République Algérienne Démocratique et populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de L'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Kasdi Merbah Ourgla

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

Mémoire Présenté

Pour l'obtention diplôme de

Master en Mathématique

Thème :
Résolution numérique de quelques équations Différentielles d'ordre non entier

---

Réalisé par :**Saidou CHibani**

Soutenu publiquement le :19 semtember 2021

devant le jury composé de :

M. Amara Abdelkader MCA. Université Kasdi Merbah Ouargla **Président**

M. Tellab Brahim MCA. Université Kasdi Merbah Ouargla **Rapporteur**

M. Badidja Salim MCA. Université Kasdi Merbah Ouargla **Examinateur**

Année Universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce mémoire

a mes chers parents

à qui je dois compte tout ce travail est le fruit de leur amour, leurs encouragement et sacrifces.

A ma chère mère.

A mon cher père.

A ma chère grande mère.

A mon chers oncles .

A mes chéres soeurs Fatiha, Safia et Halima.Samia.Hawa.

A mes chers frères Brahim, Mouloud.Azziddin.et l'aid

. A mes amis Mohamed,Ordihin, Dewdawa, Hammadi, ...

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail

CHibani Saidou

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens remercier tout d'abord mon encadreur Tellab Brahim pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux.

Et en fin j'adresse mes sincères remerciement à mes parents, mes frères et soeurs, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin l'élaboration de ce travail.

ملـــخص

مذكرة

مـــــاستر

للطالب

سعيدو شيباني

بعنوان

الحل العدد لبعض المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية

المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية .

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة تقريبات عددية لحل هذه المعادلات بإستعمال كل من طريقة

أدومان,التكرار التبديلي ,والطريقة العشوائية ل لموتيبي...

وبإستعمال المشتقات الناطقة بمعنى كابيتيو.

لقد عالجنا العديد من الأمثلة وبصفة خاصة معادلة ريكاتي والتي حاولنا إعطائها خوارزمية للحل وكما تم التطرق

الى اثبات وجود الحل ووحدانيته لهذه المعادلة لننتهي بحل عددي.

Abstract

of

memory of Master

of the student

Saidou CHibani

under theme of

The Numerical Solution of Differentials Equations with Order not entier

Fractional differential equations are generalization of classical differential equations. In this work, we study numerical approximations of the solution of a fractional differential problem with the ADM method, VIM, HPM and MFTDM method, using the fractional derivative in the sense of Caputo.

We treated several examples and the Riccati equation that for which we have tried to give a solution algorithm by MFTDM method, with a result of existence and uniqueness and numerical results

Résumé

de

mémoire de Master

de l'étudiant

Saidou CHibani

Sous le thème

Résolution numérique de quelques équations différentielles d'ordre non entier

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles

classiques. Dans ce travail, nous étudions des approximations numériques de la solution d'un

problème différentiel fractionnaire par les méthodes ADM, VIM, , HPM et MFTDM en utilisant la

dérivé fractionnaire au sens de Caputo. Nous avons traité plusieurs exemples, ainsi que l'équation de

Riccati que pour laquelle nous avons essayé de donné un algorithme de résolution par la méthode

MFTDM, avec un résultat d'existence et d'unicité et des résultats numériques

Table des matières

NOTATION

- Γ *La fonction Gamma*
- β *La fonction Bêta*
- E_α *La fonction Mittag-Leffler à une seul paramètre*
- I^α Intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α
- I^α_{+a} Intégrale fractionnaire(à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α
- I^α_{-b} Intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α
- $n!$ La fonction factorielle.
- ${}^{RL}D^\alpha$ Dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α
- ${}^{C}D^\alpha$ Dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α
- D^α Opérateur de dérivation d'ordre non entier α
- $I^\alpha f(t)$ Intégrale non entière d'ordre α de la fonction $f(t)$
- $\mathbb{C}$ L'ensemble des nombres complexes
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des nombres naturels

