UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matiére

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : chahbi fatima zohra

Théme

Etude l'existence de quelques problemes aux limte en resonance sur un intervalle non bornée KerL=1

Soutenu publiquement le : 15/06/2022

Devant le jury composé de :

Mr.**Abbassi Hossine**	M.C.A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Kouadri Kada**	M. C.B universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Kouidri Mohammed**	M.C.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2021/2022

Dédication

Nous dédions ce modeste travail :

A le père cher.

A la mère chère.

A le marie cher.

A les frères et soeurs.

A tout la famille.

A tout les amis.

Remerciement

Avant toute considération,je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.
Tout d'abord, je remercie mon encadreur Monsieur Kouidri Mohammed de m'avoir fourni ce sujet important en mathématiques, et je le remercie pour son soutien et ses encouragements et ses orientation tout au long de la rédaction de ce mémo.
Je remercie tous ceux qui ont contribué avec moi pour terminer ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce memoire, on etude l'existence de quelque problèmes aux limites en résonance sur un intrvalle non bornée $KerL = 1$.

Qui on étude la solvabilité d'une classe d'équations diffèrentielles d'ordre supérieure avec des condition initiale et une condition aux limites intégrale sur la demi-droit.en utilisant la théorème du degré de coincidence de Mawhin et en construisant des opérateures appropriés,nous prouvons l'existence de solution pour les problèmes posés aux limites de résonances.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéresses à l'existence de solution de l'equation différentielle ordinaire d'ordre supérieur

$$x^{(n)} = f(t, x(t)), t \in (0, \infty) \tag{1}$$

avec la condition de valeur limite integrale

$$x^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, ..., n-2, x^{(n-1)}(\infty) = \frac{n!}{\xi^n} \int_0^{\xi} x(t)dt \tag{2}$$

où $n \geq 3$ est un entier, $\xi > 0$ et $f \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Le problème aux limites est dit en rèsonance si le problème aux limites homogéne correspondant a une solution non triviale.

Les problèmes de résonance peuvent être formulés comme une équation abstraite $Lx = Nx$,où L est un opérateur non inversible.Quand L est linéare,comme on le sait,la théorie du degré de coincidence de Mawhin [10] a joué un rôle important dans le traitement de l'existence de solutions à ces problèmes,pour des résultats plus récents,nous renvoyons le lecteur à [1], [3], [4], [8], [9], [19], [30], [33], [34], [35] et leurs reférences .

De plus ,des problémes de valeur aux limites sur la demi-droite se posent dans de nombreuses applications en physique telle que la modélisation de l'écoulement instationnaire

d'un gaz à travers de milieux poreux semi-infinis ,en physique des plasmas,en déterminant le potentiel éléctrique dans un atome neutre isolé, ou en théorie de la combustion.Pour une abondante litterateure de résultats concernant les problèmes aux limites sur des domaines non bornés,nous renvoyons le lecteur à la monographie d'Agarwale et O'Rgan [23].
Récemment,il a etude nombreux travaux concernant l'exixtence de solutions pour les problémes aux limites sur la demi-droit.Par exemple voir [2], [5], [11], [13], [14], [17], [21], [24], [25], [28], [31], [32], ,et leurs références .Soit dit en passant ,une grande partie des traveaux sur l'existence de solutions pour les problémes aux limites sur des domaines non bornés implique des equations différentilles du second ou du troisième ordre.
Cependant,pour le cas de la résonance,aucun travail n èst fait pour les problèmes aux valeurs limites d' ordre supérieur avec des conditions aux limites integrales sur la demi-droit,telles que $(1)-(2)$.

Notations

- (M, d) : espace métrique.
- d(.,.) : application de distance.
- Ω : un ensemble ouvert borné.
- $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω .
- U : un ensemble ouvert.
- deg : degré topologique.
- deg_B : degré topologique de Brouwer.
- deg_{LS} : degré topologique de Leray-Schauder.
- $\overline{B}$: la boule unité fermée.
- Im : image d'une application.
- Ker : noyau.
- P, Q : deux projections continues.
- $\oplus$: la somme direct
- L : l'opérateur de Fredholm.
- dom : domaine.
- ind : indice.

- dim : dimension.
- $codim$: codimension.
- $coker$: conoyau.
- K_p : l'opérateur linéaire.
- N : L-compact sur $\overline{\Omega}$.
- $\|.\|_\infty = max\ |\ .\ |$.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la “généralisation” en dimension infinie) Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

1.1 Théorème du point fixe

1.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Definition 1 *: **(Point fixe)** Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Definition 2 *: **(L'application lipschitzienne)** Soit (M,d) un espace métrique complet et l'application $T : M \longrightarrow M$, on dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x,y de M, l'inégalité :*

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)), \forall x, y \in M \tag{1.1}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.
Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Thèorème 3 [[*29*]] ***(Théorème du point fixe de Banach(1922))*** *Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \longrightarrow M$ une application contractante avec la constante de*

contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$*. De plus on a :*
Si $x_0 \in M$ *et* $x_n = T(x_{n-1})$, $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ *et*

$$d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0), \quad n \geq 1, \tag{1.2}$$

x *étant le point fixe de* T *.*

Preuve. (1) Nous montrons d'abord l'unicité :
On suppose que il existe $x, y \in M$ avec x = T(x) et y = T(y) alors $d(x, y) = d(T(x), T(y) \leq kd(x, y)$.
Puisque $0 < k < 1$ alors la dernier inégalité implique que $d(x; y) = 0 \Longrightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que T(x) = x.
(2)Pour montrer l'existence :
sélectionnez $x \in M$.
Nous montrons d'abord que x_n est un suite de cauchy.
Remarquez pour $n \in \{0, 1, ...\}$
$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})........ \leq k^n d(x_0, x_1)$
Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m)$
$\leq k^n d(x_0, x_1) + k^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + k^{m-1} d(x_0, x_1)$
$\leq k^n d(x_0, x_1)[1 + k + k^2 + ...]$
$\leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$
Pour $m > n$, $n \in \{0, 1, ...\}$ on a :

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \tag{1.3}$$

alors x_n est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $x \in M$ avec $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ De plus par la continuité de T
$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = T(x)$
Donc x est un point fixe de T.
Finalement,$m \longrightarrow \infty$ in (1.3), on obtient $d(x_n, x) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ ■

Exemple 4 *Considérons l'application* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *défini par* $T(x) = \dfrac{x + \sin(x)}{3}$ *, alors T une contraction avec* $0 < k = \dfrac{2}{3} < 1$*, et admet comme point fixe x = 0 et* $\lim\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 0$

Remarque : Les conditions du cette théoréme sont nécessaires, consdérons l' exemple suivant.

Exemple 5 ***(Condition de fermeture)*** $T :]0;1] \longrightarrow]0;1]$, *T(x)* $= \frac{x}{2}$ *, est contractante et vérifie* $T(]0;1]) \subset]0;1]$ *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que]0 ; 1] n'est pas fermé :*$\lim x_n = 0$ *n'est pas contenue dans* $]0;1]$

1.1.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Definition 6 *Soient* $N \geq 1$ *;*$R > 0$ *et* $f \in C(B_R; B_R)$ *avec* $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| \leq R\}$ *(on muni* R^N *d'une norme notée* $\|.\|$*) Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire :*

$$\exists y \in B_R \text{ tel que } : f(y) = y$$

Le théorème de point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même

Thèorème 7 ***(Théorème du point fixe de Brouwer)***
Soit B_n *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^N$ *: La boule* B_n *a la propriété du point fixe pour tout* $n \in N^*$

1.1.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Thèorème 8 ***(Théorème du point fixe de Schauder)***
Soit $(E; d)$ *un espace métrique complet. Soit X est partie convexe et fermé de E, et soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application telle que l'ensemble* $\{Tx : x \in X\}$*est relativement compacte dans E. Alors T possède au moins un pont fixe.*

Preuve. Soit $T : X \longrightarrow X$ une application continue. Comme X est compact, alors T est uniformément continue. Donc pour ε fixé, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in X$; on a :

$$\|x-y\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x)-T(y)\| \leq \varepsilon$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent X ; c'est-à-dire, $K \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$

Si on pose $L := vect(T(x_j)_{1\leq j\leq p}$; alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$; on définit la fonction continue $\psi_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} 0 & si\|x-x_j\| \geq \delta \\ 1-\dfrac{\|x-x_j\|}{\delta} & sinon \end{cases}$$

Il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j;\delta)$ et nulle en dehors. On a donc, pour tout $x \in X$; $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$; et par la suite on peut définir sur X les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$;pour tout $x \in X$.

