

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université KASDI MARBEH  
Faculté des sciences appliquées  
Département Génie Mécanique  
Réf : .....



جامعة قاصدي مرباح ورقلة  
كلية العلوم التطبيقية  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

**Docteur en sciences**

Spécialité : Energétique

Par

**Djamila Damene**

Intitulée

Effet de la variation de perméabilité dans un milieu poreux en convection naturelle

Soutenue publiquement le devant le jury composé de :30-06-2022

Mr Abderrahim BELLOUFI	Pr Université d'Ouargla	Président
Mr Zineddine ALLOUI	Pr Université de Batna 2	Directeur de thèse
Mr Mourad KORICHI	Pr Université d'Ouargla	Co encadreur
Mr Abdennacer BELAZIZIA	Pr Université de Tébessa	Examineur
Mr Taher GUERMIT	MCA Université d'Ouargla	Examineur
Mr Saïd BELAHMIDI	MCA Centre universitaire de Barika	Examineur



## Dédicaces



*A mes très chers parents,*

*A mon mari,*

*A mes chers enfants : El Mahdi Saad et Aïdji*

*À mes frères et sœurs,*

*À mes neveux et nièces,*

*A ma copine Ymena*

*A ma belle-sœur Nora*

*A toutes mes amies*



## REMERCIEMENTS

**Avant tous, comme en premier je remercie *Dieu* qui m'a donné du courage, de l'endurance et de la volonté jusqu'à l'accomplissement de ce travail. Je dis :**

*Louange à Dieu Seigneur de l'univers.*

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mon directeur de thèse, Monsieur **Zineddine ALLOUI**, Professeur à l'université **Hadj Lakhdar de BATNA**, qui m'a permis de réaliser ce travail de doctorat pour l'excellence de son encadrement scientifique et le temps qu'il m'a accordé malgré de nombreuses occupations. Son expertise scientifique, ses nombreux conseils mais également sa bienveillance et ses grandes qualités humaines m'ont permis de mener à bien ce projet et d'apprendre beaucoup de connaissances scientifiques.

Mes remerciements vont ensuite naturellement à mon co-directeur de thèse, Monsieur **Mourad KORICHI**, Professeur à l'université de **Kasdi Merbeh de OUARGLA**. Ses qualités scientifiques et relationnelles, son encouragement et sa confiance à moi sont pour beaucoup dans le plaisir que j'ai eu à effectuer cette activité de recherche.

Je souhaite également remercier Monsieur **Abderrahim Belloufi**, Professeur à l'Université de Ouargla, je lui suis reconnaissante d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

C'est un immense privilège d'avoir Monsieur **Said BELAHMIDI** MCA au centre universitaire de **BARIKA** comme examinateur de mon travail. Je suis réellement heureuse de pouvoir le compter dans mon jury, et je l'en remercie vivement.

Monsieur **Abdennacer Bellezizia**, Professeur à l'université de **TEBESSA** et Monsieur **Guermi Taher**, MCA à l'université de **Kasdi Merbah de Ouargla**, m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'établir un rapport sur le travail proposé : qu'ils en soient vivement remerciés.

Cette thèse fut pour moi une expérience riche tant d'un point de vue scientifique que sur le plan humain. Je profite de cette page pour remercier Madame **Ymene Alloui** et Madame **khadidja Bouziane**. J'associe à ces remerciements Monsieur **Rassim Belakroum**, Monsieur **Noureddine Cherradeet** Monsieur **Mourad Abdelkarim**

Je ne peux terminer sans évoquer de nouveau le rôle essentiel de Madame **Ymene ALLOUI** ; que je tiens à exprimer mes remerciements les plus chaleureux, pour ses conseils précieux et pour ses contribution majeures dans la préparation de cette thèse. Les longues heures de discussions qu'elle m'a consacrées m'ont permis d'apprécier l'étendue de ses compétences scientifiques, ses connaissances et ses qualités professionnelles et humaines. Elle était toujours proche de moi.

Enfin, ma continuelle pensée va à mes parents, mon mari, ma belle sœur Nora et mes enfants.

# Résumé

## Résumé

Dans ce travail, des études numériques et analytiques du transfert de chaleur par convection naturelle dans des cavités poreuses à perméabilité variable ont été menées. Les conditions aux limites utilisées sont de type Neumann pour les parois actives. Le modèle Darcy est pris en compte dans la formulation mathématique du problème, et la variation de masse volumique est modélisée par l'approximation de Boussinesq. Deux cas ont été présentés :

Dans le premier cas, l'écoulement est induit par un gradient de température appliqué perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité, les parois horizontales de la cavité sont chauffées et refroidies par des flux thermiques constants et les parois latérales sont adiabatiques. Dans le deuxième cas ce gradient est appliqué dans la même direction que la gravité. Différentes lois de perméabilité sont prises en considération, à savoir une loi exponentielle, une loi linéaire et une loi parabolique. Les équations qui régissent ce phénomène ont été résolues par une approche numérique, basée sur la méthode des volumes finis, et une solution analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle.

Pour différents valeurs du nombre de Rayleigh modifié et du paramètre  $c$  de la variation de la perméabilité, nous avons présenté leurs effets sur le champ thermique et dynamique et sur le taux de transfert de chaleur. Les résultats analytiques et numériques obtenus sont en bon accord et ils sont comparés à ceux obtenus par d'autres auteurs.

**Mots clés :** convection naturelle, milieu poreux anisotrope, perméabilité variable, solution analytique.

## ملخص

أجريت في هذا العمل دراسات عديدة وتحليلية لانتقال الحرارة بالحمل الطبيعي في التجاويف المسامية ذات النفاذية المتغيرة. شروط الحدود المستخدمة هي من نوع نومان للجدران النشطة. يُؤخذ نموذج دارسي بعين الاعتبار في الصياغة الرياضية للمشكلة ، ويتم نمذجة تباين الكثافة بواسطة تقريب بوسينيسك.

تم عرض حالتين: في الحالة الأولى ، يتم تحفيز التدفق عن طريق التدرج الحراري المطبق بشكل عمودي على اتجاه مجال الجاذبية ، ويتم تسخين الجدران الأفقية للتجفيف وتبريدها بواسطة تدفقات حرارة ثابتة وتكون الجدران الجانبية كاسمة وعير نافذة. في الحالة الثانية ، يتم تطبيق هذا التدرج الحراري في نفس اتجاه الجاذبية. تؤخذ ثلاث قوانين لتغير النفاذية ، وهي القانون الآسي والقانون الخطي وقانون القطع المكافئ. يتم حل المعادلات التي تحكم هذه الظاهرة بطريقة عددية، تعتمد على طريقة الحجم المحدود، وحل تحليلي يعتمد على تقريب التدفق المتوازي.

قدمنا بدراسة تأثير رقم رايلي المعدل و كذلك معامل تغير النفاذية على المجال الحراري والديناميكي وعلى معدل انتقال الحرارة. النتائج التحليلية والرقمية التي تم الحصول عليها متوافقة بشكل جيد وتم مقارنتها مع تلك التي حصل عليها مؤلفون آخرون

**الكلمات المفتاحية:** الحمل الحراري الطبيعي ، وسط مسامي متباين الخواص ، نفاذية متغيرة ،

حل تحليلي

## Abstract

In this work, numerical and analytical studies of the heat transfer by natural convection in porous cavities with variable permeability were carried out. The boundary conditions used are of the Neumann type for the active walls. The Darcy model is taken into account in the mathematical formulation of the problem, and the density variation is modeled by the Boussinesq approximation. Two cases were presented:

In the first case, the flow is induced by a temperature gradient applied perpendicular to the direction of the gravity field, the horizontal walls of the cavity are heated and cooled by constant heat fluxes and the side walls are adiabatic. In the second case, this gradient is applied in the same direction as gravity. Different permeability laws are taken into consideration, namely an exponential law, a linear law and a parabolic law. The equations governing this phenomenon have been solved by a numerical approach, based on the finite volume method, and an analytical solution based on the parallel flow approximation.

For different values of the modified Rayleigh number and the  $c$ -parameter of the permeability variation, we presented their effects on the thermal and dynamic field and on the heat transfer rate. The analytical and numerical results obtained are in good agreement and they are compared with those obtained by other authors.

**Keywords:** natural convection, anisotropic porous medium, variable permeability, analytical solution

# Table des Matières



# Sommaire

Remerciements .....	i
Résumés .....	ii
Liste des figures .....	v
Liste des tableaux .....	ix
Nomenclature .....	x

## Introduction générale

1

## Chapitre I : Généralités sur les milieux poreux et synthèse bibliographique

<b>I.1</b> Introduction .....	4
<b>I.2</b> Définition .....	4
<b>I.2.1</b> Milieu poreux .....	4
<b>I.2.2</b> Milieu poreux granulaire .....	4
<b>I.2.3</b> Milieu poreux consolidé.....	5
<b>I.3</b> Echelles et lois de l'écoulement dans les milieux poreux.....	5
<b>I.3.1</b> Echelle microscopique.....	6
<b>I.3.1 .1</b> Dispersion mécanique en milieu poreux.....	6
<b>I.3.2</b> Echelle macroscopique.....	7
<b>I.3.2 .1</b> Notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER).....	7
<b>I.3.2 .2</b> Loi de Darcy.....	9
<b>I.3.3</b> Grande échelle.....	9
<b>I.4</b> Caractérisation des milieux poreux .....	9
<b>I.4.1</b> La porosité .....	9
<b>I.4.2</b> Tortuosité.....	11
<b>I.4.3</b> Perméabilité (K).....	12
<b>I.4.4</b> Viscosité effective.....	13
<b>I.4.5</b> Conductivité effective.....	13
<b>I.5</b> Synthèse bibliographique.....	14
<b>I.6</b> Conclusion.....	25

## Chapitre II : Modèle Physique et Formulation Mathématique

<b>II.1</b> Introduction.....	26
<b>II.2</b> Problématique.....	26
<b>II.3</b> Hypothèses simplificatrices.....	27
<b>II.4</b> Approximation de Boussinesq-Oberbeck.....	28
<b>II.5</b> Formulation mathématique des équations générales dans un milieu poreux.....	29
<b>II.5.1</b> Equation de continuité .....	29
<b>II.5.2</b> Equations de quantité de mouvement : Loi de Darcy .....	29
<b>II.5.3</b> Equation de conservation d'énergie .....	30
<b>II.6</b> Équations en formulation de fonction de courant.....	31
<b>II.7</b> Conditions aux frontières hydrodynamiques .....	32

<b>II.8</b> Conditions aux frontières thermiques.....	32
<b>II.9</b> Formulation adimensionnelle .....	33
<b>II.10</b> Equations adimensionnelles .....	34
<b>II.11</b> Lois de la variation de la perméabilité .....	35
<b>II.12</b> Taux de transfert de chaleur.....	36
<b>II.13</b> Conclusion .....	36

### Chapitre III Solution numérique

<b>III.1</b> Introduction.....	37
<b>III.2</b> Méthode des volumes finis .....	37
<b>III.2.1</b> Présentation de la méthode.....	37
<b>III.2.2</b> Distribution des volumes de contrôle.....	38
<b>III.3</b> forme conservatrice des équations gouvernantes.....	38
<b>III.4</b> Intégration de l'équation de transport sur le volume de contrôle.....	39
<b>III.5</b> Schémas d'interpolation.....	41
<b>III.6</b> Discrétisation de l'équation de transport suivant le schéma aux différences centrées.....	42
<b>III.6.1</b> Discrétisation de terme transitoire.....	42
<b>III.6.2</b> Discrétisation de terme convectif.....	42
<b>III.6.3</b> Discrétisation du terme diffusif.....	43
<b>III.6.4</b> Discrétisation du terme source.....	43
<b>III.7</b> Méthode implicite aux directions alternées.....	46
<b>III.7.1</b> Schéma implicite en x explicite en y.....	46
<b>III.7.2</b> Schéma explicite en x et implicite en y.....	46
<b>III.7.3</b> Traitement des conditions aux limites.....	46
<b>III.8</b> Résolution des équations.....	47
<b>III.9</b> Test de maillage.....	48
<b>III.10</b> Validation du code numérique.....	49
<b>III.11</b> Conclusion.....	49

### Chapitre IV. Solution analytique

<b>IV.1</b> Introduction.....	50
<b>IV.2</b> Concept de l'écoulement parallèle .....	50
<b>IV.2.1</b> Influence du facteur de forme de la cavité.....	51
<b>IV.2.2</b> Fonctions de répartition de la température.....	53
<b>IV.2.3</b> Gradients des températures $C_T$ .....	54
<b>IV.3</b> Variation de la perméabilité.....	55
<b>IV.4</b> Application du concept de l'écoulement parallèle aux équations de base.....	56
<b>IV.4.1</b> Concept de l'écoulement parallèle pour le cas d'une cavité horizontale .....	56
<b>IV.4.1.1</b> Simplification des équations.....	56
<b>IV.4.1.2</b> Détermination du gradient de chaleur $C_T$ .....	57
<b>IV.4.1.3</b> Détermination des nombres de Rayleigh critique.....	57
<b>IV.4.1.4</b> Transfert thermique .....	57
<b>IV.4.1.5</b> Couche poreuse horizontale à perméabilité variant selon une loi exponentielle .....	58

IV.4.1.6	Couche poreuse horizontale à perméabilité variant selon une loi linéaire.....	59
IV.4.1.7	Couche poreuse horizontale à perméabilité variant selon une loi parabolique	60
IV.4.1.8	Couche poreuse horizontale à perméabilité homogène.....	62
IV.4.2	Application du concept de l'écoulement parallèle aux équations de base pour la cavité verticale.....	62
IV.4.2.1	Couche poreuse verticale à perméabilité variant selon une loi exponentielle	63
IV.4.2.2	Couche poreuse verticale à perméabilité variant selon une loi linéaire.....	64
IV.4.2.3	Couche poreuse verticale à perméabilité variant selon une loi parabolique	65
IV.4.1.4	Couche poreuse verticale à perméabilité homogène.....	66
IV.5	Conclusion .....	67

## Chapitre V. Résultats et discussions

V.1	Introduction.....	68
V.2	Résultats pour la cavité horizontale.....	68
V.2.1	Cas d'une perméabilité variant selon une loi exponentielle.....	68
V.2.1.1	Profils des lignes de courant et des isothermes.....	68
V.2.1.2	Fonction de courant (Cas de perméabilité exponentielle).....	70
V.2.1.3	Profils de vitesses (Cas de perméabilité exponentielle) .....	70
V.2.1.4	Profils des températures (Cas de perméabilité exponentielle) .....	71
V.2.1.5	Effet du nombre de Rayleigh modifié sur l'intensité de l'écoulement et sur le transfert de chaleur.....	72
V.2.2	Cas de la loi linéaire.....	75
V.2.2.1	Profils des lignes de courant et des isothermes (Cas de perméabilité linéaire)	75
V.2.2.2	Profils des vitesses (Cas de perméabilité linéaire).....	76
V.2.2.3	Profils des températures (Cas de perméabilité linéaire).....	77
V.2.2.4	Effet du nombre de Rayleigh modifié sur l'intensité de l'écoulement.....	78
V.2.2.5	L'effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur.....	79
V.2.3	Cas de la loi parabolique.....	80
V.2.3.1	Fonction de courant (cas de la loi parabolique).....	80
V.2.3.2	Profils des vitesses (cas de la loi parabolique).....	81
V.2.3.3	Profils des températures (cas de la loi parabolique).....	82
V.2.3.4	Effet du nombre de Rayleigh modifié sur l'intensité de l'écoulement sur le transfert de chaleur.....	83
V.3	Résultats pour la cavité verticale.....	84
V.3.1	Cas d'une perméabilité variant selon une loi exponentielle .....	85
V.3.1.1	Profils des lignes de courant et isothermes .....	85
V.3.1.2	Fonction de courant (Cas de perméabilité exponentielle).....	86
V.3.1.3	Profils de vitesses (Cas de perméabilité exponentielle).....	87
V.3.1.4	Profils des températures (Cas de perméabilité exponentielle).....	88
V.3.1.5	Évolution de la fonction de courant maximale et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de $c$ .....	89
V.3.2	Cas d'une perméabilité variant selon une loi linéaire.....	90
V.3.2.1	Évolution de la fonction de courant maximale et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de $c$ .....	91
V.3.3	Cas d'une perméabilité variant selon une loi parabolique.....	93
V.3.3.1	Profils des lignes de courant et isothermes.....	93
V.3.3.2	Profils de vitesses (Cas de perméabilité parabolique).....	94
V.3.3.3	Profils des températures (Cas de perméabilité parabolique).....	95

V3.3.4 Évolution de la fonction de courant maximale et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de de la loi parabolique.....	96
<b>V.4 Conclusion</b> .....	97

<b>Conclusion générale</b>	100
----------------------------	-----

<b>Références bibliographiques</b> .....	102
--	-----

# Liste des Figures

## Liste des figures

<b>Figure I.1:</b> Milieu Poreux.....	<b>4</b>
<b>Figure I.2:</b> Exemples de Milieux Poreux : a- Sable de plage. b- Grès. c- Roche calcaire d- Pain de seigle. f- Bois de pin. e- Poumon humain.....	<b>5</b>
<b>Figure I.3 :</b> Description des différentes échelles des milieux poreux.....	<b>5</b>
<b>Figure I.4:</b> Illustration des sources de dispersion mécanique .....	<b>6</b>
<b>Figure I. 5:</b> Volume Élémentaire Représentatif.....	<b>8</b>
<b>Figure 1.6 :</b> Evolution de la fonction porosité au voisinage d'un point du milieu poreux .	<b>8</b>
<b>Figure I.7:</b> Schématisation des différents types de pores.....	<b>10</b>
<b>Figure I.8:</b> Représentation de la tortuosité.....	<b>12</b>
<b>Figure I.9 :</b> Variation du taux de transfert de chaleur, Q, pour différentes valeurs de taux de perméabilité.....	<b>16</b>
<b>Figure I.10 :</b> Les effets des paramètres $Gr/Re^2$ , $\alpha$ , $\sigma$ , $\sigma^*$ , Pr et E (le nombre d'Eckert) sur le champ d'écoulement .....	<b>18</b>
<b>Figure I.11 :</b> Diagrammes de bifurcation en termes de $\psi_{ext}$ en fonction de $Rt$ pour $Le=10$ et $c=0, 2, 10$ .	<b>19</b>
<b>Figure I.12 :</b> Perméabilité du milieu poreux en fonction de la profondeur pour différentes valeurs de b .....	<b>20</b>
<b>Figure I.13 :</b> Le problème de la convection naturelle à double diffusion dans un milieu poreux hétérogène .....	<b>21</b>
<b>Figure I.14 :</b> Comparaison entre la méthode de Fourier-Galerkin et la méthode des éléments finis .....	<b>21</b>
<b>Figure I.15 :</b> Effets des paramètres d'entrée sur $u_{*maximum}$ .....	<b>23</b>
<b>Figure II.1 :</b> Schéma illustrant les modèles physiques : (a) cavité horizontale (b) cavité verticale .....	<b>27</b>
<b>Figure III.1 :</b> Volume de contrôle bidimensionnel.....	<b>38</b>
<b>Figure III.2 :</b> prédiction de $\mathcal{T}_p$ pour différents schémas en fonction du nombre de Péclet	<b>41</b>
<b>Figure III.3 :</b> Schéma d'interpolation.....	<b>42</b>

<b>Figure III.4:</b> Forme indicielle des points P, W, E, S et N.....	<b>45</b>
<b>Figure IV.1:</b> schéma représentatif de l'écoulement parallèle .....	<b>51</b>
<b>Figure IV.2 :</b> Lignes de courant et isothermes pour $R = 50, c=2, A=1$ .....	<b>52</b>
<b>Figure IV.3 :</b> Lignes de courant et isothermes pour $R = 50, c=2, A=2$ .....	<b>52</b>
<b>Figure IV.4</b> Lignes de courant et isothermes pour $R = 50, c=2, A=4$ .....	<b>52</b>
<b>Figure IV.5 :</b> Lignes de courant et isothermes pour $R = 50, c=2, A=6$ .....	<b>53</b>
<b>Figure IV.6 :</b> Lignes de courant et isothermes pour $R = 50, c=2, A=8$ .....	<b>53</b>
<b>Figure IV.7:</b> Définition du volume de contrôle.....	<b>54</b>
<b>Figure IV.8 :</b> Variation de la perméabilité $K(y)$ suivant une loi exponentielle.....	<b>58</b>
<b>Figure IV.9 :</b> Variation de la perméabilité $K(y)$ suivant une loi linéaire.....	<b>59</b>
<b>Figure IV.10 :</b> Variation de la perméabilité $K(y)$ suivant une loi parabolique.....	<b>61</b>
<b>Figure IV.11 :</b> Variation de la perméabilité suivant une loi exponentielle.....	<b>63</b>
<b>Figure IV.12 :</b> Variation de la perméabilité $K(x)$ suivant une loi linéaire.....	<b>64</b>
<b>Figure IV.13 :</b> Variation de la perméabilité $K(x)$ suivant une loi parabolique.....	<b>65</b>
<b>Figure V.1 :</b> Profils des fonctions de courant et des isothermes influencées par la variation de la perméabilité pour : $R^* = 25, A=6, (a) c = 0, (b) c = 5, (c) c = 10$ .....	<b>69</b>
<b>Figure V.2 :</b> Influence du paramètre $c$ de la loi exponentielle de la perméabilité, sur la fonction de courant dans la cavité horizontale.....	<b>70</b>
<b>Figure V.3:</b> Influence du paramètre $c$ de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité horizontale.....	<b>71</b>
<b>Figure V.4:</b> Influence du paramètre $c$ de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité horizontale.....	<b>72</b>
<b>Figure V.5 :</b> Diagrammes de bifurcation en termes de $\psi_{max}$ et $\psi_{min}$ en fonction de $R^*$ et $c$ .....	<b>73</b>
<b>Figure V.6:</b> Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh $R^*$ et $c$ .....	<b>74</b>
<b>Figure V.7 :</b> Evolution de $R^*_{critique}$ en fonction du paramètre $c$ pour différentes lois de perméabilité.....	<b>74</b>
<b>Figure V.8 :</b> Profils des fonctions de courant et des isothermes influencées par la variation de la perméabilité pour : $R^* = 25, A=6, (a) c = 2 (b) c = -2$ .....	<b>75</b>

<b>Figure V.9</b> : Effet du paramètre $c$ sur la fonction du courant.....	<b>76</b>
<b>Figure V.10</b> : Effet de la variation de la perméabilité sur le profil de la vitesse horizontale $u$ à $x = 0$ pour les valeurs ( $c = 0, c = 1, c = 2$ ).....	<b>77</b>
<b>Figure V.11</b> : Effet de la variation de la perméabilité sur les profils de la température	<b>78</b>
<b>Figure V.12</b> : Diagrammes de bifurcation en termes de $\psi_{max}$ et $\psi_{min}$ en fonction de $R^*$ et $c$ .....	<b>79</b>
<b>Figure V.13</b> :Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh modifié $R^*$	<b>80</b>
<b>Figure V.14</b> Influence du paramètre $c$ de la loi parabolique de la perméabilité, sur la fonction de courant dans la cavité horizontale.....	<b>81</b>
<b>Figure V.15</b> Influence du paramètre $c$ de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité horizontale.....	<b>82</b>
<b>Figure V.16</b> Influence du paramètre $c$ de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité horizontale.....	<b>82</b>
<b>Figure V.17</b> Evolution de la fonction de courant maximale en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour les différentes valeurs du paramètre $c$ (cas de la loi parabolique)	<b>84</b>
<b>Figure V.18</b> : Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh modifié $R^*$ (cas de la loi parabolique).....	<b>84</b>
<b>Figure V.19</b> : Lignes de courant et isothermes prédits par la simulation numérique dans le cas d'une perméabilité variant selon une loi exponentielle pour $R^* = 50, A = 6$ , (a) $c = 0$ , (b) $c = 5$ , (c) $c = 10$ .....	<b>85</b>
<b>Figure V-20</b> : Influence du paramètre $c$ de la loi exponentielle de la perméabilité, sur la fonction de courant dans la cavité verticale.....	<b>87</b>
<b>Figure V.21</b> : Influence du paramètre $c$ de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité verticale.....	<b>88</b>
<b>Figure V-22</b> : Influence du paramètre $c$ de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité verticale.....	<b>89</b>
<b>Figure V-23</b> : Evolution de la fonction de courant en fonction du nombre de nombre Rayleigh modifié pour différentes valeurs du paramètre $c$ . (Cas de la loi exponentielle)	<b>90</b>
<b>Figure V-24</b> : Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour différentes valeurs du paramètre $c$ .(Cas de la loi exponentielle).....	<b>90</b>
<b>Figure V-25</b> : Evolution de la fonction de courant maximale en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour les différentes valeurs du paramètre $c$ (cas de la loi linéaire)	<b>91</b>



<b>Figure V-26 :</b> Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour les différents valeurs du paramètre $c$ . (Cas de la loi linéaire) .....	<b>92</b>
<b>Figure V-27 :</b> Evolution du nombre de Nusselt en fonction de la constante de perméabilité $c$ pour différentes lois de perméabilité.....	<b>93</b>
<b>Figure V.28 :</b> Effet du paramètre de perméabilité exponentielle sur les lignes de courant et sur les isothermes pour $R^* = 50$ et $A = 6$ . ( <b>a</b> ) $c = 20$ ( <b>b</b> ) $c = -4$ .....	<b>94</b>
<b>Figure V.29 :</b> Influence du paramètre $c$ de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité verticale.....	<b>95</b>
<b>Figure V.30 :</b> Influence du paramètre $c$ de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité verticale.....	<b>96</b>
<b>Figure V.31 :</b> Effet de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique sur les lignes de courant dans la cavité verticale.....	<b>97</b>
<b>Figure V.32:</b> Effet de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique sur le taux de transfert de chaleur $Nu$ dans la cavité verticale.....	<b>98</b>

# *Liste des Tableaux*

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1</b> : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux .....	11
<b>Tableau I.2</b> : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux .....	13
<b>Tableau III.1</b> spécification des coefficients et des termes des équations gouvernantes	39
<b>Tableau III.2</b> : Expression des coefficients convectifs.....	43
<b>Tableau III.3</b> : Expression des coefficients diffusifs.....	44
<b>Tableau III.4</b> :Nombre de Péclet aux interfaces.....	44
<b>Tableau III.5</b> : Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen pour la cavité verticale.....	48
<b>Tableau III.6</b> : Comparaison du Nombre de Nusselt Nu avec les résultats numériques obtenus par <b>Fahs et al. (2015)</b> .....	49
<b>Tableau IV.1</b> : Influence du facteur de forme sur la valeur maximale de et sur le nombre de Nusselt.....	53

Liste des Symboles  
et  
Abréviations

## Nomenclature

### Alphabet latin

$A$	Rapport de forme de la cavité	$(H'/L')$
$G$	Accélération gravitationnelle	$(m / s^2)$
$H'$	Hauteur de la couche poreuse	$(m)$
$K$	Perméabilité sans dimension du milieu poreux	
$K_r'$	Perméabilité de référence du milieu poreux	$(m^2)$
$L'$	Largeur de la couche de fluide	$(m)$
$Nu$	Nombre de Nusselt	
$q'$	Flux de chaleur constant par unité de surface	$(W / m^2)$
$R_t$	Nombre de Rayleigh thermique	
$R^*$	Nombre de Rayleigh modifié	
$R_{critique}$	Nombre de Rayleigh critique	
$T$	Temps adimensionnel $(t' \alpha / H'^2)$	
$T$	Température adimensionnelle $(T' - T'_0) / \Delta T'$	
$U$	Vitesse adimensionnelle dans la direction x $(u' H' / \alpha)$	
$V$	Vitesse adimensionnelle dans la direction y $(v' H' / \alpha)$	
$X$	Axe des coordonnées adimensionnel $(x' / H')$	
$Y$	Axe des coordonnées adimensionnel $(y' / H')$	
$C_T$	Gradient de température dans la direction x	
$C$	Coefficient de perméabilité	
$t_s$	Terme source	

## Lettres grecques

$\alpha$	Diffusivité thermique/ $(\rho C)_f$	$(\text{m}^2 / \text{s})$
$\beta_T$	Coefficient de dilatation thermique	$(\text{K}^{-1})$
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide	$(\text{m}^2 / \text{s})$
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide	
$\rho$	Densité de fluide	$(\text{kg} / \text{m}^3)$
$\Psi$	Fonction de flux adimensionnelle ( $\Psi' / \alpha$ )	
$\theta$	Fonction de température	
$\lambda$	Conductivité thermique	$[\text{W} / (\text{m K})]$
$\varepsilon$	La porosité du milieu poreux	
$\sigma$	Rapport de capacité thermique	
$(\rho C)_f$	Capacité thermique de fluide	
$(\rho C)_p$	Capacité thermique du milieu poreux	
$\mathcal{T}$	La fonction à déterminer ( $\Psi$ ou $T$ )	
$\bar{\mathcal{T}}$	La valeur moyenne de la fonction $\mathcal{T}$	
$\bar{\mathcal{T}}^0$	La fonction au temps « t »	
$\bar{\mathcal{T}}^1$	La fonction au temps « t+ $\Delta t$ »	
$\xi$	Critère de convergence	

## Indices

max	Maximum
min	Minimum
c	Critique
T	Thermique
s	solide
f	Fluide
p	poreux
i	Indice d'un point du maillage suivant x
j	Indice d'un point du maillage suivant y

## Exposants

*	Modifié
'	Variable dimensionnelle

## Abréviations

VER	Volume Elémentaire Représentatif
UP	perméabilité uniforme
VP	perméabilité variable
A.D.I	La méthode implicite aux directions alternées(Alternating Direction mplicite)
TDMA	algorithme de thomas (Tri Diagonal Matrix Algorithm)

# Introduction Générale



## **Introduction générale**

La présence d'un gradient de température dans un milieu confiné entraîne l'apparition d'un écoulement avec transport de chaleur. En effet, la différence de température provoque une distribution non uniforme de la densité du milieu, ce qui donne naissance au mouvement du fluide sous l'effet de la gravité (poussée d'Archimède) et l'effet des forces de viscosité, ce phénomène est la convection naturelle, depuis plusieurs décennies, ce phénomène de convection a présenté un intérêt certain dans le domaine du transfert de chaleur et plus particulièrement depuis les recherches de **Graetz (1885)** qui a résolu analytiquement le problème de **Graetz**, **Nusselt (1910)** et **Hallman (1956)** qui sont probablement les premiers à avoir analysé ce phénomène sur une base scientifique.

Dans l'ensemble de ces recherches traitées, le problème de transfert de chaleur par convection naturelle dans les milieux poreux occupant des espaces rectangulaires a été l'origine de nombreux travaux expérimentaux et numériques. La plupart de ces études portant sur ce phénomène ont attaché un intérêt particulier aux enceintes rectangulaires où les parois horizontales ou verticales sont soumises à des conditions de température isothermes ou à des conditions de flux de chaleurs uniformes, dont la perméabilité est considérée constante. En revanche, peu de travaux ont été consacrés à la convection naturelle dans les enceintes poreuses hétérogènes, alors que celles-ci se trouvent dans des nombreuses applications.

Bien que l'hétérogénéité concerne de nombreux paramètres physiques des milieux poreux, nous nous intéressons ici plus particulièrement à l'hétérogénéité de la conductivité hydraulique, voire la perméabilité, cette dernière est la propriété du milieu poreux qui caractérise la facilité avec laquelle le fluide est mis en écoulement. Elle peut être constante dans les milieux poreux homogènes, et variables dans les milieux anisotropes et hétérogènes. Un fluide peut s'écouler à travers un milieu poreux à condition que la plupart des nombreux espaces vides dont ce dernier est composé, soient interconnectés. Dans cette situation, le milieu poreux est dit saturé par le fluide.

Les milieux poreux hétérogènes possèdent une microstructure qui rend difficile l'étude des phénomènes de transport. Pour pouvoir étudier des phénomènes dans de tels milieux on remplace généralement le milieu hétérogène par un milieu homogène de sorte que le comportement global du milieu hétérogène soit équivalent au comportement du milieu homogène à l'échelle macroscopique.

La présente thèse porte sur l'étude de l'influence de l'anisotropie en perméabilité sur la convection naturelle au sein d'une enceinte rectangulaire remplie par un milieu poreux saturé par un fluide et soumise à des conditions de Newman (flux de chaleur constants le long des longues parois actives), cette anisotropie en perméabilité est caractérisée par diverses lois de perméabilité.

Deux cas seront étudiés, dans le premier cas, l'écoulement est induit par un gradient de température appliqué perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité. Dans le deuxième cas ce gradient est appliqué dans la même direction que la gravité.

Afin de présenter notre travail, le présent manuscrit est structuré en une introduction générale, cinq chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre, où nous reviendrons sur la modélisation des écoulements dans les milieux poreux et leurs caractérisations. Nous y exposerons aussi les travaux antérieurs consacrés à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques portant sur la convection naturelle dans les milieux poreux hétérogènes et sur l'effet de l'hétérogénéité hydraulique du milieu sur le transport, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

Les deux modèles physiques considérés ici sont formulés dans le deuxième chapitre où les équations de bases gouvernant les systèmes et les conditions aux limites associées seront présentées. La méthode numérique des volumes finis utilisée pour résoudre les équations gouvernantes complètes est ensuite discutée dans le troisième chapitre.

Le quatrième chapitre présente une dérivation d'un modèle analytique approché, basé sur l'approche d'écoulement parallèle, valable dans la limite d'une cavité élancée pour les deux cavités, horizontale et verticale.

Le cinquième chapitre, nous présentons les effets des différents paramètres sur les caractéristiques des écoulements et le transfert convectif, et nous commentons également les résultats ainsi obtenus pour les deux cas.

Enfin, et dans une conclusion générale nous présentons les principaux résultats trouvés le long de cette étude ainsi que les perspectives futures.

# Chapitre 1

Généralités sur les milieux poreux et synthèse bibliographique

## I.1 Introduction

Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent, en général, d'un certain nombre de propriétés dont : les propriétés de stockage des fluides (soit sous forme adsorbée sur le solide, soit remplissant les pores), les propriétés de transferts (masse, quantité de mouvement, énergie) et enfin les propriétés mécaniques. Comme pour tous les systèmes hétérogènes polyphasiques, ces propriétés sont évidemment fonction de la morphologie de la matrice et des phénomènes qui se développent et interagissent dans les différentes phases.

## I.2 Définition

### I.2.1 Milieu poreux

Généralement un milieu poreux est défini comme un milieu composé d'une matrice solide et de son complément géométrique, l'espace poreux. L'espace poreux peut être occupé par un ou des fluides (Figure I.1). On peut distinguer ce qu'il est d'usage d'appeler poreux granulaires et poreux consolidés.