Introduction générale

En mathématiques,le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, que étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier n (ordinaire) à l'ordre non entier (fractionnaire) la théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui ces origines remontent à la fin du1 $17^{\text{éme}}$ ***siècle l'époque ou Isac Newton et Gottfried wihelm leibniz ont développé les fodements du calcul différentiel et intégral.En parti-culier,leibniz à introduit le symbole*** $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$ ***pour désigner la dérivée*** $n^{\text{éme}}$ ***d'une fonction*** f ***quand ila annoncé dans une lettre à Guillanume l'Hopital,datée du 30 septembre 1695,avec l'hypothèse implicite que*** $n \in \mathbb{N}$ ***,l'hopital à répondu :Que signifie*** $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$

si $n = \frac{1}{2}$ ***? .Leibniz lui a répondu :" cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour,on pourra tirer des conséquences utiles"[Oldham et spanier,1974].cette lettre de l'Hopital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'hopital a demandé spécifiquement pour*** $n = \frac{1}{2}$***,c'est -à-dire une fraction (nomber rationnel),a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.***
Notr mémoire est organise comme suit :

Le première chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire,nous citons par exemple la fonction Gamma,la fonction Béta, la fonction Mittage-leffler et la transformé de laplace trois approches sont présentés ainsi que l'approche de Riemman-liouville et celle de caputo pour la généralisation des notions de dérivation entière.

Dans la deuxiéme chapitre, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour chaque problème comme de Cauchy d'une équation différentielle non-linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f(t, u(t)), t \in \Omega = [0, \Gamma], n-1 < \alpha < n, \\ u^{(k)}(0) = b_0 \in \mathbb{R}, k = 0, 1, n..., n-1, n = [\alpha] + 1 \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une solution continue est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixé d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi ,Existence et unicité pour l'équation de type Caputo. On termine ce chapitre avec trois exemples illustraif.

Dans la troisième chapitre, nous décrivons quelques méthodes Némiriques pour résoudre EDO : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM),la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), la méthode d'itération variationnelle (VIM), la nouvelle méthode itérative (NIM), puis nous savons la description de chacune de ces méthodes. Ces méthodes sont appliquées à des équations différentielles non-linéaires classiques (d'ordre entier).

Dans la quatrième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle d'ordre non entier pour étudier ensuite les trois méthodes précédente mais cette fois dans le cas ou les équations différentielles sont d'ordre fractionnaire.et finalement donnera quelque exemple numérique.
Nous terminons notre mémoire par une conclusion générale avec quelques perspectives.

Chapitre 1

Notions de base du calcul fractionnaire

1.1 Fonction utiles

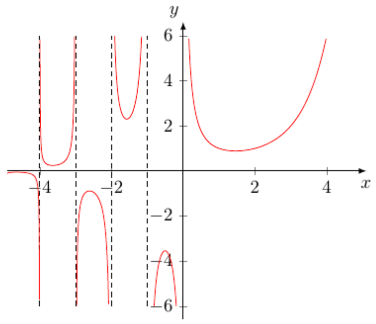
1.1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1.1

Pour la variable z réelle et strictement positive, la fonction Gamma continue en z est définie comme par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \tag{1.1}$$

L'allure de la fonction Gamma est donnée par la figure 1 :



(**figure 1 voir** [**1**])

avec $y = \Gamma(z)$; $x = z$ et $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$ une propriété importante de la fonction gamma est la relation de récurrence suivante :
$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties :

$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^z dt = \lceil -e^{-t}t^z \rceil_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-1}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)$
Ainsi, nous avons :
La dérivée d'ordre 1 de $\Gamma(z)$ est :

$$\Gamma^{'}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z}(x^{z-1})e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{z-1}ln(x)e^{-x}dx \tag{1.2}$$

Sa deuxième dérivée est :

$$\Gamma^{''}(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}(ln(x))^2 e^{-x}dx \tag{1.3}$$

La dérivée d'ordre n est donnée par :

$$\Gamma^{n}(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}(ln(x))^n e^{-x}dx \tag{1.4}$$

Cette relation de récurrence va permettre de définir $\Gamma(z)$ pour les valeurs négatives de z.