Posons maintenant, pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j x T(x_j)$$

La fonction g est continue (somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans X^* (car g est un barycentre des $T(x_j)$). Si on prend la restriction $g/X^* : X^* \longrightarrow X^*$, (d'après le théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in X^*$: De plus :

$$\begin{aligned} T(y)-y &= T(y)-g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(T(y)-T(xj)) \end{aligned}$$

Où si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$; et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$: Donc, on a pour tout j

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \|T(y) - T(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m on peut trouver un point $y_m \in X$ tel que

$$\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$$

Et puisque X est compact, alors de la suite $(y_m)_m$ on peut extraire une sous suite (y_{mk}) qui converge vers un point $y^* \in X$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{mk})\ )$ converge vers $T(y^*)$,et on conclut que $T(y^*) = y^*$, c'est-à-dire y^* est un point fixe de T sur X. ■

1.1.4 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème de Schaefer est en fait un cas particulier d'un théorème de plus grande portée découvert auparavant par Schauder et Leray. Il s'énonce ainsi :

Thèorème 9 ***(Théorème du point fixe de Schaefer)***
Soit T une application continue et compacte d'un espace localement convexe séparé E dans lui-même, telle que l'ensemble

$$\{x \in E / \exists \lambda \in]0; 1[; x = \lambda T(x)\}$$

soit borné. Alors pour tout $\lambda \in [0; 1]$, il existe $x \in E$ tel que $x = \lambda T(x)$

Preuve. On considére $C = \overline{B(0)}$ où $r > 0$ est donné par la condition du bord. considérons la rétraction ρ de E dans C qui est définie par :

$$\rho(x) = x, \text{ si } x \in C$$

et

$$\rho(x) = \frac{r}{\|x\|} \text{ ,si } \|x\| > r$$

et notons $f_*(x) = \rho o f$, $f^* : C \longrightarrow$ C. comme f_* est compact, par le théorème de Schauder il existe $x \in C$ tel que $f_*(x) = x$.
Montrons que $f(x) \in C$ car dans ce cas $f_*(x) = f(x)$ et on aura la conclusion. Si $f(x) = \in C$ alors $x = f_*(x) = \dfrac{r}{\|f(x)\|} f(x)$ et on a d'une part

$$\|x\| = \|\frac{r}{\|f(x)\|} f(x)\| = r$$

et d'autre part

$$f(x) = \frac{\|f(x)\|}{r} x = \lambda x$$

avec$\lambda > 1$, ce que est contradictoire. ■

1.1.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Rappelons que dans espace métrique un sous-ensemble est relativement compact si son adhérence est un ensemble compact.

Thèorème 10 ***(Théorème d'Arzela-Ascoli)***
Soit (K ; d) un espace métrique compact, $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $A \subset C(K, E)$. Alors A est relativement compact dans $(C(K, E); \|.\|_1, K)$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :
(a) *A est équicontinue, c-à-d*
pour tout $x \in K$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V \subset K$ de x tel que

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \forall y \in V, \forall f \in A$$

(b) *Pour tout $x \in K$, l'espace A(x) définie par*

$$A(x) = \{f(x); f \in A\}$$

est relativement compact dans E.

Preuve. Supposons que A est relativement compact.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini $f_i \in A$ tel que, pour tout $f \in A$ il existe un indice i pour lequel

$$\|f - f_i\|_{\infty,k} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Notons I_0 l'ensemble finie de ces indice. Alors d'une part, pour tout $x \in K$,

$$\|f(x) - f_i(x)\|_{\infty,k} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

c-à-dire

$$A(x) \subset \bigcup_{i \in I} \overline{B_{\varepsilon/3}(f_i(x))}$$

et par conséquent $A(x)$ est relativement compact dans E. D'autre part, soit V un voisinage de x tel que, pour tout $y \in V$ on ait

$$\|f(x) - f_i(y)\|_{\infty,k} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $i \in I_0$. On aura alors que pour tout $y \in V$ et pour tout $f \in A$,

$$\|f(y) - f(x)\|_{\infty,k} \leq \varepsilon$$

Supposons maintenant **(a)** et **(b)**. Notons V_x le voisinage de x donné par (a). Comme $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$ et K est compact, on peut extraire un nombre fini $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ telle que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_x$.

Par **(b)** $A(x_i)$ est relativement compact, la réunion finie $\bigcup_{i=1}^{m} A(x_i)$ l'est aussi et on peut alors trouver dans cette réunion un nombre fini de points $c_1, ...c_n$ telle que

$$\bigcup_{i=1}^{m} A(x_i) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\varepsilon/4}(c_j)$$

Notons par φ une application quelconque de $\{1, ..., m\}$ dans $\{1, ..., n\}$. Il ya seulement un nombre finie de telles applications, Notons

$$L_\varphi := \{f \in A, \forall i \in \{1, ..., m\}, \|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leq \varepsilon/4\}$$

Alors $A \subset \cup_\varphi L_\varphi$ et puisque $\|f - g\|_{\infty,k} \leq \varepsilon$ pour tout $f, g \in L_\varphi$, on conclut. ■

1.1.6 Principes de continuation

une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation. Celui-ci consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom devra vérifier certaines condition voir [[26]].

Definition 11 ***(les application homotopes)*** *Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue*

$$H : X \times [0;1] \longrightarrow Y$$

telle que : $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. On note $f \simeq g$.

Remarque : En d'autres termes, pour cette définition , il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x, t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument.

Exemple 12 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application constante $f(x) = 0$, et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application $g(x) = x$. Montrons que f et g sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$H(x, t) = tx \ .$$

Alors $H(x, 0) = 0 \times x = 0 = f(x)$ et $H(x, 1) = x \times 1 = g(x)$.

1.2 Degrè topologique

Dans cette section, nous donnons un brèf aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $deg(f, \Omega, y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X$, où $f : X \longrightarrow X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique métrique la plupart du temps. Voir [**?**][16][22][**?**].

1.2.1 Degrè topologique de Brouwer

Soit Ω un ouvert borné et de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}.\overline{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$, k fois différentiables dans Ω qui sont continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

Definition 13 *:**(Jacobien)** Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = detf^{`}(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.*

Definition 14 *:**(Le point critique)** Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω . Notons par $J_f(x_0)$ le Jacobien de f en un point x_0 de Ω .Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. sinon, x_0 est dite point régulier.*
On pose $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques. C'est à dire :

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}$$

Definition 15 *:**(Valeur régulière)** Considérons y un élément dans $\mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = 0$. Sinon, y est dit valeur singulière.*

Definition 16 *:**(Degré topologique)** Soit $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y le nombre entier*

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} SgnJ_f(x)$$

où $SgnJ_f(x)$ représente le signe de $J_f(x)$, défini par

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t>0 \\ -1 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

Avec l'ajoute de ces deux notes
1) *si $f^{-1}(y) = 0, deg(f, \Omega, , y) = 0$.*
2) *$f^{-1}(y)$ contient un nombre fini d'éléments.*
Dans le cas où $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq 0$, Nous passons à le lemme suivant :

Lemme 1 *:**(Lemme de Sard)** Soit une fonction $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Alors l'ensemble $f(S_f)$ des valeurs critiques de f est de mesure nulle.*
Nous verrons maintenant qu'on peut étendre la notion de degré au cas où la fonction f est seulement continue.

Definition 17 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. On définit le degré topologique de f dans Ω par rapport y par*

$$deg(f, \Omega, y) = [\lim_{n \longrightarrow \infty} deg(f_n, \Omega, y)]$$

où $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonction $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ qui converge uniformément vers f dans $\overline{\Omega}$.

Thèorème 18 [[*16*]]***(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et posons $A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega)\}$ .L'application $deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \longrightarrow \mathbb{Z}$ satisfait les propriés suivantes
1. *(Normalisation) $deg(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$ et $deg(I, \Omega, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^n/\overline{\Omega}$ où I désigne l'application identité sur $\overline{\Omega}$.*
2. *(Solvabilité) Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.*
3. *(Invariance par homotopie) Pour tout $h : [0; 1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et tout $y : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continues telles que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0; 1], deg(h(t, .), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.*
4.*(Additivité) Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Alors*

$$deg(f, \Omega, , y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y)$$

5.*$deg(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$*
6.*$deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0)$.*
7. *Soit $g : \Omega \longrightarrow F_m$ une application continue où F_m est un sous espace de $\mathbb{R}^n$, $dimF_m = m, 1 \leq m \leq n$: Supposons que y est tel que $y \notin (I - g)\partial\Omega$. Alors*

$$deg(f, \Omega, y) = deg((I - g)_{\overline{\Omega} \cap F_m}, \Omega \cap F_m, y)$$

Remarque 19 *Dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, la proprié (2) du théoréme ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérét principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le méme degré.*

Exemple 20 *Soit $\Omega = (-1, 1)$ et considérons*

$$h : (t,x) \in [0;1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow h(t,x) = (1-t)x + t(x^2+1)e^x$$

Alors,

1.h est continue sur $[0;1] \times \overline{\Omega}$.

2.$h(0,x) = (1-0)x + 0 \times (x^2+1)e^x = x = I(x)$.

3.$h(1,x) = (1-1)x + 1 \times (x^2+1)e^x = (x^2+1)e^x = f(x)$.

4. *Pour tout* $t \in [0;1]$ *, les fonction* I *et* f *sont homotopes , Donc* $deg(f,(-1,1),0) = deg(I,(-1,1),0) = 1$.

