x} - 2$$

1 comment obtenir la solution exacte :

$y''(x) - y(x) = 0$

$y(x) = e^{rx} \rightarrow y'(x) = re^{rx} \rightarrow y''(x) = r^2 e^{rx}$

$r^2 e^{rx} - e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 - 1) = 0$

$r^2 - 1 = 0 \rightarrow (r-1)(r+1) = 0$

$r_1 = 1, r_2 = -1$

$y_n(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$\quad\quad = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

$y_p(x) = ax + b \rightarrow y_p'(x) = A \rightarrow y_p''(x) = 0$

$y''(x) - y(x) = 2 \rightarrow 0 - A = 2, -a = 2 \rightarrow a = -2$

$a = -2 \Rightarrow y_p(x) = -2$

$y(x) = y_n(x) + y_p(x)$

$\quad\quad = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 2$

$y(0) = C_1 + C_2 - 2$

$\quad\quad = 2C_2 = 2$

$\quad\quad = C_2 = C_1 = 1$

$y(x) = e^{x} + e^{-x} - 2$

2 la solution de problème

on définir un opérateur linéaire :

$$L[\varphi(x,q)] = \frac{\partial^2[\varphi(x,q)]}{\partial x^2}$$

l'opérateur non linéaire :

$$N[\varphi(x,q)] = \frac{\partial^2[\varphi(x,q)]}{\partial x^2} - \varphi(x,q) - 2.$$

Pour crée une équation d'ordre zéro, nous substituons L et N dans I.7

$$(1-q)\left[\frac{\partial^2[\varphi(x,q)]}{\partial x^2} - y_0(x)\right] = qh\left[\frac{\partial^2[\varphi(x,q)]}{\partial x^2} - \varphi(x,q) - 2\right]$$

$$(1-q)\left[\varphi''(x,q) - y(x)\right] = qh\left[\varphi''(x,q) - \varphi(x,q) - 2\right] \tag{II.2}$$

en utilisant la définition,

$$\varphi(x,1) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x)q^n = y_0(x) + y_1(x)q + y_2(x)q^2 + y_3(x)q^3 + \dots$$
$$y'(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} y'_n(x)q^n = y'_0(x) + y'_1(x)q + y'_2(x)q^2 + y'_3(x)q^3 + \dots$$
$$y''(x) = y''_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} y''_n(x)q^n = y''_0(x) + y''_1(x)q + y''_2(x)q^2 + y''_3(x)q^3 + \dots$$

mettre $\boldsymbol{II.3}$ dans $\boldsymbol{II.2}$

$$(1-q)[(y''_0(x) + y''_1(x)q + y''_2(x)q^2 + y''_3(x)q^3 - y_0(x))]$$

$$= \quad qh[(y''_0(x) + y''_1(x)q + y''_2(x)q^2 + y''_3(x)q^3 - (y_0(x) + y_1(x)q + y_2(x)q^2 + y_3q^3) - 2)]$$

En dérivez l'équation par rapport à q pour la dérivée première :

$$-(y_1''(x)q + y_2''(x)q^2 + y_3''(x)q^3 + \dots) + (1-q)(y_1''(x) + 2y_2''(x)q + 3y_3''(x)q^2)$$

$$= h\left[\left(y_0''(x) + y_1''(x)q + y_2''(x)q^2 + y_3''(x)q^3\right) - (y_0(x) + y_1(x)q + y_2(x)q^2)\right] - 2$$

$$+ \quad qh[(y_1''(x) + 2y_2''(x)q + 3y_3''(x)q^2 \dots) - (y_1(x) + 2y_2(x)q + 3y_3(x)q^2 + \dots)]$$

On pose $q = 0$,

$$y_1''(x) = h\left[y_0''(x) - y_0(x) - 2\right] = -2h$$

En intégrant deux fois on obtient y_1

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 -2hdx &= -2hx \\
y'(x) &= -2hx \\
\textstyle\int_0^1 -2hxdx &= -hx^2 \\
y_1(x) &= -hx^2
\end{aligned}$$