Si nous supposons $-1 < z < 0$soit $0 < z+1 < 1$. $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $Gamma(z)$. Il est convenu de définir $\Gamma(z)$ par la relation :
$\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$

Ainsi pour $-(n+1) < z < -n$ avec n un entier positif ou nul, on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+z+1)}{z(z+1)...(z+n)} \tag{1.5}$$

Les valeurs particulières de $\Gamma(z)$ sont :

$$* \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{1-1}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^0 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

La fonction Γ s'appelle aussi fonction factorielle généralisée car $\Gamma(z+1) = z!$
$\forall z \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilise la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ nous obtenons :
1.* $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$
2.* $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$
3.* $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$
4.* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)! = z!$
5.* $\Gamma(n) = (n-1)!$
6.* pour $z = \dfrac{1}{2}$
7.*$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{z}$
8.* pour $z = n + \dfrac{1}{2}, n$ entier positif :$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi}$

Démonstration 1.1.1

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z!$$

• *En utilisant l'intégration par partie on obtient :*

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)$$

7.* Avec le changement de variable $s = \sqrt{t}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds \\ &= 2(\frac{\sqrt{\pi}}{2})\textit{(d'après l'intégrale de Gauss)} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

8.*En peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

pour $n \in \mathbb{N}$
• pour $n = 0$,on a $\Gamma(0+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
• Supposons que la formule est vérifiée pour$(n-1)$et le montrons pour n :
On a

$$\Gamma((n-1)+\frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$$

est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) \\ &= (n-\frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= (\frac{2n-1}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}\end{aligned}$$

Et la même démonstration pour la deuxième l' expression .

1.1.2 La fonction Bêta

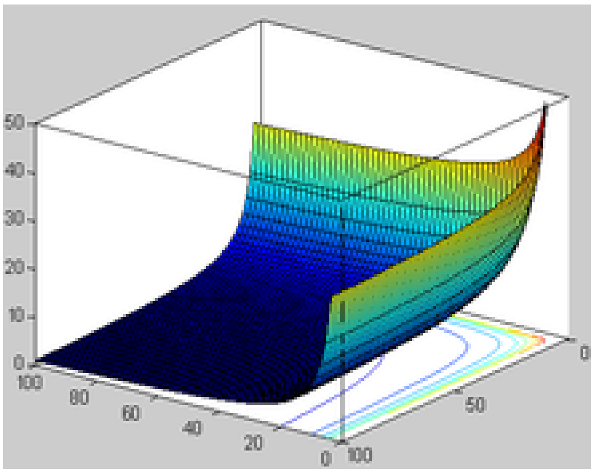
Elle fait partie des fonctions de base de calcule fractionnaire cette fonction joue un rôle très important quand elle est combinée avec la fonction Gamma

Définition 1.1.2 Podlubny,1999

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes z et w par :

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, re(z) > 0, re(w) > 0 \tag{1.6}$$

en mathématiques,la fonction bêta est une des deux intégrales d'Euler,définie pour tous nombres complexes z et w de parties réelles strictement positives par :



Propriété : $\beta(z,w) = \beta(w,z)$

par exemple pour trouver :

$$\begin{aligned}\beta(2,3) &= \int_0^1 t(1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t-2t^2+t^3)dt \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

la fonction Bêta liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, re(z)>0, re(w)>0$

Démonstration 1.1.2

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{z-1}t_2^{w-1}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2\\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1}(\int_0^{+\infty} t_z^{w-1}e^{-(t_1+t_2)}dt_2)dt_1\end{aligned}$$

par changement des variables : $t_2^{'}=t_1+t_2$
on trouve :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1}dt_1\int_0^{+\infty}(t_2^{'}-t_1)^{w-1}e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}\int_0^{t_1}(t_2^{'}-t_1)^{w-1}t_1^{z-1}dt_1\end{aligned}$$

si on pose $t_1^{'}=\dfrac{t_1}{t_2}$ on arrive à :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}(\int_0^{1}(t_1^{'}t_2^{'})^{z-1}(t_2^{'}-t_1^{'}t_2^{'})^{w-1}t_2^{'}dt_1^{'}) &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}((t_2^{'})^{z+w-1}\beta(z,w)\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}(t_2^{'})^{z+w-1}dt_2^{'}\beta(z,w)\\ &= \Gamma(z+w)\beta(z,w)\end{aligned}$$

on dévisé les deux momberes sur $\Gamma(z+w)$ on trouve :