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega \subset X$ un ensemble ouvert et borné, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$ .Dans la section précédente, nous avons vu qu'en dimension finie, $C(\overline{\Omega}, X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré, le degré de Brouwer, satisfaisant les propriétés $1, 2$ et 3 du théorème . Malheureusement, en dimension infinie, $C(\overline{\Omega}, X)$ ne l'est pas. En effet, un exemple du à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré de Leray-Schauder, a un ensemble strictement contenu dans $C(\overline{\Omega}, X)$.

Definition 21 [22] *Soient* X *un espace de Banach et* Ω *une partie fermé de* X *: Si* $T : \Omega \longrightarrow X$ *est un opérateur continu, on dit que* T *est compact si pour toute partie bornée* B *de* Ω *,* $T(B)$ *est relativement compact dans* X*.*

Remarque 22 *On notera en particulier que si* T *est compact, alors* T *est borné sur les parties bornées de* X*.*

Definition 23 *Soient* X *un espace de Banach et* Ω *une partie de* X*. On dit que l'application* $T : \Omega \longrightarrow X$ *est de rang fini si* $dim(Im(T)) < \infty$*, autrement dit, si* $Im(T)$ *est un sous-espace de dimension finie de* X*.*

Lemme 2 *Soient* X *un espace de Banach,* $\Omega \subset X$ *: Un ouvert borné et* $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *une application compacte. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un espace de dimension fini noté* F *et une application continue* $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ *telle que*

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| < \varepsilon \ ,\forall x \in \overline{\Omega}$$

Definition 24 *Soient X un espace de Banach , $\Omega \subset X$: Un ouvert borné et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ une application compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0)$ est bien défini . Par conséquent , nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0)$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω . Si $y \in X$ est tel que $y \notin (I-T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant

$$deg(I - T, \Omega, y) = deg(I - T - y, \Omega, 0)$$

Thèorème 25 [27]***(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Leray-Schauder)***
Soit X un espace de Banach et $A = \{((I - T, \Omega, 0), \Omega$ un ouvert borné de $X, T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ compacte 16$0 \notin (I - T)(\partial\Omega)\}$ alors, il existe une unique application $deg(f, \Omega, y) : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :
1. (Normalité) Si $0 \in \Omega$ alors $deg(I, \Omega, 0) = 1$
2. (Solvabilité) Si $deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$; alors exists $x \in \Omega$ tel que $(I - T)x = 0$
3. (Invariance par homotopie) Soit $H : [0; 1] \longrightarrow \overline{\Omega}$ une homotopie compacte, telle que $0 \notin (I - H(t, .))(\partial\Omega)$, Alors $deg(I - H(, .), \Omega, 0)$ ne dépend de $t \in [0; 1]$
4. (Additivité) Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et

$$0 \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

Alors,

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0)$$

Remarque 26 *Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brower.*
Comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Thèorème 27 ***(Brouwer)*** *Soit* $\overline{B}$ *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ *continue. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \overline{B}$ *tel que* $f(x) = x$
Preuve. *S'il existe un* $x \in \partial B$*, alors il n'y a rien à prouver. Sinon considérons l'application continue* $h(t, x) = x - tf(x)$*. Alors,* $h(0, x) = x - 0 \times f(x) = x$ *et* $h(1, x) = x - 1 \times f(x) = x - f(x)$*. Si on suppose que* $h(t, x_0) = 0$*, comme* $x_0 \in \partial B$*, alors on obtient* $x_0 = tf(x_0)$ *ce qui implique comme* $0 \leq t \leq 1$ *; que* $f(x_0) \in \partial B$ *; contradiction. Comme est une homotopie admissible entre* $I - f$ *et* I*. Donc*

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$$

En conclusion, $\exists x \in B$*, tel que* $x - tf(x) = 0$ *i.e.* $f(x) = x$ ■

Thèorème 28 ***(Schauder)*** *Soit* $\overline{B}$ *la boule unité fermée d'un Banach* E *et* $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ *compacte. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \overline{B}$ *tel que* $f(x) = x$*.*
Preuve.

Soit $h(t, x) = tf(x)$ *fonction compacte sur* $[0; 1] \times \overline{B}$ *: Si, pour* $t \in [0; 1]$ *et un* $x \in \partial B$ *; on a* $x - h(t, x) = 0$ *; alors* $tf(x) = x$ *comme* $|x| = 1$ *e* $t|f(x)| \leq 1$*, ceci impose* $t = 1$ *et* $x = f(x)$ *donc un point fixe sur* ∂B *situation que l'on a exclue. On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne*

$$1 = deg(I, B, 0) = deg(I - f, B, 0)$$

puisque $h(0, .) = 0$ *et* $h(1, 0) =$*f donc l'existence d'un point fixe .* ■

Thèorème 29 *[27]* ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)***
Soit $\Omega \subset X$ *un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach* X *tel que* $0 \in \Omega$ *, et soit* $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *un opérateur compact.Alors un des deux énoncés suivant vérifié :*
(1) T *a un point fixe dans* Ω *.*
(2) il existe $\lambda > 1$ *et* $x \in \partial\Omega$ *tels que* $Tx = \lambda x$
Preuve.

Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon, on définit l'homotopie

$$H(t, x) = tTx, \forall t \in [0; 1]$$

Ainsi défini $H(t,x)$ *est compacte,* $H(0,x)=0$ *et* $H(1,x)=Tx$. *Supposons que* $H(t,x_0)=x_0$ *pour un certain* $t\in[0,1]$ *et* $x_0\in\partial\Omega$ *: Alors on a* $tTx_0=x_0$ *: Si* $t=0$ *ou* $t=1$ *on a (1) Sinon*

$$Tx_0=\frac{1}{t}x_0 \text{ pour un certain } t\in(0,1)$$

et alors on a (2). Sinon, on a $deg(I-T,\Omega,0)=deg(I,\Omega,0)=1$ *et alors* T *a un point fixe dans* Ω ■

Thèorème 30 ***(Brouwer)*** *Soit* M *une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie* $(X,\|.\|)$ *et soit* $A:M\longrightarrow M$ *une application continue, alors* A *admet un point fixe .*

Thèorème 31 ***(Schauder)*** *Soit* M *une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach* X *et soit* $A:M\longrightarrow M$ *une application compacte, alors* A *admet un point fixe.*

Thèorème 32 ***(Krasnoselskii)*** *Soit* X *un espace de Banach et* M *un ensemble non vide de* X *fermé, borné et convexe. U, V sont deux applications de* M *dans* X *telles que : U est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue.* $U_x+V_y\in M,\forall x,y\in M$, *Alors il existe* $x\in M$ *tel que* $U_x+V_x=x$.
Maintenant Considérons $X=C([a;b])$ *muni de la norme* $\|u\|=\max\limits_{a\le t\le b}|u(t)|$ *avec* $-\infty<a<b<+\infty$.*Si* M *est un sous ensemble de* X *.*

Definition 33 ***(Ensemble borné)*** M *est borné, alors* $\|u\|\le r$, $\forall u\in M$ *et* $r>0$ *un nombre fixé.*

Definition 34 ***(Ensemble équicontinu)*** M *est équicontinu, alors*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ tq\ |t_1-t_2|<\delta \text{ et } \forall u\in M\Longrightarrow|u(t_1)-u(t_2)|<\varepsilon$$

Thèorème 35 ***(Ascoli-Arzela)*** *si* M *est borné et équicontinu alors* M *est relativement compact.*

Chapitre 2

Théorème de Mawhin

Dans ce chapitre, on fait la présentation du théorème de Mawhin. Mais avant de faire la présentation plus détaillée du théorème, faisons brièvement l'état de l'art sur les opérateurs de Fredholm ainsi que les principales notions qui s'y rapportent. En revanche comme nous le verrons par la suite, ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections, alors nous y consacrons une autre section.