Pour obtenir $y_2(x)$ on dérive la dérivée première par rapport à q :

$$
\begin{aligned}
& (-1)(y_1''(x) + 2y_2''(x)q + 3y_3''(x)q^2 + \dots) + (1-q)(2y_2''(x) + 6y_3''(x)q) \\
+ \quad & (-1)(y_1''(x) + 2y_2''(x)q + 3y_3''(x)q^2) \\
= \quad & h[y_1''(x) + 2y_2''(x)q + 3y_3''(x)q^2 + \dots) - (y_1(x) + 2y_2(x)q + 3y_3(x)q^2)] \\
+ \quad & h[(y_1''(x) + 2y_2''(x)q + 3y_3''(x)q^2 + \dots) - (y_1(x) + 2y_2(x) + 3y_3(x)q^2)] \\
+ \quad & qh[(2y_2''(x) + 6y_3''(x)q) - (2y_2(x) + 6y_3(x)q + \dots)]
\end{aligned}
$$

En pose $q = 0$

$$2y_2''(x) - y_1''(x) - y_1''(x) = hy_1''(x) - hy_1(x) + hy_1''(x) - hy_1(x)$$

$$2y_2''(x) = 2hy_1''(x) - 2hy_1(x) + 2hy_1''(x)$$

$$y_2''(x) = hy_1''(x) - hy_1(x) + hy_1''(x)$$

$$y_2''(x) = h(-2h) - h(-hx^2) - 2h$$

$$= -2h^2 + h^2x^2 - 2h$$

En intégrant deux fois on obtient y_2

$\int_0^1 -2h^2 + h^2x^2 - 2h\,dx = -2h^2x + \dfrac{h^2}{3}x^3 - 2hx$

$$y_2'(x) = -2h^2x + \frac{h^2}{3}x^3 - 2hx$$

$\int_0^1 -2h^3x + \dfrac{h^2}{3}x^3 - 2hx\,dx = -2\frac{h^2}{2}x^2 + \dfrac{h^2}{12}x^4 - 2\dfrac{h}{2}x^2$

$$y_2(x) = x^4\tfrac{h^2}{12} - h^2x^2 - hx^2$$

Pour obtenir $y_3(x)$ on dérive la dérivée second par rapport à q

$$\begin{aligned}
& (-1)\left(2y_2''(x) + 6y_3''(x)q\right) + (1-q)(6y_3''(x)) + (-1)\left(2y_2''(x) + 6y_3''(x)q\right) \\
+ \quad & (-1)\left(2y_2''(x) + 6y_3''(x)q\right) \\
= \quad & h[2y_2''(x) + 6y_3''(x)q] - [2y_2(x) + 6y_3(x)q] \\
+ \quad & h[2y_2''(x) + 6y_3''(x)q] - [2y_2(x) + 6y_3(x)q] \\
+ \quad & h[2y_2''(x) + 6y_3(x)q] - [2y_2(x) + 6y_3(x)q] + qh[(6y_3''(x) - (6y_3(x)))]
\end{aligned}$$

On pose $q = 0$

$$\begin{aligned}
& -2y_2''(x) - 2y_2''(x) - 2y_2''(x) + 6y_3''(x) \\
= \quad & h[2y_2''(x) - 2y_2(x) - 2y_2(x)] + h[2y_2''(x) - 2y_2(x)] \\
& 6y_3''(x) - 6y_2''(x) \\
= \quad & 2hy_2''(x) - 2hy_2(x) + 2hy_2''(x) - 2hy_2(x) + 2hy_2''(x) - 2hy_2(x)
\end{aligned}$$

$$6y_3''(x) = 6hy_2''(x) - 6hy_2(x) + 6y_2''(x)$$

$$y_3''(x) = hy_2''(x) - hy_2(x) + y_2''(x)$$

$$y_3''(x) = h(-2h^2 + h^2x^2 - 2h) - h(\frac{x^4h^2}{12} - h^2x^2 - hx^2) + (-2h^2 + h^2x^2 - 2h)$$

$$= -2h^3 + h^3x^2 - 2h^2 - \frac{x^4h^3}{12} + h^3x^2 + h^2x^2 - 2h^2 + h^2x^2 - 2h$$