$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$

ce qui donne le résultat désiré

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des ééquations différentielles d'ordre entier.Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire,cette fonction à été introduit par **G.M.Mittag-Leffler [Mittag-leffler,1995]**

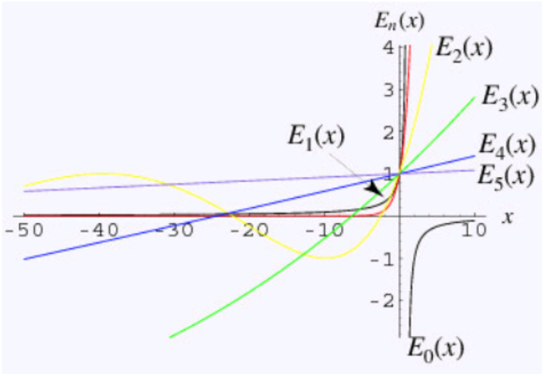
Définition 1.1.3 [Podlubny,1999] voir [2]

pour $z\in\mathbb{C}$ la fonction de Mittag-Leffler E_α est définie comme suit :

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \alpha>0 \tag{1.7}$$

En particulier :

et **(1.7)** peut construire sa figure comme suit :



tq : $E_\alpha(z) = E_\alpha(x)$

$E_\alpha(z) = e^z, E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$

Cette fonction peut-être généralisée à deux paramètres pour donner :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k+\beta)}, \alpha > 0, \beta > 0$$

Exemple 1.1.3 Pour deux valeurs spéciales donnée à α et β on a :

$$* E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n!} = e^x$$

$$* E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(n+1)!} = \frac{e^z-1}{z}$$

$$* E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z-1-z}{z^2}$$

1.2 Intégrale et Dérivées fractionnaires

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, y compris quelques leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

1.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

soit une fonction continue de $[a,b] dans \mathbb{R}$ On considère les intégrales suivantes :

$$(If)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{1.8}$$

pour une primitive d'ordre 2 ona :

$$\begin{aligned}(I^2 f(t)) &= \int_a^t (If)dx \\ &= \int_a^t (\int_a^x f(\tau)d\tau)dx \\ &= \int_a^t (t-x)f(x)dx \end{aligned} \tag{1.9}$$

En répétant n fois on obtient la relation suivant :

$$(I^n f(t)) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau, t > 0, n \in N^* \tag{1.10}$$

On utilise la fonction Gamma-Euler (1)

$$\Gamma(x) = \int_a^{+\infty} e^{-1} t^{x-1} dt$$

pour $re(x) > 0$ on aura la définition suivant :

Définition 1.2.1
soit $\alpha > 0$ L'opérateur I_a^α définit sur $L_1[a,b]$ par :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \alpha > 0 \tag{1.11}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann - Liouville d'ordre α

Exemple 1.2.1

On calcule l'intégration fractionnaire de Riemann- Louville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f tq :$f(t) = (t-a)^n, a \in \mathbb{R}, n > -1$ Ona :

$$I_a^\alpha (t-a)^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^n dx$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} (t-a)^{\alpha+n}$$

pour $\alpha = 0.5, n = 1, et, a = 0$ on aura :

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (t)^{1.5}$$
$$= \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}$$

Exemple 1.2.2

calculons l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f tq :
$f(x) = e^{\lambda.x}, \lambda > 0$ est :

$$I^\alpha(e^{\lambda.x}) = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda.x}$$

Exemple 1.2.3

l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α,($\alpha \in \mathbb{R}$) d'une fonction constante $f(x) = c$ est :

$$I_a^\alpha(c) = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

Remarque 1.2.1 :

plus généralement la nième itération de l'opérateur I pour s'écrire :

$$I^n f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_n} f(x_n) dx_n \quad \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \tag{1.13}$$

pour tout entier n cette formule est appelée formule de Cauchy et de puis la généréalisation du factoriel par la fonction Gamma :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Définition 1.2.2 :

soit $f \in [a,b], a \in R_+$ l'intégrale :

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha)} f(t) dt \tag{1.14}$$

tq $a \in]-\infty; +\infty[$ est appelé intégrale fractionnaire (à gauche de Riemann-Liouville) d'ordre α et intégrale :

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \tag{1.15}$$

tq $b \in]-\infty; +\infty[$ est appelée intégrale fractionnaire (à droite de Riemann-Liouville d'ordre α)

1.3 Dérivation fractionnaires

le calcul fractionnaire est la généralisation de la dérivée et de l'intégrale d'ordre entier pour inclure l'ordre non entier (fractionnaire).Dans ce cas, plusieurs définitions existent.Avant de les présenter ,on commence par la présentation de fonction $\Gamma(t)$ très utilisée en calcul fractionnaire.