2.1 Supplémentaire topologique

Definition 36 ***(Supplémentaire topologique)*** *Soit E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E c-à-d $X = F \oplus E$.*

Remarque 37 *1. Tout sous espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire toppologique.*
2. Tout sous espace vectoriel fermé de codimension finie admet un supplémentaire toppologique

2.2 Projection

Definition 38 ***(Projection)*** *Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \longrightarrow X$ est une projection si $P(P(x)) = P(x)$, $\forall x \in X$ (c-à-d si $P^2 = P$).*

Proposition 39 *Soit X, un espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : X \longrightarrow X$ est une projection si et seulement si $(I-P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si $(I-P)$ est continue.*

Preuve. (1)On montre que : P projection $\Longleftrightarrow$ $(I-P)$ projection
($\Longrightarrow$) P une projection, alors :

$$\begin{aligned}(I-P)^2(x) &= (I-P)[(I-P)(x)]\\ &= (I-P)[x-P(x)]\\ &= I(x-P(x)) - P(x-P(x))\\ &= x-P(x)-P(x)+P^2(x)\\ &= x-2P(x)+P(x)\\ &= x-P(x)\\ &= (I-P)(x)\end{aligned}$$

donc (I-P) est une projection.
($\Longleftarrow$) (I-P) est une projection, alors $I-(I-P)$ projection et $I-(I-P) = I-I+P = P$ donc P est une projection.
(2) On montre que : P est continue ($\Longleftrightarrow$) (I - P) est continue
($\Longrightarrow$) P est continue et I est continue , alors (I-P) continue
($\Longleftarrow$) (I-P) est continue, alors p est continue car(l'identité est une application continue) ■

Proposition 40 *Si P est une projection dans X, alors :*

$$Ker(P) = Im(I-P) \text{ et } Im(P) = Ker(I-P)$$

Preuve. (1) On montre que $Ker(P) = Im(I-P)$
D'abord, on montre $Ker(P) \subset Im(I-P)$
Si $x \in Ker(P) \Longrightarrow P(x) = 0$. En remplaçant P par $(I-P)$ alors

$$(I-P)(x) = x-P(x) = x-0 = x \Longrightarrow x \in Im(I-P)$$

Alors $Ker(P) \subset Im(I-P)$
En suite, On montre $Ker(P) \supset Im(I-P)$.
Si $x \in Im(I-P)$, on définie l'application :
$P((I-P)(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0 \Longrightarrow x \in Ker(P)$.

alors $Ker(P) \supset Im(I-P)$. Donc $Ker(P) = Im(I-P)$
(2) On montre que $Im(P) = Ker(I-P)$.
D'abord, on montre que $Im(P) \subset Ker(I-P)$.
Si $x \in Im(P) \Longrightarrow P(x) = x$, on remplaçant P par $(I-P)$ alors

$$(I-P)(x) = x - P(x)x - x = 0 \Longrightarrow \forall x \in Ker(I-P)$$

Alors, $Im(P) \subset Ker(I-P)$ En suite, on montre $Im(P) \supset Ker(I-P)$.
Si $x \in Ker(I-P)(x)$ alors $(I-P)(x) = 0 \Longleftrightarrow x - P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = P(x) \Longrightarrow x \in Im(P)$
alors $Im(P) \supset Ker(I-P)$. Donc $Im(P) = Ker(I-P)$ ■

2.3 Sous-espace de dimension et de codimension finie

Lemme 3 ***(Projection sur un sous-espace de dimension finie)*** *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un projection P continu sur X tel que $Im(P) = E$.*

Preuve. On choisit une base $e_1, ..., e_n$ de E, et on désigne par B_k, $k = 1, ..., n$ les formes linéaires coordonnées sur E associées reprectivement à $e_1, e_2, ..., en$

$$B_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si j=i} \\ 0 & \text{si j} \neq i \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger $B_1, B_2, ..., B_n$ en formes linéaire $f_1, f_2, ..., f_n$ continues sur X, on obtient que l'application P définie par

$$\forall x \in X, P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

est un projection continue de X sur E que répond au probléme. ■

Corollaire 41 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, il existe un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ tel que $X = E \oplus Y$.*

Definition 42 ***(Codimension d'un sous-espace vectoriel)*** *Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ est de codimension finie dans X qu'on écrit*

$$codim(Y) = dim(X/Y)$$

Lemme 4 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espace vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $dim(M) = codim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

Preuve.

Soit $\pi = \pi_{|N}$ la surjection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application π_M est injective. D'où

$$dim(\pi(M)) = dim(M) = codim(N) = dim(E/N)$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$. Ainsi il existe $x_M \in M$ tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$.
D'où $\pi(x - x_M) \in Ker\pi = N$.
On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$. ■

2.4 Opérateur de Fredholm

Definition 43 ***(Opérateur de Fredholm)*** *Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, on dit qu'une application linéaire $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes*

1. $Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ est de dimension finie.
2. $Im(L) = L(dom(L))$ est fermée et de codimension finie.

Rappelons que la codimension de Im(L) est la dimension de $coker(L) = dim(Y/Im(L))$.

Definition 44 ***(L'ndice)*** *Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier*

$$ind(L) = dim(Ker(L)) - codim(Im(L))$$

Exemple 45 *l'identité $I : X \longrightarrow X$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

$$
\begin{aligned}
ind(L) &= dim(Ker(I)) - codim(Im(I)) \\
&= dim(Ker(I)) - dimcoKer(Im(I)) \\
&= dim(Ker(I)) - dim(\frac{x}{Im(I)}) \\
&= dim\{0\} - dim\{0\} = 0
\end{aligned}
$$

Thèorème 46 *Si L est un opérateur de Fredholm, K est une application linéaire compacte , alors L + K est de Fredholm et*

$$ind(L + K) = ind(L)$$

En particulier, toute perturbation compacte de l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 47 *Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjectif si et seulement si L est injectif.*

Preuve. L est surjective, alors $Im(L) = Y = Y + \{0\}$ et par suite, $dim\{0\} = dim(Ker(L)) = 0$, donc $Ker(L) = \{0\}$, d'où L est injective. ■

Dans tout ce qui suit (sauf mention de contraire) $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0.
Si L est de Fredholm, alors d'aprés ce qui précède, (voir aussi [[7]] et [[18]]), il existe deux projections continues, $P : X \longrightarrow X$ et $Q : Y \longrightarrow Y$ tel que

$$Im(P) = Ker(L) \text{ et } Ker(Q) = Im(L)$$

On pose

$$X_1 = Im(I - P) = Ker(P) \text{ et } Y_1 = Im(Q)$$

alors

$$X = Ker(L) \oplus X_1 \text{ et } Y = Im(L) \oplus Y_1$$

Considérons un isomorphisme

$$J : Ker(L) \longrightarrow Im(Q)$$

dont l'existence est assurée par le fait que dimker(L) = dimIm(Q) = n. Remarquons que

$$dom(L) = Ker(L) \oplus (dom(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $dom(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur Im(L), notons par L_p cette restriction c'est à dire $L_p : dom(L) \cap X_1 \longrightarrow Im(L)$,alors

Lemme 5 *L_p est un isomorphisme algébrique.*

Preuve.

(1) Montrons que L_p est injective : soit $x \in Ker(L_p) \subset Ker(L) = Im(P)$ alors, il existe un $y \in dom(P)$ tel que $x = Py$.
Comme P est une projection, on obtient $x = Py = P^2y = P(Py) = Px = 0$. Par conséquent, x = 0, et donc $Ker(L_p) = \{0\}$, alors Lp est injective.
(2) Montrons que L_p est surjection :
on a P est une projection , alors nous pouvons écrire l'espace vectoriel X comme somme directe $X = Ker(P) \oplus Im(P) = Ker(P) \oplus Ker(L)$.
Prenons $z \in Im(L)$, donc il existe $x \in dom(L) \subset X$ tel que $Lx = z$. Comme $X = Ker(P) \oplus Ker(L)$, alors il existe deux éléments unique $e \in Ker(P)$ et $f \in Ker(L)$, tels que $x = e + f$. On a $z = Lx = L(e + f) = Le + Lf = Le + 0 = Le$, ainsi $e \in dom(L)$.
Finalement, on obtient $e \in dom(L)$, $e \in Ker(P)$ et $L_pe = z$, d'où L_p est bien surjective. ■
Soit $K_p : Im(L) \subset Y \longrightarrow dom(L) \cap Ker(P)$ est bijectif, défini par $K_p := L_p^{-1}$, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés suivant :

Lemme 6 *a. Sur $Im(L)$, on a $LK_p = I$.*
b. Sur $dom(L)$, on a $K_pL = (I - P)$.

Preuve. (a) Prenons $x \in Im(L)$, alors $LK_px = L(K_p(x)) = L_p(K_p(x)) = Ix$.
(b) Comme $Im(P) = Ker(L)$, alors $L_P = 0$, et par suite $K_pL = K_pL(I_P)$. Donc montrer (b), revient à vérifier que $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P)$.
Si on a $Im(I - P) \subseteq dom(L_p) = dom(L) \cap Ker(P)$, alors le résultat s'ensuit. Prenons $x \in dom(L)$,Comme $P(x) \in Ker(L) \subset dom(L)$ et $dom(L)$ est un sous espace vectoriel de X, on a $(x - Px) \in dom(L)$.
Puisque $P(x - Px) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$, alors $(x - Px) \in Ker(P)$ et par conséquent $(x - Px) \in dom(L) \cap Ker(P)$. D'ici obtient $Im(I - P) \subset dom(L) \cap Ker(P)$.
D'où en utilisant (a) $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P)$ s'ensuit ■

Définition maintenant l'opérateur $K_{P;Q} : Y \longrightarrow X$ avec $K_{P;Q} = L_p^{-1}(I - Q)$ on a