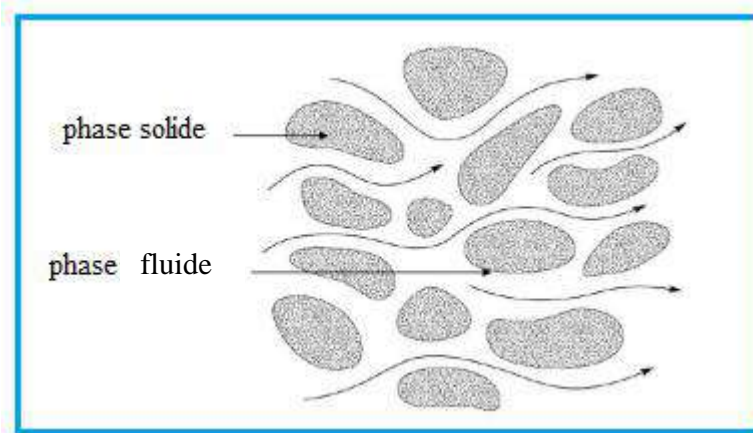


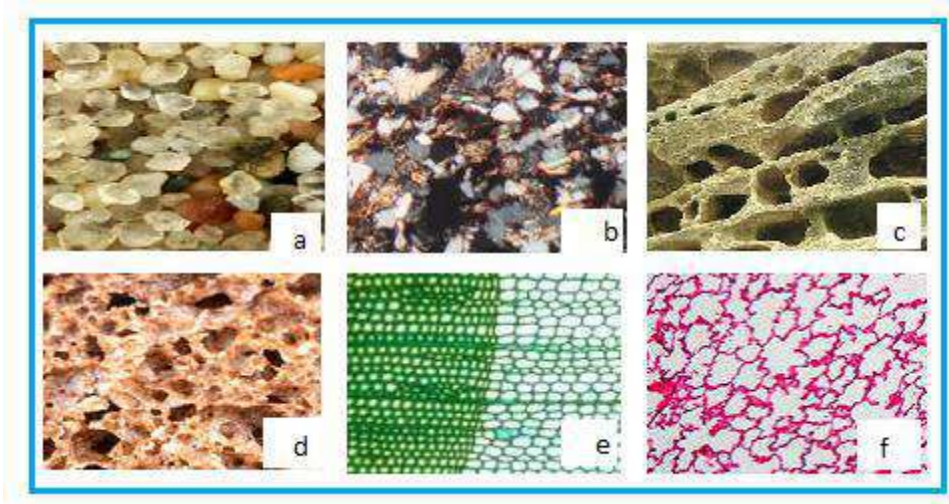
Figure I.1: Milieu Poreux

### I.2.2 Milieu poreux granulaire

Le milieu poreux granulaire typique est l'empilement de billes de verre ou de grains de sable ou autres éléments sous forme de fibres (amiante, laine de verre, coton, laine), et la connexité de l'espace poreux est évidemment totale pour les empilements granulaires.

### I.2.3 Milieu poreux consolidé

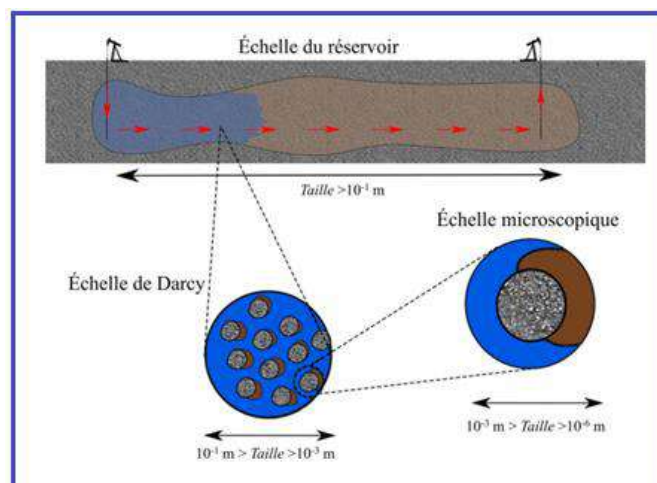
Dans le milieu poreux consolidé l'espace poreux est plutôt « creusé » dans la matrice solide comme dans les céramiques, les poudres frittés et les tissus végétaux, dans ce cas, l'espace poreux peut être constitué en partie de cavités non connectées entre elles qu'on appelle porosité occluse. Sur la Figure I.2 sont représentés quelques exemples de milieux poreux.



**Figure I.2:** Exemples de Milieux Poreux : a- Sable de plage. b- Grès. c- Roche calcaire d- Pain de seigle. f- Bois de pin. e- Poumon humain. (Dullien1992)

### I.3 Echelles et lois de l'écoulement dans les milieux poreux

Il existe plusieurs niveaux de description des écoulements en milieux poreux, dont la taille et le nombre peuvent varier en fonction des matériaux et des applications considérées De Boer (2000) et Zhang, et al (2000). Cependant, on admet généralement au moins trois échelles de description (Figure I.3).



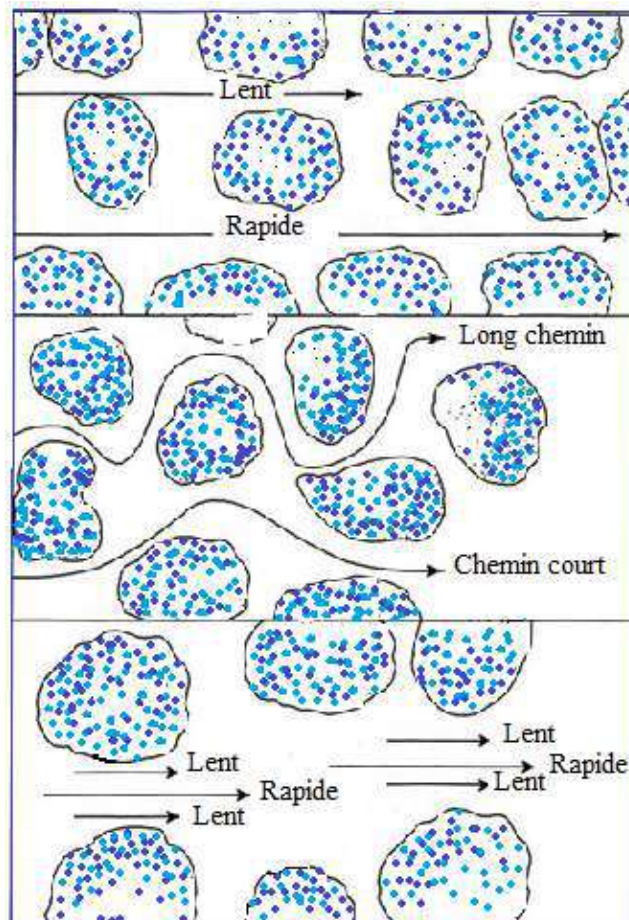
**Figure I.3 :** Description des différentes échelles des milieux poreux. (Vincent 2020).

### I.3.1 Echelle microscopique

L'échelle microscopique aussi désignée par échelle du pore : c'est l'échelle la plus petite du milieu poreux (du micromètre au millimètre) au sens où elle prend explicitement en compte la géométrie (complexe) du squelette solide et le caractère multiphasique des écoulements : les phases et les interfaces sont identifiables ; une description à l'échelle du pore ne représente que peu d'intérêt, soit parce que les applications sont plus orientées vers une description globale des propriétés du milieu poreux, soit parce que décrire la résolution du problème à partir de l'échelle microscopique est difficile à mettre en œuvre du fait de la géométrie complexe de cette échelle et des ressources nécessaires à la résolution pore par pore

#### I.3.1.1 Dispersion mécanique en milieu poreux

Ce phénomène de mélange est lié à l'hétérogénéité des vitesses dans l'écoulement à l'échelle microscopique. Les trois causes principales de dispersion mécanique sont illustrées sur la Figure I.4



**Figure I.4:** Illustration des sources de dispersion mécanique (Fetter 1999).

- Certains pores ont une ouverture plus grande, ce qui engendre des vitesses plus élevées.
- Certains chemins plus longs que d'autres induisent un retard, donc une vitesse plus faible.
- Les particules proches des parois se déplacent moins vite que celles situées dans l'axe des pores, comme l'illustre la formule de Poiseuille pour une conduite cylindrique.

### I.3.2 Echelle macroscopique

L'échelle macroscopique (aussi désignée par échelle de Darcy): C'est l'échelle usuelle de description du milieu poreux (du millimètre à la dizaine de centimètres). Pour la plupart des problèmes d'ingénierie. De ce fait, une résolution du problème à l'échelle de Darcy fait intervenir des variables d'état macroscopiques : en chaque point du domaine, les grandeurs physiques résultent d'une moyenne sur un volume minimal du matériau poreux appelé VER, choisi de façon à ce que ses propriétés soient représentatives de milieu.

#### I.3.2.1 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER)

La notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER) (Figure I.5), consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer des propriétés moyennes du milieu. Ce volume élémentaire représentatif (VER) contenant un grand nombre de pores. L'échelle du pore  $d$  varie généralement de  $0.05 \mu\text{m}$  pour les nano pores, à  $0.5 \text{ mm}$  pour les macro-pores. Or, la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière, ce qui induit des irrégularités dans la mesure des variables dépendantes (vitesse, pression, température, etc.) à l'échelle microscopique (Bear, 1972). Cependant, cette variable conservative est souvent considérée comme une valeur moyenne mesurée sur un volume élémentaire représentatif (échelle macroscopique) qui renferme un certain nombre de pores. A cette échelle, la grandeur moyenne varie d'une manière régulière dans le temps et dans l'espace (Figure I.6); ce qui permet un traitement théorique plus approprié des principes de conservation.



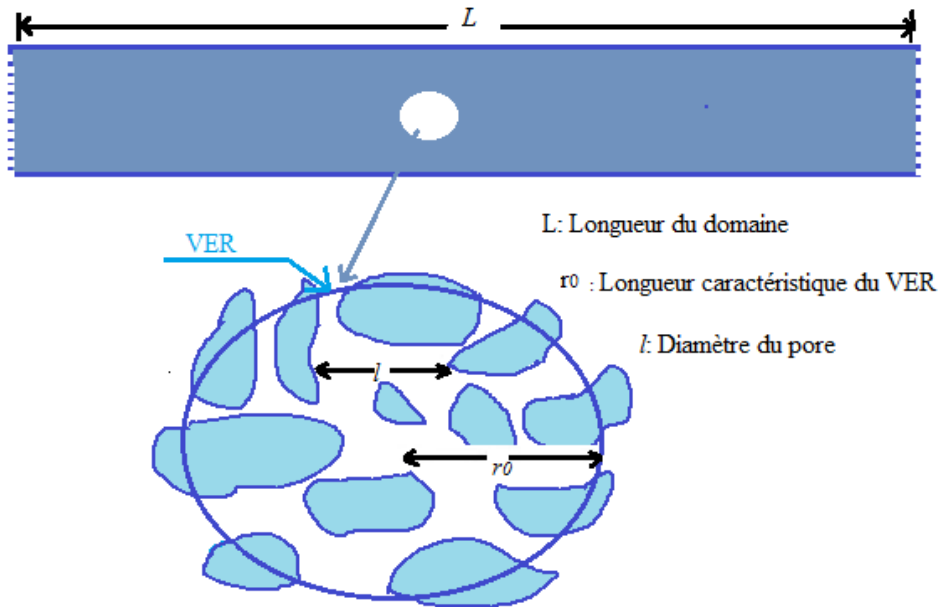


Figure I. 5: Volume Élémentaire Représentatif (  $l < r_0 < L$  )

Le volume élémentaire représentatif peut-être défini comme le fait de **Marsily (1981)** qui doit respecter nécessairement les conditions suivantes :

- Les dimensions du VER sont généralement grandes par rapport à la taille du grain.
- Les VER doivent cependant être suffisamment petits pour que les variations d'un paramètre dans le domaine d'étude puissent être représentées par des fonctions continues.

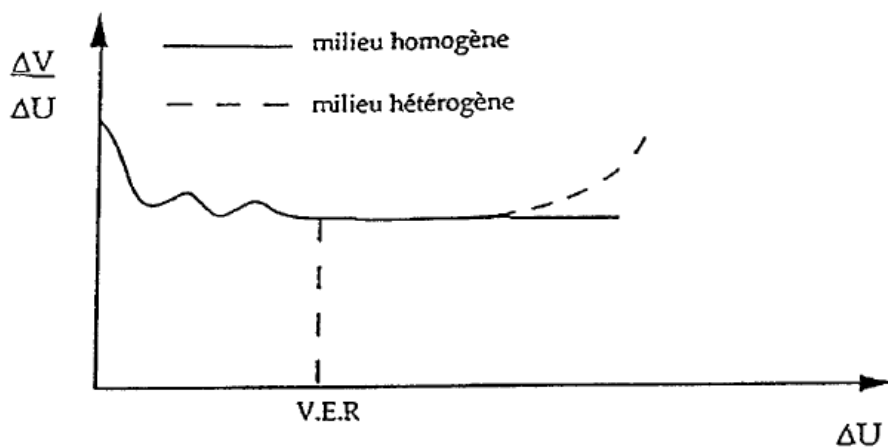


Figure 1.6 : Evolution de la fonction porosité au voisinage d'un point du milieu poreux

(Bear 1972).

### I.3.2.2 Loi de Darcy

Pour l'étude de la convection en milieu poreux, la grande majorité des études utilise la formulation classique de Darcy. Où l'étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur **Darcy en 1856**. Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux, elle s'énonce comme suit:

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu}(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}) \quad (I.1)$$

$V$  : La vitesse de filtration.

$\rho$  : La masse volumique.

$\mu$  : La viscosité dynamique du fluide.

$k$  : La perméabilité du milieu poreux.

$\nabla p$  : Le gradient de pression appliquée.

$g$  : La vectrice accélération de la pesanteur.

### I.3.3 Grande échelle

La grande échelle est l'échelle du milieu étudié dans son ensemble (de la dizaine de centimètre au kilomètre). L'étude de ces milieux fait généralement appel à une approche combinée de données géostatistiques et de simulations numériques des équations moyennées de l'échelle de Darcy sur des zones de propriétés constantes.

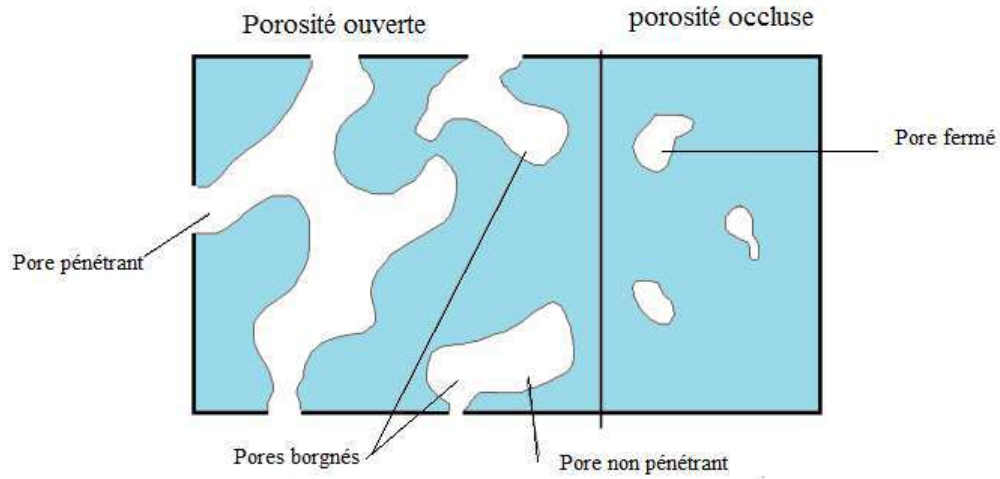
## I.4 Caractérisation des milieux poreux

### I.4.1 La porosité

Selon l'Organisation météorologique mondiale « **le glossaire international d'hydrologie** », la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme étant le rapport du volume de ces vides au volume total du milieu.

La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension). **Schoeler (1955)** distingue deux catégories de pores représentées sur la Figure (I.7), les porosités ouvertes composées de vides intercommunicants connectés à la partie extérieure du matériau, et les porosités occluses, isolées à l'intérieur du matériau et

ne permettant aucune perméabilité. Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreux. La porosité dépend de la distribution en taille des grains, de la forme des grains et du packing des grains.



**Figure I.7:** Schématisation des différents types de pores.

- **La porosité totale** qui tient compte des porosités fermées au sein du solide.

$$\varepsilon_T = \frac{V_p}{V_t} \quad (I.2)$$

$V_p$  : est le volume occupé par des pores.

$V_t$  : est le volume total du Milieu poreux.

- **La porosité accessible** ou espace poreux connecté (vides intercommunicants) à travers lequel s'effectue l'écoulement des masses fluides.

$$\varepsilon_A = \frac{V_{p \text{ acc}}}{V_t} \quad (I.3)$$

$V_{p \text{ acc}}$  : est le volume occupé par des pores accessibles.

$V_t$  : est le volume total du Milieu poreux.

Des mesures expérimentales faites par Kaviany donnent des valeurs de la porosité pour quelques matériaux, qui seront regroupés dans le tableau I.1.

**Tableau I.1** : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux **M.Kaviany (1995)**

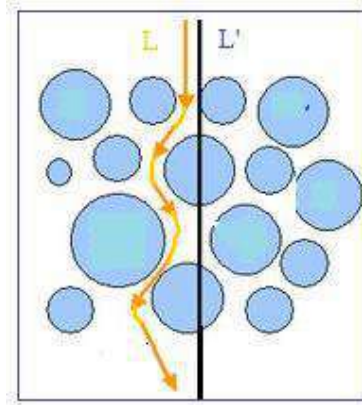
Matériaux	Porosité
Matériau mousseux	0.98
Fibres de verre	0.88-0.93
Fille à tisser	0.68-0.76
Grains de silice	0.65
Poudre d'ardoise noir	0.57-0.66
Cuir	0.56-0.59
Catalyseur	0.45
Granulé de pierre	0.44-0.45
Terre	0.43-0.54
Sable	0.37-0.50
Poudre de silice	0.37-0.49
Sphère bien empilée	0.36-0.43
Filtre de cigarettes	0.17-0.49
Briques	0.12-0.34
Poudre de cuivre	0.90-0.34
Pierre à chaud, Dolomite	0.98
Houille	0.02-0.07

#### I.4.2 Tortuosité

La tortuosité  $T$  schématisée en Figure (I.8) est une propriété sans dimension que l'on définit pour caractériser un milieu poreux. Le facteur de tortuosité  $T$  égale au rapport de la longueur  $L$  réellement parcourue par le fluide dans le milieu poreux et de la hauteur  $L'$  de l'échantillon. **Walsh et Brace (1984)**. On a donc :

$$T = \frac{L}{L'} \geq 1 \quad (\text{I.4})$$

Pour une géométrie simple de tubes parallèles à l'écoulement  $T=1$



**Figure I.8:** Représentation de la tortuosité.

### I.4.3 Perméabilité (K)

La perméabilité  $K$  se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le (ou les) fluides à l'intérieur des pores. D'une autre façon, la perméabilité  $K$  caractérise la résistance du milieu poreux à l'écoulement. La perméabilité  $K$  dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Elle est indépendante de la nature du fluide utilisé. Généralement,  $K$  est déterminé par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy.

On peut définir cette dernière perméabilité grâce à la loi de Darcy (**Darcy, 1856**):

$$Q = k \cdot A \cdot \frac{\Delta P}{\rho_f g L} = K \cdot A \frac{\Delta P}{\mu_f L} \quad (\text{I.5})$$

Avec  $A$  la section du milieu poreux,  $\Delta P/L$  la perte de charge linéique le long du milieu poreux,  $Q$  le débit volumique de fluide circulant,  $K$  la perméabilité intrinsèque du milieu et  $k$  le coefficient de perméabilité (ou conductivité hydraulique) défini comme suit :

$$k = \frac{K \rho_f g}{\mu_f} \quad (\text{I.6})$$

$\rho_f$  : est ici la masse volumique du fluide,  $\mu_f$  sa viscosité dynamique, et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

La perméabilité est donc une grandeur locale tout comme la porosité : elle dépend du volume de contrôle considéré.

Sur le tableau I.2 sont représentées les valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux.

**Tableau I.2** : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux **H.Rumpf .(1971)**

Matériau	Perméabilité K en (m <sup>2</sup> )
Ardoise noire en poudre	4.9 10 <sup>-14</sup> - 1.2 10 <sup>-13</sup>
Brique	4.8 10 <sup>-15</sup> - 2.2 10 <sup>-13</sup>
Béton bitumineux	10 <sup>-13</sup> - 2.2 10 <sup>-11</sup>
Cuivre en poudre	3.3 10 <sup>-10</sup> - 1.5 10 <sup>-9</sup>
Liège( en plaque)	2.4 10 <sup>-11</sup> - 5.1 10 <sup>-11</sup>
Cuir	9.5 10 <sup>-14</sup> - 1.2 10 <sup>-13</sup>
Calcaire (dolomite)	2 10 <sup>-15</sup> - 4.5 10 <sup>-14</sup>
Sable	2 10 <sup>-11</sup> - 1.8 10 <sup>-10</sup>
Grès	5 10 <sup>-16</sup> - 3 10 <sup>-12</sup>
Poudre de silice	1.3 10 <sup>-14</sup> - 5.1 10 <sup>-14</sup>
Sol	2.9 10 <sup>-13</sup> - 1.4 10 <sup>-11</sup>
Cigarette	1.1 10 <sup>-9</sup>
Terre	2.9 10 <sup>-13</sup> - 1.4 10 <sup>-11</sup>

#### I.4.4 Viscosité effective

La notion de viscosité effective a été initialement introduite par **Brinkman (1947)** afin de traiter la discontinuité des contraintes aux interfaces fluide- poreux. Il a suggéré de prendre la viscosité effective égale à la viscosité du fluide. **Lundgren (1972)** a montré que la viscosité effective était fonction de la viscosité du fluide et de la porosité de milieu.

#### I.4.5 Conductivité effective

Les phases fluide et solide en présence dans le milieu poreux contribuent généralement avec des proportions différentes, au mode de conduction, de ce fait, la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective. Cette dernière est la somme des conductivités thermiques statiques (stagnante) et de la conductivité thermique de dispersion.

$$\lambda_{eff} = \lambda_d + \lambda_T \quad (I.7)$$

$\lambda_d$  : représente la conductivité thermique de dispersion, (dispersion représente l'interaction entre le champ de températures et le champ de vitesses à l'échelle des pores.

$\lambda_T$  : représente la conductivité thermique stagnante ou statique, (dépend de la conductivité thermique du fluide et celle du solide, ainsi de la porosité.)

## I.5 Synthèse bibliographique

Au cours des dernières années, des efforts de recherche considérables ont été consacrés à l'étude des convections en milieu poreux en raison de leurs applications à la géophysique, aux techniques de récupération du pétrole, ingénierie de l'isolation thermique, lits de stockage de chaleur, réacteurs catalytiques à lit fixe, refroidissement du combustible usé des réacteurs nucléaires et entreposage de produits agricoles, alimentaires et d'autres domaines d'intérêt pratique.

L'état de l'art qui a été résumé dans un livre par **Nield et Béjan (2017)** montre que dans plusieurs applications, la perméabilité des matériaux poreux n'est pas constante. Depuis les premières mesures expérimentales **de Schwartz et Smith (1953)**, qui ont été les premiers à présenter des données expérimentales montrant des zones de forte porosité s'étendant sur deux ou trois diamètres de particule à partir du contenant d'un mur plat ; leurs résultats ont indiqué qu'à moins que  $D/d > 30$ , une variation de vitesse importante existe à travers le lit emballé. **Roblee et al (1958)** et **Benenati et Brosilow (1962)**, montrent que la porosité près d'une paroi solide n'est pas constante mais varie, en raison de laquelle la perméabilité varie également. L'hétérogénéité de la distribution de la perméabilité peut également être une caractéristique des matériaux poreux artificiels comme le granulé utilisé dans les processus de génie chimique et matériau fibreux utilisé dans des isolations fines.

Le début de la convection à travers des milieux poreux multicouches est considéré par **McKibbin et Tyvand (1982)**, qui ont étudié la convection naturelle thermique dans des milieux poreux anisotropes multicouches. Dans le cas de couches horizontales alternées, en nombre élevé, le modèle converge vers le modèle d'un milieu globalement homogène et anisotrope. Par contre pour un nombre limité de couches, ce modèle d'anisotropie présente une discontinuité soudaine due à l'apparition locale de convection pour un nombre de Rayleigh poreux thermique local sensiblement égal à  $10^4$ .

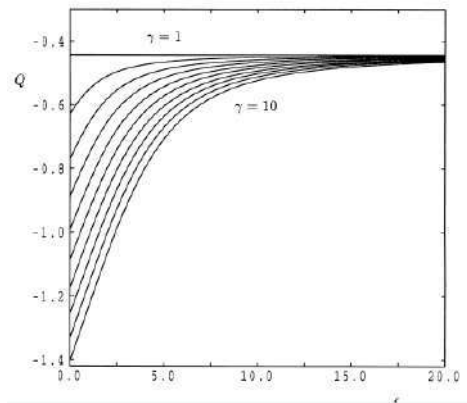
Le but du travail présenté par **B. C. Chandrasekhara et al (1984)** est d'étudier la convection forcée et libre combinées sur des surfaces inclinées noyées dans des milieux poreux, en considérant une perméabilité variable et moyennant l'équation du moment généralisée, les solutions ont été obtenues, pour différentes conditions aux limites à savoir des températures de paroi uniforme, et des variations linéaires de température au bord d'attaque, et cela pour les deux cas des flux aidants et opposés. Pour différentes valeurs des paramètres de contrôle, il a été démontré que la variation de la perméabilité a une grande influence sur le débit et le transfert de chaleur.

La plupart des études portant sur l'effet de la variation de la perméabilité ont été réalisées pour l'apparition de la convection naturelle dans les couches poreuses horizontales. Par exemple, le début de la convection à travers un milieu poreux multicouche est considéré par **McKibbin et Tyvand (1982)** qui ont étudié le début de convection à la fois dans les milieux poreux stratifiés et anisotropes, assurant un lien entre ces deux champs. **Chandrasekhara et al. (1984)** ont dérivé des solutions de similarité pour la flottabilité-écoulements induits dans un milieu poreux saturé adjacent à des surfaces horizontales imperméables.

Un certain nombre d'études ont été menées pour étudier l'effet de l'hétérogénéité sur la convection thermique dans les couches poreuses verticales. **Singh et al. (1989)** ont étudié l'effet de variation de perméabilité sur le flux de convection libre dans un milieu poreux délimité par une paroi verticale poreuse lorsque la perméabilité varie avec une loi exponentielle dans une direction. Et pour découvrir l'effet de l'augmentation de la perméabilité près d'une paroi imperméable dans un milieu poreux.

Une étude a été faite par **D.A.S. Rees et al, (2000)**, ils ont considéré une surface chauffée à température uniforme et ils ont supposé que la région de perméabilité avait une épaisseur constante, et ils ont examiné l'effet sur le transfert de chaleur. Des solutions numériques et analytiques détaillées ont été présentées pour une perméabilité variable et qui ont montré que, plus le bord est proche, plus le transfert de chaleur est considéré comme étant beaucoup plus élevé que dans le cas de la perméabilité uniforme Figure(I.9).





**Figure I. 9** : Variation du taux de transfert de chaleur,  $Q$ , pour différentes valeurs de taux de perméabilité **Rees et al, (2000)**.

Les résultats obtenus par **Simmons et al. (2001)** indiquent que l'apparition des instabilités et leur croissance et décroissance ultérieures sont intimement liées à la structure et à la variance du champ de perméabilité. Alors que l'hétérogénéité désordonnée a tendance à dissiper la convection par un mélange dispersif, une hétérogénéité ordonnée. Le nombre de Rayleigh classique utilisé pour prédire l'apparition d'instabilités échoue, dans la plupart des cas, lorsque des conditions hétérogènes prévalent.

La variation de perméabilité périodique a été étudiée par **Singh et Sharma (2002)**. Ils ont analysé un écoulement convectif libre tridimensionnel à travers un milieu poreux à perméabilité périodique, ils ont obtenu des solutions approximatives pour le champ d'écoulement, le champ des températures, le frottement de la peau et le taux de transfert de chaleur. En parallèle, **Hassanien et al (2002)** ont fait une analyse concernant un flux de convection mixte le long d'une plaque verticale non isotherme noyée dans un milieu poreux à perméabilité variable.

La condition utilisée sur la température de la paroi est celle de la variation de la loi de puissance. Lors de la modélisation des écoulements à travers des milieux poreux, des conditions aux limites de glissement, de variation de la perméabilité et de la conductivité thermique due au tassement des particules, ont été prises en considération. L'utilisation du système des différences finies a permis de résoudre les équations afin d'obtenir les profils de vitesse et de température ainsi que le nombre de Nusselt, leurs résultats numériques montrent que l'effet de la variation de la perméabilité est important sur la vitesse, sur les profils de température et sur les taux de transfert de chaleur.

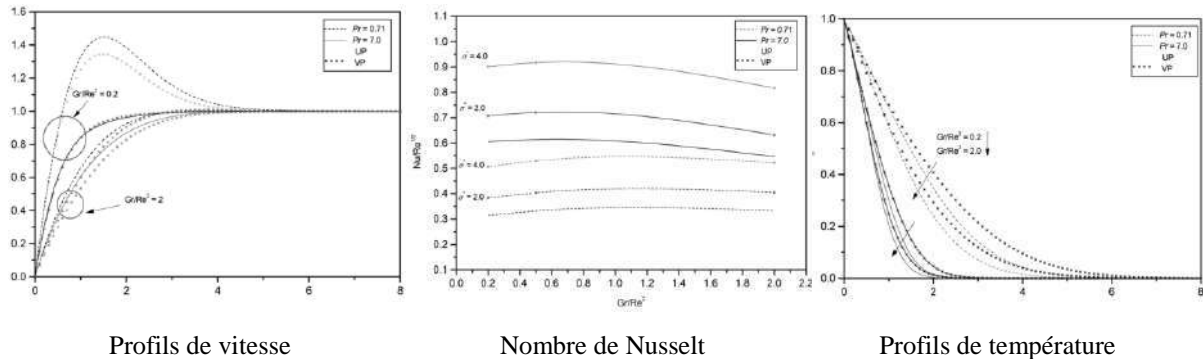
Une autre étude des effets de variation de la perméabilité sur la convection mixte le long d'une paroi verticale dans un milieu poreux avec un flux thermique variable sur la surface de la paroi a été faite par, **Hassanien (2003)**. Plusieurs solutions ont été obtenues en faisant varier le flux de chaleur appliqué à la surface. Le régime de la convection mixte est régi seulement par le paramètre non similaire qui prend les valeurs entre zéro et l'unité respectivement pour les cas de convection naturelle et forcée. Les solutions des équations gouvernant le problème ont été obtenues en utilisant le schéma de différences finies. L'auteur a présenté les profils de vitesse et de température ainsi que le nombre de Nusselt local, pour une large gamme des paramètres de contrôle et il était trouvé qu'une perméabilité variable tend à augmenter le taux de transfert de chaleur.

L'écoulement dans un milieu poreux semi-infini délimité par une surface horizontale a été étudié par **Hassanien et al. (2003)**. La perméabilité du milieu est supposée variante de façon exponentielle avec la distance par rapport au mur. Il a été constaté que la perméabilité variable tend à augmenter le taux de transfert de chaleur.

Dans le travail de **M. A. Mansour et al (2004)**, une étude de l'interaction de la convection mixte et du rayonnement convectif dans une couche d'écoulement laminaire d'une cale vertical dans un milieu poreux a été faite, et cela en considérant l'effet de variation de la perméabilité et de la conductivité thermique. Les solutions des équations de conservation ont été obtenues numériquement en termes de profils de vitesse et de températures et ceci en considérant l'approximation de **Rosslund** décrivant le flux de chaleur radiatif dans l'équation de l'énergie pour les deux cas de perméabilité uniforme et variable.

L'écoulement combiné de convection libre et forcée d'un fluide visqueux incompressible devant une plaque verticale semi-infinie noyée dans un milieu poreux incorporant la variation de perméabilité et de conductivité thermique est étudié par **Mohammadein et El-Shaer (2004)**. Des solutions de similarité sont obtenues, pour deux cas à savoir la perméabilité uniforme (UP) et la perméabilité variable (VP). Les profils de vitesse et de température sont représentés graphiquement et les valeurs numériques du frottement cutané et du taux de transfert de chaleur sont entrées sous forme de tableau. Les effets des paramètres  $Gr/Re^2$  ( $Gr$  est le nombre de Grashof,  $Re$  est le nombre de Reynolds),  $\alpha$  (coefficient de viscosité du fluide et du milieu poreux),  $\sigma$  (le nombre de

Darcy),  $\sigma^*$  (rapport de conductivité thermique du solide au liquide), Pr (le nombre de Prandtl) et E (le nombre d'Eckert) sur le champ d'écoulement sont discutés et illustrés sur la Figure(I.10).



**Figure I.10** : Les effets des paramètres  $Gr/Re^2$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^*$ , Pr et E (le nombre d'Eckert) sur le champ d'écoulement **Mohammadein et El-Shaer (2004)**

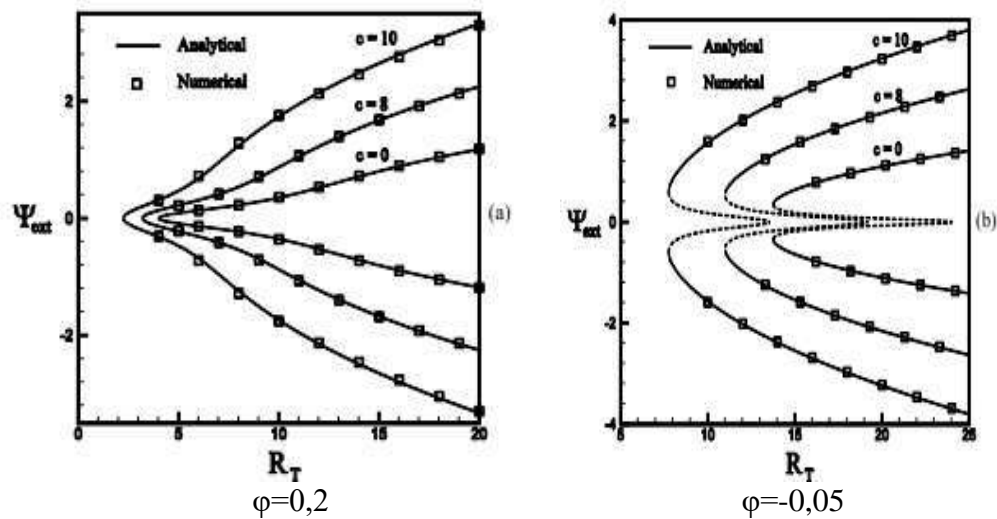
**Hassanien et al. (2004a)** ont étudié l'effet de la perméabilité variable sur l'instabilité des tourbillons, d'un écoulement horizontal de convection naturelle dans un milieu poreux adjacent à une surface horizontale. Il a été constaté que la perméabilité variable tend à augmenter le taux de transfert de chaleur et à déstabiliser l'écoulement. Des résultats similaires ont été obtenus par **Hassanien et al. (2004b)** en étudiant la convection mixte sur des surfaces inclinées en milieu poreux à perméabilité variable.

L'étude proposée par **Mahmud et Pop (2006)** traite du problème de la convection naturelle dans les milieux poreux hétérogènes y compris la dispersion dépendante de la vitesse. La référence considérée est une cavité carrée remplie avec un milieu poreux saturé et soumis à des parois verticales chauffées différentiellement et à des surfaces horizontales adiabatiques. La simplicité de la géométrie et des conditions aux limites rend ce problème particulièrement adapté pour tester des modèles numériques, mais également utile pour fournir des informations physiques sur l'application des processus.

Cependant plusieurs paramètres incertains, ont été introduits à savoir : la moyenne de Rayleigh (Ra), le rapport d'anisotropie de perméabilité (rk), les coefficients de dispersion adimensionnels  $\alpha$  le système considéré est une enceinte poreuse carrée de longueur H remplie par un milieu poreux hétérogène saturé. Les propriétés du fluide et du milieu poreux sont supposées être indépendantes de la température. Le milieu poreux et le fluide saturant sont localement en équilibre thermique. L'auteur a supposé que les approximations de Darcy et Boussinesq sont valides et que l'inertie et les effets de traînée

visqueuse sont négligeables. Dans ces conditions, l'écoulement du fluide dans des pores anisotropes peut être décrit à l'aide de l'équation de continuité et de la loi de Darcy écrites en coordonnées cartésiennes.

Le modèle de Darcy avec l'approximation de Boussinesq est utilisé par **Alloui et al (2009)** pour étudier la convection naturelle dans une couche poreuse peu profonde, à perméabilité variable, remplie d'un fluide binaire. La perméabilité du milieu est supposée varier exponentiellement avec la profondeur de la couche. Les deux parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux constants de chaleur et de soluté tandis que les deux parois verticales sont imperméables et adiabatiques. Les paramètres déterminants pour le problème sont le Rayleigh thermique nombre,  $RT$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le rapport de flottabilité, le rapport d'aspect de la cavité,  $A$ , la porosité normalisée,  $\phi$ , la constante de perméabilité variable,  $c$ , et le paramètre  $a$  définissant la double diffusion ( $a = 0$ ) ou convection induite par Soret ( $a = 1$ ). Le début de convection supercritique et sous-critique a été prédit dans leur étude Figure (I.11).