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 < p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Définition 1.3.1

si $\alpha > 0$, alors nous définissons

$$^{RL}D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, m-1 < \alpha < m \\ \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), \alpha = m, m \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{1.17}$$

D'autre part , si $\alpha < 0$ on note par $D^\alpha f(t) = I^{-\alpha} f(t)$.
La définition peut -être aussi appliquée et $D^\alpha f(t)$ existe pour f une fonction continue sur$[0, +\infty[$
cette dérivation d'ordre fractionnaire peut -être aussi définie par la formule suivante :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \lceil I^{(m-\alpha)} f(t) \rceil \tag{1.18}$$

Exemple 1.3.1

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante .En général la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante ni nulle ni constante on a :

$$^{RL}D^\alpha (c) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

Exemple 1.3.2

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f telle que :
soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > -1$ alors on a :

$$^{RL}D(t-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\alpha)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau \tag{1.19}$$

En faisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds$$

$$=\frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\beta(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.20}$$

pour $\alpha = 0.5, \beta = 0.5eta = 0$ on aura $^{RL}D^{0.5}t^{0.5}=\frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)}=\Gamma(1.5)$

1.3.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.3.2.1 (voir [4] et [5]) la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définit par :

$$^{C}D^{\alpha}f(t)=I^{m-\alpha}D^{m}f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, m-1<\alpha<m\\ \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), \alpha=m\end{cases} \tag{1.21}$$

lemme :

$$m-1<\alpha\leq m, m\in N^{*}\Rightarrow {}^{R}D^{\alpha}I^{\alpha}f(t)=f(t)$$

et

$$I(^{C}D^{\alpha}f(t))=f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0^{+}), t>0$$

$$(^{C}D^{\alpha}f(t))=(^{RL}D^{\alpha}f)(t)-\sum_{K=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha}$$

En particulier ,si$0<\alpha<1$, on a :
$^{C}D^{\alpha}f)(t)=(^{RL}D^{\alpha}f)(t)-\frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}$
Dans le cas ou $f(0)=f^{1}(0)=...=f^{(m-1)}(0)=0$

la dérivée au sens de Caputo coïncide avec de Riemann-Liouville pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$,c'est à dire :

$(^{C}D^{\alpha}f)(t)=(^{RL}D^{\alpha}f)(t)$
Définition 1.3.2.2

Soit $u\in C^{n}_{-1}, n\in N^{*}$, la dérivée fractionnaire de Caputo (à gauche) de u définie pour $t>0$ par :

$$^{C}D^{\alpha}_{t}u(x,t)=\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{dt^n}u(x,t)d\tau) \quad , n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^{*}\\ \\ \frac{d^n}{dt^n}u(x,t) \quad ,\alpha=n\in\mathbb{N}\end{cases} \tag{1.22}$$

1.3.3 Comparaison entre la dérivation fractionnaire au sens de caputo et celle de Riemaa-Liouville

(voir[1]) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d' ordre α d' une fonction constante est donnée par :

$$
{}^{RL}D_a^\alpha(c) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}
$$
$$
{}^{RL}D_{b^-}^\alpha(c) = 0
$$

mais la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α d'une fonction constante est nulle ${}^{C}D_a^\alpha(c) = 0$

1.3.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

La linéarité

$$
D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t) \tag{1.23}
$$

Démonstration 1.3.4

Par exemple,pour l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p \quad (k-1 \leq p < k)$

$$
D_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1}(\lambda f(\tau) + \mu g(\tau))d\tau
$$

$$
= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau)d\tau + \frac{\mu}{(\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau)d\tau
$$

$$
= \lambda_0 D_t^p f(t) + \mu_0 D_t^p g(t)
$$

Définition 1.3.4 (Règle de Leibniz)