Lemme 7 *L'opérateur $L + JP : dom(L) \longrightarrow Y$ est un isomorphisme et*

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$$

En particulier,

$$(L + JP)^{-1}x = J^{-1}x, \forall x \in Im(Q)$$

Preuve. Pour l'injectivité de $L + J_P$, soit $x \in dom(L)$ tel que

$$(L + JP)x = 0$$

De cette égalité on en déduit que

$$Lx \in Im(L) \cap Im(J) = Ker(Q) \cap Im(Q) = \{0\}$$

d'où $x \in Ker(L)$. Par conséquence, $Px = x$ et compte tenu de $u''' + f(t, u) = 0$ où $0 < t < 1$, $J_x = 0$, par suite $x = 0$. Pour la surjectivité de $L + JP, y \in Y$. Affirmons que

$$x = (K_{P,Q} + J^{-1}Q)y$$

est une solution de

$$(L + JP)x = y$$

Alors, comme $J^{-1}Qy \in Ker(L)$, il en résulte que

$$Lx = LK_{P,Qy} = LL_p^{-1}(I - Q)y = (I - Q)y$$

Comme $K_{P,Qy} \in dom(L) \cap Ker(P)$, il en s'ensuit que

$$JP_x = JJ^{-1}Qy = Qy$$

Donc

$$(L + JP)x = (I - Q)y = Qy$$

et

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$$

■

Lemme 8 *Si $N : dom(N) \subset X \longrightarrow X$ est une application, le problème*

$$x \in dom(L) \cap dom(N), Lx = Nx$$

est équivalent au problème de point fixe

$$x \in dom(N), x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} &[x \in dom(L) \cap dom(N); Lx = Nx] \\ \Longleftrightarrow &[x \in dom(L) \cap dom(N), (L + JP)x = (N + JP)x] \\ \Longleftrightarrow &[x \in dom(N); x = (L + JP)^{-1}(N + JP)x] \end{aligned}$$

il s'ensuit que utilisantle lemme 7

$(L + JP)^{-1}(N + JP) = (K_{P,Q} + J^{-1}Q)(N + JP) = K_{P,Q}N + K_{P,Q}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP$

Puisque $Im(J) = Im(Q) = Ker(I - Q)$, il en résulte que

$$K_{P,Q}JP = L_p^{-1}(I - Q)JP = 0$$

Puisque $Q|_{Im(Q)} = I|_{Im(Q)}$ et $Im(J) = Im(Q)$, on en déduit que

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P$$

Donc, $(L + JP)^{-1}(N + JP) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$ ■

Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Definition 48 ***(L'application L-compacte)*** *Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \overline{\Omega} \neq \varnothing$, l'application $N : X \longrightarrow Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si $QN(\overline{\Omega})$ est borné et $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte.*

Comme conséquence des lemmes (7) *et* (8) *on a la définition suivant :*

Definition 49 ***[12] (Le degré de Mawhin)*** *Si les opérateurs L et N satisfont les propriétés mentionnées ci dessus, alors le degré de coïncidence de L et N sur Ω est définit par*

$$deg[(L, N), \Omega] = deg_{LS}(I - M, \Omega, 0)$$

où M désignera la quantité donnée par $M(P, J, Q) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$

2.5 Théorème de Mawhin

Thèorème 50 *Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur* $\overline{\Omega}$ *. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) $Lx \neq \lambda Nx$ *pour tout* $(x, \lambda) \in [(dom(L) \backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0;1[$.
(ii) $QNx \neq 0$ *pour tout* $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.
(iii) $deg_B(J^{-1}QN|_{Ker(L)}; \Omega \cap \ Ker(L), 0) \neq 0$, *où* $Q : Y \longrightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$.
Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$ *.*

Preuve. Pour $\lambda \in [0; 1]$, considérons la famille de problèmes

$$x \in dom(L) \cap \overline{\Omega}; Lx = \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx \tag{2.1}$$

Soit $M : [0; 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow Y$ une homotopie définie par

$$M(\lambda, x) = Px + J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx$$

En vertu du(11), le problème (2.1) est équivalent à un problème de point fixe $x \in \overline{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} x &= Px + J^{-1}Q(\lambda N + (1 - \lambda)QN)x + K_{P,Q}(\lambda N + (1 - \lambda)QN)x \\ &= Px + \lambda J^{-1}QNx + (1 - \lambda)J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx + (1 - \lambda)K_{P,Q}QNx \\ &= M(\lambda, x) \end{aligned}$$

Donc, cette dernière équation est équivalente à un problème de point fixe

$$x \in \overline{\Omega}, x = M(\lambda, x) : \tag{2.2}$$

S'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $Lx = Nx$, alors nous avons terminé. Maintenant supposons que

$$Lx \neq Nx \quad \textit{pour tout} \quad x \in dom(L) \cap \Omega \tag{2.3}$$

et d'autre part

$$Lx \neq \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx \tag{2.4}$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0; 1[\times (dom(L) \cap \Omega)$. Si

$$Lx = \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0;1[\times(dom(L)\cap\Omega)$, on obtient par application de Q aux deux membres de l'égalité précédente

$$QNx = 0, Lx = \lambda Nx$$

La première de ces égalités et la condition (ii) impliquent que $x \notin Ker(L)\cap\partial\Omega$ i :e $x \in \partial\Omega\cap(dom(L)\setminus Ker(L))$ et donc la seconde égalité contredit (i). En utilisant une nouvelle fois (ii), il s'ensuit que

$$Lx \neq QNx \quad \textit{pour tout} \quad x \in dom(L)\cap\partial\Omega \tag{2.5}$$

En vertu de $(2.3), (2.4) et (2.5)$, on déduit que

$$x \neq M(\lambda, x) \quad \textit{pour tout} \quad (\lambda, x) \in [0;1]\times\partial\Omega \tag{2.6}$$

Il est facile de vérifier que $M(\lambda, x)$ est compacte car N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$, dés lors en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$deg_{LS}(I - M(0, .), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - M(1, .), \Omega, 0) \tag{2.7}$$

D'autre part on a

$$deg_{LS}(I - M(0, .), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) \tag{2.8}$$

Mas le rang de $P + J^{-1}QN$ est contenu dans $Ker(L)$, d'où en utilisant la propriété de reduction du degré de Leray-Schauder et le fait que $P|_{Ker(L)} = I|_{Ker(L)}$, (car $Ker(L) = Im(P) = Ker(I - P)$), on obtient

$$deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0) = deg_B(I - (P + J^{-1}QN), \Omega\cap Ker(L), 0)$$

$$= deg_B(J^{-1}QN, \Omega\cap Ker(L), 0) \tag{2.9}$$

En vertu de $(2.7), (2.8)$ et (2.9) , il s'ensuit que $deg_{LS}(I - M(1, .), \Omega, 0) \neq 0$, et donc la propriété d'existence du degré de Leray-Schauder implique l'existence d'un $x \in \Omega$ tel que $x = M(1, x)$ i.e $x \in dom(L)\cap\overline{\Omega}, Lx = Nx$

■

Chapitre 3

Application de théorème de Mawhin

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous intéressons à etude l'existence de solutions de quelque problèmes aux limites en rèsonance sur un intervale non bornèe $KerL = 1$,suivante :

$$x^{(n)} = f(t, x(t)), t \in (0, \infty) \tag{3.1}$$

avec la condition de valeur limite integrale

$$x^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, ..., n-2, x^{(n-1)}(\infty) = \frac{n!}{\xi^n} \int_0^{\xi} x(t)dt \tag{3.2}$$

où $n \geq 3$ est un entier, $\xi > 0$ et $f \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous montrons que dans certaines conditions initiale et une condition aux limites intégrale sur la demi-droit,le problème de valeur est à la résonance.Nous appliqueons la théorème du degré de coïncidences de Mawhin .

3.2 Préliminaires techniques

Dans cette section, nous présentons quelques notations et théorèmes que nous utiliserons pour la preuve des principaux résultats.

Soit X,Y deux espaces de Banach réels et soit $L : domL \subset X \longrightarrow Y$ l 'opérateur liniéaire qui est l'application de Fredholme d'indice Zéro et soit $P : X \longrightarrow X$, $Q : Y \longrightarrow Y$ soit des projecteurs continus tels que $ImP = KerL$, $KerQ = ImL$.Alors $X = KerL \oplus KerP, Y =$

$ImL \oplus ImQ$,Il s'ensuit que $L_{|domL \cap KerP} : domL \cap KerP \longrightarrow ImL$ est inversible de cette application par K_p.Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de X tel que $domL \cap \Omega \neq \varnothing$,l'application $N : X \longrightarrow Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si l'application $QN(\overline{\Omega})$ est borné et $K_p(I - QN) : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte.

Thèorème 51 ([*10*]) *Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur* $\overline{\Omega}$.
Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :
(1) $Lx \neq \lambda Nx$ *pour tout* $(x, \lambda) \in [(dom(L) \backslash Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0; 1[$.
(2) $Nx \notin ImL$ *pour tout* $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.
(3) $deg(QN|_{Ker(L)}; \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$, *où* $Q : Y \longrightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $Im(L) = Ker(Q)$.
Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet au moins une solution dans* $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Comme le théorème d'Arzelà Ascoli échoue dans le cas de l'intervalle non compact,nous utilisons le résultat suivant pour montre que $K_p(I - QN) : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compact.