**Figure I.11** : Diagrammes de bifurcation en termes de  $\psi_{ext}$  en fonction de  $R_T$  pour  $Le=10$  et  $c=0, 2, 10$ . **Alloui et al (2009)**

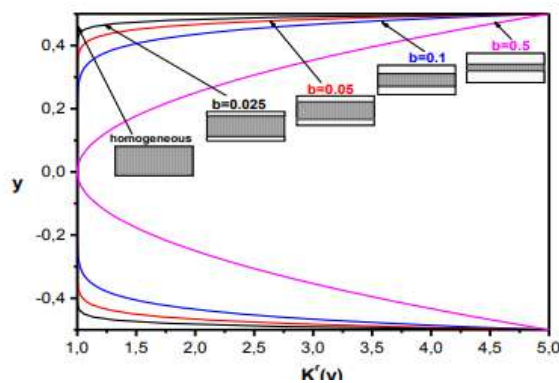
Le début de la convection dans une couche poreuse horizontale est étudié théoriquement par **Rees et Tyvand (2009)**. La perméabilité du milieu poreux est posée comme une fonction périodique continue de la coordonnée  $x$  horizontale. La théorie de Floquet a été utilisée pour déterminer le mode de convection bidimensionnel préféré. Pour une large gamme de périodes de variation de perméabilité, une technique de valeurs propres matricielles avec une précision d'ordre 8 a été utilisée pour trouver le nombre

critique de Darcy-Rayleigh. Ceci est complété par une analyse à plusieurs échelles de la limite de grande période et une brève considération de la limite anisotrope pour de très courtes périodes.

L'effet variable de l'hétérogénéité sur la convection thermique dans les milieux poreux est considéré par **Capone et al. (2009, 2011)**. Par la suite **Capone et al. (2012)** ont analysé le début de la convection dans une couche poreuse horizontal saturée par un fluide binaire, et uniformément chauffée par le bas dans laquelle la perméabilité et la diffusivité varie linéairement ou exponentiellement dans la direction verticale.

**Rionero (2011)** a démontré que la variation de la perméabilité a une grande influence sur le flux et le transfert de chaleur. L'effet de la perméabilité variable sur l'instabilité du vortex de la convection mixte et l'apparition de la convection dans des matériaux poreux à porosité stratifiée verticalement ont été étudiés. Au moyen d'une équation intégrale auxiliaire, l'absence d'instabilités sous-critiques est montrée et, sous forme fermée, la condition de stabilité globale est obtenue.

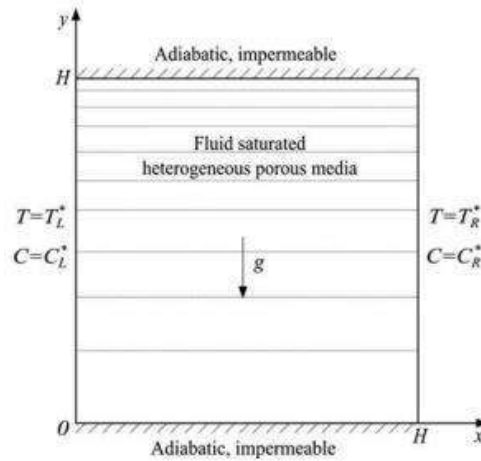
**Choukairy et al (2012)** ont supposé que la perméabilité du milieu poreux change avec la profondeur, de la manière suivante  $Kr(y)=1+4*(2*y)^{1/b}$  Figure(I.12) . Ils ont montré que l'intensité du flux et le transfert augmentent avec l'augmentation de l'hétérogénéité de perméabilité.



**Figure I.12** : Perméabilité du milieu poreux en fonction de la profondeur pour différentes valeurs de  $b$  **Choukairy et al (2012)**

L'instabilité convective linéaire et non linéaire dans un milieu poreux saturé est considérée par **Haddad (2014)** en autorisant un terme d'inertie non nul ainsi que la variation de la perméabilité dans la direction verticale.

Un nouveau benchmark est proposé par **Shao et al. (2016)** pour la vérification de ce code numérique ils ont traité la convection double-diffusive dans un milieu poreux hétérogène à géométrie carrée Figure (I.13) en supposant un milieu poreux stratifié. Une solution d'état stable est développée en utilisant la méthode de Fourier-Galerkin. Dans ce but, les inconnues sont développées en séries de Fourier infinies doubles. La précision de la solution développée est évaluée en fonction des ordres de troncature de la série de Fourier. La comparaison avec des solutions d'éléments finis sur la Figure (I.14), met en évidence la valeur du benchmark proposé pour la validation de code numérique.



**Figure I.13** : Le problème de la convection naturelle à double diffusion dans un milieu poreux hétérogène **Shao et al. (2016)**

**Table 7.** FG results in the case of a heterogeneous cavity with coupled heat and mass transfer processes.

$\zeta$	$N$	Level	$N_c$	$\overline{Nu}$	$\overline{Sh}$	$u_{max}$	$v_{max}$
2	1	10	12,075	3.44	19.28	34.58	82.91
	5	11	18,000	4.90	36.27	52.36	280.00
4	1	10	12,075	2.94	18.11	47.61	59.92
	5	12	27,000	4.35	36.27	76.79	216.57

FG, Fourier-Galerkin.

**Table 8.** FE results in the case of a heterogeneous cavity with coupled heat and mass transfer processes.

$\zeta$	$N$	Level	$N_e$	$\overline{Nu}$	$\overline{Sh}$	$u_{max}$	$v_{max}$
2	1	3	60,000 <sup>a</sup>	3.43	19.20	35.51	77.02
	5	4	90,000 <sup>a</sup>	4.79	35.27	51.39	265.51
4	1	4	90,000 <sup>a</sup>	2.93	18.13	49.83	57.66
	5	4	90,000 <sup>a</sup>	4.19	33.32	74.11	197.53

<sup>a</sup>Adaptive mesh. FE, finite element.

**Figure I.14** : Comparaison entre la méthode de Fourier-Galerkin et la méthode des éléments finis **Shao et al. (2016)**

L'étude de **Zhu et al (2017)**, simule la convection naturelle double-diffusive instationnaire en 3D soumise à des forces de flottabilité thermique et solutale opposées ( $N < 0$ ) dans une cavité cubique poreuse par un modèle non-Darcy généralisé, dans lequel les effets des paramètres cruciaux tels que la thermique poreuse, les nombres de Rayleigh, le rapport de flottabilité et le rapport d'anisotropie sur la structure d'écoulement, le transfert de chaleur et de masse des fluides en loi de puissance sont étudiés indépendamment.

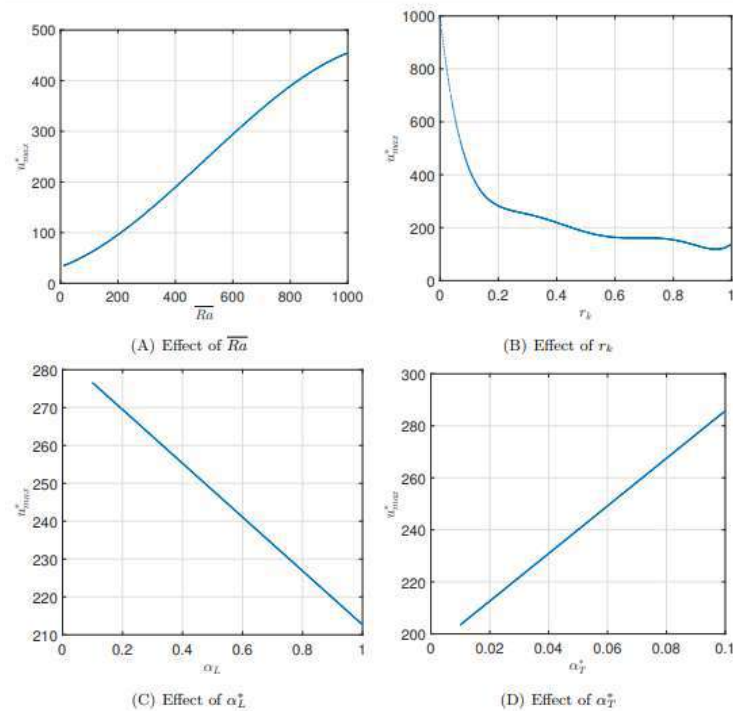
Les parois supérieure et inférieure reçoivent des températures et des concentrations différentes, tandis que les autres parois sont adiabatiques et imperméables. Une méthode compacte de volume fini d'ordre élevé est adoptée pour décrire la structure d'écoulement et les caractéristiques de transfert de chaleur et de masse résultantes des fluides non newtoniens dans la cavité cubique anisotrope. Leurs simulations montrent que la structure de l'écoulement se développe de la conduction à la convection lorsque le rapport de flottabilité ou le rapport d'anisotropie ou le nombre de Rayleigh thermique poreux augmente. Les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood restent constants pendant la phase dominée par la conduction, puis augmentent le long de la voie de transition.

D'autre part, les impacts de différents indices de loi de puissance sur la convection se manifestent principalement dans les propriétés rhéologiques, qui expliquent que les fluides fluidifiants par cisaillement sont plus efficaces dans l'amélioration du transfert de chaleur et de masse que les fluides épaississants par cisaillement. Leurs études ont pu établir une méthodologie physiquement raisonnable pour évaluer de manière systémique la convection à double diffusion de fluides de loi de puissance non newtonienne dans des milieux poreux anisotropes dans le monde réel.

**Fajraoui et al. (2017)** ont traité le problème de la convection naturelle dans les milieux poreux hétérogènes y compris la dispersion dépendante de la vitesse. La simplicité de la géométrie carrée et des conditions aux limites de Dirichlet rendent le problème particulièrement adapté pour explorer l'effet de la connaissance imparfaite des paramètres du système et de leur variabilité sur les quantités modèles d'intérêt (QoIs) caractérisant les mécanismes de la convection naturelle.

Les résultats obtenus démontrent que la distribution de température est principalement contrôlée par le coefficient de dispersion thermique longitudinal. La variabilité du nombre de Nusselt moyen est contrôlée par le nombre de Rayleigh et le coefficient de dispersion transversale. Le champ de vitesse est principalement sensible au

nombre de Rayleigh et au rapport d'anisotropie de perméabilité. L'hétérogénéité affecte légèrement le transfert de chaleur dans la cavité et a un effet majeur sur les structures d'écoulement.



**Figure I.15 :** Effets des paramètres d'entrée sur  $u^*$ maximum **Fajraoui et al. (2017)**

La génération d'entropie due à la convection combinée flottabilité-Marangoni de nano fluides de loi de puissance non newtonienne dans une cavité cubique poreuse hétérogène 3D est étudiée par **Zhuang et Zhu (2018a)** avec la méthode compacte des volumes finis d'ordre élevé. Le fluide dans la cavité est supposé comme nano fluide à base de CMC contenant des nanoparticules de CuO, et l'étude numérique est menée pour une large gamme de niveaux d'hétérogénéité allant de 0 à 1.5, un nombre de Marangoni de 0 à 1000, un nombre de Rayleigh thermique de 104 à 106, le rapport de flottabilité de 2 à 0.1, une fraction volumique des nanoparticules de 0 à 0.1 et un indice de loi de puissance de 0.76 à 1. En identifiant les caractéristiques d'irréversibilité.

Leurs résultats montrent que la génération d'entropie totale est considérablement affectée par l'hétérogénéité de la perméabilité ; elle augmente lorsque le niveau d'hétérogénéité augmente. Le nombre de Marangoni devient un paramètre plus efficace sur la génération d'entropie totale pour les valeurs des nombres de Rayleigh thermiques. Pour un écoulement dominé thermiquement, l'augmentation du taux de flottabilité provoque



diverses irréversibilités à renforcer ; d'autre part, pour le flux à dominante solutale, l'augmentation du rapport de flottabilité diminue la génération d'entropie. De plus, il est également montré que l'amélioration de la fraction volumique des nanoparticules réduit la génération totale d'entropie. Et le champ d'écoulement et la génération d'entropie sont sensiblement influencés par la présence de la loi de puissance indice.

Les mêmes auteurs **Zhuang et Zhu (2018b)** ont étudié la combinaison flottabilité-convection de Marangoni de nano fluides et de la loi de puissance d'un fluide non newtonien dans une cavité cubique poreuse hétérogène 3D, avec la méthode compacte des volumes finis d'ordre élevé. Une attention particulière est accordée cette fois à la détection des effets du niveau d'hétérogénéité, du nombre de Marangoni, du nombre de Rayleigh thermique, du rapport de flottabilité et de la fraction volumique des nanoparticules sur l'écoulement du fluide ainsi que sur les taux de transfert de chaleur et de masse.

Ils ont montré qu'en raison de la distribution exponentielle de la perméabilité, les taux de transfert de chaleur et de masse diminuent à mesure que le niveau d'hétérogénéité augmente. L'effet de la tension superficielle sur l'intensité du transfert de chaleur et de masse devient insignifiant lorsque la force de flottabilité est renforcée. De plus, les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood augmentent à mesure que le nombre de Marangoni et le nombre thermique de Rayleigh augmentent en raison des effets combinés de la flottabilité et de la tension superficielle. L'augmentation du rapport de flottabilité entraîne une augmentation du transfert de chaleur et de masse par convection pour l'écoulement à dominante thermique, tandis que la diminution du rapport de flottabilité l'augmente également pour l'écoulement à dominante solutale. Le taux de transfert de chaleur (transfert de masse) augmente (diminue) avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. De plus, pour tous les paramètres étudiés ci-dessus, une intensification de l'écoulement et une augmentation des nombres moyens de Nusselt et de Sherwood se produisent avec la diminution de l'indice de loi de puissance.

Récemment **Shafabakhsh et al. (2019)** ont illustré l'effet d'hétérogénéité sur le flux de convection libre et le transport des solutés dans les milieux poreux. Ils ont constaté que dans les cas de fracture, le début de l'instabilité se produit avec un nombre de Rayleigh critique inférieur, ce qui signifie que les réseaux de fractures ont un effet déstabilisateur.

## I.6 Conclusion

Dans la littérature, l'effet de l'hétérogénéité a été étudié pour les couches verticales comme les couches horizontales mais avec une température constante comme conditions aux limites Dirichlet. A la connaissance des auteurs, ce problème n'a jamais été étudié dans le cas des conditions aux limites de flux de chaleur, bien que ce type de conditions aux limites puisse être rencontré dans de nombreux types de configurations.

Il convient également de mentionner que les études analytiques sont limitées aux conditions aux limites de Dirichlet (température fixe) et à perméabilité constante.

Ainsi, le but de la présente étude est d'étudier l'effet de la variation de perméabilité sur la convection naturelle dans une couche poreuse hétérogène soumise à des conditions de Newman (flux de chaleur constant le long des longues parois actives). Deux cas seront étudiés :

Dans le premier cas, l'écoulement est induit par un gradient de température appliqué perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité. Dans le deuxième cas ce gradient est appliqué dans la même direction que la gravité. Dans les deux cas deux lois de variation de la perméabilité seront étudiées.

# Chapitre 2

Modèle Physique  
et formulation  
Mathématique

## II.1 Introduction

La convection naturelle au sein d'un fluide à l'intérieur d'une cavité poreuse dépend du gradient de température imposé, de la géométrie de la cavité, des propriétés du fluide et du milieu poreux ainsi que l'interaction entre la gravité et le gradient de la masse volumique. Dans la cavité, la différence de la température entre les deux parois réciproques produit un gradient de la masse volumique de l'air interne qui se relève alors en raison de force de flottabilité.

Pour étudier ce phénomène, on va se servir des théorèmes généraux de la mécanique des fluides et de la thermodynamique. La thermodynamique permet d'étudier les propriétés locales des écoulements en tenant compte des transferts de chaleur. On va donc successivement écrire la loi de la quantité de mouvement et de l'énergie au sein d'un milieu poreux. Le modèle mathématique que nous allons mettre en place sera, ensuite, simplifié afin d'établir une formulation simple du modèle mathématique ainsi que des conditions aux limites.

## II.2 Problématique

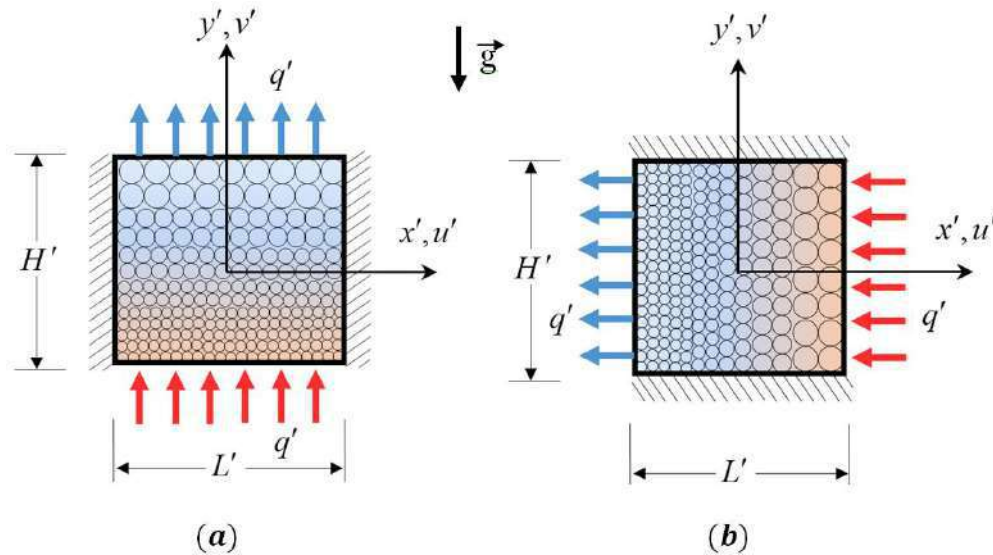
Notre travail porte sur l'étude de l'écoulement de transfert de chaleur dans les milieux poreux et anisotropes avec une perméabilité variable. Pour cela nous considérons un milieu poreux saturé par un fluide confiné dans une cavité rectangulaire de largeur  $L'$  et de hauteur  $H'$ , comme représenté sur la Figure (II.1). Le milieu poreux considéré est caractérisé par une perméabilité anisotrope mais comporte une conductivité thermique isotrope. Les perméabilités selon les axes principaux de la matrice poreuse sont  $K(x)$  et  $K(y)$ . Deux cas seront étudiés :

Dans le premier cas, la cavité est supposée horizontale et le gradient de chaleur est appliqué dans la même direction que la gravité. Les parois actives horizontales de la cavité sont exposées à l'effet d'un flux de chaleur  $q'$  exprimé par l'équation (II.1), tandis que les autres parois sont supposées imperméables et adiabatiques.

$$q' = -\lambda \nabla T' \quad (\text{II.1})$$

Où  $\lambda$  est la conductivité thermique

Dans le second cas, la cavité est verticale, l'écoulement est induit par un gradient de température appliqué perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité. Les parois actives verticales de la cavité sont exposées à l'effet du flux de chaleur  $q'$ , tandis que les autres parois sont supposées imperméables et adiabatiques.



**Figure II.1 :** Schéma illustrant les modèles physiques.

(a) cavité horizontale (b) cavité verticale

Avant d'établir les équations gouvernantes décrivant les deux cas il est nécessaire de présenter les hypothèses simplificatrices utilisées pour résoudre ce problème.

### II.3 Hypothèses simplificatrices

La formulation des phénomènes de l'effet de la perméabilité sur la convection dans le milieu poreux, est effectuée sur une échelle macroscopique, où la taille du volume élémentaire représentatif (VER) est grande par rapport à celle des pores. Les équations régissant les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont formulées en adoptant certaines hypothèses, à savoir :

- La profondeur de la cavité est suffisamment grande par rapport aux autres dimensions ( $W'/L'$  et  $W'/H' \gg 1$ ) de façon à ce que les effets des bouts deviennent négligeables.

Ceci nous ramène alors à un problème bidimensionnel comme le montre la Figure (II.1).

- Le fluide est newtonien et incompressible.
- L'écoulement est stationnaire et bidimensionnel.
- L'écoulement est laminaire.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Le repère de l'étude est situé au centre de la cavité
- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
- Il n'existe pas de réactions chimiques ni de source interne de chaleur.

Les autres propriétés physiques du fluide ( $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda_p$ ,  $Cp$ ) sont supposées constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq-Oberbeck.

## II.4 Approximation de Boussinesq-Oberbeck

Les hypothèses de Boussinesq consistent à supposer que les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la pression de référence, Boussinesq suppose aussi que le fluide est incompressible mais il conserve bien entendu le terme de poussée d'Archimède - le « moteur de la convection » - directement lié à la dilatation ou à la contraction thermique du fluide. Cependant, la masse volumique du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température, et elle est donnée par la relation suivante:

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_T(T' - T'_0)] \quad (\text{II.2})$$

Où  $T'$  est la température du fluide en un point donné du système,

$\rho_0$  est la densité du fluide.

$T'_0$  est la température de référence dans le système.

$\beta_T$  est le coefficient d'expansion volumique thermique

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_p \quad (\text{II.3})$$

$\beta_T$  est positif à température et pression ordinaire, à l'exception de l'eau pour  $T < 4^\circ\text{C}$ .

## II.5 Formulation mathématique des équations générales dans un milieu poreux

### II.5.1 Équation de conservation de la masse (Equation de continuité)

L'équation de conservation de masse, ou l'équation de continuité pour un écoulement s'écrit :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Puisque le fluide est considéré incompressible, l'équation de la conservation de masse est exprimée par l'équation de l'incompressibilité suivante :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (\text{II.5})$$

### II. 5.2 Équations de conservation de la quantité de mouvement : Loi de Darcy

Dans le domaine de la modélisation des écoulements dans les milieux poreux, le modèle de Darcy compte de nos jours parmi les plus utilisés. Mais il est valable seulement quand l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds, basé sur la vitesse moyenne locale est inférieur à 1, **Ward.j (1964)**.

Pour un nombre de Reynolds local supérieur à 1, la relation entre la pression et la vitesse moyenne (l'effet des forces d'inertie) est approximée par la correction de **Forchheimer (1901)** au modèle de Darcy. **Brinkman (1947)** a aussi introduit une autre correction à la loi de Darcy permettant de prendre en considération les effets visqueux, pour les valeurs de perméabilité très grandes.

Dans cette thèse, nous avons adopté le modèle de Darcy, selon **Nield et Bejan (1992)** et **Vasseur et al (1989)**, les forces d'inertie et les forces visqueuses peuvent être négligées dans les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon' \leq 0.8 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re_p < 1 \end{array} \right. \text{ Avec : } \left\{ \begin{array}{l} Da = K/H^2 \\ Re_p = v_p \frac{d}{\vartheta} \\ \vartheta = \mu/\rho \end{array} \right. \quad (\text{II.6})$$

Où

$\varepsilon'$  : la porosité du milieu poreux,  $Da$ , le nombre de Darcy,  $Re_p$  : le nombre de Reynolds, avec  $v_p$  la vitesse du pore,  $d$  le diamètre du pore, et  $\vartheta$  : la viscosité cinématique du fluide.

D'après le modèle de Darcy, la vitesse de filtration est donnée par :

$$\vec{V}' = -\frac{K}{\mu}(\nabla\vec{P}' - \rho_f\vec{g}) \quad (\text{II.7})$$

Où  $\vec{V}'$  est la vitesse de filtration,  $\mu_f$  est la viscosité dynamique du fluide,  $K$  est la perméabilité du milieu poreux et  $\nabla\vec{P}'$  le gradient de pression appliqué.

La projection de l'équation (II.7) sur les deux axes donne les composantes de la vitesse comme suit, l'approximation de Boussinesq étant prise en considération:

- **Suivant la direction x**

$$u' = -\frac{K'}{\mu} \left( \frac{\partial p'}{\partial x'} \right) \quad (\text{II.8})$$

- **Suivant la direction y**

$$v' = -\frac{K'}{\mu} \left[ \frac{\partial p'}{\partial y'} - \rho_0 g \left( \beta'_T (T' - T_0') \right) \right] \quad (\text{II.9})$$

On dérive l'équation (II-8) par rapport à  $y'$  et l'équation (II-9) par rapport à  $x'$ , et après une opération de soustraction entre les équations résultantes, on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{K'} \cdot u' \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{K'} \cdot v' \right) = \left[ \frac{\beta'_T g}{\vartheta} \frac{\partial T'}{\partial x'} \right] \quad (\text{II.10})$$

### II.5.3 Equation de conservation d'énergie

.Nous approvisionnons, pour l'écriture de l'équation de conservation de l'énergie, que l'équilibre local est atteint, autrement dit,  $T'_s = T'_f = T'$  ou  $T'_s$  et  $T'_f$  représentent respectivement les températures des phases solide et fluide.

**Kaviany (1991)** a proposé un modèle simple où les transferts de chaleur à travers la phase solide et la phase fluide sont supposés agir en parallèle. Appliquons le premier principe de la thermodynamique à l'écoulement dans le cas général.



L'équation de l'énergie pour la phase solide est exprimée comme suit :

$$(1 - \varepsilon')(\rho C)_s \frac{\partial T'}{\partial t} = (1 - \varepsilon')\lambda_s \nabla^2 T' \quad (\text{II.11})$$

Et pour la phase fluide:

$$\varepsilon'(\rho C)_f \frac{\partial T'}{\partial t} + (\rho C)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \varepsilon' \lambda_f \nabla^2 T' + q' \quad (\text{II.12})$$

En ajoutant les deux équations des phases membre à membre on obtient :

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t} + (\rho C)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \lambda_p \nabla^2 T' \quad (\text{II.13})$$

$(\rho C)_p$  et  $(\rho C)_f$  sont respectivement les capacités calorifiques du milieu poreux et fluide, et  $\lambda_p$  représente la conductivité thermique globale du milieu poreux. Ces grandeurs sont exprimées comme suit :

$$(\rho C)_p = (1 - \varepsilon')(\rho C)_s + \varepsilon'(\rho C)_f \quad (\text{II.14})$$

$$\lambda_p = (1 - \varepsilon')\lambda_s + \varepsilon'\lambda_f \quad (\text{II.15})$$

Les indices :  $s$ ,  $f$  et  $p$  réfèrent respectivement, à la phase solide, fluide et au milieu poreux.

## II.6 Équations en formulation de fonction de courant

L'équation de continuité est la condition d'existence d'une fonction de courant  $\Psi'$  à partir de laquelle les composantes de vitesse peuvent être définies comme suit :

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \quad (\text{II.16})$$

$$v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \quad (\text{II.17})$$

En introduisant les relations (II.16) et (II.17) dans les équations (II.10), (II.13) et en prenant compte de la direction de la variation de la perméabilité, on obtient les équations de gouvernance qui décrivent le comportement du système pour les deux cas étudiés.

- Pour la cavité horizontale

$$\nabla \left( \frac{1}{K(y)} \nabla \Psi' \right) = \frac{\beta'_T g}{9} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (\text{II.18})$$

$$\left\{ (\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \right. = \lambda_p \nabla^2 T' \quad (\text{II.19})$$

- Pour la cavité verticale

$$\nabla \left( \frac{1}{K(x)} \nabla \Psi' \right) = \frac{\beta'_T g}{9} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (\text{II.20})$$

$$\left\{ (\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \right. = \lambda_p \nabla^2 T'$$

On note que l'équation de l'énergie est similaire pour les deux types de cavité.

## II.7 Conditions aux frontières hydrodynamiques

On impose des conditions d'imperméabilité sur toutes les parois des deux cavités, il en résulte que la vitesse perpendiculaire à la paroi du fluide s'annule.

$$x' = \pm L'/2 \quad u' = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$y' = \pm H'/2 \quad v' = 0 \quad (\text{II.22})$$

## II.8 Conditions aux frontières thermiques

- Dans la cavité horizontale, les parois verticales sont maintenues adiabatiques tandis que les parois horizontales sont soumises à un flux de chaleur constant. Les conditions thermiques prennent alors la forme suivante :

$$x' = \pm L'/2 \quad \partial T' / \partial x' = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$y' = \pm H/2 \quad \partial T' / \partial y' = -q' / \lambda \quad (\text{II.24})$$

- Dans la cavité verticale, les parois horizontales sont maintenues adiabatiques tandis que les parois verticales sont soumises à un flux de chaleur constant. Les conditions thermiques prennent alors la forme suivante :

$$x' = \pm L'/2 \quad \partial T' / \partial x' = -q' / \lambda \quad (\text{II.25})$$

$$y' = \pm H/2 \quad \partial T' / \partial y' = 0 \quad (\text{II.26})$$

## II.9 Formulation adimensionnelle

L'adimensionnalisation du problème consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines valeurs caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres et faciliter la comparaison entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux.

Pour rendre les équations précédentes adimensionnelles, la dimension  $L'$  de la cavité a été choisie comme longueur de référence pour le premier cas, et la dimension  $H'$  pour le deuxième. La diffusivité thermique est utilisée pour adimensionnaliser la vitesse, la température est adimensionnalisée par rapport à l'écart de température  $\Delta T'$  entre les deux parois actives de la cavité.

Les différentes grandeurs sans dimension sont données par les expressions suivantes :

- **Pour la cavité horizontale**

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \left( \frac{x'}{H'}, \frac{y'}{H'} \right) & (u, v) &= \left( \frac{u'}{\alpha/H'}, \frac{v'}{\alpha/H'} \right) \\ K &= \frac{K'}{K'_r} , & \Psi &= \frac{\psi'}{\alpha} \\ t &= \frac{t'}{H'^2/\alpha} & T &= \frac{T' - T'_0}{\Delta T^*} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.27})$$

- **Pour la cavité verticale**

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \left( \frac{x'}{L'}, \frac{y'}{L'} \right) & (u, v) &= \left( \frac{u'}{\alpha/L'}, \frac{v'}{\alpha/L'} \right) \\ K &= \frac{K'}{K'_r} , & \Psi &= \frac{\psi'}{\alpha} \\ t &= \frac{t'}{L'^2/\alpha} & T &= \frac{T' - T'_0}{\Delta T^*} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.28})$$

Où  $\alpha = \lambda_p/(\rho C)_p$  est la diffusivité thermique du milieu poreux et  $K'_r$  est la perméabilité de référence au centre de la cavité.

## II.10 Équations adimensionnelles

- **Pour la cavité horizontale**

En introduisant les variables adimensionnelles (II.27) dans le système d'équations (II.18) et, (II.19) les équations de conservation adimensionnelles pour la cavité horizontale s'obtiennent comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{K(y)} \nabla \Psi \right) &= R \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \nabla^2 T \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.29})$$

Les conditions aux limites non dimensionnelles sur les parois de l'enceinte horizontale sont

$$x = \pm A/2 \quad \Psi = 0 \quad \partial T / \partial x = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$y = \pm 1/2 \quad \Psi = 0 \quad \partial T / \partial y = -1 \quad (\text{II.31})$$

- **Pour la cavité verticale**

En introduisant les variables adimensionnelles (II.28) dans le système d'équations (II.20) et (II.19), les équations de conservation adimensionnelles pour la cavité verticale s'obtiennent comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{K(x)} \nabla \Psi \right) &= R \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \nabla^2 T \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.32})$$

Les conditions aux limites non dimensionnelles sur les parois de l'enceinte verticale sont :

$$x = \pm 1/2 \quad \Psi = 0 \quad \partial T / \partial x = -1 \quad (\text{II.33})$$

$$y = \pm A/2 \quad \Psi = 0 \quad \partial T / \partial y = 0 \quad (\text{II.34})$$

D'après les équations gouvernantes et les conditions aux limites, on voit que les problèmes actuels sont régis par trois paramètres sans dimension : le rapport d'aspect de la cavité  $A$ , le nombre de Rayleigh  $R = g\beta'_T \Delta T' K'_r L' / \alpha \mu$ , et la perméabilité du milieu poreux  $K$ .

Cependant, on doit préciser que ces paramètres se différent selon le cas étudié, aussi il convient d'introduire un nombre de Rayleigh modifié  $R^*$ . Les paramètres de contrôle peuvent s'exprimer pour le cas de la cavité horizontale comme suit :

$$A = L'/H' \quad (\text{II.35})$$

$$R^* = \frac{g\beta_T'\Delta T'\bar{K}_y'H'}{\alpha\mu} \quad (\text{II.36})$$

Pour le cas de la cavité verticale :

$$A = H'/L' \quad (\text{II.37})$$

$$R^* = \frac{g\beta_T'\Delta T'\bar{K}_x'L'}{\alpha\mu} \quad (\text{II.38})$$

Où  $\bar{K}'_y$  et  $\bar{K}'_x$  sont la perméabilité moyenne du milieu poreux pour la cavité horizontale et verticale respectivement, elles sont données par les expressions suivantes :

$$\bar{K}'_y = K'_r \int_{-1/2}^{1/2} K(y) dy \quad (\text{II.39})$$

$$\bar{K}'_x = K'_r \int_{-1/2}^{1/2} K(x) dx \quad (\text{II.40})$$

## II.11 lois de la variation de la perméabilité

Dans la présente étude, trois lois de variation de la perméabilité à travers la cavité poreuse sont considérées.

Une fonction exponentielle respectivement pour les cavités : horizontale et verticale, données par les expressions suivantes :

$$K(y) = e^{cy} \quad (\text{II.41})$$

$$K(x) = e^{cx} \quad (\text{II.42})$$

Une fonction parabolique respectivement pour les cavités : horizontale et verticale, données par les expressions suivantes :

$$K(y) = 1 + cy^2 \quad (\text{II.43})$$

$$K(x) = 1 + cx^2 \quad (\text{II.44})$$

Une fonction linéaire respectivement pour les cavités : horizontale et verticale, données par les expressions suivantes :

$$K(y) = 1 + cy \quad (\text{II.45})$$

$$K(x) = 1 + cx \quad (\text{II.46})$$

## II.12 Taux de transfert de chaleur

L'étude de transfert de chaleur dans la cavité soumise à des flux de chaleur nécessite la détermination du taux de transfert de chaleur donné par le nombre de Nusselt. Ce dernier est un paramètre adimensionnel qui exprime physiquement le rapport entre le flux de chaleur échangé par convection entre l'interface paroi-fluide et le fluide considéré, au flux de chaleur transmis par conduction au niveau de cette interface. L'expression du nombre de Nusselt est donnée par les relations suivantes :

Pour la cavité horizontale :

$$Nu_x = \frac{q'H}{\lambda_p \Delta T} \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Où } \Delta T = T\left(x, \frac{1}{2}\right) - T\left(x, -\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.48})$$

Pour la cavité verticale :

$$Nu_y = \frac{q'L}{\lambda_p \Delta T} \quad (\text{II.49})$$

$$\text{Où } \Delta T = T\left(\frac{1}{2}, y\right) - T\left(-\frac{1}{2}, y\right) \quad (\text{II.50})$$

## II.13 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre le modèle physique, et la formulation mathématique de la convection naturelle dans un milieu poreux, où on a supposé que la perméabilité de ce milieu est variable selon trois lois, exponentielle, parabolique et linéaire. Une fois les équations formulées et aussi les conditions aux limites, on a fait une adimensionnalisation afin de simplifier le problème, il en ressort des paramètres de contrôle. Dans les chapitres qui suivent on va présenter les deux méthodes analytiques et numériques qu'on va utiliser pour résoudre ces équations.

# Chapitre 3

## Solution Numérique

### III.1 Introduction

Les modèles mathématiques présentés dans le chapitre précédent, sous la forme des systèmes d'équations différentielles, régissent le phénomène de la convection naturelle dans les cavités poreuses à perméabilité variable dont les équations différentielles relient des fonctions inconnues à leurs dérivées partielles, ces modèles sont complétés par des conditions initiales et des conditions aux limites pour tirer une information pertinente sur ce phénomène. La résolution approchée par des techniques numériques requiert une transformation en des problèmes discrets sur un certain domaine de calcul (le maillage).