On sait que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée nième du produit de deux fonctions $f(t)$,$g(t)$, ce qui est donné par la relation suivante :

$$
\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \tag{1.24}
$$

En remplaçant l'entier n par un paramètre réel p, dans le membre à droite de (1.24), on obtient la formule :

$$
D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t) - R_n^p, n \geq p+1 \tag{1.25}
$$

ou :

$$
R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau)d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi \tag{1.26}
$$

tq :

$$
\lim_{n \to +\infty} R(t) = 0
$$

Alors on a une généralisation de la règle de Leibniz d'ordre fractionnaire.
Si f et g sont continues dans [a ;t] ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t)$$

$D^p = D^\alpha$: c'est à-dire la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

1.4 Transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace est un 'outil extrêmement utile pour résoudre de problèmes de valeurs initiales linéaires (d'ordre non entier ou classiques)
Définition 1.4.1 (voir [3])

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = L\{f(t), s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \qquad (1.27)$$

est appelée transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

Remarque 1.4.1

* Pour l'existence de l'intégrale **(1.27)** la fonction **f(t)** doit être d'ordre exponentiel α
* On peut trouver l'originale $f(t)$ de la transformée de Laplace $F(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse.
* On noté la transformée de Laplace par des lettres majuscules et les originaux en minuscules.

- **la transformée de Laplace inverse est :**

$$f(t) = L^{-1}\{F(s), t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \qquad (1.28)$$

$c = Re(s) > c_0$

s : variable complexe ou c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.
Pour indiquer que **f** est la transformée inverse unique de **F**.
Propriétés de la transformée de Laplace
* $f^{-1}(t) = L^{-1}F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$

* Linéarité : $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$

* Dérivation : $L\{f^{(n)}\}(t) = s^n L\{f(s)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$

* Intégration :$L\{\int_a^t f(u)du\} = \frac{1}{s} L\{f\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(u)du$

* Convolution :$L\{f \times g\} = L\{f\} \times L\{g\}$

* **Exemple 1.4.1** La transformation de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est :

$L\lceil t^{\alpha-1} \rceil (s) = \Gamma(p) s^{-\alpha}$

1.5 Équation différentielles d'ordre non entier

On considérons équation différentielle d'ordre non entier à coefficients constants suivant :

$$D_a^{\alpha} y(t) = f(t), (n-1 \leq \alpha < n), \tag{1.29}$$

avec

$$\lceil D^{\alpha-k-1} y(t) \rceil_{t=0} = 0 (k = 0, 1, ...n-1) \tag{1.30}$$

Appliquant la transformée de Laplace sur les deux mombres de l'équation **(1.29)** nous obtenons :

$as^{\alpha} y(s) = F(s)$ et comme $G_1(t) = L^{-1} \lceil \frac{1}{as^{\alpha}} \rceil = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)}$

ou $G_1(t)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à un seul terme sous les conditions initiales données, la solution $y(t)$ de l'équation **(1.29)** est obtenue par la convolution :

$$y(t) = \int_0^t G_1(t-s) f(s) ds \qquad = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{a} I_0^{\alpha} f(t) \tag{1.31}$$

Exemple 1.5
si nous prenons $a = 1$,$f(t) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$
l'équation est devenue

$$D_0^{\frac{1}{2}} y(t) = 1 \tag{1.32}$$

avec

$$\lceil D^{\alpha-1} y(t) \rceil_{t=0} = 0 \tag{1.33}$$

1.5.1 Équation différentielle fractionnaire à un seul termes

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire à coefficients constants suivante :

$$D_a^{\alpha} y(t) + by(t) = f(t), (n-1 \leq \alpha < n) \tag{1.34}$$

avec les mêmes conditions définies par**(1.33)** l'utilisation de la transformée de Laplace donne :

$$as^{\alpha} y(s) + by(s) = F(s). \tag{1.35}$$

nous pouvons aussi écrire**(1.35)**sous la forme

$$y(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s^{\alpha} + \frac{b}{a}} F(s) \tag{1.36}$$

et comme

$$G_1 = L^{-1} \{ \frac{1}{as^{\alpha}} \} = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}$$

ou$G_1(t)$est appelée la fonction fractionnaire de Gréen à un seul terme sous les conditions initiales données, la solution $y(t)$ de l'équation **(1.29)** est obtenue par la convolution :

$$y(t) = \int_0^t G_1(t-s) f(s) ds = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{a} I_0^{\alpha} f(t) \tag{1.37}$$