Thèorème 52 ([*23*]) *Soit* $F \subset X$.*Alors F est relativement compact si les condition suivantes sont remplies*
(1) F est borné en X.
(2)Les fonctions appartenant à F sont équi contiues sur tout intervalle compact de $[0, \infty)$.
(3)Les fonctions de F sont équi convergent en ∞.

3.3 Principaux résultats

Dans cette section,nous présentons quelques résultats de base impliqués dans la reformulation du problème et nous donnons le théorème principal et quelques lemmes,puis nous montrerons que la preuve du théorème principal est une conséquence immédiate de ces lemmes et du degré de coincidence de mawhin.
Soit $AC[0, \infty)$ l'espace des fonctions localement absolument continues sur l'intervalle $[0, \infty)$.Soit

$$X = \{x \in C^{n-1}[0, \infty) : x^{(n-1)} \in AC_{loc}[0, \infty), \lim_{t \longrightarrow \infty} e^{-t}|x(t)| \ \ existe\}$$

Muni de la norme $\|x\| = \sup_{t \in [0,\infty)} e^{-t}|x(t)|$.Soit $Y = L^1[0, \infty)$ de norme $\|y\|_1 = \int_0^{+\infty} |y(t)|dt$.
Difinissez l'operateur $L : domL \subset X \longrightarrow Y$ par $Lx = x^{(n)}$,où

$$domL = \{x^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, ..., n-2, x^{(n-1)}(\infty) = \frac{n!}{\xi^n} \int_0^\xi x(t)dt\}$$

Soit $N : X \longrightarrow Y$ l'operateur $Nx = f(t, x(t)), t \in [0, \infty)$, alors $(3.1)-(3.2)$ peut s'écrire $Lx = Nx$.

On peut maintenant énoncer le résultat sur l'existence d'une solution pour $(3.1)-(3.2)$.

Thèorème 53 *Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites*
(H1)Il existe des fonctions $\alpha, \beta \in L^1[0, \infty)$,telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, \infty)$,

$$| f(t, x) | \leq e^{-t}\alpha(t)|x(t)| + \beta(t) \tag{3.3}$$

(H2)Il existe une constante $M > 0$,tell que pour $x \in domL$,si $|x^{(n-1)}(t)| > M$,pour tout $t \in [0, \infty)$, alors

$$\int_0^\infty f(s, x(s))ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, x(s))ds \neq 0 \tag{3.4}$$

(H3)Il existe une constante $M^* > 0$, telle que pour tout $x(t) = c_0t^{n-1} \in KerL$ avec $|c_0| > M^*/(n-1)!$, alors

$$c_0[\int_0^\infty f(s, c_0s^{n-1})ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, c_0s^{n-1})ds] < 0, \tag{3.5}$$

Où

$$c_0[\int_0^\infty f(s, c_0s^{n-1})ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, c_0s^{n-1})ds] > 0, \tag{3.6}$$

Alors $(3.1)-(3.2)$ a au moins une solution sur $C[0, \infty)$,pour que

$$1 - 2M_n\|\alpha\|_1 > 0 \tag{3.7}$$

Où $M_n = \sup_{t\in[0,\infty)} e^{-t}t^{n-1}(\frac{n-1}{e})^{n-1}$.

Pour prouver le théorème (53),nous prouver quelque lemmes.

Lemme 9 *L'opérateur $L : domL \subset X \longrightarrow Y$ est un opérateur de Fredholm d 'indice Zéro.De plus, l'opérateur de projecteur linéaire $Q : Y \longrightarrow Y$ peut être défini par*

$$Qy(t) = ae^{-t}[\int_0^\infty y(s)ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi - s)^n y(s)ds],$$

Où

$$1/a = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!\xi^k}$$

Et l'opérateur linéaire $K_p : ImL \longrightarrow domL \cap KerP$ *peut s 'écrire*

$$K_p y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} y(s) ds \ , \ y \in ImL$$

On autre

$$\|K_p(y)\| \leq \frac{M_n}{(n-1)!} \|y\|_1, pour\ tout\ y \in ImL \tag{3.8}$$

Preuve. Il est clair que

$$KerL = \{x \in domL : x = ct^{n-1}, c \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)\}.$$

Maintenant,nous montrons que

$$ImL = \{y \in Y : \int_0^\infty y(s)ds - \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n y(s) ds = 0\} \tag{3.9}$$

Le problème

$$x^{(n)}(t) = y(t) \tag{3.10}$$

a une solution $x(t)$ qui satisfait les conditions $x^{(i)} = 0$, pour $i = 0, 1, .., n-2$ et $x^{(n-1)}(\infty) = \frac{n!}{\xi^n} \int_0^\xi x(t)dt$ et seulement si

$$\int_0^\infty y(s)ds - \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n y(s) ds = 0. \tag{3.11}$$

En fait à partir de (3.10) et de la condition aux limites (3.2) on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{(n-1)} y(s) ds + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{(n-1)} y(s) ds + ct^{n-1}. \end{aligned}$$

À partir de $x^{(n-1)}(\infty) = \frac{n!}{\xi^n} \int_0^\xi x(t)dt$, on obtient

$$\int_0^\infty y(s)ds = \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n y(s) ds.$$

Du côté de l'ordre, si (3.11) est vériie,en posant

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{(n-1)}y(s)ds + ct^{n-1}$$

où c est une solution arbitraire,alors $x(t)$ est une solution de (3.10).Donc (3.9) est vérifié. En définissant

$$Ry = \int_0^\infty y(s)ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi-s)^n y(s)ds \ ,$$

définissez $Qy(t) = ae^{-t}Ry$,il est clair que $dimImQ = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} Q^2y = Q(Qy) &= ae^{-t}(a.Ry)(\int_0^\infty e^{-s}ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi-s)^n e^{-s}ds) \\ &= ae^{-t}Ry = Qy \end{aligned}$$

qui implique l'opérateur Q est un projecteur.De plus. $ImL = KerQ$.
Soit $y = (y-Qy)+Qy$, où $y-Qy \in KerQ = ImL$, $Qy \in ImQ$.Il découle de $KerQ = ImL$ et $Q^2y = Qy$ que $ImQ \cap ImL = \{0\}$. Alors,nous avons $Y = Iml \oplus ImQ$. Ainsi $dimKerL = 1 = dimImQ = codimIml = 1$ cela signifie que L est un opérateur de Fredholm d'indice Zéro.On définit maintenant un projecteur P de X à X en définissant

$$Px(t) = \frac{x^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} \ .$$

Alors l'inverse généralisé $K_p : ImL \longrightarrow domL \cap KerP$ de L peut s'écrire

$$K_p y = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}y(s)ds.$$

Èvidemment $ImP = KerL$ et $P^2x = Px$.Il résulte de $x = (x-Px)+Px$ que $KerP+KerL$. Par simple calcul ,on obtient que $KerL \cap KerP = \{0\}$ .Donc $X = KerL \oplus KerP$. A partir des définitions de P et K_p ,il est facile de voir que l'inverse généralisé de L est K_p . En fait ,pour $y \in ImL$, nous avons

$$(LK_p)y(t) = (K_p y(t))^{(n)} = y(t) \ ,$$

et pour $x \in domL \cap KerP$,nous savons que

$$(K_pL)x(t) = (K_p)x^n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{(n-1)}x^{(n)}(s)ds$$

$$= x(t) - [x(0) + x`(0)t + ...\frac{x^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}t^{n-2} + \frac{x^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}].$$

Compte tenue de $x \in domL \cap KerP$, $x^{(i)}(0) = 0$, for $i = 0, 1, .., n-2$, et $Px = 0$, donc

$$(K_pL)x(t) = x(t).$$

Cela montre que $K_p = (L|_{domL\cap KerP})^{-1}$ .d 'aprés ladéfinition de K_p . nous avons

$$\|K_py\| = \sup_{t\in[0,\infty)} e^{-t}|K_py| \leq \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{e^{-t}}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}|y(s)|ds$$

$$< \frac{M_n}{(n-1)!}\int_0^\infty |y(s)|ds = \frac{M_n}{(n-1)!}\|y\|_1.$$

Ceci complète la preuve. ■

Lemme 10 *Soit* $\Omega_1 = \{x \in domL \setminus KerL : Lx = \lambda Nx$ *pour certains* $\lambda \in [0,1]\}$ *.Alors* Ω_1 *est borné.*

Preuve. *Supposons que* $x \in \Omega$ *,et* $Lx = \lambda Nx$ *, Ainsi* $\lambda \neq 0$ *,et* $QNx = 0$ *, donc*

$$\int_0^\infty f(s, x(s))ds - \frac{1}{\xi^n}\int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, x(s))ds = 0 \ .$$

Par condition $(H2)$ *,il exist* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *,tel que* $|x^{(n-1)}(t_0)| \leq M$ *. Il résulte de la continuité absolue de* $x^{(n-1)}$ *que*

$$|x^{(n-1)}(0)| = |x^{(n-1)}(t_0) - \int_0^{t_0} x^{(n)}(s)ds| \ ,$$

alors,on a

$$|x^{(n-1)}(0)| \leq M + \int_0^\infty |Lx(s)|ds \leq M + \int_0^\infty |Nx(s)|ds = M + \|Nx\|_1. \qquad (3.12)$$