La résolution numérique utilisée dans cette étude est la méthode des volumes finis basée sur la discrétisation des équations du problème, qui consiste à transformer une équation différentielle en une équation algébrique, facile à résoudre, en suivant les étapes suivantes :

- Décomposer la géométrie en mailles élémentaires (élaborer un maillage).
- Initialiser la grandeur  $w$  sur le domaine de calcul.
- Lancer le processus d'intégration temporelle jusqu'à convergence avec :
  - Calcul du bilan de flux par maille par un schéma numérique.
  - Calcul du terme source.
  - Calcul de l'incrément temporel par une méthode numérique d'intégration.
  - Application des conditions aux limites.

### III.2 Méthode des volumes finis

#### III.2.1 Présentation de la méthode

La méthode des volumes finis introduite par **Suhas V. Patankar**, consiste à subdiviser le domaine d'étude en un nombre fini de petits volumes continus qui seront nommés volumes de contrôle, de telle manière que chaque volume entoure un nœud principal  $P$ . Dans le cas bidimensionnel, chaque volume est délimité par quatre interfaces noté par  $W$  (ouest) ;  $E$  (est) ;  $N$  (nord) ;  $S$  (sud) Figure III.1. L'équation différentielle est intégrée dans chaque volume élémentaire finis. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire l'inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, exponentielle, de puissance etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude. Les termes de flux sont ensuite



évalués aux interfaces entre les volumes finis et le résultat de discrétisation donne une équation algébrique.

L'avantage de cette méthode c'est qu'elle est conservative, donc parfaitement adaptées à la résolution des équations s'écrivant sous la forme conservatrice.

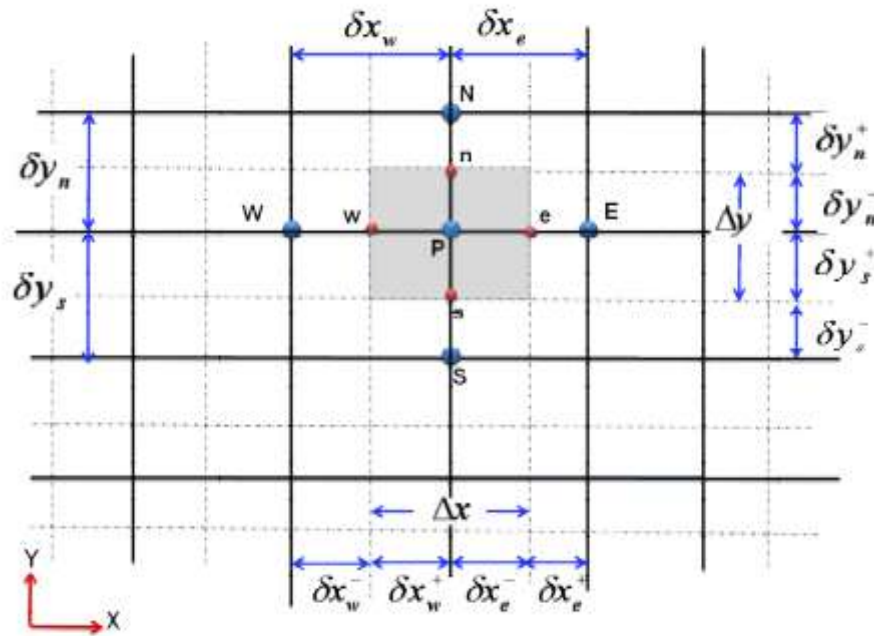


Figure III.1 : Volume de contrôle bidimensionnel.

### III.2.2 Distribution des volumes de contrôle

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un certain nombre de volumes élémentaires (voir Figure III-1). Il faut bien distinguer les indices en lettres majuscules qui désignent des grandeurs attachées au point situé au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes.

Si nous appelons P le nœud considéré, alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés : East (E), West (W), Nord (N), et Sud (S) pour des écoulements bidimensionnels.

### III.3 Forme conservatrice des équations gouvernantes

- Equation de mouvement :

$$\nabla \left( \frac{\nabla \psi}{K(x,y)} \right) = -R_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \tag{III.1}$$

- Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot T) = \nabla \cdot (\nabla T) \tag{III.2}$$

Les deux équations de conservation (III.1) et (III.2) sont traduites mathématiquement par une équation de transport de fonctions scalaires qui prend la forme générale d'une équation de convection-diffusion de  $\mathcal{T}$  exprimée comme suit :

$$\frac{\partial(\mathcal{T})}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \mathcal{T}) = \emptyset \nabla \cdot (\nabla \mathcal{T}) + t_s \tag{III.3}$$

Le premier terme de cette équation : terme transitoire  $\frac{\partial(\mathcal{T})}{\partial t}$ , représente l'accumulation de  $\mathcal{T}$  dans le temps. Le second  $\nabla \cdot (\vec{V} \cdot \mathcal{T})$  représente le transport de  $\mathcal{T}$  par convection. Dans le second membre, le premier terme  $\emptyset \nabla \cdot (\nabla \mathcal{T})$  correspond au transport de  $\mathcal{T}$  par diffusion avec le coefficient de diffusion  $\emptyset$  et le dernier terme source  $t_s$  représente la production locale de  $\mathcal{T}$  les termes liés aux équations de conservation sont donnés dans le tableau (III.1).

Avec :

$\mathcal{T}$  La fonction à déterminer ( $\Psi$  et  $T$ )

**Tableau III.1** spécification des coefficients et des termes des équations gouvernantes

Equation	$\mathcal{T}$	Terme transitoire	Terme convectif	Terme diffusif	Terme source	$\emptyset$
<b>De mouvement</b>	$\Psi$	0	0	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \Psi)$	$-R_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	$\nabla \frac{1}{K(x,y)}$ 1
<b>D'énergie</b>	$T$	$\frac{\partial T}{\partial t}$	$\nabla \cdot (\vec{V} \cdot T)$	$\nabla \cdot (\nabla \cdot T)$	0	1

### III.4 Intégration de l'équation de transport sur le volume de contrôle

Dans la méthode des volumes finis, les intégrales des équations aux dérivées partielles qui contiennent un terme de divergence ( $\nabla$ ) sont convertis en intégrales de surface, en utilisant le théorème de Green-Ostrogorski qui stipule que : Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume défini par cette surface :

$$\iiint_V \nabla(\nabla T) dV = \oint_S \nabla T d\vec{S} \tag{III.4}$$

L'équation différentielle instationnaire sous la forme générale est intégrée dans le temps sur le volume de contrôle  $\Omega_{vc}$  entourant le nœud P et donne :

$$\int_t \int_{\Omega_{vc}} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{T}) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{vc}} \text{div}(\mathcal{T}\vec{u}) dt d\Omega = \int_t \int_{\Omega_{vc}} \text{div}(\emptyset \text{grad } \mathcal{T}) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{vc}} s_{\mathcal{T}} dt d\Omega \quad (\text{III.5})$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{vc}} \frac{\partial (\mathcal{T})}{\partial t} dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{vc}} (\mathcal{T}\vec{u}) dt d\vec{A} = \int_t \int_{\Omega_{vc}} (\emptyset \text{grad } \mathcal{T}) dt d\vec{A} + \int_t \int_{\Omega_{vc}} s_{\mathcal{T}} dt d\Omega \quad (\text{III.6})$$

Où A est la surface qui limite le volume de contrôle  $\Omega_{vc}$

L'intégration de l'équation de transport sur le volume  $dx dy$ , associée au point P et sur un intervalle de temps  $\Delta t$  donne

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (\mathcal{T})}{\partial t} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (u\mathcal{T})}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (v\mathcal{T})}{\partial y} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (\emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_{\mathcal{T}} dx dy dt \quad (\text{III.7})$$

- **Pour le terme transitoire :** Pour l'intégration de ce terme particulier, on considère uniquement la variation dans le temps en assimilant la variable  $\mathcal{T}$  à sa valeur au centre du volume de contrôle.

$$I_t = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (\mathcal{T})}{\partial t} dx dy dt = \frac{\partial (\overline{\mathcal{T}_P})}{\partial t} (x_e - x_w) \cdot (y_n - y_s) = \frac{\partial (\overline{\mathcal{T}_P})}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.8})$$

- **Pour le terme convectif:**

$$I_c = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (u\mathcal{T})}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial (v\mathcal{T})}{\partial y} dx dy dt \quad (\text{III.9})$$

$$= [(u_e \mathcal{T}_e - u_w \mathcal{T}_w) \Delta Y + (v_n \mathcal{T}_n - v_s \mathcal{T}_s) \Delta X] \Delta t$$

- **Pour les termes diffusifs**

$$I_d = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (\emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}) dx dy dt \quad (\text{III.10})$$

$$= \left[ \left( \left( \emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_e - \left( \emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_w \right) \Delta Y + \left( \left( \emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_n - \left( \emptyset \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_s \right) \Delta X \right] \Delta t$$

- **Pour le terme source**

$$I_s = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_{\mathcal{T}} dx dy dt = \bar{S}_{\mathcal{T}} \Delta X \Delta Y \Delta t \quad (\text{III.11})$$

### III.5 Schémas d'interpolation

Le nombre de **Péclet** est un nombre adimensionnel qui représente le rapport des flux de la convection à la diffusion et qui est l'élément essentiel dans le choix d'un schéma numérique de discrétisation. **S.V. Patankar** a proposé plusieurs schémas approchés permettant d'exprimer et de sélectionner lors du calcul la méthode d'interpolation adéquate avec les conditions liées au problème physique en cours de traitement.

Nous introduisons maintenant quelques schémas d'interpolation servant à déterminer la valeur de la variable dépendante aux interfaces du volume de contrôle, Parmi ces schémas, on distingue le schéma aux différences centrées (**Central Difference Scheme**) qui utilise une procédure d'interpolation linéaire, ce schéma est performant dans les régions où la diffusion domine et/ou pour les maillages fins mais qui reste, cependant, limité pour des valeurs de  $|P| < 2$ . Une autre alternative à ce schéma est la procédure aux différences décentrées (**Upwind Scheme**). Ce schéma est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas à convection dominée. Par conséquent, un certain nombre d'auteurs ont proposé des combinaisons des deux schémas précédents. **Spalding** a développé le schéma hybride (**Hybrid Scheme**) qui rejoint le schéma aux différences centrées pour  $|P| < 2$  et le schéma aux différences décentrées pour  $|P| > 2$ . L'inconvénient majeur du schéma hybride est l'erreur introduite au voisinage de  $|P| = 2$  (voir Figure III-2).

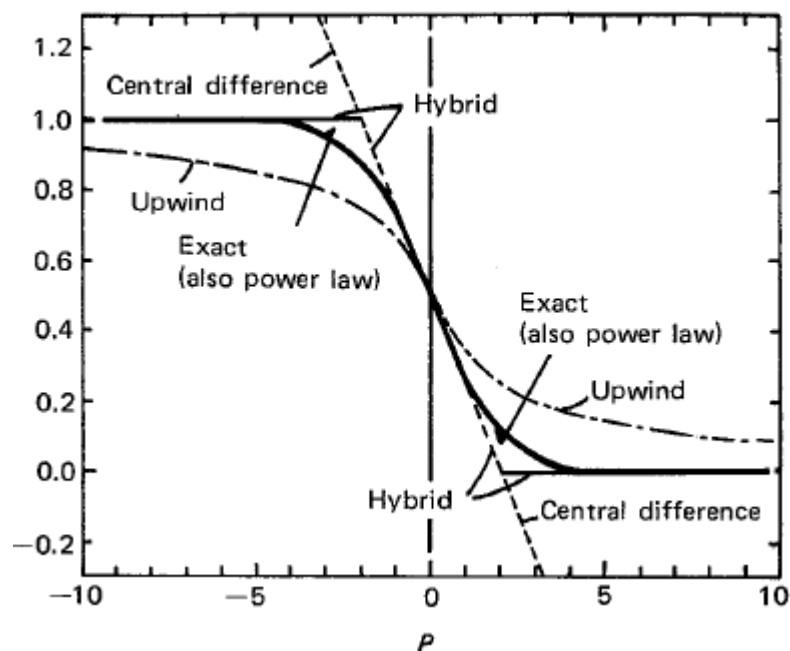


Figure III.2 : prédiction de  $T_p$  pour différents schémas en fonction du nombre de Péclet

[Patankar, 1980]

## III.6 Discrétisation de l'équation de transport suivant le schéma aux différences centrées

### III.6.1 Discrétisation du terme transitoire

En utilisant les différences finies, la dérivée dans le temps est approximée par une discrétisation implicite du premier ordre, c'est-à-dire :

$$I_t = \frac{\partial(\overline{\mathcal{T}_p})}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \frac{\mathcal{T}_p - \mathcal{T}_p^0}{\Delta t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.12})$$

Avec  $\mathcal{T}_p^0$  c'est la fonction au temps «  $t$  » et  $\mathcal{T}_p$  la fonction au temps «  $t + \Delta t$  »

### III.6.2 Discrétisation de terme convectif

En utilisant le schéma de différence centré de **Patankar** pour évaluer le flux convectif à l'interface, la variation de la variable  $\mathcal{T}$  entre deux noeuds adjacents doit être exprimée par un profil linéaire. On suppose que les faces (e, w, n, s) se trouvent au milieu des noeuds (E, W, N, S) respectivement comme il est illustré sur la Figure (III.3). On pose:

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \frac{\delta x_i^+}{\delta x_i} \\ 1 - f_i &= \frac{\delta x_i^-}{\delta x_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.13})$$

Les termes convectifs des variables généralisées  $\mathcal{T}_i$  se présentent par une interpolation comme suit:

$$\mathcal{T}_i = f_i \mathcal{T} + (1 - f_i) \mathcal{T}_I \quad (\text{III.14})$$

L'indice  $i = e, w, n, s$  et l'indice  $I = E, W, N, S$

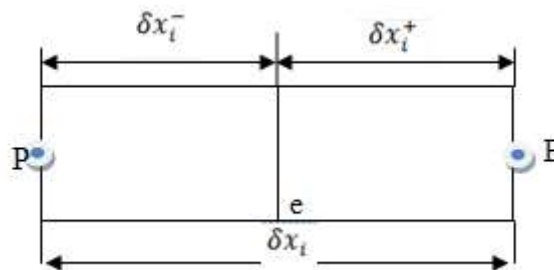


Figure III.3 : Schéma d'interpolation

Pour un maillage uniforme on obtient

$$\left\{ \mathcal{J}_e = \frac{\bar{\mathcal{J}}_E + \bar{\mathcal{J}}}{2}; \mathcal{J}_w = \frac{\bar{\mathcal{J}}_W + \bar{\mathcal{J}}}{2}; \mathcal{J}_s = \frac{\bar{\mathcal{J}}_S + \bar{\mathcal{J}}}{2}; \mathcal{J}_n = \frac{\bar{\mathcal{J}}_N + \bar{\mathcal{J}}}{2} \right\} \quad (\text{III.15})$$

En induisant les termes convectifs dans l'équation (III.9) on obtient :

$$I_c = \left[ \frac{-U_w \cdot \Delta y}{2} \cdot \bar{\mathcal{J}}_W + \frac{U_e \cdot \Delta y}{2} \cdot \bar{\mathcal{J}}_E + \frac{-V_s \cdot \Delta x}{2} \cdot \bar{\mathcal{J}}_S + \frac{V_n \cdot \Delta x}{2} \cdot \bar{\mathcal{J}}_N \right] \Delta t \quad (\text{III.16})$$

Puisque :

$$[(\bar{u}_e - \bar{u}_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x] \cdot \frac{\bar{\mathcal{J}}}{2} = \left[ \underbrace{\frac{\bar{u}_e - \bar{u}_w}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_n - \bar{v}_s}{\Delta y}}_{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \frac{\bar{\mathcal{J}}}{2} = 0 \quad (\text{III.17})$$

On définit dans le tableau (III.2) la variable  $F_i$  qui représente le flux de masse convectif qui traverse la surface ( $i$ ).

**Tableau III.2 :** Expression des coefficients convectifs

Face	e	W	n	s
Flux convectif	$F_e = u_e \cdot \Delta y$	$F_w = u_w \cdot \Delta y$	$F_n = v_n \cdot \Delta x$	$F_s = v_s \cdot \Delta x$

Le terme convectif s'écrit en termes de flux :

$$I_c = \frac{1}{2} (F_e \bar{\mathcal{J}}_E - F_w \bar{\mathcal{J}}_W + F_n \bar{\mathcal{J}}_N - F_s \bar{\mathcal{J}}_S) \Delta t \quad (\text{III.18})$$

### III.6.3 Discrétisation du terme diffusif

Et comme le maillage est supposé uniforme ( $\partial x_e = \partial x_w$  et  $\partial y_n = \partial y_s$ ) l'interpolation pour le gradient de  $\mathcal{T}$

$$\left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_w = \frac{\bar{\mathcal{T}} - \bar{\mathcal{T}}_W}{\Delta x}, \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \right)_e = \frac{\bar{\mathcal{T}}_E - \bar{\mathcal{T}}}{\Delta x}, \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_s = \frac{\bar{\mathcal{T}} - \bar{\mathcal{T}}_S}{\Delta y}, \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \right)_n = \frac{\bar{\mathcal{T}}_N - \bar{\mathcal{T}}}{\Delta y} \right\} \quad (\text{III.19})$$

En induisant les termes diffusifs dans l'équation (III.10) on obtient :

$$I_d = \left[ \left[ \left( \varnothing \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \varnothing \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \Delta Y + \left[ \left( \varnothing \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( \varnothing \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X \right] \Delta T \quad (III.20)$$

$$= \left[ \left[ \left( \varnothing_e \frac{\bar{T}_E - \bar{T}}{\Delta X} \right) - \left( \varnothing_w \frac{\bar{T} - \bar{T}_W}{\Delta X} \right) \right] \Delta y + \left[ \left( \varnothing_n \frac{\bar{T}_N - \bar{T}}{\Delta y} \right) - \left( \varnothing_s \frac{\bar{T} - \bar{T}_S}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \right] \Delta T$$

On définit dans le tableau (III.3) la variable  $D_i$  qui représente la conductance de diffusion à travers la surface ( $i$ ).

**Tableau III.3:** Expression des coefficients diffusifs

Face	e	W	n	s
<b>Conductance de diffusion</b>	$D_e = \frac{\varnothing_e \Delta Y}{\Delta X}$	$D_w = \frac{\varnothing_w \Delta Y}{\Delta X}$	$D_n = \frac{\varnothing_n \Delta X}{\Delta Y}$	$D_s = \frac{\varnothing_s \Delta X}{\Delta Y}$

Le terme diffusif écrit en termes conductances de diffusion :

$$I_d = [D_e(\bar{T}_E - \bar{T}) + D_w(\bar{T}_W - \bar{T}) + D_n(\bar{T}_N - \bar{T}) + D_s(\bar{T}_S - \bar{T})] \Delta t \quad (III.21)$$

A partir des tableaux (III.1) et (III.2), les nombres de Péclet aux interfaces sont donnés dans le tableau suivant

**Tableau III.3 :** Nombres de Péclet aux interfaces

Face	e	W	n	s
<b>Péclet</b>	$\frac{F_e}{D_e} = \frac{u_e \Delta X}{\varnothing_e}$	$\frac{F_w}{D_w} = \frac{u_w \Delta X}{\varnothing_w}$	$\frac{F_n}{D_n} = \frac{v_n \Delta Y}{\varnothing_n}$	$\frac{F_s}{D_s} = \frac{v_s \Delta Y}{\varnothing_s}$

### III.6.4 Discrétisation du terme source

Pour le terme source de l'équation de mouvement :

$$I_s = \bar{S}_T \Delta X \Delta Y \Delta t \quad (III.22)$$

Où  $\bar{S}_T$  est la valeur moyenne de sur le volume considéré.

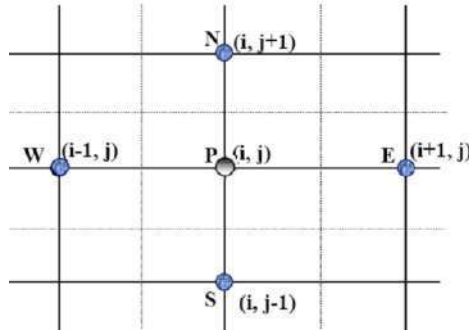
L'utilisation des expressions de  $I_t, I_c, I_d$  et  $I_s$  permet d'écrire l'équation (III.7) sous forme discrétisée:

$$a_p \cdot \bar{T} + a_w \cdot \bar{T}_w + a_e \cdot \bar{T}_e + a_s \cdot \bar{T}_s + a_n \cdot \bar{T}_n = b \quad (III.23)$$

Avec:

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{1}{\Delta t} + 2 \cdot \mathcal{P} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \\
 a_e &= D_e \left( 1 - \frac{Pe_e}{2} \right) = \frac{u_e}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\emptyset}{\Delta x^2} \\
 a_w &= D_w \left( 1 + \frac{Pe_w}{2} \right) = \frac{-u_w}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\emptyset}{\Delta x^2} \\
 a_n &= D_n \left( 1 - \frac{Pe_n}{2} \right) = \frac{v_n}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\emptyset}{\Delta x^2} \\
 a_s &= D_s \left( 1 + \frac{Pe_s}{2} \right) = \frac{-v_s}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\emptyset}{\Delta x^2} \\
 b &= \bar{S}_T + \frac{\overline{\mathcal{J}}_p^0}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

Pour que les coefficients  $a_e, a_w, a_n$  et  $a_s$  soient positifs, le nombre de Péclet doit être dans l'intervalle  $[-2, 2]$ , l'application de ce schéma n'est avantageée que si la valeur  $|Pe| \leq 2$ , cependant pour des valeurs élevées du nombre de Péclet ce schéma diverge de la solution exacte Figure (III.3). Pour remédier à ce problème on réalise des maillages fins et par conséquent on diminue le nombre de Péclet correspondant.



**Figure III.4:** Forme indicielle des points P, W, E, S et N

Admettant que les points  $P, W, E, S$  et  $N$  correspondent respectivement aux points :  $(i, j), (i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1),$  et  $(i, j + 1)$  Figure (III.4), l'équation (III.23) peut s'écrire aussi sous la forme indicielle suivante :

$$a_{i,j} \cdot \bar{\mathcal{J}}_{i,j} + a_{i-1,j} \cdot \bar{\mathcal{J}}_{i-1,j} + a_{i+1,j} \cdot \bar{\mathcal{J}}_{i+1,j} + a_{i,j-1} \cdot \bar{\mathcal{J}}_{i,j-1} + a_{i,j+1} \cdot \bar{\mathcal{J}}_{i,j+1} = b_{i,j} \quad (\text{III.24})$$



### III.7 Méthode implicite aux directions alternées

La méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) (**Alternating Direction Implicite**) a été choisie pour résoudre les équations d'énergie et de mouvement, Cette méthode inconditionnellement stable est basée sur un schéma à pas fractionnaire, aux directions alternées, implicite et explicite. En effet, il s'agit de considérer un demi-bas ( $t+0.5\Delta t$ ) de temps intermédiaire entre  $t$  et  $t+\Delta t$ . Cette technique donne lieu à deux systèmes matriciels tri- diagonaux dans les deux directions et pour chaque pas de temps. L'un est obtenu par la discrétisation implicite selon la direction  $x$  et explicite selon la direction  $y$ , l'autre par la discrétisation implicite selon la direction  $y$  et explicite selon la direction  $x$ .

#### III.7.1 Schéma implicite en $x$ explicite en $y$

La discrétisation implicite de l'équation (III.24) selon la direction  $x$  et explicite selon la direction  $y$  donne l'équation suivante :

$$A_i \cdot \bar{\mathcal{T}}_{i-1,j}^{0.5} + B_i \cdot \bar{\mathcal{T}}_{i,j}^{0.5} + C_i \cdot \bar{\mathcal{T}}_{i+1,j}^{0.5} = D_i \quad (\text{III.25})$$

$$\text{Avec : } A_i = a_{i-1,j}; B_i = a_{i,j}; C_i = a_{i+1,j} \quad \text{et} \quad D_i = b_{i,j} - a_{i,j-1} \bar{\mathcal{T}}_{i,j-1}^0 - a_{i,j+1} \bar{\mathcal{T}}_{i,j+1}^0$$

$\bar{\mathcal{T}}^0$  C'est la fonction au temps «  $t$  » et  $\bar{\mathcal{T}}^{0.5}$  la fonction au temps «  $t+0.5\Delta t$  »

Pour  $i=2, n-1$  et  $j=2, m-1$

#### III.7.2 Schéma explicite en $x$ et implicite en $y$

Dans ce cas l'équation (III.24) s'écrit sous la forme :

$$A'_j \cdot \bar{\mathcal{T}}_{i,j-1}^{0.5} + B'_j \cdot \bar{\mathcal{T}}_{i,j}^{0.5} + C'_j \cdot \bar{\mathcal{T}}_{i,j+1}^{0.5} = D'_j \quad (\text{III.26})$$

$$\text{Avec : } A'_j = a_{i,j-1} \quad B'_j = a_{i,j} \quad C'_j = a_{i,j+1} \quad \text{et} \quad D'_j = b_{i,j} - a_{i-1,j} \bar{\mathcal{T}}_{i-1,j}^{0.5} - a_{i+1,j} \bar{\mathcal{T}}_{i+1,j}^{0.5}$$

$\bar{\mathcal{T}}^1$  est la fonction au temps «  $t+\Delta t$  »

Pour  $i=2, n-1$  et  $j=2, m-1$

#### III.7.3 Traitement des conditions aux limites

La condition frontière peut être écrite sous la forme généralisée suivante :

$$a \bar{\mathcal{T}}_{1,j} + b \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{T}}}{\partial x} \right|_{1,j} = c \quad (\text{III.27})$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes.

Cette forme générale permet de retrouver les deux types de conditions aux limites utilisés dans notre étude à savoir, la condition du type Dirichlet ( $a = 1, b = 0 \rightarrow \bar{T}_{1,j} = c$ ) et la condition de type Neumann ( $a = 0, b = 1 \rightarrow \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{1,j} = c$ )

La dérivée spatiale de la fonction  $\bar{T}$  peut être approximée par différence finies comme suit :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{1,j} = \frac{\bar{T}_{2,j} - \bar{T}_{1,j}}{\Delta x} \quad (\text{III.28})$$

En remplaçant l'équation (III.28) dans (III.27) on retrouve la valeur de la fonction  $\bar{T}$  sur la frontière  $i=1$  en fonction de la valeur adjacent au point  $i=2$  comme suit :

$$\bar{T}_{1,j} = \frac{c \cdot \Delta x}{a \cdot \Delta x - b} - \frac{b}{a \cdot \Delta x - b} \bar{T}_{2,j} \quad (\text{III.29})$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation peut se réécrire pour  $i=2$  sous la forme suivante :

$$B_2 \bar{T}_{2,j} + C_2 \bar{T}_{3,j} = D_2 \quad (\text{III.30})$$

$$\text{Avec : } B_2 = B_2 - \frac{b}{a \cdot \Delta x} A_1 \quad D_2 = D_2 - \frac{c \cdot \Delta x}{a \cdot \Delta x + b} A_1$$

De la même façon et pour  $i=n-1$  on trouve :

$$A_{n-1} \bar{T}_{n-2,j} + B_{n-1} \bar{T}_{n-1,j} = D_{n-1} \quad (\text{III.31})$$

$$\text{Avec : } B_{n-1} = B_{n-1} - \frac{b}{a \cdot \Delta x + b} C_{n-1} \quad , \quad D_{n-1} = D_{n-1} - \frac{c \cdot \Delta x}{a \cdot \Delta x + b} C_{n-1}$$

### III.8 Résolution des équations

Pour résoudre le problème implicitement suivant  $x$  il faut faire un balayage suivant la direction  $y$  sur tous les points intérieurs du domaine de calcul. Pour un  $j$  donné l'équation (III.24) est appliquée du point  $i=3$  jusqu'à  $i=n-2$  et avec les conditions aux limites données par les équations (III.30) et (III.31) on forme le système matriciel tri-diagonal suivant :

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_i & B_i & C_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{T}}_1 \\ \bar{\mathcal{T}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{T}}_i \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{T}}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Ce système est résolu avec l'algorithme TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) appelé aussi algorithme de thomas. La méthode est répétée pour tous les  $j$  variant de 2 à  $m-1$ . De même manière le problème est résolu implicitement suivant  $y$ .

Le procédé itératif est lancé par la solution de l'équation d'énergie suivi par les équations de quantité de mouvement et est continué jusqu'à ce que la convergence soit réalisée. On utilise un critère basé sur l'incrément  $\xi$ , les itérations s'achèvent dès que  $\xi = \frac{|\bar{\mathcal{T}}^{k+1} - \bar{\mathcal{T}}^k|}{\max|\bar{\mathcal{T}}^k|} \leq 10^{-6}$ .

### III.9 Test de maillage

Afin de vérifier la validité du modèle numérique, un test d'indépendance de grille a été effectué pour déterminer une taille de maillage appropriée. La grille du domaine numérique a été générée à l'aide du maillage uniforme. Dans ce travail, le test de sensibilité de la grille a été réalisé avec cinq tailles différentes. Tous ces tests sont effectués pour les mêmes valeurs d'entrée, une perméabilité variant selon la loi parabolique avec  $c = 10$ ,  $R^* = 500$  et  $A = 6$ . Le nombre de Nusselt et la valeur maximum de la fonction du courant sont les paramètres physiques utilisés pour tester la sensibilité de la densité du maillage. Dans le choix du cas  $80 \times 200$  comme référence, on constate que l'influence du maillage devient négligeable.

**Tableau III.5:** Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant  $\psi_{max}$  et du nombre de Nusselt moyen pour la cavité verticale.

$n \times m$	$\psi_{max}$	nombre de Nusselt moyen
<b>50 × 125</b>	3.789	7.439
<b>60 × 150</b>	3.784	7.474
<b>70 × 175</b>	3.782	7.495
<b>80 × 200</b>	3.781	7.508
<b>90 × 225</b>	3.780	7.517

### III.10 Validation du code numérique

Afin de valider le code numérique, les résultats de la présente étude seront comparés avec ceux de la littérature (**Fahs et al.2015**), dans le tableau (III.6)

On considère une cavité carrée (facteur de forme  $A = 1$ ) avec des conditions aux limites de Dirichlet, une distribution de perméabilité exponentielle et pour  $R^* = 10^2$  et  $R^* = 10^3$  en faisant varier la constante de la perméabilité.

On constate une bonne concordance des résultats pour les valeurs de nombre de **Nusselt** avec ceux de (**Fahs et al.2015**).

**Tableau III.6** : Comparaison du Nombre de Nusselt  $Nu$  avec les résultats numériques obtenus par **Fahs et al. (2015)**

$c$	Fahs et al.2015		Présente étude	
	$R^* = 10^2$	$R^* = 10^3$	$R^* = 10^2$	$R^* = 10^3$
<b>0</b>	3.11	13.38	3.11	13.52
<b>2</b>	2.63	10.80	2.63	10.75
<b>4</b>	1.88	6.22	1.89	6.20

### III.11 Conclusion

Dans le présent chapitre nous avons exposé la méthode numérique pour la résolution de ce problème. Nous avons choisi la méthode des volumes finies comme méthode de discrétisation. La discrétisation de tous les termes régissant le phénomène étudié a été exposée en détail. Les conditions initiales et aux limites, nécessaires à la résolution complète du problème, sont-elles aussi précisées et discrétisées.

# Chapitre 4

## Solution Analytique

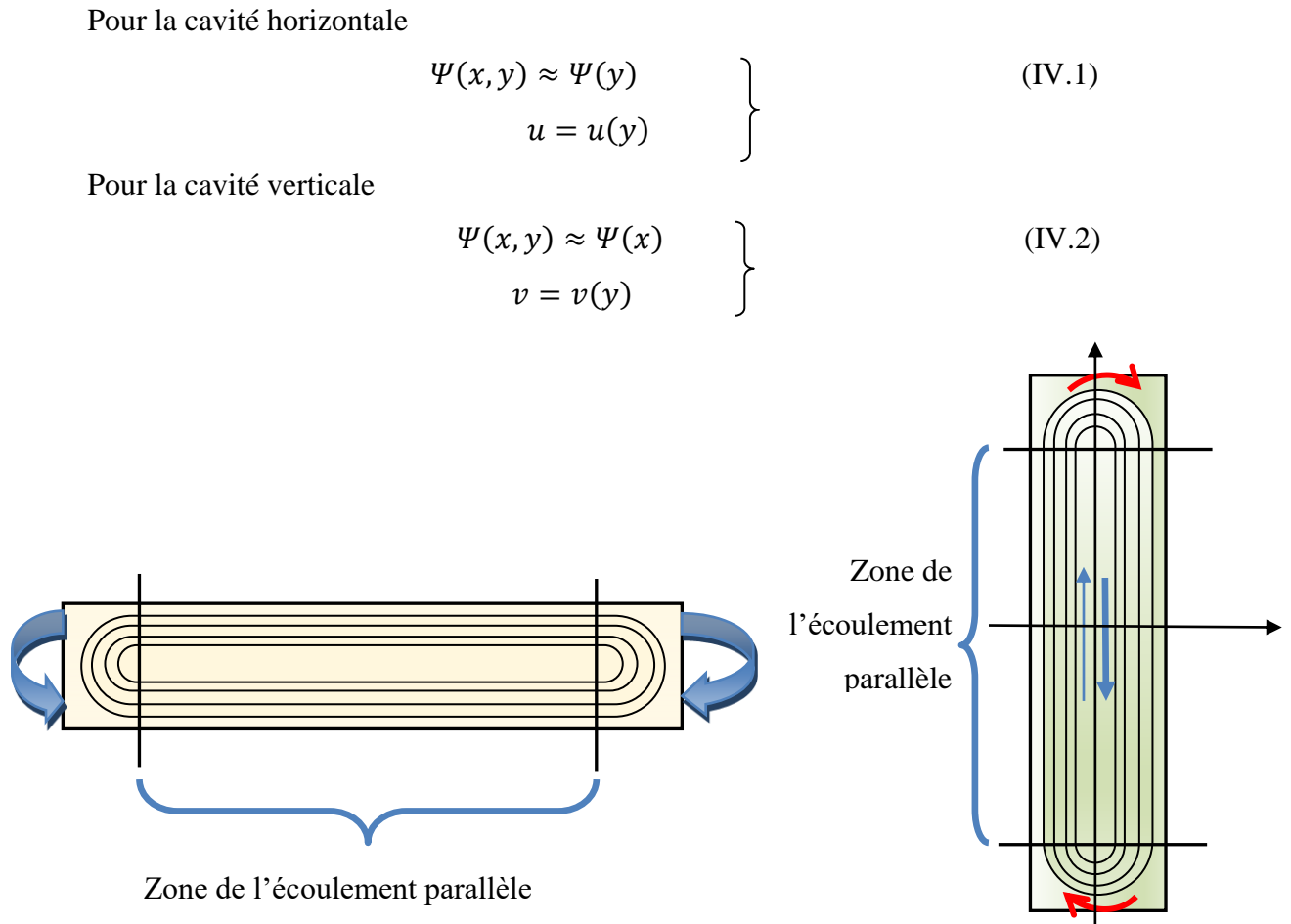
## IV.1 Introduction

Les équations de base qui régissent les phénomènes d'écoulements et de transfert thermique de fluide au sein de milieux poreux à perméabilité variable sont établies dans le deuxième chapitre. Ces équations consistent en des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. La résolution de ces systèmes, de manière analytique, est extrêmement compliquée voire impossible. Cependant, dans le cas limite des cavités *élancées* avec extension ( $A \gg 1$ ), des solutions analytiques approximatives sont possibles. De nombreuses recherches qui ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection naturelle dans les milieux poreux ont utilisé cette approximation ; parmi eux nous citons **Trevissan(1986)**, **Alavyoon (1993)**, **Mamou (1998)** et **Kalla (2004)**. Dans le présent chapitre, nous présentons le développement des solutions analytiques basées sur le concept de l'approximation de l'écoulement parallèle, pour les deux systèmes d'équations ((II.29) et (II.32)) qui régissent l'écoulement convectif respectivement dans la cavité horizontale et la cavité verticale, où les parois actives sont exposées à des flux constants de chaleur voir Figure (II.1).