En intégrant deux fois on obtient y_3

$$\textstyle\int_0^1 -2h^3 + h^3x^2 - 2h^2 - \frac{x^4h^3}{12} + h^3x^2 + h^2x^2 - 2h^2 - 2hdx$$

$$= \quad 2h^3x + \frac{1}{3}h^3x^3 - 2h^2x - \frac{x^5h^3}{60} + \tfrac{1}{3}h^3x^3 + \frac{1}{3}h^2x^3 + \tfrac{1}{3}h^2x^3 - 2hx$$

$$y_3'(x) \quad = \quad -2h^3x + \frac{1}{3}h^3x^3 - 2h^2x - \frac{x^5h^3}{60} + \frac{1}{3}h^3x^3 + \frac{1}{3}h^2x^3 - 2h^2x + \frac{1}{3}h^2x^3 - 2hx$$

$$\textstyle\int_0^1 -2h^3x + \frac{1}{3}h^3x^3 - 2h^2x - \dfrac{-x^5h^3}{60} + \dfrac{1}{3}h^3x^3 + \dfrac{1}{3}h^2x^3 - 2h^2x - 2hxdx$$

$$= \quad -h^3x^2 + \tfrac{1}{12}h^3x^4 - h^2x^2 - \frac{x^6h^3}{360} + \tfrac{1}{12}h^3x^4 + \tfrac{1}{12}h^2x^4 - 2h^2x^2 + \tfrac{1}{12}h^3x^4 - hx^2$$

$$y_3(x) \quad = \quad -\frac{h^3x^6}{360} + \frac{h^4x^4}{6} + \frac{h^4x^4}{6} + \frac{x^4h^2}{6} - h^3x^2 - 2h^3x^2 - 2h^4x^2 - hx^2$$

Alors l'expression de la solution en série peut être écrit sous la forme de

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + ...$$

et ainsi de suite par conséquent, la solution en série lorsque $h = -1$.

$$y(x) \simeq x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{360} + ...$$

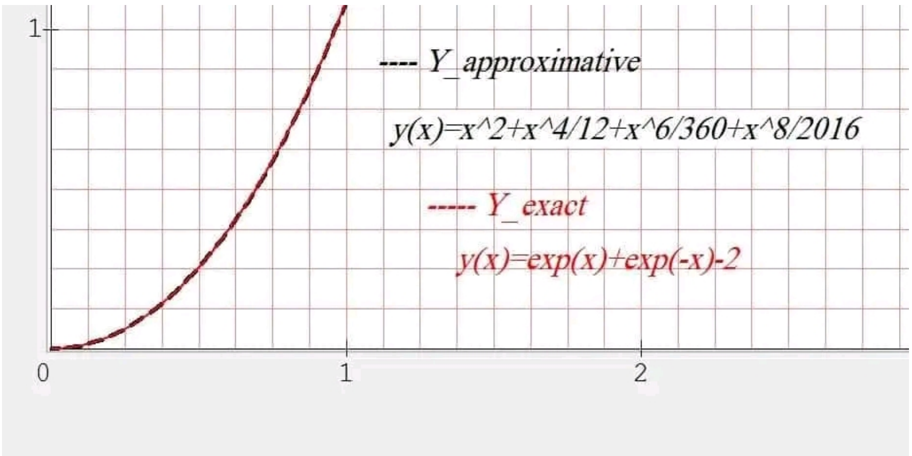
Alors on obtient la forme fermés qui est

$$y(x) = e^x + e^{-x} - 2$$

qui est la même avec la solution exact dans l'équation (II.1).