Toujours pour $x \in \Omega_1$ *, et* $x \in domL \setminus KerL$ *, on a* $(I-P)x \in domL \cap KerP$ *et* $LPx = 0$ *, donc d'après le lemme 9 .*

$$\begin{aligned} \|(I-P)x\| &= \|K_pL(I-P)x\| \\ &\leq \frac{M_n}{(n-1)!}\|L(I-P)x\|_1 \qquad (3.13) \\ &= \frac{M_n}{(n-1)!}\|Lx\|_1 \leq \frac{M_n}{(n-1)!}\|Nx\|_1. \text{ Donc} \end{aligned}$$

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|(I-P)x\| = M_n|x^{(n-1)}(0)| + \frac{M_n}{(n-1)!}\|Nx\|_1. \qquad (3.14)$$

toujours de (3.12) *et* (3.13) , (3.14) *devient*

$$\|x\| \leq M_n M + M_n \|Nx\|_1 + \frac{M_n}{(n-1)!}\|Nx\|_1 \leq M_n M + 2M_n \|Nx\|_1. \tag{3.15}$$

Par contre par (3.3) *on a*

$$\|Nx\|_1 = \int_0^\infty |f(s, x(s))| ds \leq \|x\| \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1. \tag{3.16}$$

Donc (3.15) *et* (3.16) *, ça donne*

$$\|x\| \leq M_n M + 2M_n \|x\| \|\alpha\|_1 + 2M_n \|\beta\|_1 \ ,$$

puisque $1 - 2M_n\|\alpha\|_1 > 0$ *, on obtient*

$$\|x\| \leq \frac{M_n M}{1 - 2M_n \|\alpha\|_1} + \frac{2M_n \|\beta\|_1}{1 - 2M_n \|\alpha\|_1}.$$

Donc Ω_1 *est borné.* ■

Lemme 11 *L'ensemble* $\Omega_2 = \{x \in KerL : Nx \in ImL\}$ *est borné.*

Preuve. Soit $x \in \Omega_2$, alors $x \in KerL$ implique $x(t) = ct^{n-1}$, $c \in \mathbb{R}$, et $QNx = 0$, donc

$$\textstyle\int_0^\infty f(s, cs^{n-1}))ds - \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, cs^{n-1}) ds = 0.$$

D'après la condition $(H2)$, il existe $t_1 \in \mathbb{R}_+$, tel que $|x^{(n-1)}(t_1) \leq M$. On a

$$(n-1)!|c| \leq M$$

donc $|c| \leq \dfrac{M}{(n-1)!}$. D'autre part

$$\|x\| = \sup_{t \in [0,\infty)} e^{-t}|x(t)| = |c| \sup_{t \in [0,\infty)} e^{-t} t^{n-1} = |c| M_n \ ,$$

c'est -à-dire . $\|x\| \leq \dfrac{M_n M}{(n-1)!} < \infty$ .Donc Ω_2 est borné. ■

Lemme 12 *Supposons que la première partie de la condition* $(H3)$ *soit vérifiée.Soit*

$$\Omega_3 = \{x \in KerL : -\lambda Jx + (1 - \lambda)QNx = 0, \lambda \in [0, 1]\}$$

où $J : KerL \longrightarrow ImQ$ est l'isomorphisme linéaire donné par $J(ct^{n-1}) = ct^{n-1}$, pour tout $c \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Alors Ω_3 est borné.

Preuve. En fait $x_0 \in \Omega_3$, signifie que $x_0 \in KerL$ c'est -à -dire $x_0(t) = c_0 t^{n-1}$ et $\lambda J x_0 = (1-\lambda) QNx_0$. on obtien alors

$$\lambda c_0 t^{n-1} = (1-\lambda) a e^{-t} (\int_0^\infty f(s, c_0 s^{n-1}) ds - \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, c_0 s^{n-1}) ds) .$$

si $\lambda = 1$, alors $c_0 = 0$. Sinon ,si $|c_0| > M$, au vu de (3.5) on a

$$\lambda c_0^2 t^{n-1} = (1-\lambda) a e^{-t} c_0 (\int_0^\infty f(s, c_0 s^{n-1}) ds - \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n f(s, c_0 s^{n-1}) ds) < 0 ,$$

ce qui contredit le fait que $\lambda c_0^2 \geq 0$. Donc $|c_0| \leq M^*$,de plus

$$\|x\| = \sup e^{-t} |c_0| t^{n-1} = |c_0| t^{n-1} = |c_0| M_n \leq M^* M_n .$$

Donc Ω_3 est borné. ■

Lemme 13 *Supposont que la seconde partie de condition (H3) soit vérifieé .Soit*

$$\Omega_3 = \{x \in KerL : \lambda Jx + (1-\lambda) QNx = 0, \lambda \in [0,1]\}$$

où $J : KerL \longrightarrow ImQ$ est l'isomorphisme linéaire donné par $J(ct^{n-1}) = ct^{n-1}$, pour tout $c \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Alors Ω_3 est borné ici J comme dans le lemme 12 . Similaire à l'argument ci-dessus,on peut vérifier que Ω_3 est borné.

Lemme 14 *Supposont que Ω est un sous-ensemlble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \overline{\Omega} \neq \varnothing$. Alors N est L-compact sur $\overline{\Omega}$.*

Preuve. Soppposons que $\Omega \subset X$ est un ensemble borné.Sans perte de généralité ,on peut supposer que $\Omega = B(0,r)$, alors pour tout $x \in \overline{\Omega}, \|x\| \leq r$,pour $x \in \overline{\Omega}$, et par condition (3.3) ,on obtient

$$\begin{aligned}
e^{-t}|QNx| &\leq a e^{-2t} [\int_0^\infty |f(s, x(s))| ds + \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n |f(s, x(s))| ds] \\
&\leq a e^{-2t} [\int_0^\infty e^{-s} \alpha(s) |x(s)| + \beta(s) ds \\
&+ \frac{1}{\xi^n} \int_0^\xi (\xi - s)^n (e^{-s} \alpha(s) |x(s)| + \beta(s) d]) \\
&\leq a e^{-2t} [r \int_0^\infty \alpha(s) ds + \int_0^\infty \beta(s) ds + r \int_0^\xi \alpha(s) ds + \int_0^\xi \beta(s) ds] \\
&\leq a e^{-2t} [2r \|\alpha\|_1 + 2\|\beta\|_1]. \\
&\leq 2a[r\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1],
\end{aligned}$$

donc ,

$$\|QNx\|_1 \leq 2a[r\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1] \tag{3.17}$$

ce qui implique que $QN(\overline{\Omega})$ est borné.On montre ensuit que $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est compact .Pour $x \in \overline{\Omega}$,par (3.3) nous avons

$$\|Nx\|_1 = \int_0^{\infty} |f(s,x(s))|ds \leq [r\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1,] \tag{3.18}$$

d'autr part , à partir de la définition de K_p et avec (3.8) , (3.17) et (3.18) on obtient

$$\begin{aligned} \|K_p(I-Q)N\| &\leq M_n\|(I-Q)N\|_1 \leq M_n[\|Nx\|_1 + \|QNx\|_1] \\ &\leq M_n[r(1+2a)\|\alpha\|_1 + (1+ra)\|\beta\|_1]. \end{aligned}$$

il s'ensuit que $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est uniformément borné.
Montrons que T est equi continue.Pour $x \in \overline{\Omega}$ et tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ avec $t_1 < t_2$ et $T \in [0,\infty)$,on a

$$\begin{aligned}
&|e^{-t_1}K_p(I-Q)Nx(t_1) - e^{-t_2}K_p(I-Q)Nx(t_2)| \\
&= \frac{1}{(n-1)!}|\int_0^{t_1} e^{-t_1}(t_1-s)^{n-1}(I-Q)Nx(s)ds \\
&- \int_0^{t_2}(t_2-s)^{n-1}(I-Q)Nx(s)ds| \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}[\int_0^{t_1} e^{-t_2}(t_2-s)^{n-1} - e^{-t_1}(t_1-s)^{n-1}|(I-Q)Nx(s)ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} e^{-t_2}(t_2-s)^{n-1}|(I-Q)Nx|ds] \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}[\int_0^{t_2}(e^{-(t_2-s)}(t_2-s)^{n-1} - e^{-(t_1-s)}(t_1-s)^{n-1}) \\
&\quad \times e^{-s}|(I-Q)Nx(s)|ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t_2-s)}(t_2-s)^{n-1}e^{-s}|(I-Q)Nx(s)ds] \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}[M_n^{`}(t_1-t_2)\int_0^{t_1} e^{-s}|(I-Q)Nx(s)ds \\
&+ e^{-t_2}(t_1-t_2)^{n-1}\int_{t_1}^{t_2}|(I-Q)Nx(s)ds] \longrightarrow 0, car \quad t_1 \longrightarrow t_2.
\end{aligned}$$

Donc $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équi-continue sur tout sous-ensemble compact de $[0,\infty)$. De plus ,on affirme que $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équi-convergent à l'infini.En fait

$$\begin{aligned}
&|e^{-t}K_p(I-Q)Nx(t) \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t e^{-(t-s)}(t-s)^{n-1}e^{-s}|(I-Q)Nx(s)|ds
\end{aligned}$$

$\leq \dfrac{M_n}{(n-1)!} \int_0^t |(I-Q)Nx(s)|ds \leq \dfrac{M_n}{(n-1)!} \|(I-Q)Nx(s)\|_1$
$\leq \dfrac{M_n}{(n-1)!} \|Nx\|_1 + \|QNx\|_1] < \infty,$

donc , $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |e^{-t}K_p(I-Q)Nx(t)| < \infty$.Ce qui signifie que $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équi-convergent.