## IV.2 Concept de l'écoulement parallèle

Ce concept suppose que lorsqu'une cavité présente un grand rapport d'aspect, l'écoulement engendré devient parallèle relativement aux longues parois de la cavité, ce qui permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire à ces parois, et l'écoulement engendré peut être décomposé en trois zones. Ces dernières consistent en deux régions à l'extrémité de la cavité dans lesquelles l'écoulement tourne à  $180^\circ$  et la région centrale de la couche dans laquelle l'écoulement est considéré parallèle relativement aux longues parois de la cavité.

Comme représenté sur la Figure IV.1, ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire aux parois verticales, de telle sorte que :



**Figure IV.1:** Schéma représentatif de l'écoulement parallèle

Le transfert convectif dans cette cavité peut être soit dans le sens horaire ou antihoraire qui est une transformation antisymétrique du sens horaire.

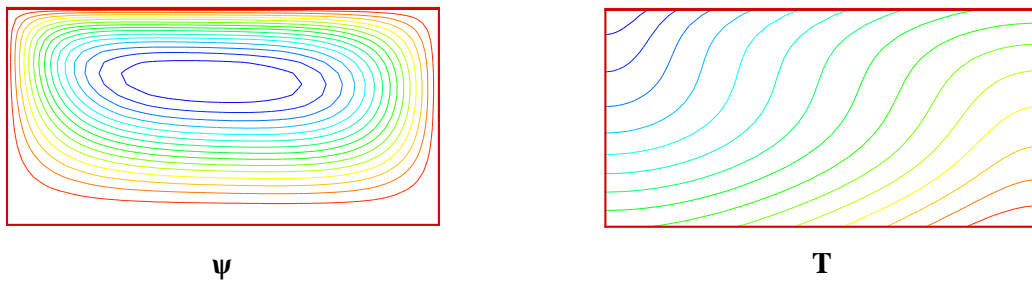
#### IV.2.1 Influence du facteur de forme de la cavité

Pour valider la solution analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle dans une cavité poreuse élancée, les figures qui suivent montrent les résultats numériques obtenus pour  $Ra=50$ ,  $c=2$ ,  $A=1, 2, 4, 6$  et  $8$ . En examinant ces résultats numériques, nous pouvons constater l'effet du rapport de forme de la cavité sur la structure de l'écoulement et sur le profil de température dans la convection naturelle induite par les conditions de Neumann. Sur la (Figure IV.2), on observe que pour un rapport de forme  $A=1$ , l'écoulement est bidimensionnel, aussi pour le rapport de forme  $A=2$  (Figure IV.3) la composante verticale de vitesse est encore présente.

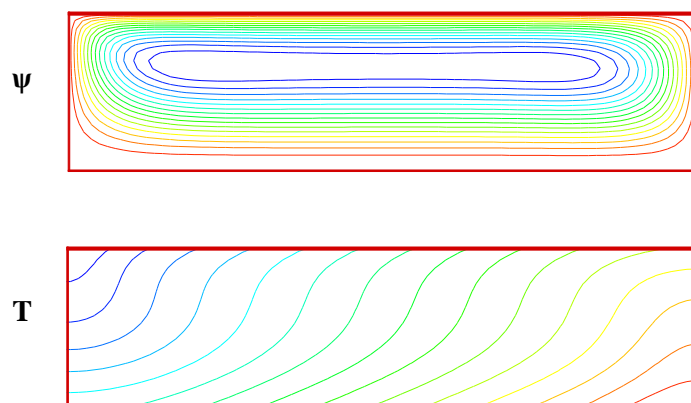
Par contre pour un rapport de forme plus grand par exemple  $A \geq 4$ , les (Figure IV.4), (Figure IV.5) et (Figure IV.6) illustrent clairement que l'écoulement est parallèle dans la partie centrale des cavités horizontales et que le profil de la température est linéairement stratifié dans la direction horizontale pour la cavité horizontale. Ces prédictions numériques sont en excellent accord avec le concept de l'écoulement parallèle.



**Figure IV.2 :** Lignes de courant et isothermes pour  $R = 50$ ,  $c=2$ ,  $A=1$ .



**Figure IV.3 :** Lignes de courant et isothermes pour  $R = 50$ ,  $c=2$ ,  $A=2$ .



**Figure IV.4 :** Lignes de courant et isothermes pour  $R = 50$ ,  $c=2$ ,  $A=4$ .



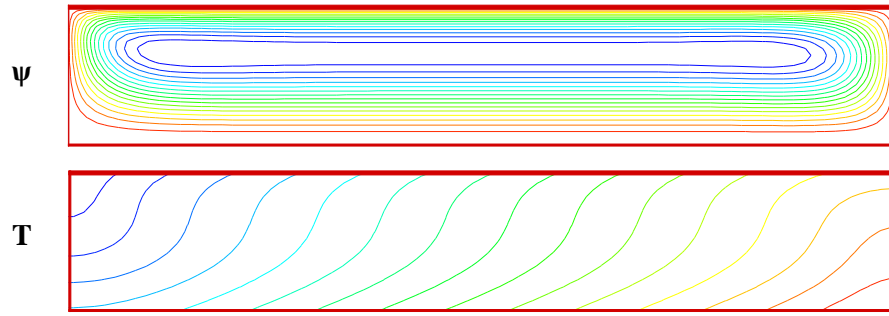


Figure IV.5 : Lignes de courant et isothermes pour  $R = 50, c=2, A=6$ .

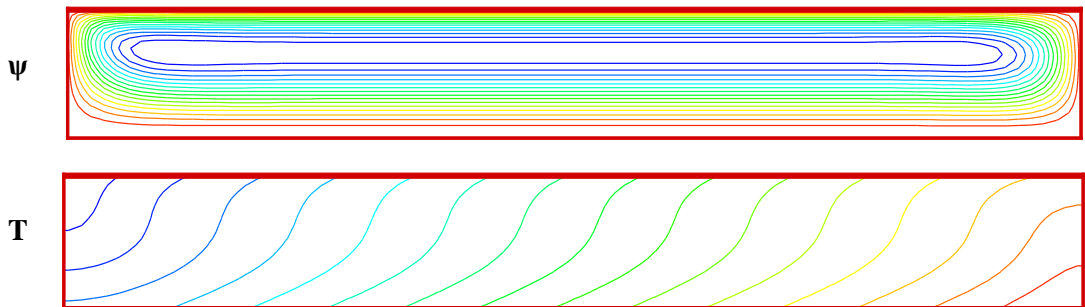


Figure IV.6 : Lignes de courant et isothermes pour  $R = 50, c=2, A=8$ .

Tableau IV.1 : Influence du facteur de forme sur la valeur maximale de  $\psi$  et sur le nombre de Nusselt

Solution numérique										Solution Analytique	
A=1		A=2		A=4		A=6		A=8		Nu	$\psi_{\min}$
Nu	$\psi_{\min}$	Nu	$\psi_{\min}$	Nu	$\psi_{\min}$	Nu	$\psi_{\min}$	Nu	$\psi_{\min}$		
1.49	-1.74	1.83	-2.09	1.87	-2.06	1.87	-2.06	1.87	-2.06	1.87	-2.02

Les résultats regroupés dans le Tableau IV.1 montrent que les valeurs de Nusselt et de  $\psi_{\min}$  sont indépendantes du facteur de forme à partir de  $A=4$ .

### IV.2.2 Fonctions de répartition de la température

Les profils de la température, sont alors donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale à l'axe de l'écoulement linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale.

Pour la cavité horizontale

$$T(x, y) = C_T \cdot x + \theta(y) \tag{IV.3}$$

Pour la cavité verticale

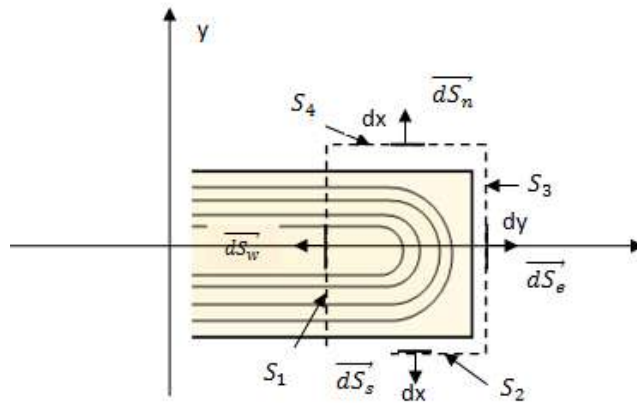
$$T(x, y) = C_T \cdot y + \theta(x) \tag{IV.4}$$

Où  $C_T$  est la constante qui exprime le gradient de température.

$\theta_T$ : est la fonction décrivant la variation de température.

### IV.2.3 Gradients des températures $C_T$

La détermination des constantes du gradient de température se fait par l'application du théorème du Flux- divergence, qui établit le bilan énergétique exprimé aux extrémités de la cavité, autour d'un volume de contrôle (**Trevisan et Bejan 1986**).



**Figure IV.7:** Définition du volume de contrôle

Comme le montre la Figure IV.7, on choisit un volume de contrôle (en pointillés) sur lequel on peut répertorier les différents gains et pertes de chaleur et intègre les équations de conservation d'énergie en régime permanent avec les conditions aux limites.

Alors :

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) T d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) d\Omega \tag{IV.5}$$

En utilisant la théorie de flux-divergence, la forme de cette équation devient la suivante :

$$\oint_S \vec{V} T \cdot \vec{dS} = \oint_S (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dS} \tag{IV.6}$$

Les trois surfaces du volume de contrôle ( $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$ ) sont des parois solides, c'est-à-dire que la condition d'imperméabilité est appliquée. Considérant que le flux qui pénètre dans

la surface  $S_2$  égal au débit sortant à la surface  $S_4$ , alors que la surface  $S_3$  est adiabatique (le gradient thermique est nul).

Le premier terme de l'équation (IV.6) s'écrit comme suit :

$$\oint_S \vec{V} T \cdot \vec{dS} = \int_{-1/2}^{1/2} [u(y) T] dy \vec{dS} \quad (\text{IV.7})$$

Le second terme de l'équation (IV.6) est donné par :

$$\oint_S (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dS} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy \vec{dS} \quad (\text{IV.8})$$

Par conséquent, l'équation (IV.6) devient la suivante :

$$\int_{-1/2}^{1/2} [u(y) T] dy = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy \vec{dS} \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi on obtient l'expression du gradient de température comme suit :

$$\int_{-1/2}^{1/2} u(y) \theta(y) dy = C_T \vec{dS} \quad (\text{IV.10})$$

Après intégration, on trouve les expressions du gradient de température suivantes, respectivement pour la cavité horizontale et verticale.

$$C_T = \int_{-1/2}^{1/2} u T dy \vec{dS} \quad (\text{IV.11})$$

$$C_T = \int_{-1/2}^{1/2} v T dx \vec{dS} \quad (\text{IV.12})$$

### IV.3 Variation de la perméabilité

Dans la présente étude, on suppose que la variation de la perméabilité, dans la couche poreuse, est de la forme :

$$K(x) = \frac{K'(x)}{K_c} \quad (\text{IV.13})$$

À ce stade, il est pratique d'introduire le nombre de Rayleigh modifié suivant :

$$R^* = \frac{g \beta \Delta T' \bar{K}' L'}{\vartheta \alpha} \quad (\text{IV.14})$$

Le nombre de Rayleigh modifié est basé sur la perméabilité moyenne  $\bar{K}'$  qui est donnée par :

$$\bar{K}' = b \cdot K_c' \quad (\text{IV.15})$$

Où

$$b = \int_{-1/2}^{1/2} K(x) dx \quad (\text{IV.16})$$

Le nombre de Rayleigh modifié est lié au nombre de Rayleigh par l'expression suivante.

$$R^* = b \cdot R \quad (\text{IV.17})$$

## IV.4 Application du concept de l'écoulement parallèle aux équations de base

L'application du concept de l'écoulement parallèle aux équations de base en tenant compte des hypothèses considérées sur l'écoulement parallèle donne un système d'équations aux dérivées partielles pour la cavité horizontale et un système aux dérivées partielles des équations fortement couplées pour la cavité verticale.

Ces deux cas seront étudiés séparément pour éviter toute confusion entre eux.

### IV.4.1 Concept de l'écoulement parallèle pour le cas d'une cavité horizontale

#### IV.4.1.1 Simplification des équations

En simplifiant les équations gouvernantes (II.29) du deuxième chapitre et, ainsi qu'en supposant que l'écoulement est stationnaire, on obtient le système d'équations ci-dessous.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{K(y)} \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{K(y)} \right] \frac{d\Psi}{dy} &= RC_T \\ \frac{d^2 \theta}{dy^2} &= C_T \cdot \frac{d\Psi}{dy} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.18})$$

Nous utilisons les conditions aux limites représentées par les équations (II.30) et (II.31).

Après simplification, nous obtenons ce qui suit :

$$\Psi(y) = \Psi_0 G(y) \quad (\text{IV.19})$$

$$\theta(y) = C_T \Psi_0 F(y) - y \quad (\text{IV.20})$$

Avec :

$$\Psi_0 = RC_T \quad (\text{IV.21})$$

À partir de l'équation  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  nous obtiendrons le profil de vitesse axiale  $u(y)$  donné sous la forme suivante :

$$u(y) = \Psi_0 \varphi(y) \quad (\text{IV.22})$$

#### IV.4.1.2 Détermination du gradient de chaleur $C_T$

En substituant les équations (IV.20) et (IV.22) dans l'équation (IV.11) on obtient un système d'équations à deux variables qui admet comme solution :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= 0 \\ C_T &= \frac{\sqrt{-B_1 \cdot B_2}}{B_1} \\ C_T &= -\frac{\sqrt{-B_1 \cdot B_2}}{B_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.23})$$

Où  $B_1$  et  $B_2$  sont des constantes liées aux lois de variation de perméabilité et seront définies dans les sections qui suivent. La solution  $C_T = 0$  représente la conduction pure à l'état de repos, et les deux autres solutions correspondent aux solutions convectives et l'écoulement peut tourner dans le sens horaire ou antihoraire suivant le signe ( $-$  ou  $+$ ).

#### IV.4.1.3 Détermination des nombres de Rayleigh critique

La solution de  $B_2 = 0$  donne une valeur de  $R$  appelée Rayleigh critique  $R_{critique}$ . Si le nombre de Rayleigh est inférieur à cette valeur le transfert thermique s'opère uniquement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur la convection s'installe et devient vite prépondérante dans le transfert.

#### IV.4.1.4 Transfert thermique

Les taux de transfert thermique (nombre de Nusselt) est obtenu en substituant les valeurs de Température (en bas et en haut de la cavité) selon l'équation (IV.20) dans l'équation (II.47). Le nombre de Nusselt prend la forme générale suivante :

$$Nu = \frac{1}{1 - B_0 \psi_0 C_T} \tag{IV.24}$$

Les fonctions  $G(y)$ ,  $\varphi(y)$  et  $F(y)$ , ainsi que le gradient thermique  $C_T$  et le transfert thermique  $Nu$  qui sont influencés par les lois de la perméabilité considérées, seront déterminés pour chaque cas.

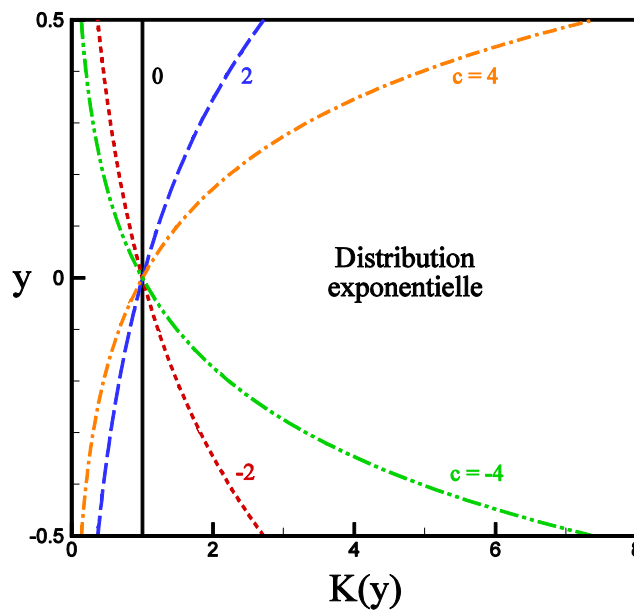
**IV.4.1.5 Couche poreuse horizontale à perméabilité variant selon une loi exponentielle**

On pose :

$$K(y) = e^{cy} \tag{IV.25}$$

Où  $c$ , est une constante, et avec cette loi de perméabilité qui varie de façon exponentielle (figure IV.8), la perméabilité sans dimension moyenne est donnée par l'expression suivante

$$\bar{K} = \bar{K}' / \bar{K}'_c = b = \frac{\sinh(c/2)}{c/2} \tag{IV.26}$$



**Figure IV.8 :** Variation de la perméabilité  $K(y)$  suivant une loi exponentielle.

Et on trouve, après des opérations algébriques, que les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  et  $\varphi(y)$  peuvent être exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} G(y) &= -\frac{1}{2}e^{cy}y^2 + \frac{1}{8}e^{cy} \\ F(y) &= A_1y^2 + A_2 \\ \varphi(y) &= -e^{cy} \end{aligned} \right\} \tag{IV.27}$$

Avec :

$$A_1 = -\frac{1}{6}e^{cy}, A_2 = \frac{1}{8}e^{yc}$$

- Le gradient thermique :

$$C_T = \frac{\sqrt{-B_1 \cdot B_2}}{B_1} \tag{IV.28}$$

Avec :

$$B_1 = \frac{R^2}{48}(-e^c + e^{-c}), B_2 = \frac{R}{4}(e^{1/2c} + e^{-1/2c}) - 1$$

- Le Rayleigh critique :

$$R_{critique} = \frac{4}{e^{c/2} - e^{-c/2}} \tag{IV.29}$$

- Le transfert thermique :

$$Nu = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}C_T^2 Re^{cy}} \tag{IV.30}$$

#### IV.4.1.6 Couche poreuse horizontale à perméabilité variant selon une loi linéaire

La variation de la perméabilité selon une loi linéaire présentée dans la figure IV.9 est donnée par la relation :

$$K(y) = 1 + cy \tag{IV.31}$$

La perméabilité sans dimension moyenne est donnée par l'expression suivante

$$b = 1 \tag{IV.32}$$

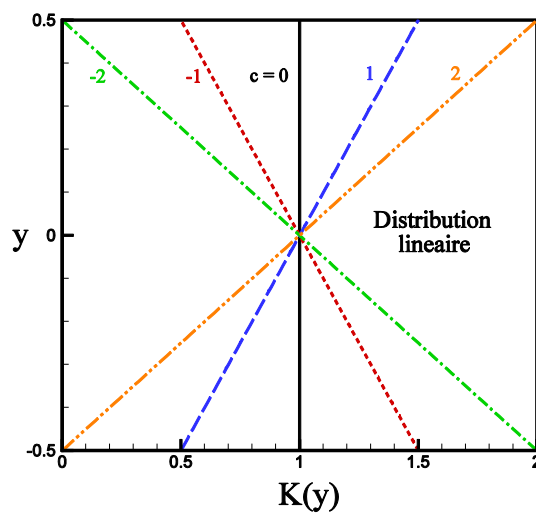


Figure IV.9 : Variation de la perméabilité K(y) suivant une loi linéaire.

Les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  peuvent être exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} G(y) &= -\frac{cy^4}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{(c+8)}{64} \\ F(y) &= A_1y^3 + A_2y^2 + A_3y + A_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.33})$$

Avec :

$$A_1 = -\frac{c}{12}, \quad A_2 = \frac{1}{72}(-12 + c^2), \quad A_3 = \frac{c}{24}, \quad A_4 = \frac{1}{8} - \frac{c^2}{96}$$

- Le gradient thermique :

$$C_T = \frac{\sqrt{-B_1 \cdot B_2}}{B_1} \quad (\text{IV.34})$$

avec :

$$B_1 = -\frac{1}{840}R^2cA_1 - \frac{1}{180}R^2cA_3 + \frac{1}{144}(-12R + Rc^2)A_4R + \frac{1}{960}(-12R + Rc^2)A_2R$$

$$B_2 = \left(-1 + \frac{1}{12}R - \frac{1}{144}Rc^2\right)$$

- Le Rayleigh critique :

$$R_{critique} = \frac{12}{1 - \frac{c^2}{12}} \quad (\text{IV.35})$$

- Le transfert thermique :

$$Nu = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}C_T t^2 R A_2 - C_T^2 R A_4} \quad (\text{IV.36})$$

#### IV.4.1.7 Couche poreuse horizontale à perméabilité variant selon une loi parabolique

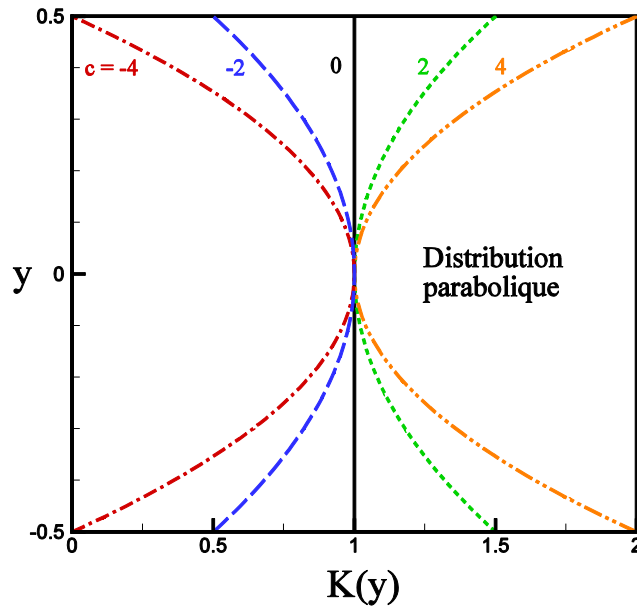
La variation de la perméabilité selon une loi parabolique présentée dans la figure IV.10 est donnée par la relation :

$$K(y) = 1 + cy^2 \quad (\text{IV.37})$$

La perméabilité sans dimension moyenne est donnée par l'expression suivante :

$$b = 1 + \frac{c}{12} \quad (\text{IV.38})$$





**Figure IV.10 :** Variation de la perméabilité  $K(y)$  suivant une loi parabolique.

Les fonctions  $G(y)$  et  $F(y)$  peuvent être exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} G(y) &= -\frac{cy^4}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{c+8}{64} \\ F(y) &= -A_1y^4 - A_2y^2 + A_3 \end{aligned} \right\} \quad (IV.39)$$

Avec :

$$A_1 = \frac{c}{20}, \quad A_2 = \frac{1}{6}, \quad A_3 = \frac{c}{64} + \frac{1}{8}$$

- Le gradient thermique :

$$C_T = \frac{\sqrt{-B_1 \cdot B_2}}{B_1} \quad (IV.40)$$

Avec :  $B_1 = \frac{1}{448}R^2A_1 + \frac{1}{80}R^2A_2 - \frac{1}{80}R^2c \cdot A_3 + \frac{1}{448}R^2cA_2 - \frac{1}{12}A_3R^2 + \frac{1}{2304}R^2cA_1$

$$B_2 = \left(\frac{1}{80}Rc + \frac{1}{12}R - 1\right)$$

- Le Rayleigh critique :

$$R_{critique} = \frac{240}{3c+20} \quad (IV.41)$$

- Le transfert thermique :

$$Nu = \frac{1}{+\frac{1}{16}C_T^2RA_1 + \frac{1}{4}C_T^2RA_2 - C_T^2RA_3 + 1} \quad (IV.42)$$

#### IV.4.1.8 Couche poreuse horizontale à perméabilité homogène

Les cas précédents se rejoignent pour une valeur de  $c$  nulle ce qui correspond à une convection dans un milieu poreux isotrope avec une perméabilité homogène.

Les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  peuvent être exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} F(y) &= -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{8} \\ G(y) &= -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.43})$$

#### IV.4.2 Application du concept de l'écoulement parallèle aux équations de base pour la cavité verticale

En simplifiant les équations gouvernantes (II.32) du deuxième chapitre et en tenant compte des hypothèses considérées sur l'écoulement parallèle, ainsi qu'en supposant que l'écoulement est stationnaire, on obtient le système d'équations ci-dessous.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{K(x)} \frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{K(x)} \right] v &= R \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} &= C_T \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.44})$$

Les profils de la température sont alors donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

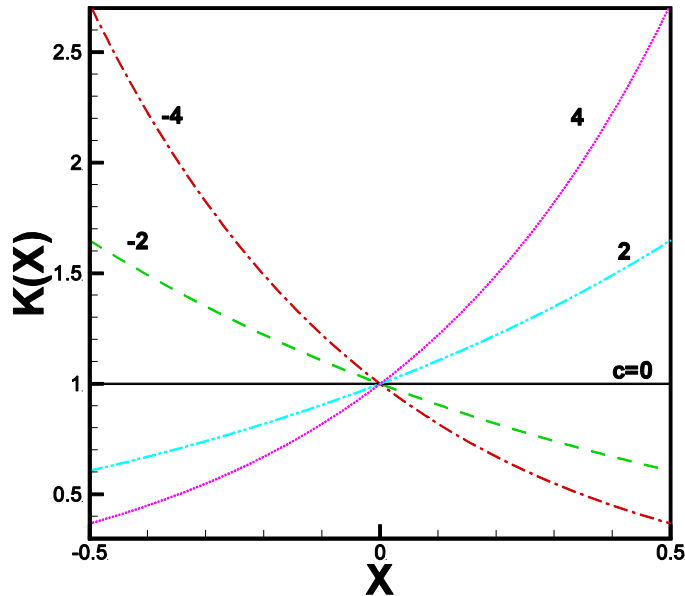
$$T(x, y) = \theta(x) + C_T y = F(x) + a + C_T y \quad (\text{IV.45})$$

$$v(x) = -d\Psi/dx = R K(x)G(x) \quad (\text{IV.46})$$

Où  $C_T$  est le gradient de température le long de la direction  $y$ , et les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  et la constante  $a$  dépendent de la forme de la variation de la perméabilité considérée. Pour déterminer le gradient de température  $C_T$  l'équation (IV.12) a été résolue numériquement selon la procédure de Newton Raphson. Ceci permet par la suite d'exprimer le gradient de la température  $C_T$  en fonction de  $R$  et de la constante de perméabilité  $c$ .

**IV.4.2.1 Couche poreuse verticale à perméabilité variant selon une loi exponentielle**

Pour la couche poreuse avec une perméabilité variant selon une loi exponentielle, comme il est illustré sur la figure (IV.11)



**Figure IV.11 :** Variation de la perméabilité suivant une loi exponentielle

On pose :

$$K(x) = e^{cx} \tag{IV.47}$$

Où  $c$ , est une constante, et avec cette loi de perméabilité qui varie de façon exponentielle, la perméabilité sans dimension moyenne est donnée par l'expression suivante

$$\bar{K} = \bar{K}' / \bar{K}_c = b = \frac{\sinh(c/2)}{c/2} \tag{IV.48}$$

En effectuant des opérations algébriques on trouve, que les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  et la constante  $a$  peuvent être exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= C_1 \Omega^{-1} I_0(\eta e^{cx/2}) + i C_2 \Omega^{-1} Y_0(i \eta e^{cx/2}) \\ G(x) &= F(x) \\ a &= -(C_1 a_1 + C_2 a_2) \end{aligned} \right\} \tag{IV.49}$$

A partir des conditions aux limites sur la fonction de courant (II.33) et (II.34), nous déterminons les valeurs des constantes  $C_1$  et  $C_2$ .

$$C_1 = [a_6 - a_4] / [a_4 a_5 - a_6 a_3] \quad , \quad C_2 = [a_3 - a_5] / [a_4 a_5 - a_6 a_3]$$

$$a_1 = \Omega^{-1} I_0(\eta) \quad , \quad a_2 = i \Omega^{-1} Y_0(i \eta)$$

$$a_3 = e^{-c/4} I_1(\eta e^{-c/4}) \quad , \quad a_4 = e^{-c/4} Y_1(i \eta e^{-c/4})$$

$$a_5 = e^{c/4} I_1(\eta e^{c/4}) \quad , \quad a_6 = e^{c/4} Y_1(i \eta e^{c/4})$$

$$\eta = 2\Omega/c \quad , \quad \Omega = (RC_T)^{1/2}$$

Notons que  $I_n$  et  $Y_n$  sont, respectivement, les fonctions de **Bessel** du nième ordre, de première et deuxième espèce (**Watson (1966)**).

Dans le cas où la constante de perméabilité  $c$  s'annule, la perméabilité dans la cavité poreuse sera constante. De plus pour les petites valeurs de  $c$  qui tendent vers zéro ( $c \rightarrow 0$ ), la perméabilité varie d'une façon linéaire.

#### IV.4.2.2 Couche poreuse verticale à perméabilité variant selon une loi linéaire

La variation de la perméabilité selon une loi linéaire (Figure IV.12) est donnée par la relation :

$$K(x) = 1 + cx \tag{IV.50}$$

La perméabilité sans dimension moyenne est donnée par l'expression suivante

$$b = 1 \tag{IV.51}$$

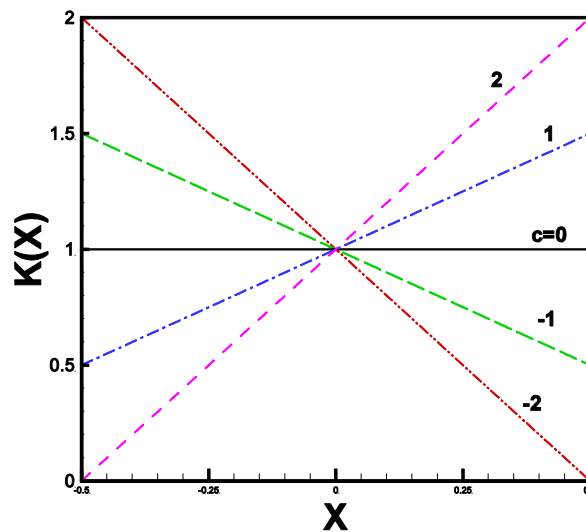


Figure IV.12 : Variation de la perméabilité  $K(x)$  suivant une loi linéaire.

En effectuant la même démarche que le cas précédent, nous arriverons à déterminer les expressions des fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  et la constante  $a$  pour une variation de la perméabilité suivant la loi linéaire présentée sur la figure IV.13

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= C_A Ai(\lambda) + C_B Bi(\lambda) \\ G(x) &= F(x) \\ a &= -[C_A Ai(\omega) + C_B Bi(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (IV.52)$$

Avec :  $C_A = Bi'(e) - Bi'(d)/E$  ,  $C_B = Ai'(d) - Ai'(e)/E$

$E = \omega c [Ai'(e)Bi'(d) - Ai'(d)Bi'(e)]$   $\lambda = \omega(1 + cx)$

$\omega = (RC_T/c^2)^{1/3}$   $d = \omega(1 - c/2)$   $e = \omega(1 + c/2)$

Dans les équations ci-dessus, Ai et Bi sont des fonctions d'**Airy** des premier et second types, respectivement, tandis que  $Ai'$  et  $Bi'$  sont leurs premières dérivées.

**IV.4.2.3 Couche poreuse verticale à perméabilité variant selon une loi parabolique**

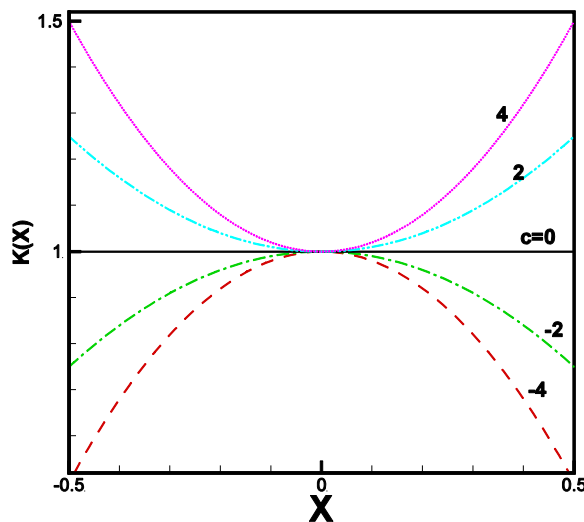
Dans cette section, on suppose que la perméabilité est donnée par :

$$K(x) = 1 + cx^2 \quad (IV.53)$$

Avec cette loi de perméabilité tracée ci-dessus, la perméabilité moyenne sans dimension est maintenant donné par

$$b = 1 + \frac{c}{12} \quad (IV.54)$$

Où  $c$  est une constante.



**Figure IV.13 :** Variation de la perméabilité  $K(x)$  suivant une loi parabolique.

On trouve, après quelques opérations algébriques, que les fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  et la constante  $a$  peuvent être exprimés par :

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= x\Gamma e^{\tau(1-4x^2)/8} M\left(\chi, \frac{3}{2}, \tau x^2\right) \\ G(x) &= \frac{\tau x \Gamma e^{\tau(1-4x^2)/8}}{c_T(1+cx^2)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{16}{15} \chi(\chi+1) \tau x^2 M\left(\chi+2, \frac{7}{2}, \tau x^2\right) \\ &+ \frac{4}{3} \chi(3-2\tau x^2) M\left(\chi+1, \frac{5}{2}, \tau x^2\right) \\ &+ (\tau x^2 - 3) M\left(\chi, \frac{3}{2}, \tau x^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (IV.55) \\ a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Où :

$$\Gamma = 2[(\tau/2 - 2)m_1 - (3\tau + \Omega^2)m_2]^{-1},$$

$$m_1 = M\left(\chi, \frac{3}{2}, \tau/4\right), m_2 = M\left(\chi+1, 5/2, \tau/4\right)$$

$$\chi = (3 + \Omega/\sqrt{c})/4 \quad , \quad \tau = \Omega\sqrt{c} \quad , \quad \Omega = (RC_T)^{1/2}$$

Dans les équations ci-dessus,  $M$  est une **fonction hypergéométrique confluente** de première espèce, également connue sous le nom de fonction de **Kummer** de première espèce.

#### IV.4.2.4 Couche poreuse verticale à perméabilité homogène

Pour  $c = 0$ , la fonction de la perméabilité sera  $K(x) = 1$  ce qui correspond à un milieu poreux isotrope avec une perméabilité homogène. Pour cette situation particulière, on constate que les résultats sont en accord avec la solution rapportée par **Vasseur et al (1987)**.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sinh(\Omega x)/[\Omega \cosh(\Omega/2)] \\ G(x) &= F(x) \\ a &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (IV.56)$$

Où  $\Omega = (RC_T)^{1/2}$ ,

## **IV. 5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons simplifié les équations régissant le problème en utilisant une approche d'écoulement parallèle, où il est devenu possible de donner une solution analytique en général, ce qui présente l'avantage de prédire les caractéristiques de vitesse de chaque particule étudiée, ainsi que les profils de température. Les résultats seront présentés dans le dernier chapitre, discutés et comparés aux résultats développés par l'approche numérique.

# Chapitre 5

## Résultats et Discussions



## V.1 Introduction

Dans ce chapitre on va regrouper les résultats des simulations numériques, et ceux de l'approche analytique basée sur le concept de l'écoulement parallèle, qui sont issues de la résolution des équations gouvernantes du système.

Notre problème porte sur l'étude du comportement dynamique et thermique d'un écoulement laminaire qui circule dans deux cavités poreuses, la première cavité est horizontale et la deuxième verticale et qui sont influencées par la variation de la perméabilité, suivant trois lois, à savoir une loi exponentielle, une loi linéaire et une loi parabolique, variant selon l'axe vertical pour la cavité horizontale, et selon l'axe horizontal pour la cavité verticale.

On s'intéresse aux profils des vitesses, et des températures dans des sections particulières des cavités, les résultats porteront sur les contours de la fonction de courant, les profils de vitesse et de température, ainsi que les taux de transferts thermiques en termes de Nusselt.

Des tests numériques ont été effectués dans le chapitre précédent, pour déterminer le rapport de forme minimum au-dessus duquel l'écoulement peut être considéré comme parallèle. Dans la gamme des paramètres considérés dans cette étude, il a été constaté que les résultats numériques peuvent être considérés comme indépendants du rapport de forme lorsque  $A \geq 4$ , pour cette raison, la plupart des résultats numériques rapportés ici ont été obtenus pour  $A = 6$ . Ils ont été obtenus pour des conditions aux limites de type Neumann.