3 comparaison de MAH avec la solution exact

Après avoir abordé le problème précédent, nous avons trouvé une série d'approches à la solution, nous représentons maintenant la courbe graphique de la solution exacte et la solution approximative, ainsi qu'un tableau des valeurs avec calcul d'erreur.



(3)

Figure 2.1 – Une homotopie entre deux chemins

Nous remarquons à travers la courbe graphique que la solution approximative est très bonne par une très petite erreur et ceci est illustré par le tableau suivant :

x	y_approximative	y_exact	Erreur
0	0	0	0
0,1	0, 0100083361116071	0, 010008336111607	-1, 38777878078145 $\mathbf{10^{-16}}$
0,2	0, 0401335112380952	0, 0401335112381518	5, 654504642294 $\mathbf{10^{-14}}$
0,3	0, 0906770282544643	0, 0906770282577209	3, 2566727092842 $\mathbf{10^{-12}}$
0,4	0, 162144743619048	0, 16214474367691	5, 78622705305065 $\mathbf{10^{-11}}$
0,5	0, 255251929873512	0, 255251930412761	5, 39249533915154 $\mathbf{10^{-10}}$
0,6	0, 370930433142857	0, 370930436484535	3, 34167804538765 $\mathbf{10^{-9}}$
0,7	0, 510337995635417	0, 510338011261886	1, 56264694517461 $\mathbf{10^{-8}}$
0,8	0, 674869833142857	0, 674869892609689	5, 94668321252101 $\mathbf{10^{-8}}$
0,9	0, 866172577540179	0, 866172770897549	1, 93357370448233 $\mathbf{10^{-7}}$
1	1, 08616071428571	1, 08616126963049	5, 55344773278676 $\mathbf{10^{-7}}$

CHAPITRE III

MÉTHODE PERTURBATION D'HOMOTOPIE

La méthode de perturbation d'homotopie(MPH) proposée pour la première fois par He J. Huan en $\mathbf{1999}$ pour résoudre des équations différentielles et intégrales, linéaires et non linéaires, fait l'objet d'études analytiques et numériques approfondies. Cette méthode présente un avantage significatif en ce sens qu'elle fournit une solution approchée à un large éventail de problèmes non linéaires en sciences appliquées. Dans cette méthode, la solution est considérée comme la sommation d'une série infinie qui converge généralement rapidement vers les solutions. Dans cette chapitre on va résolu la même équation $\mathbf{(2,1)}$ pour comparer les résultats des deux méthodes.
considérons l'équation différentielle ordinaire non linéaire de second ordre :

$$\boldsymbol{v''(x) - v(x) = 2,\ 0 \leq x \leq 1} \tag{III.1}$$

sous conditions initiales :

$$\boldsymbol{v(0) = v''(0) = 0}$$

la solution exact :

$$v(x) = e^{x} + e^{-x} + 2$$

1 la solution de problème :

on défini un opérateur linéaire :

$$L(v) = v''$$

opérateur non linéaire :

$$N(v) = -v - 2$$

Pour résoudre le problème, nous construisons l'équation MPH suivante :

$$H(v,p) = (1-p)[v''(x) - v_0''(x)] + p[v''(x) - v(x) - 2]$$

$$= v''(x) - v_0''(x) - pv''(x) + pv_0''(x) + pv''(x) - pv(x) - 2$$

$$= v''(x) - y_0''(x) + py_0''(x) - pv(x) - 2p$$

$$v''(x) = v_0''(x) - p(v_0''(x) - v(x) - 2), \tag{III.2}$$

Nous avons une définition :

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i} v_i = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots. \tag{III.3}$$

on substitue $(II.3)$ dans $(II.2)$:

$$v_0'' + pv_1'' + p^2 v_2'' + p^3 v_3'' = v_0'' - p(v_0'' - v_0 - pv_1 - p^2 v_2 - p^3 v_3 - 2)$$