■

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve de théorème 53 , qui est une conséquence immédiat du théorème 51 et des lemmes ci-dessus.

Preuve. du théorème 53 : Nous allons prouver que tout les condition du théorème 51 ,sont satisfaites .Définir Ω comme une sous-ensemble ouvert et borné de X tel que $\cup_{i=1}^{3}\overline{\Omega}_i \subset \Omega$ .On sait que L est opérateur de Fredholm d'indice zéro et N est L-compact sur $\overline{\Omega}$ .Par définition de Ω on a
(1) $Lx \neq \lambda Nx$ por tout $(x, \lambda) \in [(domL \setminus KerL \cap \partial\Omega)] \times [0, 1]$,
(2) $Nx \notin ImL$ pour tout $x \in KerL \cap \partial\Omega$.
Enfin on prouve que la condition (3) du théorème 51 est satisfaite.Pour cela ,soit

$$H(x, \lambda) = \pm\lambda Jx + (1-\lambda)QNx$$

par la définition de Ω nous savons que $\overline{\Omega}_3 \subset \Omega$, donc $H(x, \lambda) \neq 0$ pour tout $x \in KerL \cap \partial\Omega$. puis,par la propriété d'homotopie de degré,nous obtenons

$$\begin{aligned} deg(QN|_{KerL}, \Omega \cap KerL, 0) &= deg(H(.,0), \Omega \cap KerL, 0) \\ &= deg(H(.,1), \Omega \cap KerL, 0) \\ &= deg(\pm J, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0 \ . \end{aligned}$$

donc ,la troisième hypothèse du théorème 51 est remplie et $Lx = Nx$ a au moins une solution en $domL \cap \overline{\Omega}$, c'est -à -dire que (3.1) - (3.2) a au moins une solution en X. La démonstration est complète. ■

Conclusion

Dans ce mémoire,nous avons présenté une étude de l'existence de quelque problémes aux limites en résonance sur un intervalle non bornée $KerL = 1$, en appliquant la théorie de coïncidence de Mawhin,et cela en réalisant trios conditions pour prouver l'existence d'une solution, par l'utilisation de théorème et des lemmes auxiliaires.

Bibliographie

[1] A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, R. Khaldi ; Third Order Boundary Value Prolem with Integral Condition at Resonance, Theory and Applications of Mathematics Computer Sciencesm 3(1) 2013), 5664.

[2] C-G. Kim ; Existence and iteration of positive solutions for multi-point boundary value prob- lems on a half-line. Comput. Math. Appl., 61(7) (2011), 1898-1905.

[3] C. P. Gupta, S. K. Ntouyas, P. Ch. Tsamatos ; On an m-point boundary-value problem for second-order ordinary dierential equations, Nonlinear Anal., 23 (1994), 14271436.

[4] D. Franco, G. Infante, M. Zima ; Second order nonlocal boundary value problems at resonance. Math. Nachr., 284(7) (2011), 875-884.

[5] D. O'Regan, B. Yan, R. P. Agarwal ; Solutions in weighted spaces of singular boundary value problems on the half-line, J. Comput. Appl. Math., 205 (2007), 751763.

[6] D. O'Regan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological degree theory and applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman Hall/CRC, (2006).

[7] E. R. Kaufmann ; A third order nonlocal boundary value problem at resonance, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Spec. Ed. 1 (2009), 1-11.

[8] F. Meng, Z. Du ; Solvability of a second-order multi-point boundary value problem at reso- nance. Appl. Math. Comput., 208(1) (2009), 2330.

[9] F. Wang, F. Zhang ; Existence of n positive solutions to second-order multi-point boundary value problem at resonance. Bull. Korean Math. Soc., 49(4) (2012), 815827.

[10] J. Mawhin ; Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, NSFCBMS Regional Conference Series in Mathematics. Am. Math. Soc, Providence, 1979.

[11] J. Xu, Z. Yang ; Positive solutions for singular Sturm-Liouville boundary value problems on the half line, Electron. J. Dierential Equations, 2010 (2010) no. 171, 1-8.

[12] J. R. Graef, B. Yang, Positive solutions of a third order eigenvalue problem, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 97-110.

[13] H. Lian, W. Ge ; Solvability for second-order three-point boundary value problems on a half- line. Appl. Math. Lett., 19(10) (2006), 1000-1006.

[14] G. Cupini, C. Marcelli, F. Papalini ; On the solvability of a boundary value problem on the real line. Bound. Value Probl., 2011 (2011), no. 26,

[15] G. Dinca, J. Mawhin, Brouwer degree and applications, January 17, 2009.

[16] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer, Berlin, 1985.

[17] L. Liu, Y.Wang, X. Hao, Y.Wu ; Positive solutions for nonlinear singular dierential systems involving parameter on the half-line. Abstr. Appl. Anal., 2012, (2012) Article ID 161925.

[18] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, and A. Ouahab ; Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1340-1350.

[19] M. Zima, P. Dryga's ; Existence of positive solutions for a kind of periodic boundary value problem at resonance. Bound. Value Probl., 2013 (2013), 19, 10 pp.

[20] N. Kosmatov ; A multi-point boundary value problem with two critical conditions. Nonlinear Anal., 65(3) 2006), 622-633.

[21] N. Kosmatov ; Multi-point boundary value problems on an unbounded domain at resonance. Nonlinear Anal., 68 (8) (2008), 2158-2171.

[22] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math Ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.

[23] R. P. Agarwal, D. O'Regan ; Infinity Interval Problems for Dierence and Integral Equations, Kluwer Academic Publisher Dordrecht, 2001

[24] R. P. Agarwal, D. O'Regan ; Infinite interval problems modeling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical potential theory. Stud. Appl. Math., 111(3) (2003), 339358.

[25] R. Ma ; Existence of positive solutions for second-order boundary value problems on infinity intervals. Appl. Math. Lett., 16(1) (2003), 3339.

[26] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[27] R. P. Agarwal, Focal boundary value problems for differential and difference equations, Kluwer Academic Publ., 1998.

[28] S. Liang, J. Zhang ; Positive solutions for singular third-order boundary value problem with dependence on the

first order derivative on the half-line. Acta Appl. Math., 111(1) (2010), 2743.

[29] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[30] W. Feng, J. R. L. Webb ; Solvability of three-point boundary value problems at resonance. Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl., 30 (1997), 32273238.

[31] W. Jiang, B. Wang, Z.Wang ; Solvability of a second-order multi-point boundary-value prob- lems at resonance on a half-line with dim kerL = 2. Electron. J. Dier. Equ., 2011 (2011), 120, 1-11.

[32] W. Jiang ; Solvability for p-Laplacian boundary value problem at resonance on the half-line. Bound. Value Probl., 2013 (2013), 207.

[33] X. Zhang, M. Feng, W. Ge ; Existence result of second-order dierential equations with inte- gral boundary conditions at resonance. J. Math. Anal. Appl., 353(1) (2009), 311319.

[34] Y. Cui ; Solvability of second-order boundary-value problems at resonance involving integral conditions. Electron. J. Dier. Equ., 2012 (2012), 45, 1-9.

[35] Z. Du, F. Meng ; Solutions to a second-order multi-point boundary value problem at resonance. Acta Math. Sci. 30(5) (2010), 15671576.

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس قابلية وجود الحل لمسألة القيمة الحدية في حالة الرنين على مجال غير محدود $KerL = 1$ ، بتطبيق نظرية الدرجة للمصادفات لموهين.
الكلمات الرئيسية: مشكلة الحدود، نظريات النقطة الثابتة، الرنين.

Abstract

In this thesis we studied the existence ability of a solution to the boundary value problem at resonance on an unbounded interval $KerL = 1$, we apply the degree theory for Mawhin coincidences .
Key words: boundary problem, fixed point theorems, resonance .

Résumé

Dans cette thése, nous étudions l'abilité d'existence d'une solution au problème aux limites à la résonance sur un intervalle non bornée $KerL = 1$,nous appliquer la théorie de degré pour des coïncidences de Mawhin.
Mots clés: problème aux limites, théorèmes de point fixe, résonance.