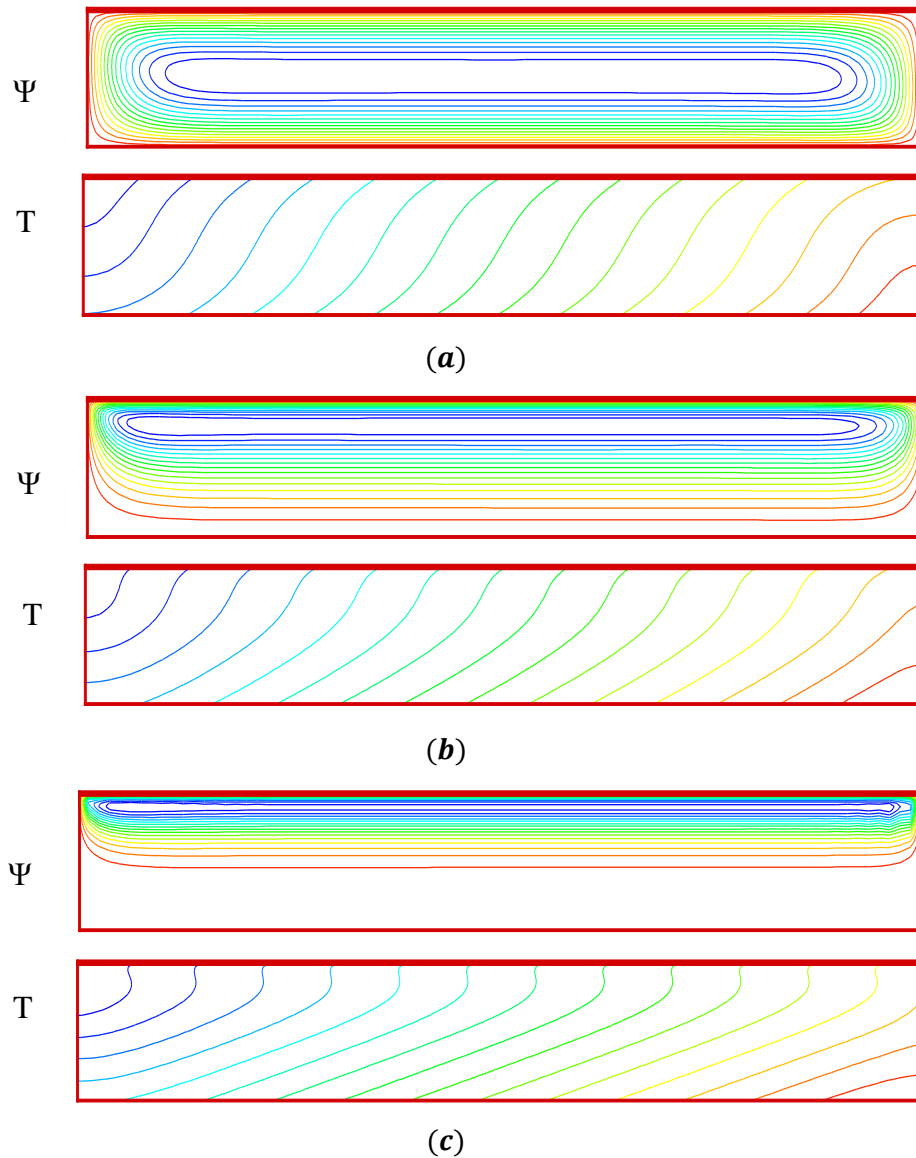
## V.2 Résultats pour la cavité horizontale

### V.2.1 Cas d'une perméabilité variant selon une loi exponentielle

#### V.2.1.1 Profils des lignes de courant et des isothermes

Nous allons d'abord discuter le cas de la convection thermique dans un milieu isotrope (perméabilité constante). Les résultats numériques rapportés sur la Figure (V.1- a) obtenus pour  $R^* = 25$  et  $c = 0$ , illustrent les profils de la fonction de courant et les isothermes, respectivement. A partir de ces résultats il est clair que pour le cas d'une perméabilité constante l'écoulement dans la région du cœur de l'enceinte est sensiblement

parallèle et illustre une distribution symétrique par rapport à l'axe x, alors que la température est stratifiée de façon linéaire dans la direction horizontale.



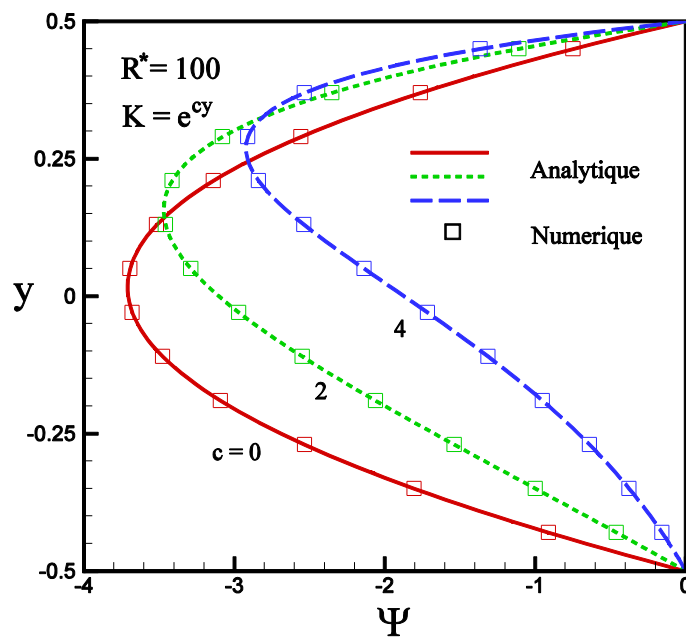
**Figure V.1 :** Profils des fonctions de courant et des isothermes influencées par la variation de la perméabilité pour :  $R^* = 25$ ,  $A=6$ , **(a)**  $c = 0$ , **(b)**  $c = 5$ , **(c)**  $c = 10$  .

La Figure V.1 (b) et (c) montrent que la perméabilité a une forte influence sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique. L'augmentation de la constante de perméabilité  $c$  fait évoluer l'accroissement du taux d'anisotropie hydrodynamique près de la paroi supérieure, ce qui induit une vitesse de plus en plus grande; c'est la source de l'accroissement du transfert de chaleur. Les lignes de courant sont confinées près de la paroi supérieure de la cavité, ce qui traduit l'accélération de l'écoulement.

### V.2.1.2 Fonction de courant (Cas de perméabilité exponentielle)

Les valeurs de la fonction de courant des lignes de courant, au milieu de la cavité, sont représentées sur la Figure V.2.

La convection naturelle dans un milieu poreux isotrope est configurée pour  $c = 0$  par une courbe symétrique par rapport à l'axe  $y = 0$ , où la valeur de  $|\psi|$  est maximale. En augmentant la valeur de paramètre  $c$  la position de la valeur maximale de  $|\psi|$  se trouve déplacée avec la couche limite vers la paroi supérieur de la cavité suivant l'équation  $y = c/12$ .



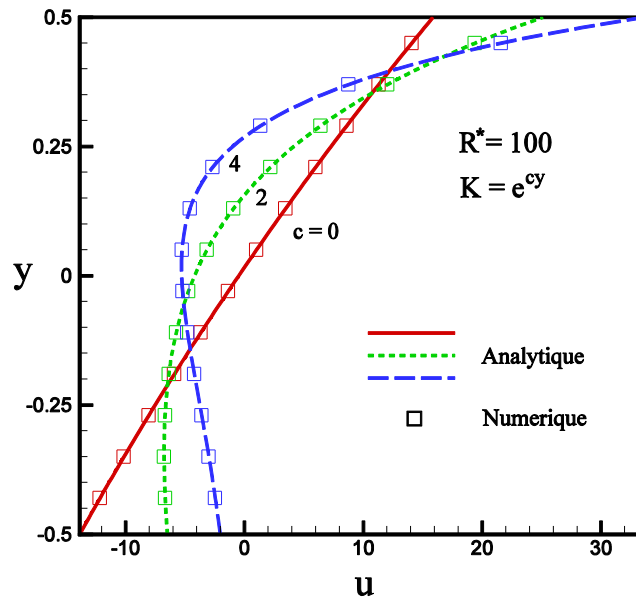
**Figure V.2 :** Influence du paramètre  $c$  de la loi exponentielle de la perméabilité, sur la fonction de courant dans la cavité horizontale.

### V.2.1.3 Profils de vitesses (Cas de perméabilité exponentielle)

La figure V.3 illustre l'influence de la constante de perméabilité  $c$  sur la composante de la vitesse  $u$ , ce graphique a été tracé pour  $R^* = 100$  et  $A=6$ . Les résultats montrent que la solution analytique (trait continu) est en excellent accord avec la solution numérique représentée par des symboles.

L'allure de la courbe indique que la vitesse est relativement faible dans la moitié basse de la cavité, puis augmente considérablement vers la paroi supérieure. Le cas d'une perméabilité constante présente une antisymétrie par rapport au centre de la cavité, pour

laquelle la vitesse s'annule à ce point. En outre, le profil des vitesses varie linéairement avec la variation de  $y$  (la loi de Darcy). Lorsque la perméabilité varie avec la loi exponentielle considérée dans cette partie (voir l'équation II.41) il est clair que la perméabilité augmente considérablement au sommet de la cavité, en conséquence la vitesse aboutie à des valeurs élevées près de la paroi supérieure, tandis que le flux devient presque stagnant près de la paroi inférieure.



**Figure V.3:** Influence du paramètre  $c$  de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité horizontale

#### V.2.1.4 Profils des températures (Cas de perméabilité exponentielle)

La Figure V.4 illustre l'influence de la variation de la perméabilité sur la distribution de la température, ce graphique a été tracé pour  $R^* = 100$  les résultats analytiques sont aussi en bon accord avec la solution numérique.

Pour une valeur de  $c$  donnée l'allure est telle que, la température prend des valeurs relativement élevées à la paroi inférieure, puis diminue pour s'annuler au centre de la cavité, augmente de nouveau pour atteindre des valeurs inférieures à celles de la paroi inférieure. Lorsque  $c = 0$  la courbe est antisymétrique par rapport au centre de la cavité, cela est dû à l'homogénéité de la perméabilité. Par contre pour les valeurs supérieures de  $c$  ( $c = 2$ ,  $c = 4$ ), la courbe n'est plus antisymétrique. L'effet de la variation de la perméabilité est tel que, en augmentant le coefficient  $c$  la température se trouve augmentée en bas de la cavité et diminuée en haut.

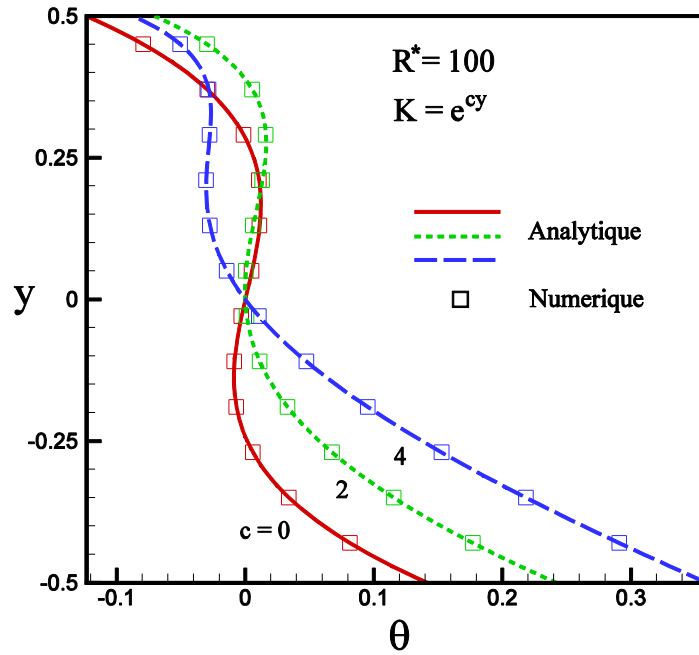
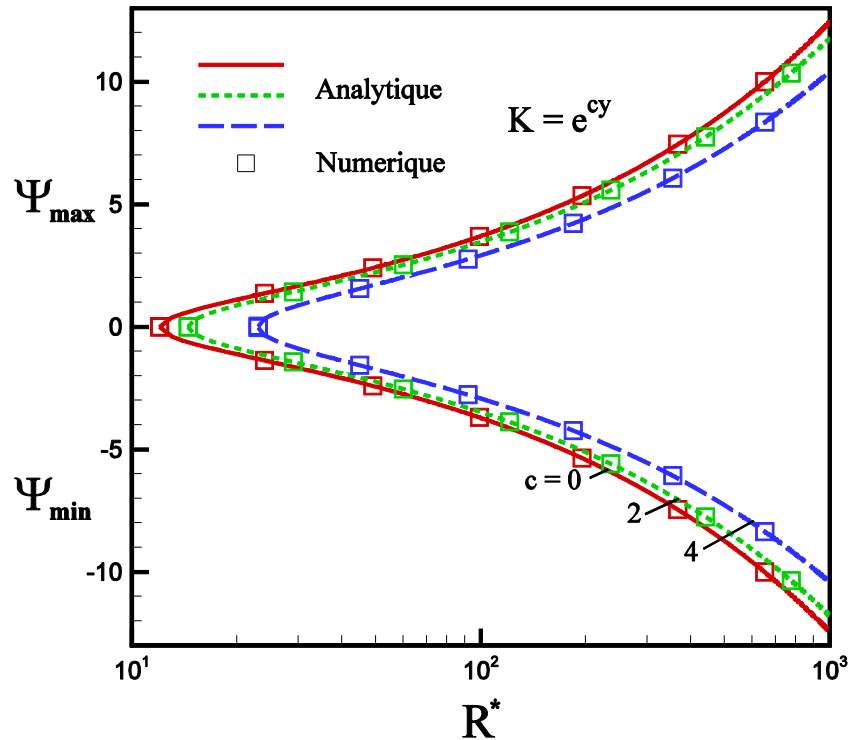


Figure V.4: Influence du paramètre  $c$  de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité horizontale.

### V.2.1.5 Effet du nombre de Rayleigh modifié sur l'intensité de l'écoulement et sur le transfert de chaleur

L'effet du nombre de Rayleigh sur l'intensité de la fonction de courant  $\psi_{max}$  est illustré sur la Figure (V.5), Les résultats analytiques sont validés numériquement pour différentes valeurs de  $R^*$ . Nous constatons une augmentation de l'intensité de la fonction du courant avec l'accroissement de  $R^*$  qui joue le rôle d'un moteur dans l'intensification de la convection à l'intérieur de la cavité. L'allure présente une bifurcation donnant les deux solutions, écoulement tournant dans le sens horaire et antihoraire suivant le signe de  $C_T$ . Le nombre de Rayleigh critique modifié  $R^*_{critique}$  prédit par l'équation (IV.29) correspond au début de la convection est présenté en fonction de la variable  $c$  dans la Figure V.1. Avant ce seuil, le transfert de chaleur se fait par conduction pure ( $\psi_{max} = 0$ ). L'effet de la variation de la perméabilité est tel que en diminuant la constante  $c$ , l'intensité de l'écoulement se trouve augmentée et le déclenchement de la convection se fait bien plus tôt, comme il est illustré dans la figure des courbes de  $\psi_{min}$  correspondent au sens antihoraire de l'écoulement.



**Figure V.5 :** Diagrammes de bifurcation en termes de  $\psi_{\max}$  et  $\psi_{\min}$  en fonction de  $R^*$  et  $c$

La figure V.6 illustre l'effet de la variation du nombre de Rayleigh thermique modifié  $R^*$  sur le transfert de chaleur  $Nu$  pour différents valeurs du paramètre  $c$ . Nos résultats analytiques représentés par des lignes continues, sont en parfait accord avec les résultats numériques.

En général, on constate l'existence de trois zones dans l'évolution du transfert de chaleur, et les limites entre ces zones dépendent de la valeur de Rayleigh modifié. Une zone de régime conductif, qui correspond aux faibles valeurs de Rayleigh, qui sont inférieure au  $R^*_{critique}$ , le transfert de chaleur est alors faible et le nombre de Nusselt demeure pratiquement constant et égale à l'unité. Une zone intermédiaire illustrée dans la figure V.6, dans laquelle le nombre de Nusselt augmente considérablement avec  $R^*$ , pour atteindre sa valeur maximale. Une zone convective lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une certaine valeur approximative de  $R^* = 10^3$ , le transfert de chaleur sera indépendant pour les fortes valeurs de  $R^*$ .

On constate des courbes tracées sur cette figure que l'effet de l'augmentation de la constante de la perméabilité  $c$  dans la loi exponentielle tend à diminuer le taux de transfert de chaleur et l'écoulement dans la cavité est donc de plus en plus freiné.

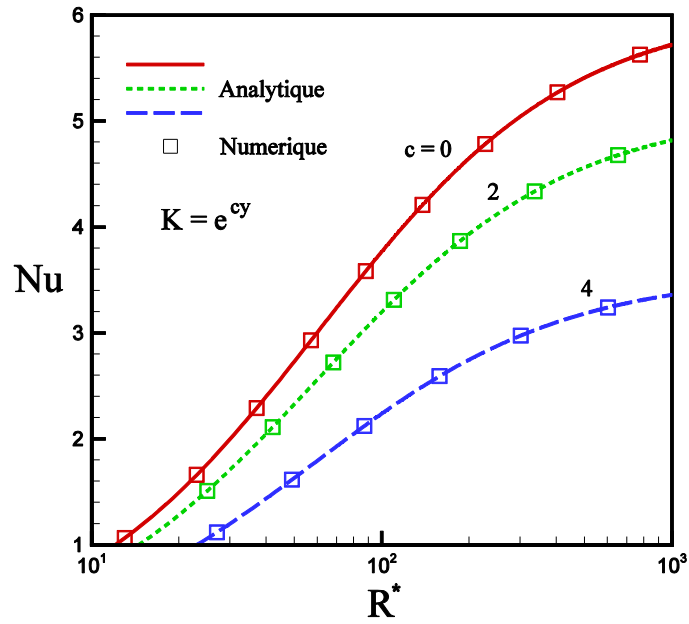


Figure V.6: Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh  $R^*$  et  $c$

Dans le cas de la variation de la perméabilité suivant la loi exponentielle, le nombre de Rayleigh critique modifié augmente avec l'augmentation de la valeur absolue de  $c$ , comme il est illustré dans la Figure V.7.

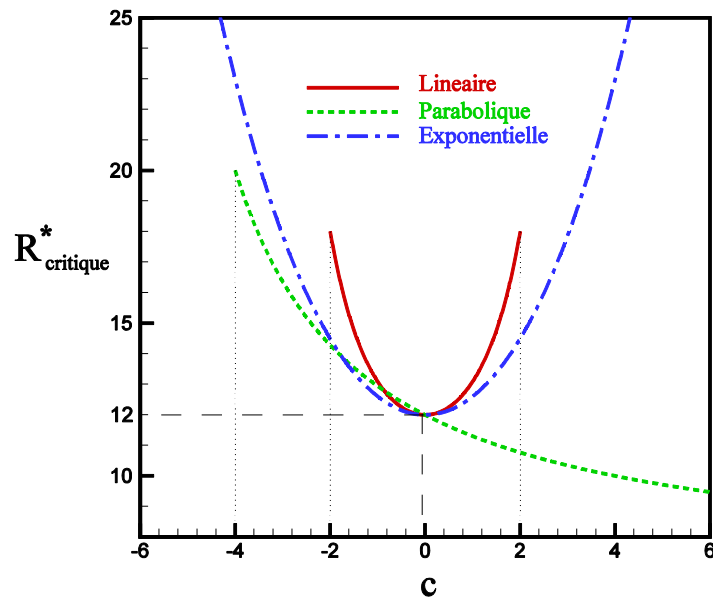


Figure V.7 : Evolution de  $R^*_{critique}$  en fonction du paramètre  $c$  pour différentes lois de perméabilité

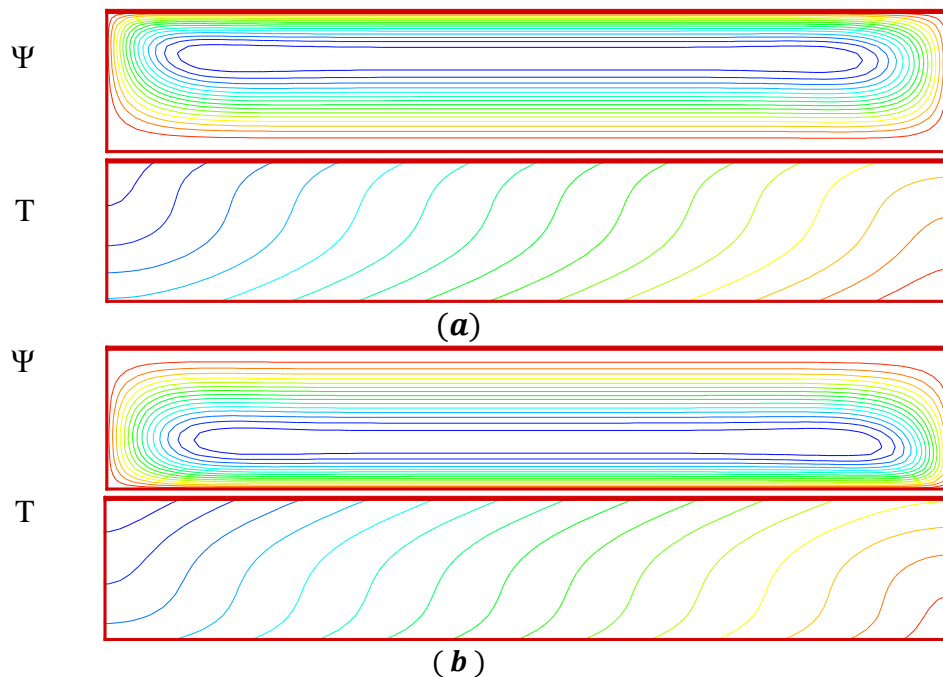
### V.2.2 Cas de la loi linéaire

Le modèle de la variation de la perméabilité suivant cette loi, implique que  $c$  doit se situer dans l'intervalle de  $-2$  à  $+2$  pour éviter une valeur négative de la perméabilité à droite ou à gauche de la cavité, ce qui serait physiquement impossible.

#### V.2.2.1 Profils des lignes de courant et des isothermes (Cas de perméabilité linéaire)

Le cas de la convection thermique dans un milieu isotrope pour  $c = 0$  (perméabilité constante) a été discuté avec la loi exponentielle. Pour une valeur donnée de  $R^*$ , une augmentation ou une diminution de  $c$  implique une redistribution de la perméabilité à travers la couche limite, autour d'une perméabilité moyenne constante.

La figure (V.8- a) illustre l'effet de la variation de la perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes dans le cas où la constante  $c = 2$ .



**Figure V.8 :** Profils des fonctions de courant et des isothermes influencées par la variation de la perméabilité pour :  $R^* = 25$ ,  $A=6$ , (a)  $c = 2$  (b)  $c = -2$ .

Les lignes de courant sont dispersées dans la partie inférieure de la cavité et se concentrent légèrement près de la paroi supérieure, cela est due à l'augmentation de la loi de perméabilité suivant la loi linéaire dans la partie supérieure de la cavité pour des valeurs de  $c$ , ce qui traduit une petite augmentation de la vitesse de l'écoulement, et les isothermes sont des lignes légèrement déformées.



La même constatation est faite pour le cas de  $c = -2$ , mais dans le sens inverse, Figure (V.8-b), les lignes de courant sont aussi moins confinées près de la paroi inférieure, on constate que la perméabilité a une faible influence sur la structure de l'écoulement et sur les isothermes.

Pour les valeurs positives du paramètre  $c$ , les lignes de courants sont présentées par leurs fonctions de courant  $\psi$  dans la figure V.9. Cette figure confirme la symétrie de la fonction de courant dans le cas de milieu isotrope pour  $c = 0$ , et montre que l'intensité de l'écoulement diminue avec l'augmentation de  $c$ .

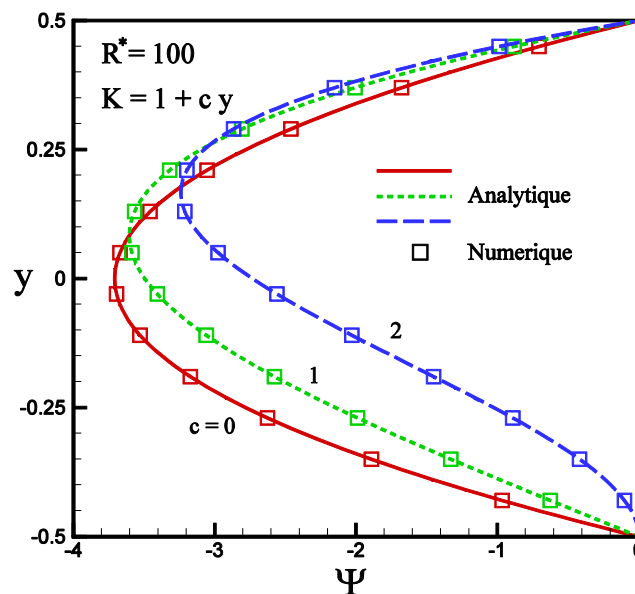


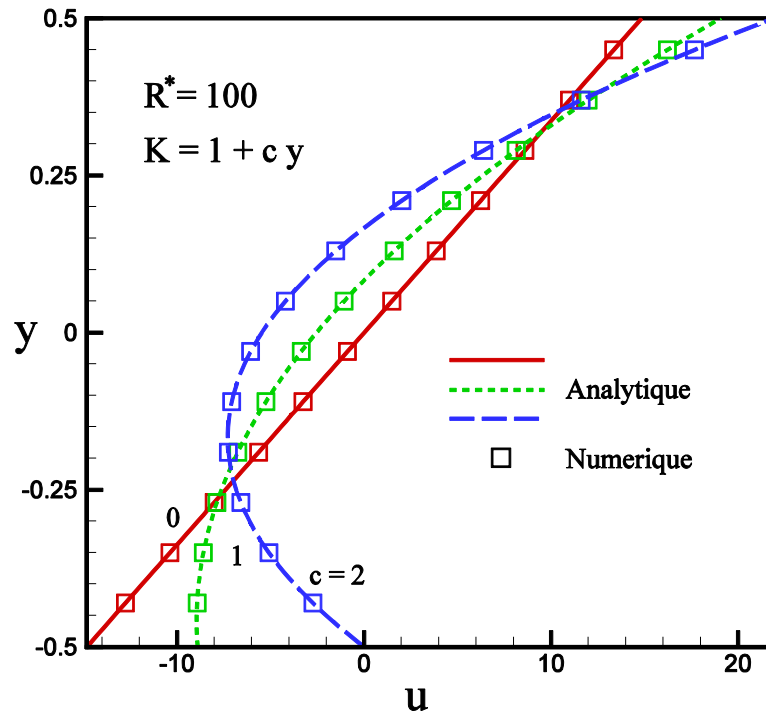
Figure V.9 : Effet du paramètre  $c$  sur la fonction du courant

### V.2.2.2 Profils des vitesses (Cas de perméabilité linéaire)

La figure V.10 illustre l'influence de la constante de perméabilité  $c$  sur la composante de la vitesse  $u$ , ce graphique a été tracé pour  $R^* = 100$ . Les résultats montrent que la solution analytique (trait continu) est en excellent accord avec la solution numérique représentée par des symboles.

L'allure de la courbe indique que la vitesse est relativement faible dans la moitié basse de la cavité, puis augmente considérablement vers la paroi supérieure. Le cas d'une perméabilité constante présente une antisymétrie par rapport au centre de la cavité, comme il est déjà discuté avec la loi exponentielle. En outre, Lorsque la perméabilité varie avec la loi linéaire considérée dans cette partie (voir équation II.45) il est clair que la perméabilité augmente considérablement au sommet de la cavité, en conséquence, la vitesse aboutie à

des valeurs élevées près de la paroi supérieure, tandis que le l'écoulement devient stagnant près de la paroi inférieure pour la valeur limite de  $c$ .

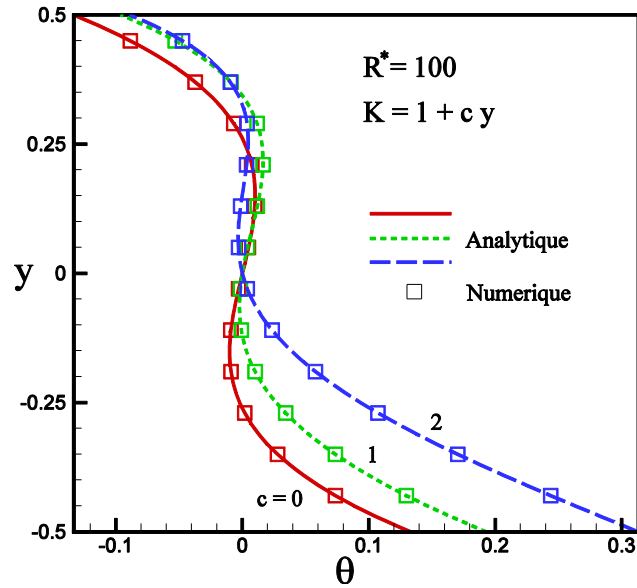


**Figure V.10 :** L'effet de la variation de la perméabilité sur le profil de la vitesse horizontale  $u$  à  $x = 0$  pour les valeurs ( $c = 0, c = 1, c = 2$ )

### V.2.2.3 Profils des températures (Cas de perméabilité linéaire)

La figure V.11 illustre l'influence de la variation de la perméabilité sur la distribution de la température, ce graphique a été tracé pour  $R^* = 100$  les résultats analytiques sont aussi en bon accord avec la solution numérique.

Pour une valeur de  $c$  donnée, la température prend des valeurs relativement élevées à la paroi inférieure, puis diminue pour s'annuler au centre de la cavité, augmente de nouveau pour atteindre des valeurs inférieures à celles de la paroi inférieure. Lorsque  $c = 0$  la courbe est antisymétrique par rapport au centre de la cavité, cela est dû à l'homogénéité de la perméabilité. Par contre pour les valeurs supérieures de  $c$  ( $c = 2, c = 4$ ), la courbe n'est plus antisymétrique. L'effet de la variation de la perméabilité est tel que, en augmentant le coefficient  $c$  la température se trouve augmentée en bas de la cavité et diminuée en haut.



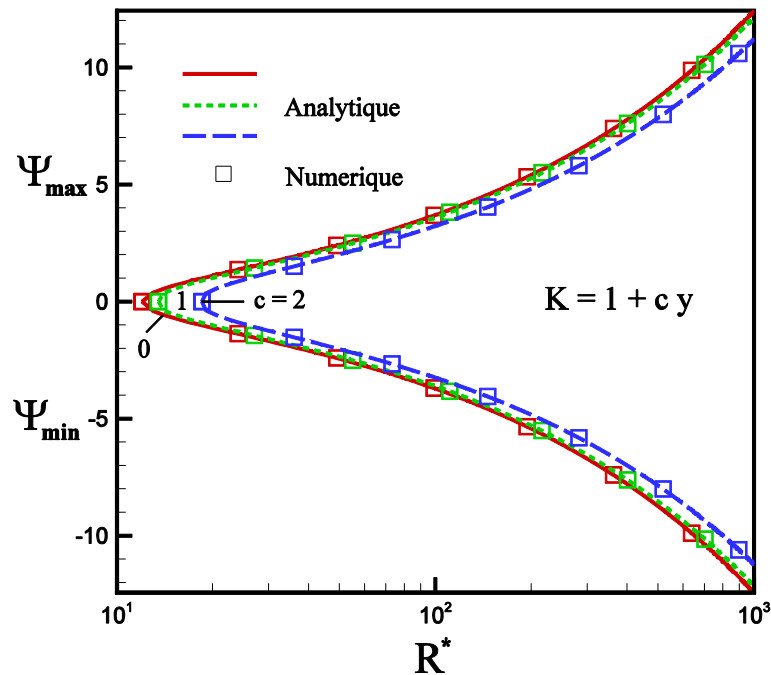
**Figure V.11** : Effet de la variation de la perméabilité sur les profils de la température

#### V.2.2.4 Effet du nombre de Rayleigh modifié sur l'intensité de l'écoulement

Les courbes de bifurcation de la Figure V.12, montrent les valeurs maximales et minimale de la fonction de courant et regroupent les résultats analytiques et numériques, obtenus pour  $R^*$  variant à partir de la valeur de Rayleigh critique. Les résultats analytiques sont validés numériquement pour différentes valeurs de  $c$ .

L'effet du nombre de Rayleigh sur l'intensité de la fonction de courant  $\psi_{max}$  est illustré sur la figure (V.12). Nous constatons une augmentation de l'intensité de la fonction du courant avec l'accroissement de  $R^*$  qui joue le rôle d'un moteur dans l'intensification de la convection à l'intérieur de la cavité. L'allure présente une bifurcation donnant les deux solutions horaire et antihoraire suivant le signe de  $C_t$ . Le nombre de Rayleigh critique  $R^*_{critique}$ , prédit par l'équation (IV.35) correspond au début de la convection. Avant ce seuil, le transfert de chaleur se fait par conduction pure ( $\psi_{max} = 0$ ). L'effet de la variation de la perméabilité est tel que en augmentant la constante  $c$ , l'intensité de l'écoulement se trouve diminuée et le déclenchement de la convection se fait bien plus tard.

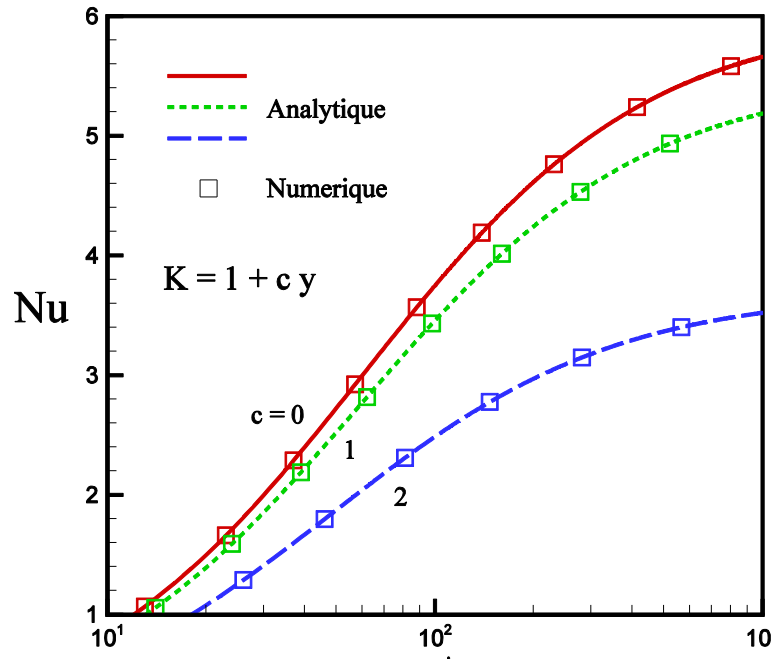
Les courbes de  $\psi_{max}$  et de  $\psi_{min}$  présentent une symétrie par rapport à l'axe  $y = 0$



**Figure V.12** : Diagrammes de bifurcation en termes de  $\Psi_{max}$  et  $\Psi_{min}$  en fonction de  $R^*$  et  $c$

### V.2.2.5 L'effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur

La figure V.13 illustre l'effet de la variation du nombre de Rayleigh thermique  $R^*$  sur le transfert de chaleur  $Nu$  pour les conditions aux frontières de Neumann considérées dans cette étude. Nos résultats analytiques représentés par des lignes continues, sont en parfait accord avec les résultats numériques. On observe aussi que pour toutes les valeurs de la constante  $c$ , le transfert de chaleur  $Nu$  s'accroît avec l'augmentation de  $R^*$  et diminue avec l'augmentation de  $c$ . L'influence de la constante de perméabilité sur le transfert de chaleur est plus significative lorsque le nombre de Rayleigh est plus grand.