En assimilant les termes de même puissance au p ,

$$p^0 : v_0'' = y_0'' \qquad v_0 = 0, v' = 0$$

$$p^1 : v_1'' = -v_0'' + v_0 + 2 \quad v(0) = v'(0) = 0$$

$$p^2 : v_2'' = v_1 \qquad v(0) = v'(0) = 0$$

$$p^3 : v_3'' = v_2 \qquad v(0) = v'(0) = 0$$

$$p^n : v_n'' = v_{n-1} \qquad v_n(0) = v_n'(0) = 0$$

on a selon les condition initiale $v(0) = v'(0) = 0$ Les approximation de $v(u(x))$ sont comme suit :
pour trouver $v_1(x)$ on a :

$$v_1'' = 2$$

en intégrant deux fois :

$$\int_0^1 2\,dx = 2x$$
$$v_1'(x) = 2x$$

$$\int_0^1 2\,dx = x^2$$
$$v_1(x) = x^2$$

pour trouver $v_2(x)$ on a :

$$v_2''(x) = x^2$$

en intégrant deux fois :

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$
$$v_2'(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{x^4}{12}$$
$$v_2(x) = \frac{x^4}{12}$$

pour trouver $v_3(x)$ on a :

$$v_3'' = \frac{x^4}{12}$$

en intégrant deux fois :

$$\int_0^1 \frac{x^4}{12}\,dx = \frac{x^5}{60}$$
$$v_3'(x) = \frac{x^5}{60}$$

$$\int_0^1 \frac{x^5}{60} = \frac{x^6}{360}$$
$$v_3(x) = \frac{x^6}{360}$$

alors l'expression de la solution en Séries écrit sous la forme de :

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + \ldots$$
$$v(x) = x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{360} + \ldots$$

3.1.1 Remarque

au final, nous avons le même Série de la solutions donc ce Sera le même tableau et les mêmes résultats avec MAH.

2 comparaison entre MAH et MPH :

Le tableau suivant montre les résultats des deux méthodes par rapport à la solution exacte :

x	MAH	MPH	y.exact
0	0	0	0
0,1	0, 0100083361116071	0, 0100083361116071	0, 010008336111607
0,2	0, 0401335112380952	0, 0401335112380952	0, 0401335112381518
0,3	0, 0906770282544643	0, 0906770282544643	0, 0906770282577209
0,4	0, 162144743619048	0, 162144743619048	0, 16214474367691
0,5	0, 255251929873512	0, 255251929873512	0, 255251930412761
0,6	0, 370930433142857	0, 370930433142857	0, 370930436484535
0,7	0, 510337995635417	0, 510337995635417	0, 510338011261886
0,8	0, 674869833142857	0, 674869833142857	0, 674869892609689
0,9	0, 866172577540179	0, 866172577540179	0, 866172770897549
1	1, 08616071428571	1, 08616071428571	1, 08616126963049

Après avoir abordé le problème précédent de deux méthodes, chacune d'elles s'est avérée nous donner la même solution approximative dans la forme de chaîne de Taylor, mais la méthode MPH était facile et rapide en termes de nombre de calculs et ne nécessite pas de convergence par rapport à la méthode MAH, qui nécessite un nombre important de calculs et exige également une convergence C'est ce que chacun des chercheurs ont trouvé dans leur étude, "Shijun Liao : comparaison between the Analysis Méthode and Homotopie Perturbation methode (2005)" et "Ji-hunane He : comparision of Analyses Méthode and Homotopie Perturbation methode".
Mais en général et toujours MAH est plus complet et plus précis que MPH en terme d'approximation.