**Figure V.13:** Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh modifié  $R^*$

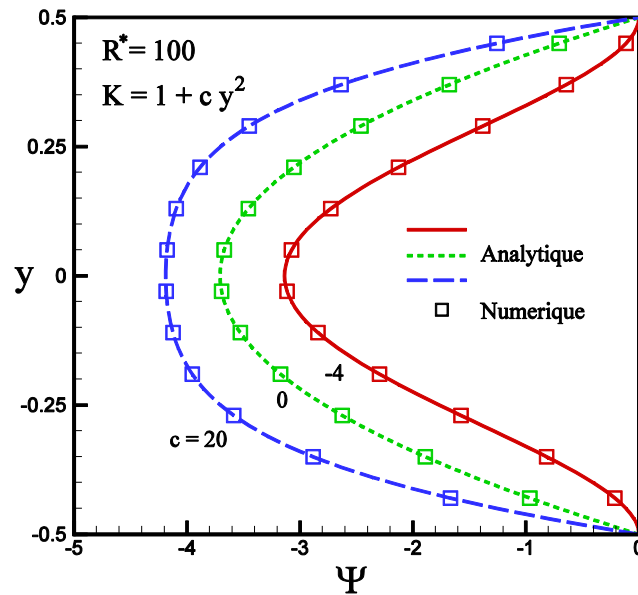
### V.2.3 Cas de la loi parabolique

Pour étudier l'effet de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique, la constante de la perméabilité  $c$  doit se trouver dans l'intervalle de  $-4$  à l'infini, pour que la fonction de perméabilité  $K(y)$  soit positive.

#### V.2.3 1 Fonction de courant (cas de la loi parabolique)

Des résultats analytiques et numériques donnant les distributions de la fonction de courant au sein de la cavité horizontale sont présentées sur la figure V.14. Les résultats analytiques représentés par des lignes continues sont en très bon concordance avec ceux numériques représentés par des symboles. Tous ces résultats ont été obtenus au centre de la cavité pour un nombre de Rayleigh modifié constant  $R^* = 100$ , basé sur la perméabilité moyenne  $\bar{K}$ , et pour les valeurs de  $c$  :  $c = -4$ ,  $c = 0$ ,  $c = 20$ .

Cette figure confirme la symétrie de la fonction de courant dans le cas de milieu isotrope pour  $c = 0$ , et montre que l'intensité de l'écoulement augmente avec l'augmentation de  $c$ .

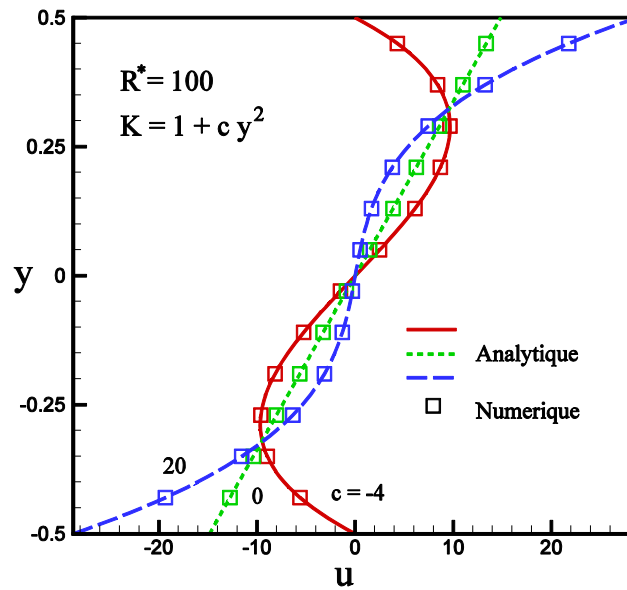


**Figure V.14** Influence du paramètre  $c$  de la loi parabolique de la perméabilité, sur la fonction de courant dans la cavité horizontale.

### V.2.3 2 Profils des vitesses (cas de la loi parabolique)

Des résultats analytiques et numériques donnant les distributions de la composante de vitesse verticale à travers la cavité horizontale à  $x = 0$ , sont présentées sur la figure V.15. Les résultats analytiques sont en bon accord avec les résultats numériques. Les résultats ont été obtenus pour un nombre de Rayleigh modifié constant  $R^* = 100$ . Indépendamment de la valeur de la constante de perméabilité  $c$  les courbes présentent une antisymétrie pour laquelle les vitesses s'annulent au centre de la cavité.

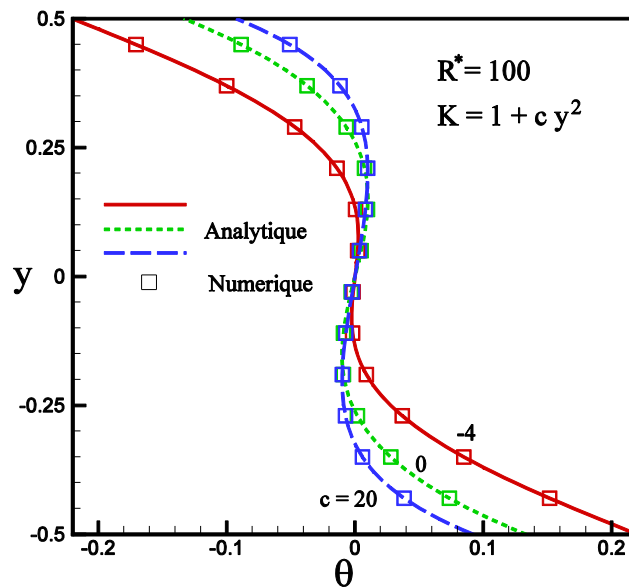
Lorsque la loi est parabolique, il est clair que la perméabilité augmente considérablement aux parois horizontales de la cavité, en conséquence, les vitesses sont relativement faibles au milieu de la cavité, puis augmentent considérablement vers la paroi inférieure avec la même intensité que la paroi supérieure.



**Figure V.15** Influence du paramètre  $c$  de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité horizontale

### V.2.3.3 Profils des températures (cas de la loi parabolique)

Les distributions correspondantes des températures au milieu de la cavité sont présentées dans la Figure V.16, un bon accord est observé entre les résultats analytiques et numériques. Les écarts de température entre les deux parois actives chutent lorsque  $c$  est rendu plus grand que zéro, c'est-à-dire, la convection est favorisée, alors que ces écarts de température entre les deux parois actives augmentent lorsque  $c$  est rendu plus petit que zéro, car la convection est inhibée.



**Figure V.16** Influence du paramètre  $c$  de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité horizontale

### V.2.3.4 Effet du nombre de Rayleigh modifié sur l'intensité de l'écoulement sur le transfert de chaleur

Sur la Figure V.17, la fonction de courant maximale  $\psi_{max}$  est tracée en fonction de  $R^*$  pour différentes valeurs de  $c$ . Les résultats analytiques sont en accord avec les résultats numériques.

L'intensification des forces de poussée thermique, à travers l'augmentation du nombre de Rayleigh, favorise les échanges thermiques au sein de la cavité et ce, à cause de l'augmentation de la vitesse suite à l'intensification des courants de convection. Les résultats indiquent que, par rapport au cas isotrope ( $c = 0$ ), l'écoulement est augmenté pour  $c > 0$  et réduit pour  $c < 0$ . Tel que discuté précédemment, cette tendance découle du fait que la variation de la perméabilité suit la loi parabolique, voir figure (V.7).

Dans le but de quantifier les échanges thermiques au sein de la cavité, la figure (V.18) illustre la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh modifié, pour différentes valeurs du paramètre  $c$ .

Les résultats obtenus montrent que la valeur du nombre de Nusselt moyen, augmente progressivement avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Aussi, au-delà de ce nombre de Rayleigh ( $10^3$ ) où la convection devient de plus en plus le mode dominant de transfert de chaleur.

L'augmentation du paramètre  $c$  entraînera une augmentation de l'intensité d'écoulement près des deux parois inférieure et supérieure, ce qui entraînera une bonne augmentation du taux de transfert de chaleur, car la valeur du nombre de Nusselt tend vers le point maximal lorsque  $R^* = 1000$



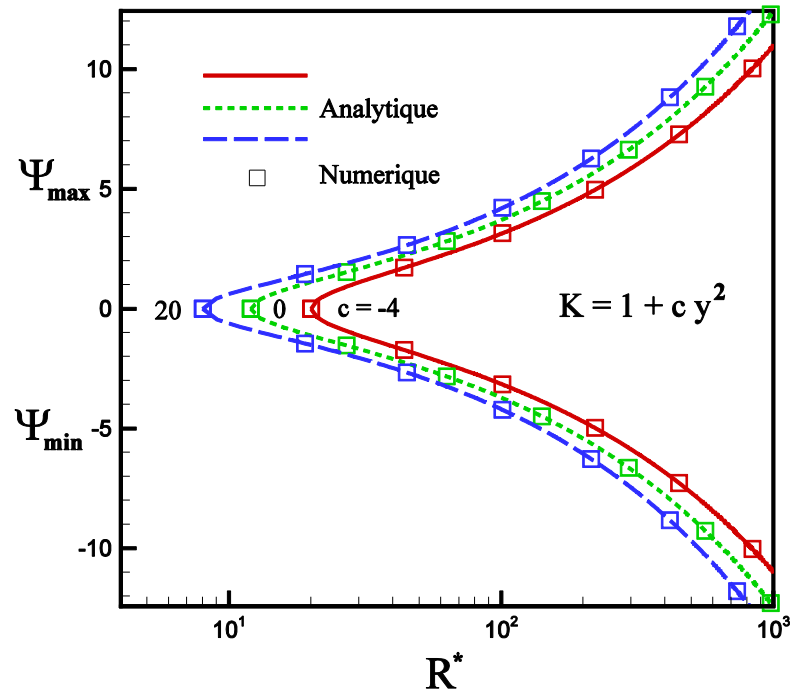


Figure V.17 Evolution de la fonction de courant maximale en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour les différentes valeurs du paramètre  $c$  (cas de la loi parabolique)

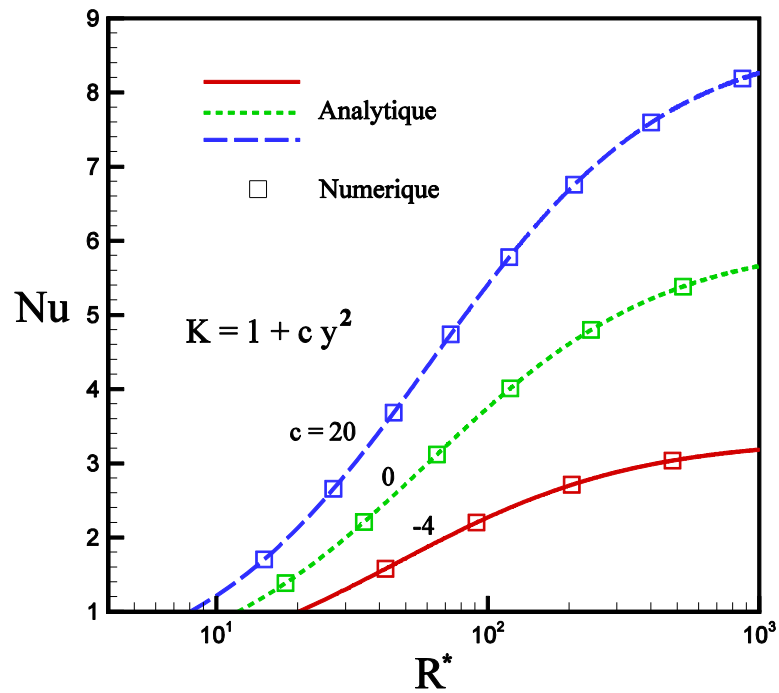


Figure V.18 : Diagrammes du nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh modifié  $R^*$  (cas de la loi parabolique)

### V.3 Résultats pour la cavité verticale

Dans cette section nous présenterons les résultats numériques et analytiques issues de l'étude du comportement dynamique et thermique d'un écoulement laminaire circulant

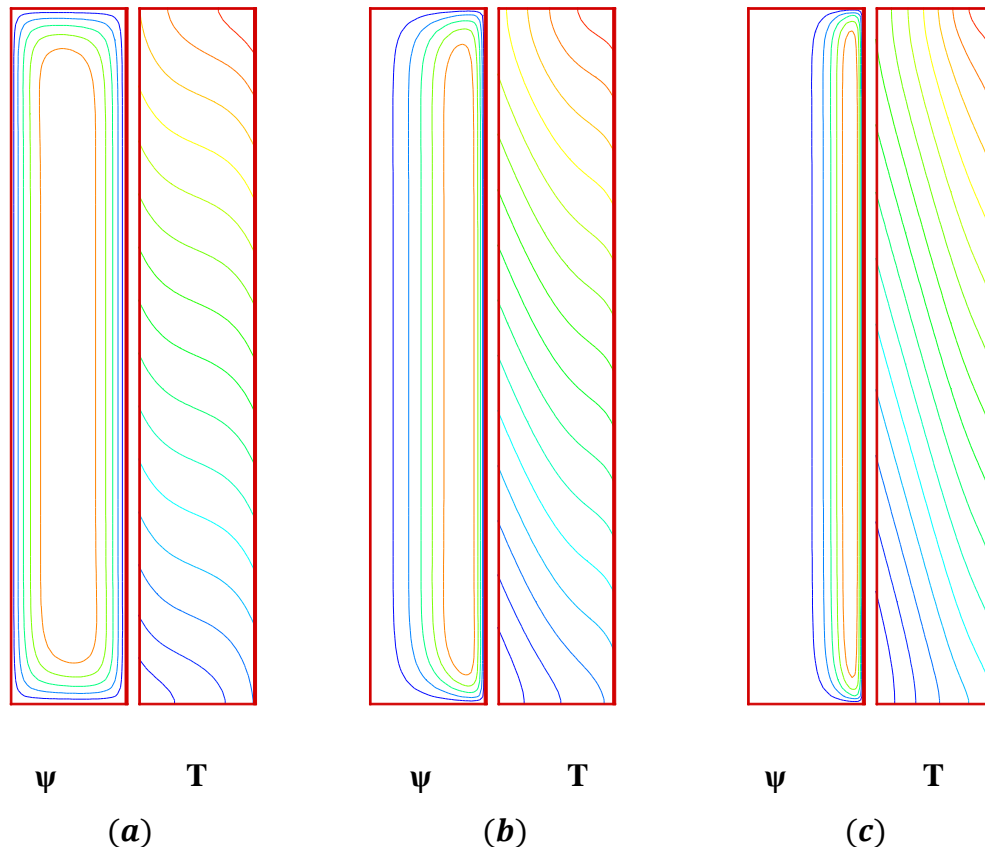
dans une cavité poreuse verticale soumise à un flux de chaleur constant sur les parois verticales. Trois lois de variation de la perméabilité, seront appliquées selon l'axe horizontal.

### V.3.1 Cas d'une perméabilité variant selon une loi exponentielle

#### V.3.1.1 Profils des lignes de courant et isothermes

La figure V.19 représente les résultats de la simulation numérique, montrant l'effet de la perméabilité qui varie de façon exponentielle sur les lignes de courant et les isothermes, pour les paramètres de contrôle  $R^* = 50$  et  $A = 6$ . Dans tous les graphiques, l'incrément entre les lignes de courant adjacentes et les isothermes est  $\Delta\psi = \psi_{max}/6$  et  $\Delta T = (T_{max} - T_{min})/14$ .

Où  $\psi_{max}$  est la valeur maximale de la fonction de courant, tandis que  $T_{max}$  et  $T_{min}$  sont les valeurs maximale et minimale de la température sans dimension, situées respectivement dans le coin supérieur droit et le coin inférieur de la cavité verticale.



**Figure V.19 :** Lignes de courant et isothermes prédits par la simulation numérique dans le cas d'une perméabilité variant selon une loi exponentielle pour  $R^* = 50$ ,  $A = 6$ ,  
 (a)  $c = 0$ , (b)  $c = 5$ , (c)  $c = 10$ ,

La figure (V.19 –a) correspond au cas d'une perméabilité constante c'est-à-dire une couche poreuse verticale isotrope, pour laquelle les lignes de courant et les isothermes sont similaires aux résultats obtenus dans le passé par *Bejan (1983) et Vasseur et al. (1987)*. Comme discuté en détail par ces auteurs, les principales caractéristiques de l'écoulement convectif sont le fait que l'épaisseur de la couche limite verticale est constante et que la région centrale est immobile, de plus les isothermes indiquent que le cœur de la cavité est stratifié linéairement avec un gradient de température vertical constant, donnant lieu à une différence de température indépendante de la distance entre les parois thermiquement actives. ( $\psi_{max} = 1.87$ ,  $Nu = 2.37$ ,  $T_{max} = 1.39$ ,  $T_{min} = -1.39$ ). Ces caractéristiques résultent des conditions aux limites thermiques particulières, considérées ici, à savoir les conditions de Neumann.

La figure (V.19 –b) illustre l'effet de la variation de la perméabilité sur les lignes de courant et sur les isothermes, dans le cas où la constante  $c = 5$ , on constate que la perméabilité a une forte influence sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique. Les lignes de courant sont confinées près de la paroi verticale droite de la cavité, ce qui traduit l'accélération de l'écoulement. Alors que, les isothermes sont des lignes largement déformées de gauche à droite.

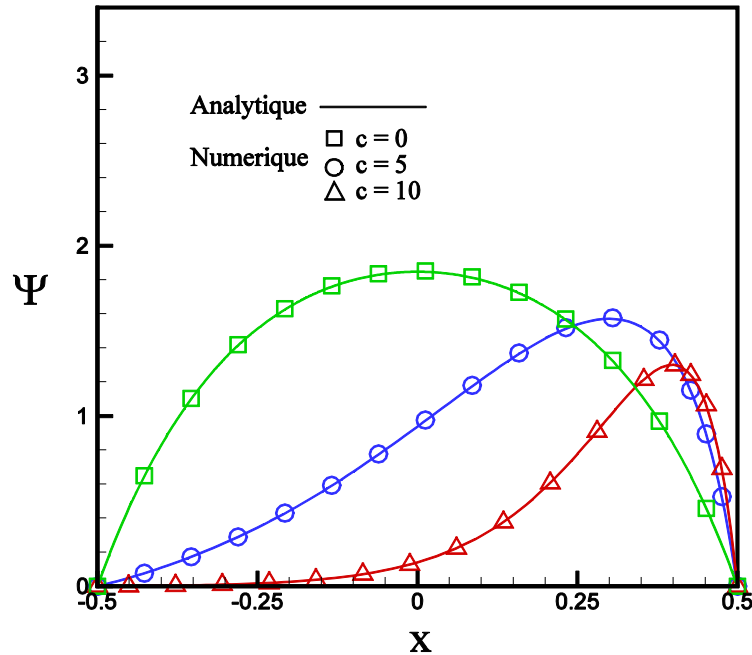
La même constatation est faite pour le cas de  $c = 10$ , comme montrée sur la Figure (V.19 –c) où les lignes de courant sont de plus en plus confinées près de la paroi verticale droite.

Pour une valeur donnée de  $R^*$ , une augmentation de  $c$  implique une redistribution de la perméabilité à travers la couche limite autour d'une perméabilité moyenne constante. Avec le modèle de perméabilité à variation exponentielle considéré ici, une augmentation de la constante  $c$  favorise la perméabilité du milieu poreux confiné au côté droit et réduit celle de la couche verticale gauche.

### V-3. 1.2 Fonction de courant (Cas de perméabilité exponentielle)

Des résultats analytiques et numériques donnant les distributions de la fonction de courant au sein de la cavité verticale, sont présentées sur la figure V.20. Les résultats analytiques représentés par des lignes continues sont en concordance avec ceux numériques représentés par des symboles. Tous ces résultats ont été obtenus au centre de la cavité pour un nombre de Rayleigh modifié constant  $R^* = 50$ , basé sur la perméabilité moyenne  $\bar{K}$ , et pour les valeurs de  $c = 0$ ,  $c = 5$  et  $c = 10$ .

Pour  $c = 0$ , ce qui correspond à un milieu isotrope, la courbe de la fonction de courant est symétrique par rapport au milieu de la cavité où elle est maximale, en augmentant la valeur de  $c$ , la position de  $\Psi_{max}$  se déplace vers la paroi droite qui présente la forte perméabilité.

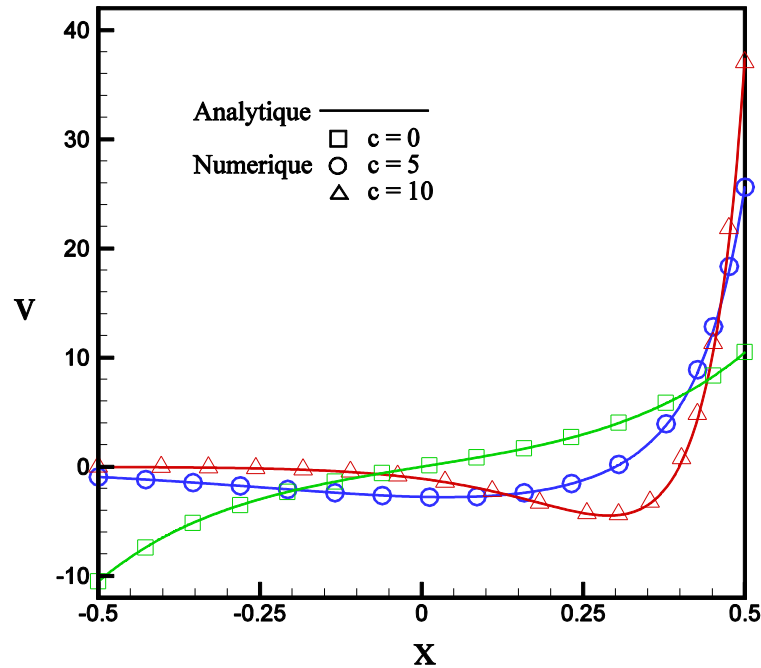


**Figure V-20 :** Influence du paramètre  $c$  de la loi exponentielle de la perméabilité, sur la fonction de courant dans la cavité verticale.

### V.3.1.3 Profils de vitesses (Cas de perméabilité exponentielle)

Des résultats analytiques et numériques donnant les distributions de la composante de vitesse verticale à travers la cavité à  $y=0$  sont présentés sur la figure V.21. Les résultats analytiques sont en très bon accord avec les résultats numériques, ces résultats ont été obtenus pour un nombre de Rayleigh modifié constant  $R^* = 50$ , basé sur la perméabilité moyenne  $\bar{K}$ .

La Figure indique que le profil des vitesses pour la valeur  $c = 0$  est symétrique par rapport au centre de la cavité, cela correspond à une perméabilité constante, et est en accord avec les travaux de recherche antérieurs. Avec l'augmentation de  $c$ , les courbes montrent que la vitesse de l'écoulement augmente près de la paroi latérale droite, tandis que l'écoulement devient presque stagnant près de la paroi gauche, ce qui est conforme aux profils de la fonction de courant.



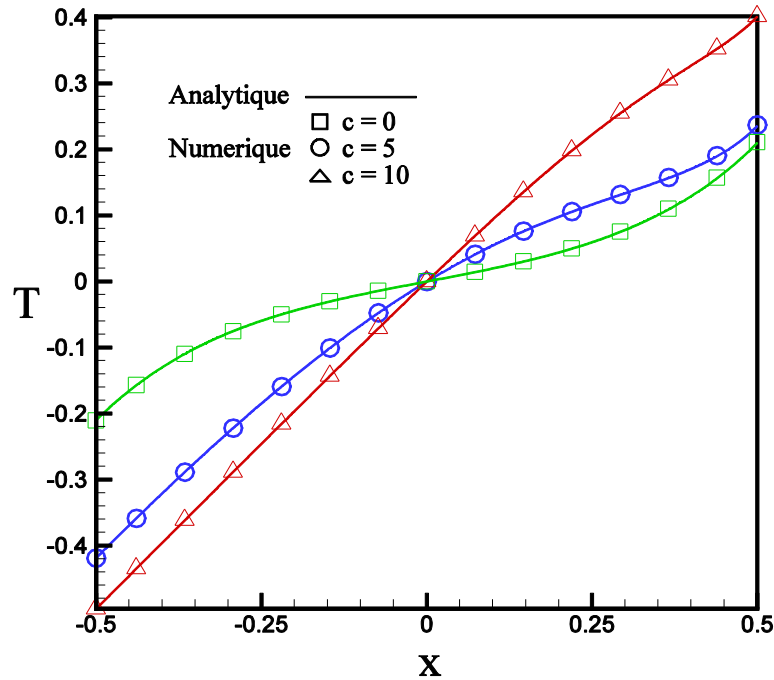
**Figure V.21 :** Influence du paramètre  $c$  de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité verticale

#### V.3.1.4 Profils des températures (Cas de perméabilité exponentielle)

Les distributions de température sont représentées sur la figure V.22 obtenus pour un nombre de Rayleigh modifié constant  $R^* = 50$ , basé sur la perméabilité moyenne  $\bar{K}$  et à  $y = 0$ . Les résultats analytiques sont en très bon accord avec les résultats numériques.

La figure indique que, indépendamment de la valeur de  $c$ , le flux thermique adimensionnel au niveau des parois verticales reste égal à l'unité. Naturellement, cela est dû aux conditions aux limites thermiques appliquées sur ces parois. En fait, l'effet de la convection dans le présent problème n'est pas d'augmenter le flux de chaleur à travers les frontières thermiquement actives, comme ce serait le cas pour les parois isothermes, mais plutôt de diminuer les différences de température à l'intérieur de la cavité.

Ainsi, lors de l'augmentation de la valeur de  $c$ , c'est-à-dire lorsque  $c = 5$ , et  $c = 10$  le mode de transfert par convection est réduit et la différence de température entre les deux parois verticales est diminuée. Car, la figure révèle que la distribution de température dans la cavité, en particulier sur le côté gauche, est presque purement diffusive de sorte que la différence de température tend vers sa valeur maximale, à savoir égale à l'unité.



**Figure V-22 :** Influence du paramètre  $c$  de la loi exponentielle de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité verticale

### V.3.1.5 Évolution de la fonction de courant maximale et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de $c$

Les figures V-23, et V-24 montrent les résultats numériques et analytiques de l'évolution de la fonction de courant maximale  $\psi_{max}$  et du nombre de Nusselt, en fonction de  $R^*$  pour diverses valeurs de  $c$ . Le nombre de Rayleigh joue un rôle primordial dans le processus de la thermogravitation, puisqu'il intervient directement dans le couplage des phénomènes de convection et diffusion décrits dans le chapitre II. Comme prévu, pour une valeur donnée de  $c$ , une augmentation de  $R^*$  favorise à la fois la circulation du fluide et le transfert de chaleur convectif résultant.

D'autre part, pour une valeur donnée de  $R^*$ , la force de convection et le nombre de Nusselt diminuent à mesure que le paramètre  $c$  augmente, cela découle du fait que, comme déjà discuté, la perméabilité près de la paroi droite augmente mais elle diminue près de la paroi gauche de façon exponentielle avec  $c$ .

Le flux de convection est ainsi confiné près de la paroi droite et le transport de chaleur convectif résultant entre les deux parois thermiquement actives est considérablement réduit. On note un très bon accord entre les résultats numériques et ceux analytiques.

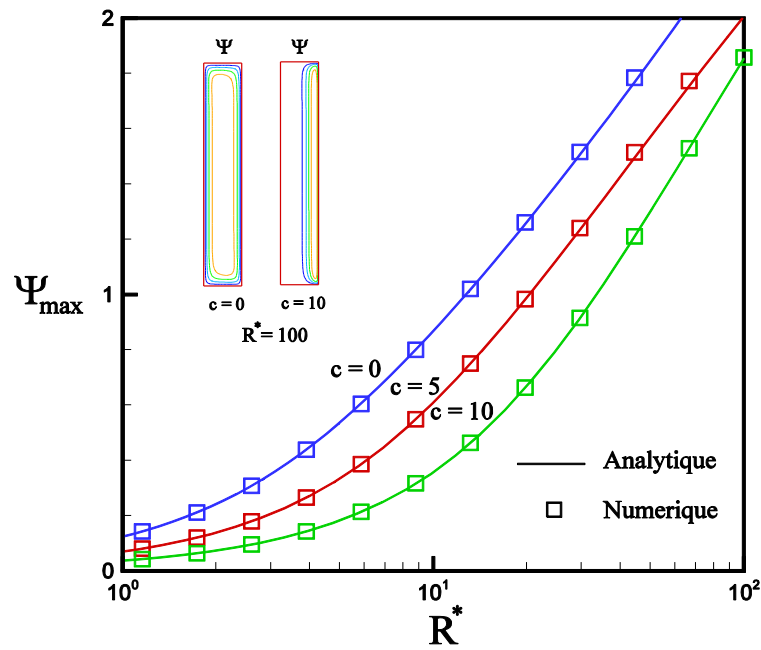


Figure V-20 : Evolution de la fonction de courant en fonction du nombre de nombre Rayleigh modifié pour différentes valeurs du paramètre  $c$ . (Cas de la loi exponentielle)

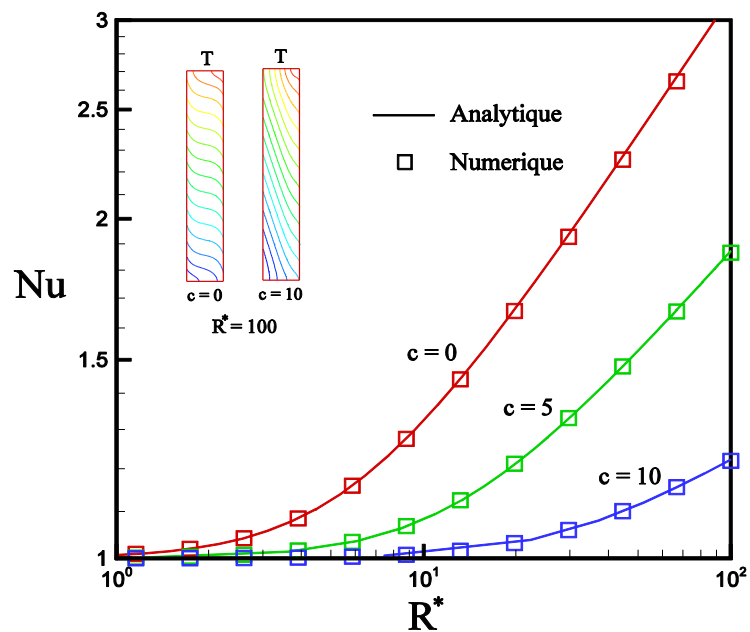


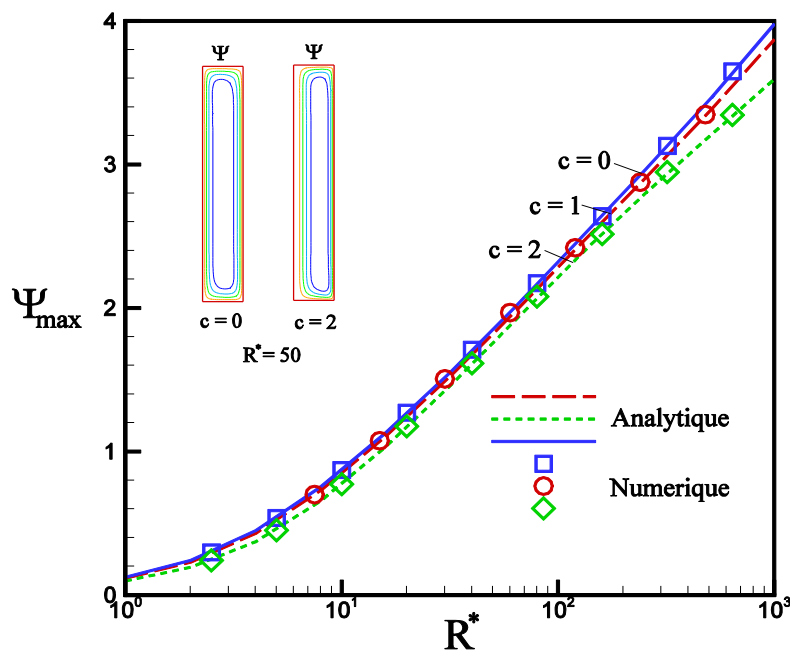
Figure V-24: Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour différentes valeurs du paramètre  $c$ . (Cas de la loi exponentielle)

### V.3.2 Cas d'une perméabilité variant selon une loi linéaire

Pour étudier l'effet de la variation de la perméabilité suivant la loi linéaire, et comme la fonction de la perméabilité n'est jamais négative, la constante de la perméabilité  $c$  doit se trouver dans l'intervalle de -2 à +2.

### V3.2.2. Évolution de la fonction de courant maximale et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de $c$

La figure V. 25 montre l'effet du nombre de Rayleigh  $R^*$  sur l'intensité de l'écoulement  $\psi_{max}$  pour différentes valeurs du paramètre  $c$ . Avec le modèle de perméabilité linéaire, la solution numérique des équations gouvernantes, représentée par des symboles, est en bon accord avec le modèle analytique approximatif affiché sous forme de lignes continues. On note qu'avec le modèle de perméabilité linéaire le paramètre  $b = 1$  tel que  $R = R^*$ . Ainsi, la perméabilité moyenne est égale à la perméabilité adimensionnelle au centre de la cavité, indépendamment de la valeur de  $c$ . En outre, et comme ce modèle implique que  $c$  doit se situer dans l'intervalle de  $-2$  à  $+2$  pour éviter une valeur négative de la perméabilité à droite ou à gauche de la cavité, ce qui serait physiquement impossible. On observe que l'influence du paramètre  $c$  sur la force de l'écoulement convectif est très faible. Ainsi, pour  $R^* = 10^3$  une augmentation de  $c$  de  $c = 0$  à  $c = 2$  donne une réduction de  $\psi_{max}$  d'environ 9.8 %.

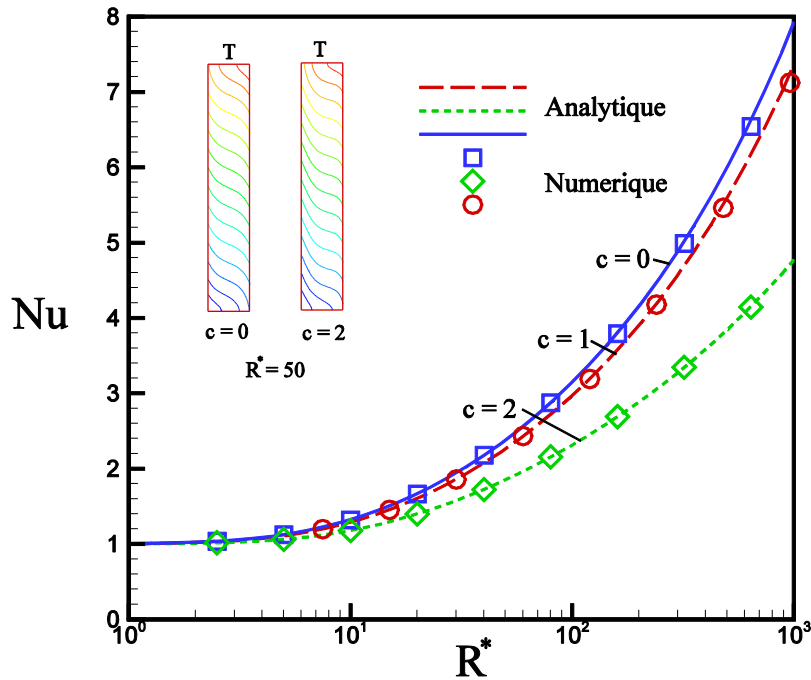


**Figure V-25 :** Evolution de la fonction de courant maximale en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour les différentes valeurs du paramètre  $c$  (cas de la loi linéaire)

Cependant, comme on peut le constater de la Fig. V.26, l'effet de l'augmentation du paramètre  $c$  sur le transfert de chaleur est considérablement plus important, il est d'environ 40 %. Ce comportement résulte du fait que bien que  $K$  reste constante avec  $c$ , une



augmentation de ce paramètre réduit la perméabilité du côté gauche et l'augmente du côté droit de la couche limite telle que le centre de la cellule convective qui tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre se déplace de l'origine de la couche vers la paroi latérale droite.



**Figure V-26 :** Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour les différents valeurs du paramètre  $c$ . (Cas de la loi linéaire)

A titre de comparaison, la loi de perméabilité linéaire est également présentée analytiquement et numériquement, avec la loi exponentielle et la droite ( $K = 1$ ) qui présente la perméabilité constante, sur la Figure V.27 et ceci par le tracé du nombre de Nusselt en fonction de la paramètre  $c$  pour  $R^* = 50$ .

Les résultats indiquent que pour  $c \leq 0.4$  la loi exponentielle est en accord avec la loi linéaire et avec la couche poreuse isotrope. En fait, pour cette situation on trouve que les trois lois de perméabilité considérés ici donnent approximativement le même Nusselt, au-dessus de cette valeur, une forte diminution du nombre de Nusselt est observée pour la loi exponentielle, et le régime de conduction pure ( $Nu = 1$ ) est atteint à environ  $c \approx 20$ .

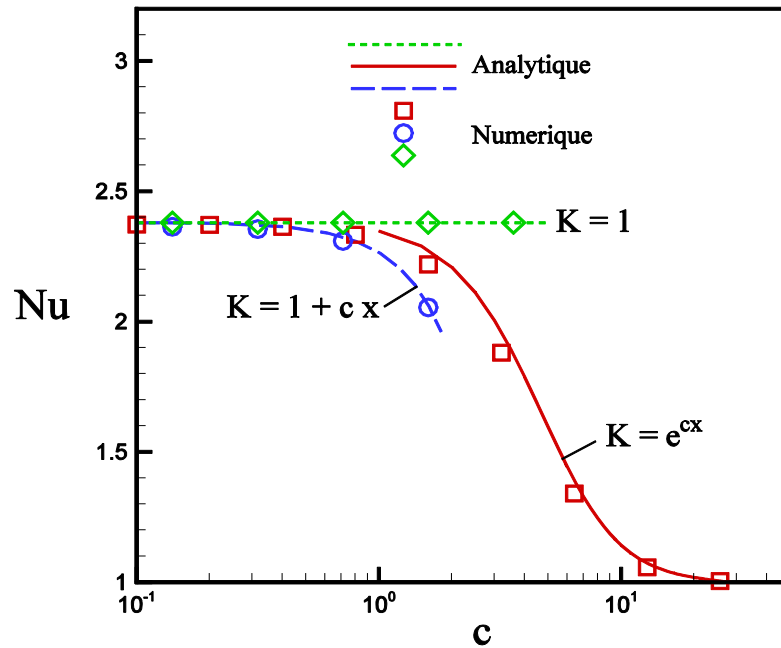


Figure V-27 : Evolution du nombre de Nusselt en fonction de la constante de perméabilité  $c$  pour différentes lois de perméabilité

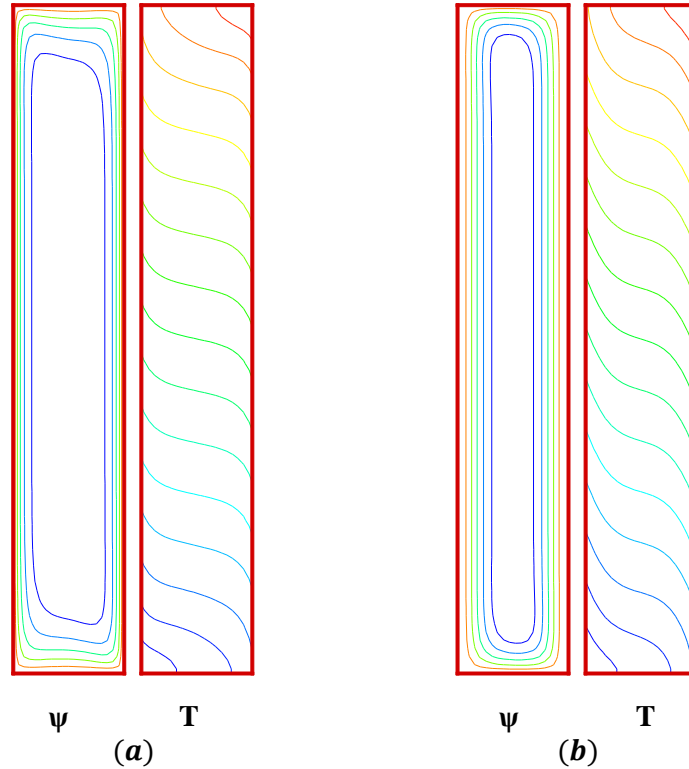
### V.3.3 Cas d'une perméabilité variant selon une loi parabolique

Naturellement, la valeur de  $c$  doit être supérieure à  $-4$ , pour laquelle  $K = 0$  exactement sur les frontières verticales de la cavité. Une valeur inférieure de  $c$  impliquerait une valeur négative de  $K$  dans la couche poreuse, ce qui n'est physiquement impossible.

#### V.3.3.1 Profils des lignes de courant et isothermes

La figure V.28 montre les lignes de courant et les champs de température typiques obtenus pour  $R^* = 50$ ,  $A = 6$  et  $c = 20$  et  $c = -4$  respectivement. Les distributions indiquent que, comme prévu, pour la loi de perméabilité symétrique considérée ici, Eq. ( $K=1+cx^2$ ), le caractère centrosymétrique du problème est conservé indépendamment de la valeur de  $c$ . En revanche, lorsque la valeur de  $c$  est négative, la loi de perméabilité parabolique implique que  $K(x)$  est maintenant maximum au centre de la couche ( $x = 0$ ) et minimum aux limites verticales ( $x = \pm 1/2$ ). Les résultats obtenus pour  $c = -4$ , montrent que pour cette situation, la circulation du fluide est considérablement inhibée en raison de la diminution de la perméabilité près des parois verticales. Alors que pour  $c = 20$  la perméabilité près des parois verticales est maximale, basée sur la perméabilité moyenne, en augmentant  $c$  de 0 à 20, il ressort clairement que la perméabilité du milieu poreux, au

voisinage des deux parois verticales, est considérablement agrandie. La vitesse est donc très grande dans une couche mince adjacente aux frontières.



**Figure V.28** : Effet du paramètre de perméabilité exponentielle sur les lignes de courant et sur les isothermes pour  $R^* = 50$  et  $A = 6$ . **(a)**  $c = 20$     **(b)**  $c = -4$

### V.3.3.2 Profils de vitesses (Cas de perméabilité parabolique)

Lorsque la loi de variation est parabolique, il est clair que la perméabilité augmente considérablement aux parois latérales de la cavité, en conséquence les vitesses sont relativement faibles au milieu de la cavité, puis augmentent considérablement vers les parois latérales.

Des résultats analytiques et numériques donnant les distributions de la composante de vitesse verticale à travers la cavité verticale à  $y = 0$  sont présentées sur la figure V.29. Les résultats analytiques sont en très bon accord avec les résultats numériques. Tous ces résultats ont été obtenus pour un nombre de Rayleigh modifié constant  $R^* = 50$ ,

Indépendamment de la valeur de la constante de perméabilité  $c$  les courbes présentent une antisymétrie pour laquelle les vitesses s'annulent au centre de la cavité.

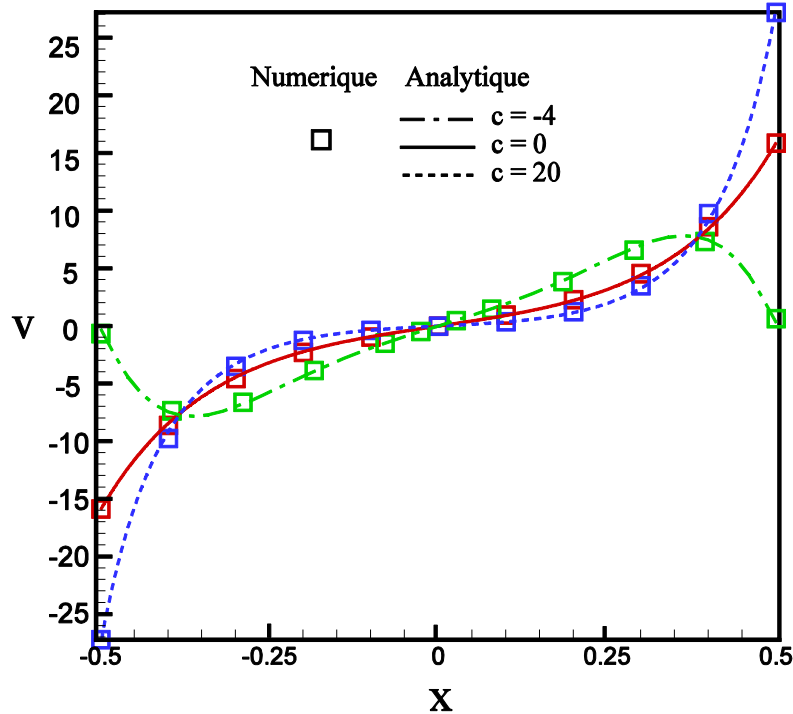
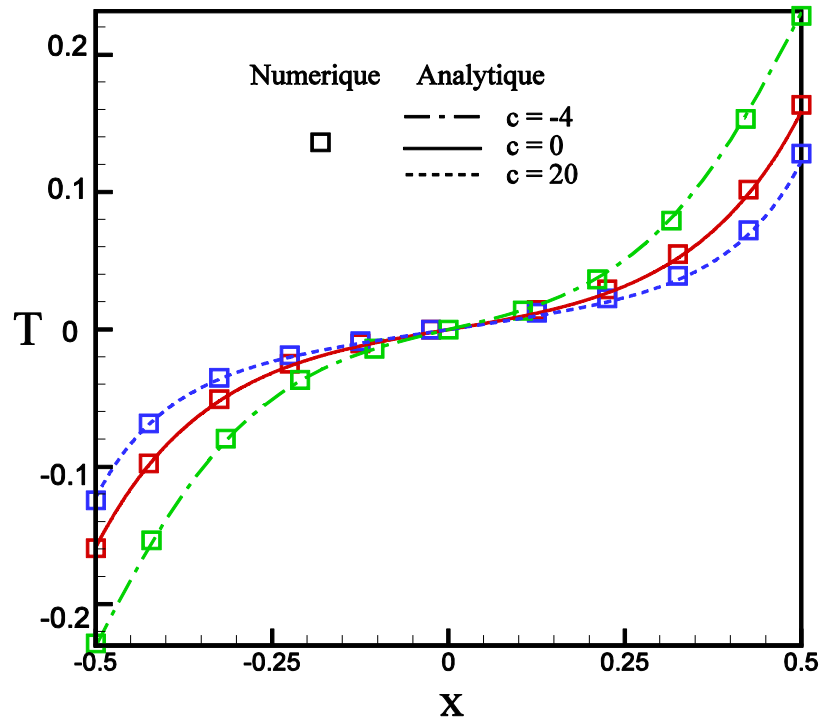


Figure V.29 : Influence du paramètre  $c$  de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils de vitesse dans la cavité verticale

### V.3.3.3 Profils des températures (Cas de perméabilité parabolique)

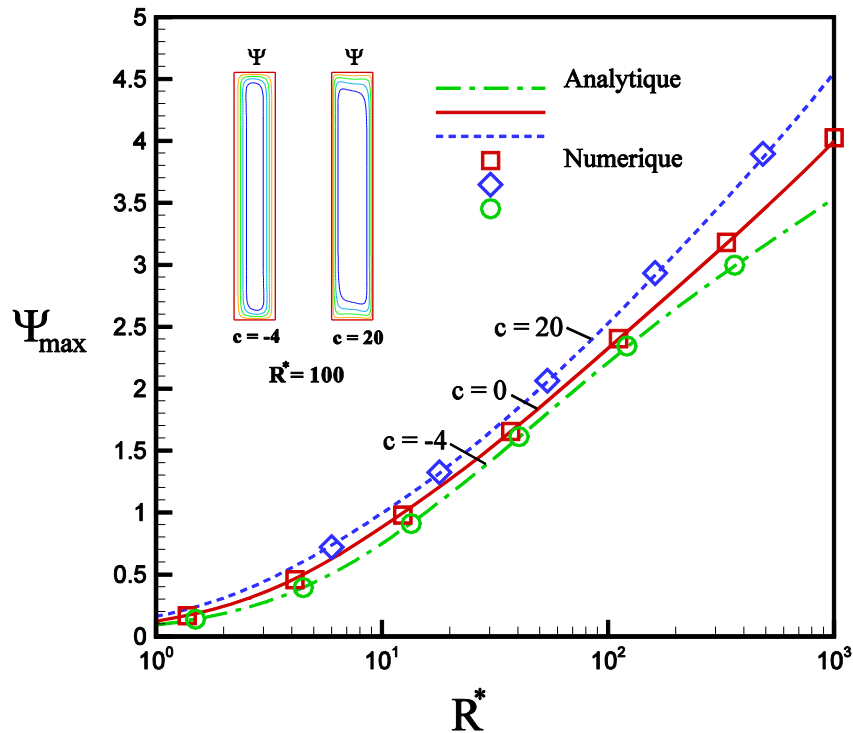
Les distributions correspondantes des températures  $T$  à travers la couche verticale à l'altitude  $y = 0$  sont représentées sur la Figure. V.30, un bon accord est observé entre les résultats analytiques et numériques. Dans le présent problème, comme déjà discuté, l'effet est de favoriser la convection n'est pas d'augmenter le flux de chaleur à travers les frontières, mais plutôt pour diminuer la température induite dans la cavité pendant le processus de chauffage. Pour cette raison, les écarts de température entre les deux parois actives chutent lorsque  $c$  est rendu plus grand que zéro, c'est-à-dire, la convection est favorisée, alors que ces écarts de température entre les deux parois actives augmentent lorsque  $c$  est rendu plus petit que zéro, car la convection est inhibée.



**Figure V.30 :** Influence du paramètre  $c$  de la loi parabolique de la perméabilité sur les profils des températures dans la cavité verticale

### V3.3.4 Évolution de la fonction de courant maximale et du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de $c$ de la loi parabolique

Sur la Figure V.31, la fonction de flux maximale  $\psi_{max}$  est tracée en fonction de  $R^*$  pour différentes valeurs de  $c$ . Les résultats indiquent que, par rapport au cas isotrope ( $c = 0$ ), l'écoulement est augmenté pour  $c > 0$  et réduit pour  $c < 0$ . Tel que discuté précédemment, cette tendance découle du fait que la variation de la perméabilité suit la loi parabolique.



**Figure V.31 :** Effet de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique sur les lignes de courant dans la cavité verticale

La figure V.32 illustre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $R^*$  pour différentes valeurs la constante de l'anisotropie en perméabilité  $c$ . Le transfert est plus important avec l'accroissement de  $R^*$  quelle que soit la valeur de  $c$ , vu que les forces de volume qui sont à l'origine de l'écoulement sont de plus en plus intenses, l'écoulement est augmenté pour  $c > 0$  et réduit pour  $c < 0$ . Tel que discuté précédemment, cette tendance découle du fait que pour une valeur fixe de  $R^*$ , une augmentation de  $c$  implique une augmentation de la perméabilité au voisinage des parois thermiquement actives et une diminution de  $c$  implique une diminution de la perméabilité au voisinage des parois thermiquement actives.

En conséquence, la force de la convection et le transfert la chaleur qui en résulte sont poussés avec une augmentation de  $c$ . Naturellement, cette tendance s'inverse lorsque la valeur de  $c$  est rendu négative. Et comme prévu, pour une valeur donnée de  $c$  la courbe correspondante tend asymptotiquement vers le régime de conduction pure lorsque  $R^*$  est rendu assez petit.

D'autre part, lorsque le mouvement convectif à l'intérieur de la cavité est assez fort, le transfert de chaleur résultant tend asymptotiquement vers le régime de couche limite, caractérisé par une pente constante de la courbe  $Nu \sim R^*$ , à condition que  $R^*$  soit rendu assez large. On voit que le nombre de Rayleigh nécessaire pour atteindre cette limite augmente considérablement avec l'augmentation de  $c$ .

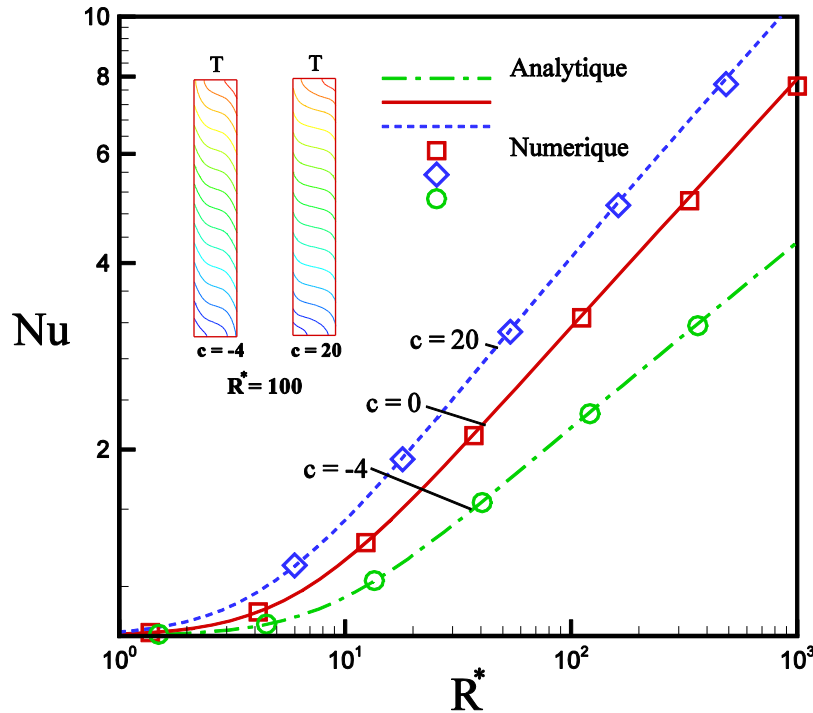


Figure V.32: Effet de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique sur le taux de transfert de chaleur  $Nu$  dans la cavité verticale

### V.4 Conclusion

Afin de voir l'influence de la variation de la perméabilité, on a suivi numériquement et analytiquement l'évolution de la structure de l'écoulement et de transfert de chaleur au sein des deux cavités, horizontale et verticale avec les conditions aux limites de Neumann, en faisant varier les lois de perméabilité  $K$ , les points suivants présenteront un résumé des résultats obtenus pour ces différents cas.

- Indépendamment des lois de la variation de la perméabilité et de la valeur du paramètre  $c$ , le nombre de Nusselt est une fonction croissante de  $R^*$ , une augmentation du nombre de Nusselt au début, suivie d'une tendance vers une valeur constante.

- Le nombre de Rayleigh modifié critique est caractéristique du changement de régime dans la cavité horizontale. Au-delà de ce nombre, la convection devient de
- plus en plus le mode dominant de transfert de chaleur.
- L'augmentation du paramètre  $c$  favorise la convection dans les deux cavités dans le cas de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique, alors que cette augmentation fait freiner la convection quand la perméabilité est variée suivant la loi exponentielle ou linéaire.
- L'augmentation du paramètre  $c$  fait diminuer le taux de transfert de chaleur dans les deux cavités lorsque la perméabilité varie suivant la loi exponentielle ou linéaire. Mais dans le cas de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique, le Nusselt augmente avec l'augmentation de  $c$ .

Il est intéressant de noter que

- l'effet du paramètre  $c$  sur le transfert de chaleur est plus visible pour les valeurs élevées du nombre de Rayleigh.
- l'effet du paramètre  $c$  sur le transfert de chaleur est moins significatif que l'effet du nombre de Rayleigh.



# Conclusion Générale

## Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons présenté des études numériques et analytiques du transfert de chaleur par convection naturelle dans des cavités poreuses à perméabilité variable. Les configurations géométriques du modèle physique sont des cavités rectangulaires avec des conditions aux frontières thermiques de types Neumann (flux constant). Deux cas ont été présentés :

Dans le premier cas, l'écoulement est induit par un gradient de température appliqué perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité, les parois horizontales de la cavité sont chauffées et refroidies par des flux thermiques constants, tandis que les parois latérales sont considérées adiabatiques. Dans le deuxième cas ce gradient est appliqué dans la même direction que la gravité. Différentes lois de perméabilité sont prises en considération, à savoir une loi exponentielle, une loi linéaire et une loi parabolique.

Ce type d'écoulements dans de tels milieux et avec ces conditions aux limites de Neumann est en effet très peu étudié actuellement.

Le modèle Darcy est pris en compte dans la formulation mathématique du problème. La variation de masse volumique est modélisée par l'approximation de Boussinesq.

La solution analytique est basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle qui est valable pour les cavités élancées ayant un facteur de forme  $A \gg 1$ , ainsi et pour valider le modèle analytique, nous avons mis au point un modèle numérique basé sur la méthode de volumes finis pour résoudre les équations de conservation gouvernant les écoulements, puis nous avons testé le code de calcul en se basant sur les résultats des publications antérieurs.

Des résultats détaillés pour le champ d'écoulement, distribution de température et les taux de transfert de chaleur sont obtenues pour une large gamme de paramètres de gouvernance tels que le rapport d'aspect  $A$ , le nombre de Rayleigh modifié  $R_T^*$ , ainsi que le paramètre  $c$  pour les trois lois de perméabilité.

Dans un premier lieu et pour les deux cavités, on a supposé que la perméabilité varie exponentiellement par rapport au centre de la cavité, pour cette situation, en augmentant l'inhomogénéité ( $c > 0$ ) de la couche poreuse par rapport à une valeur moyenne de la perméabilité ( $K = 1, c = 0$ ), la circulation de l'écoulement convectif est progressivement inhibée et le transfert de chaleur qui en résulte est réduit de manière significative, et pour des petites valeurs de  $c$  la loi linéaire est adaptée.

D'autre part, en supposant que la loi de perméabilité est parabolique, une augmentation du paramètre  $c$  au-dessus de zéro favorise la convection et le transfert de chaleur. Alors que la diminution de ce paramètre en dessous de zéro, inhibe la convection et le transfert de chaleur. Les principales caractéristiques du modèle théorique approximatif se sont révélées être en bon accord avec la solution numérique des équations gouvernantes complètes.

Indépendamment de la position de la cavité par rapport au flux thermique et indépendamment des lois de la variation de la perméabilité, les résultats montrent que la variabilité du nombre de Nusselt moyen et l'attribution des champs de vitesses sont principalement sensibles au nombre de Rayleigh modifié.

Les perspectives importantes, sur lesquelles il conviendra sans doute de porter des efforts prioritaires, sont: la vérification des résultats obtenus par voie expérimentale, la modification des codes numériques pour tenir compte des effets tridimensionnels et la prise en considération de la variation de la perméabilité suivant les deux directions, ainsi que les propriétés physiques du fluide

# Références bibliographiques

## Références bibliographiques

### A

- Alavyoon (1993)**                      **Alavyoon FOn** , "Natural Convection in Vertical Porous Enclosures due to Prescribed Fluxes of Heat and Mass at the Vertical Boundaries ", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36, 2479–2498, (1993).
- Alloui et al (2009)**                      **Alloui, Z., Bennacer, R., Vasseur, P.** " Variable permeability effect on convection in binary mixtures saturatinga porous layer ". *Heat Mass Transf.* 45, 1117–1127 (2009)

### B

- Bear, (1972)**                                      **Bear. J.** " Dynamics of fluids in porous media ". American Elsevier, *New York*, 764 p. (1972)
- A. Bejan (1983)**                                      **Bejan, A.** " The boundary-layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side ". *Int. J. Heat Mass Transf.* 26, 1339–1346 (1983)
- Benenati et Brosilow (1962)**                                      **Benenati, R.F., Brosilow, C.B.** " Void fraction distribution in beds of spheres ". *AIChE J.* 8, 359–361 (1962)
- Brinkman (1947)**                                      **Brinkman. H.C. A.** " calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles ". *Appl. Sc. Res.*, A1 :27–34 (1947)

### C

- Capone et al (2009)**                                      **Capone, F., Gentile, M., Hill, A.A.** " Anisotropy and symmetry in porous media convection ". *Acta Mech.* 208, 205–214 (2009)
- Capone et al (2011)**                                      **Capone, F., Gentile, M., Hill, A.A.** " Penetrative convection in anisotropic porous media with variable permeability ". *Acta Mech.* 216, 49–58 (2011)

- Capone et al (2012)**      **Capone, F., Gentile, M., Hill, A.A.** " Convection problems in anisotropic porous media with nonhomogeneous porosity and thermal diffusivity ". *Acta Appl. Math.* **122**, 85–91 (2012)
- Chandrasekhara et al (1984)**      **Chandrasekhara, B.C., Namboodiri, P.M.S., Hanumanthappa, A.R.** " Similarity solutions for buoyancy induced flows in a saturated porous medium adjacent to impermeable horizontal surfaces ". *Wärme-Und Stoffübertragung* **18**, 17–23 (1984)
- Choukairy et al (2012)**      **Choukairy, K., Bennacer, R.** " Numerical and analytical analysis of the thermosolutal convection in an heterogeneous porous cavity ". *FDMP-Fluid Dyn. Mater. Process.* **8**, 155–172 (2012)

## D

- De Boer (2000)**      **De Boer, R.** "*Theory of Porous Media*". Berlin: Springer. (2000)
- Darcy (1856)**      **H. Darcy.** " Fontaines publiques de la ville de Dijon. Librairie des Corps Impériaux des Ponts et Chaussées et des Mines ", Paris, (1856).
- Dullien (1992)**      **Dullien, F.** " Porous media: Fluid transport and pore structure ", New York, USA: Academic Press Inc. (1992)

## F

- Fahs et al (2015)**      **Fahs, M., Younes, A., Makradi, A.** " A reference benchmark solution for free convection in a square cavity filled with a heterogeneous porous medium ". *Numer. Heat Transf. B-Fluid* **67**, 437–462 (2015)
- Fajraoui et al. (2017)**      **Fajraoui, N., Fahs, M., Younes, A., Sudret, B.** " Analyzing natural convection in porous enclosure with polynomial chaos expansions: effect of thermal dispersion, anisotropic permeability and heterogeneity ". *Int. J. Heat Mass Transf.* **115**, 205–224 (2017)
- Fetter (1999)**      **Fetter C.-W.** " Contaminant Hydrogeology " (2nde éd.). Prentice Hall. *Glossaire international d'hydrologie 1974 :1 vol. (XX-[4]-393 p.)* (1999).

- Forchheimer (1901)**      **P. Forchheimer.** "Wasserbewegung durch Boden ".  
Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieur, 45 edition,  
(1901)

## G

- Graetz (1885)**      **GRAETZ, L.** " On the Thermal Conduction of Liquids - Part  
2 ", *Ann. Phys. Chem.*, vol. 25, 1885, pp. 337-357. (1985)

## H

- Haddad (2014)**      **Haddad, S.A.M.** " Thermal convection in a Darcy porous  
medium with anisotropic spatially varying permeability ".  
*Acta Appl. Math.* **132**, 359–370 (2014)

- Hassanien (2003)**      **Hassanien, I.A.** " Variable permeability effects on mixed  
convection along a vertical wedge embedded in a porous  
medium with variable surface heat flux ". *Appl. Math.*  
*Comput.* **138**, 41–59 (2003)

- Hassanien et al (2002)**      **Hassanien, I.A., Omer, G.M.** " Non similarity solutions for  
mixed convection flow along non isothermal vertical plate  
embedded in porous media with variable permeability ". *J.*  
*Porous Media* **5**, 159–167 (2002)

- Hassanien et al (2003)**      **Hassanien, I.A., Salama, A.A., Elaiw, A.M.** " Variable  
permeability effect on vortex instability of mixed convection  
flow in a semi-infinite porous medium bounded by a  
horizontal surface ". *Appl. Math. Comput.* **146**, 829–847  
(2003)

- Hassanien et al (2004a)**      **Hassanien, I.A., Salama, A.A., Elaiw, A.M.** " Variable  
permeability effect on vortex instability of a horizontal natural  
convection flow in a saturated porous medium with variable  
wall temperature ". *J. Appl. Math. Mech.* **84**, 39–47 (2004a)

- Hassanien et al (2004b)**      **Hassanien, I.A., Salama, A.A., Elaiw, A.M.** " The onset of  
longitudinal vortices in mixed convection flow over an  
inclined surface in a porous medium with variable  
permeability ". *Appl. Math. and Comput.* **154**, 313–333  
(2004b)

- Hallman (1956)**                      **T.M. Hallman**, "Combined forced and free laminar heat transfer in vertical tubes with uniform internal heat generation ". *Transaction of the ASME*, 78, pp 1831-1841, (1956)

## K

- Kalla (2004)**                      **Kalla L.** "Convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire ". *PHD Université de Montréal Canada* (2004).
- Kaviany (1991)**                      **Kaviany M.** "Principles of Heat Transfer in Porous Media ", *Mechanical Engineering Series, Springer-Verlag, New York.* (1991).
- M.Kaviany (1995)**                      **Kaviany .M.**"principles of heat transfer in porous media ". *Spinger*,(1995)

## L

- Lundgren (1972)**                      **Lundgren, T.S.** " Slow Flow through Stationary Random Beds and Suspensions of Spheres ". *Journal of Fluid Mechanics*, 51, 273-299. (1972)

## M

- Mamou (1998)**                      **M. Mamou.** " Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluide confinés ", *Thèse de Philosophiae Doctor, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada.* (1998)
- M. A. Mansour et al (2004)**                      **Mansour, M., El-Shaer, N.** " Mixed convection-radiation in power-law fluids along a non-isothermal wedge in a porous medium with variable permeability ". *Transp. Porous Media* 57, 333–346 (2004)
- Mahmud et Pop(2006)**                      **Mahmud. S, Pop. I.** " Mixed convection in a square vented enclosure filled with a porous medium ". *Int. j. Heat Mass Transfer* 49, 2190-2206. (2006)
- Marsily (1981)**                      **MARSILY G.** " Hydrogéologie quantitative ". *Masson, Paris,* pp. 1-215. (1981)



**McKibbin et Tyvand (1982)**

**McKibbin, R., Tyvand, P.A.** " Anisotropic modelling of thermal convection in multilayered porous media ". *J. Fluid Mech.* **118**, 315–339 (1982)

**Mohammadein et El-Shaer (2004)**

**Mohammadein, A.A., El-Shaer, N.A.** " Influence of variable permeability on combined free and forced convection flow past a semi-infinite vertical plate in a saturated porous medium ". *Heat Mass Transf.* **40**, 341–346 (2004)

## N

**Nield et Béjan (2017)**

**Nield, D.A., Bejan, A.** " Convection in Porous Media ", 5th edn. Springer, Berlin (2017)

**Nusselt (1910)**

**NUSSELT, W.** " The Dependence of the Heat-Transfer Coefficient on the Tube " Length, *VDI Z.* vol. 54, pp. 1154-1158. (1910)

## P

**Suhas V. Patankar (1980)**

**Patankar, S.** " Numerical Heat Transfer and Fluid Flow ". Hemisphere, Washington DC. (1980)

## R

**D.A.S. Rees et al, (2000)**

**Rees, D.A.S., Pop, I.** " Vertical free convection in a porous medium with variable permeability effects ". *Int. J. Heat Mass Transf.* **43**, 2565–2571. (2000)

**Rees et Tyvand (2009)**

**Rees, D.A.S., Tyvand, P.A.** " Onset of convection in a porous layer with continuous periodic horizontal stratification ". *Part I. Two-dimensional convection. Transp. Porous Media* **77**, 187–205 (2009)

**Rionero (2011)**

**Rionero, S.** " Onset of convection in porous materials with vertically stratified porosity ". *Acta Mech.* **222**, 261–272 (2011)

- Roblee et al (1958)**      **Roblee, L.H.S., Baird, R.M., Tierney, J.W.** " Radial porosity variations in packed beds ". *AICHE J.* **4**, 460–464 (1958)
- H.Rumpf (1971)**      **Rumpf .H,A.R.** " Gupte, *Chemie Ing* ". *Techn*, Vol, 43, Issue6,pp 367-375.(1971)

## S

- Schoeller ( 1955)**      **H. Schoeller**, " Hydrogéologie ". *Ecole Nationale Supérieur du Pétrole, Technip, Paris*, 2 vol, 443 p, (1955)
- Schwartz et Smith (1953)**      **Schwartz, C.E., Smith, J.M.** " Flow distribution in packed beds ". *Ind. Eng. Chem.* **45**, 1209–1218 (1953)
- Shafabakhsh et al (2019)**      **Shafabakhsh, P., Fahs, M., Ataie-Ashtiani, B., Simmons, C.T.** " Unstable density-driven flow in fractured porous media: the fractured elder problem ". *Fluids* **4**, 168 (2019)
- Shao et al (2016 )**      **Shao, Q., Fahs, M., Younes, A., Makradi, A., Mara, T.** " A new benchmark reference solution for double diffusive convection in a heterogeneous porous medium ". *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.* **70**, 373–392 (2016)
- Simmons et al (2001)**      **Simmons, C.T., Fenstemaker, T.R., Sharp, J.M.** " Variable-density groundwater flow and solute transport in heterogeneous porous media: approaches, resolutions and future challenges ". *J. Contam. Hydrol.* **52**, 245–275 (2001)
- Singh et al (1989)**      **Singh, P., Misra, J.K., Narayan, K.A.** " Free convection along a vertical wall in a porous medium with periodic permeability variation ". *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* **13**, 443–450 (1989)
- Singh et Sharma (2002)**      **Singh, K.D., Sharma, R.** " Three dimensional free convective flow and heat transfer through a porous medium with periodic permeability ". *Indian J. Pure Appl. Math.* **33**, 941–949 (2002)

## T

- Trevisan et Bejan (1986)**      **O.V.Trevisan, A. Bejan.** " Mass and Heat transfer y natural convection in a vertical slot filled with porous medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29, pp.403-415, (1986).

## V

- Vasseur et al (1987)**      **Vasseur, P., Satish, M.G., Robillard, L.** " Natural convection in a thin, inclined porous layer exposed to a constant heat flux ". *Int. J. Heat Mass Transf.* **30**, 537–549 (1987)
- Vasseur et al (1989)**      **Vasseur, P., Wang, C.H., Sen, M.** " The brinkman model for natural convection in a shallow porous cavity with uniform heat flux ". *Num. Heat Transf. Part A Appl.* **15**, 221–242 (1989)
- Vincent (2020)**      **Vincent Le Maout.** " Modélisation d'écoulements multiphasiques de fluides viscoélastiques en milieux poreux ". *Mécanique des fluides [physics. class-ph]. Université de Bordeaux*, (2020)

## W

- Ward.j (1964)**      **Ward, J. C.** " Turbulent flow in porous media ". *J. Hydraul. Div. ASCE*, 90,1-12. (1964)
- Watson (1966)**      **Watson, G. N.** "Theory of Bessel functions ". Cambridge University press (1966).
- Walsh et Brace (1984)**      **WALSH J.B. et BRACE W.F.** " Geophys ". *Res. ; 1984; 89 (B 11) : 9425 – 31, (1984)*

## Z

- Zhu et al (2017)**      **Zhu, Q.Y., Zhuang, Y.J., Yu, H.Z.** " Three-dimensional numerical investigation on thermosolutal convection of power-law fluids in anisotropic porous media ". *Int. J. Heat Mass Transf.* **104**, 897–917 (2017)
- Zhuang et Zhu (2018a)**      **Zhuang, Y.J., Zhu, Q.Y.** " Analysis of entropy generation in combined buoyancy-Marangoni convection of power-law Nano fluids in 3D heterogeneous porous media ". *Int. J. Heat Mass Transf.* **118**, 686–707 (2018a)

- Zhuang et Zhu (2018b)**      **Zhuang, Y.J., Zhu, Q.Y.** " Numerical study on combined buoyancy–Marangoni convection heat and mass transfer of power-law Nano fluids in a cubic cavity filled with a heterogeneous porous medium ". *Int. J. Heat Fluid Flow* **71**, 39–54 **(2018b)**
- Zhang, et al (2000)**      **Zhang, D., Zhang, G., Chen, S. & Soll, W. E.** " Pore Scale Study of flow in porous media: Scale dependency, REV, and statistical REV ". *Geophysical Research Letter*, **27(8)**, pp. 1195-1198. **(2000)**