CONCLUSION

Ici, nous sommes arrivés à la conclusion de notre mémoire , qui a précisé que la méthode d'homotopie est l'une des méthodes faciles et réussies qui nous ont conduit à une bonne solution en mathématiques dans ce travail, nous montrons que la méthode d'analyse de symétrie les deux méthodes sont en principe basses sur la série de Taylor en ce qui concerne le coefficient d'inclusion En outre,les deux peuvent donner de très bonnes approximation par certains termes, si la supposition initiale et l'opérateur linéaire auxiliaire sont suffisamment bons La différence est que la " méthode de perturbation d'homologie " doit utiliser une esti- mation initiale suffisamment bonne, mais ce n'est pas strictement nécessaire pour la méthode d'analyse d'homologie C'est principalement parce que la méthode d'analyse d'homotopie contient le paramétré auxiliaire h, qui nous fournit un moyen simple d'ajuster et de contrôler la région d'affinité et le taux de série de solutions Par conséquent, la méthode d'analyse par homotopie est plus générale

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nur Nasrin Athirah Idris1, Mahathir Mohamad1,*,Fazlina Aman1. Homotopy Analysis Method to Solve Second-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations 2021

[2] Turq, S. (2020). Homotopy type methods for nonlinear differential equations Saed Turq. June. https ://doi.org/10.13140/RG.2.2.23905.12644

[3] Liam Morrow. An Investigation of the Homotopy Analysis Method for solving nonlinear differential equations February 2014

[4] Chikhi Sabrina, Zioui Sarah. Résolution de problème de contrôle optimal par la méthode de perturbation d ?homotopie Mémoire de Master

[5] Shijun Liao. Comparison between the homotopy Analysis method and homotopy perturbation method 169 (2005) 1186 ?1194

[6] Ji-Huan He. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method 156 (2004) 527 ?539

[7] Liao, S. (2011). Homotopy analysis method in nonlinear differential equations. Ho-

motopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations, 9783642251320, 1 ?565. https ://doi.org/10.1007/978-3-642-25132-0.

[**8**] Shijun Liao. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations. Beijing Higher Education Press Berlin Heidelberg, 2011

[**9**] J.H. He, Homotopy perturbation technique.Comput. Meth. Appl. Mech. Eng 178(3), 1999

[**10**] A. Ghorbani. Beyong Adomian polynomials : He polynomials. Chaos, Solitons and Fractals, 39 :1486-1492, 2009.

الملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة معادلة تفاضلية عادية غير خطية من الدرجة الثانية بطريقتين : طريقة الهوموتوبي التحليلية و طريقة الهوموتوبي المضطربة تحصلنا على نفس سلسلة الحلول ، لتحديد دقة الطريقتين تم إجراء المقارنة بين النتائج مع الحل الدقيق لاحظنا أن كلتا الطريقتين توصلنا إلى حل تقريبي قريب من الحل الدقيق إلا أن طريقة الهوموتوبي التحليلية تكون أكثر كفاءة من طريقة الهوموتوبي المضطربة.

الكلمات المفتاحيةٌ: معادلة تفاضلية عادية ، طريقة الهوموتوبي التحليلية ، طريقة الهوموتوبي المضطربة

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié une équation différentielle ordinaire du second ordre non linéaire de deux manières : la méthode d’analyse d'homotopie et la méthode perturbation d'homotopie , nous avons obtenu la même série de solutions, pour déterminer la précision des deux méthodes, la comparaison a été entre les résultats avec la solution exacte. Nous avons remarqué que les deux méthodes atteignaient une solution approchée proche de la solution exacte, mais la méthode d’analyse d'homotopie est plus efficace que la méthode de perturbation d'homotopie.

Mots clés : Équation différentielle ordinaire, méthode d’analyse d'homotopie, méthode de perturbation d'homotopie.

Abstract

In this work, we studied a nonlinear second-order ordinary differential equation in two ways : the homotopy analysis method and the homotopy perturbation method, we obtained the same series of solutions, to determine the accuracy of the two methods, the comparison was between the results with the exact solution. We noticed that both methods reach an approximate solution close to the exact solution, but the homotopy analysis method is more efficient than the homotopy perturbation method.

Keywords: Ordinary differential equation, homotopy analysis method, homotopy perturbation method.