Exemple 1.5.1
si nous prenons $a = 1$,$f(t) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$
l'équation est devenue

$$D_0^{\frac{1}{2}} y(t) = 1 \tag{1.38}$$

avec

$$\lceil D^{\alpha-1} y(t) \rceil_{t=0} = 0 \tag{1.39}$$

1.5.2 Équation différentielle fractionnaire à deux termes

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire à coefficients constants suivante :

$$D_a^{\alpha} y(t) + by(t) = f(t), (n-1 \leq \alpha < n) \tag{1.40}$$

avec les mêmes conditions définies par **(1.33)** l'utilisation de la transformée de Laplace donne :

$$as^{\alpha} y(s) + by(s) = F(s). \tag{1.41}$$

nous pouvons aussi écrire**(1.41)**sous la forme

$$y(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s^{\alpha} + \frac{b}{a}} F(s) \tag{1.42}$$

et comme

$G_2(t) = L^{-1}\{\frac{1}{a} \frac{1}{s^{\alpha} + \frac{b}{a}}\} = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\frac{b}{a} t^{\alpha})$, ou $G_2(t)$ est appelée la fonction de Green à deux termes,et $E_{\alpha,\beta}$ la fonction Mittag-Leffler de deux paramètres.

la solution $y(t)$ de l'équation **(1.29)** est obtenue par la convolution

$$y(t) = \int_0^t G_2(t-s) f(s) ds.$$

Exemple 1.5.2 si nous prenons $a = 1, b = 1, f(t) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ nous

obtenons :

$$D_0^{\frac{1}{2}} y(t) + y(t) = 1$$

avec méme condition initial**(1.33)** la fonction de Green est donnée par :
$G_2(t) = t^{\frac{-1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-t^{\frac{1}{2}}$ et comme $y(t) = \int_0^t G_2(t-s) de$ la solution prend la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\int_0^t s^{\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-s^{\frac{1}{2}}) ds \\ &= -\sqrt{t} E_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(-\sqrt{t}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{\frac{1}{2}(k+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

1.5.3 Équation différentielle fractionnaire à trois termes

Nous considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$D_a^{\beta} y(t) + bD_0^{\alpha} y(t) + cy(t) = f(t), \quad (n-1 \leqslant \alpha < \beta < n), \tag{1.43}$$

avec les condition **(1.30)** est

$\lceil D^{\beta-k-1} y(t) \rceil_{t=0} = 0$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$ sous ces conditions

la transformées de Laplace donne

$y(s) = \dfrac{1}{as^{\beta} + bs^{\alpha} + c} F(s).$

nous posons $\quad g(s) = \dfrac{1}{as^{\beta} + bs^{\alpha} + c} \quad$ et comme nous avons supposé que

$\beta > \alpha$, nous pouvons écrire $g(s)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{c} \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b} \quad \frac{1}{1 + \dfrac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b}} \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\frac{c}{a})^{k+1} \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(s^{\beta-\alpha+\frac{b}{a}})^{k+1}} \end{aligned} \tag{1.44}$$

Nous appliquons la transformée inverse de Laplace sur les deux membres de **(1.36)** on obtient :

Finalement ,la solution de l'équation **(1.36)** est donnée sous forme de convolution définie par :

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-s) f(s) f(s) ds$$

Exemple 1.5.3

si nous prenons $a = 1, b = 1, c = 1, f(t) = 1, \alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, alors l'équation **(1.37)** est écrite sous forme

$$D_0^{\beta} y(t) + D_0^{\alpha} y(t) + y(t) = 1$$

et la fonction G_3définie par

$$G_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{\frac{1}{2}(3k+1)} E^{(k)}_{1,\frac{1}{2}(3+k)}(-t)$$

Chapitre 2

Etude de quelque problèmes d'existence et d'unicité

2.1 Théorème du point fixe

Nous présentons le théorème classique du point fixe de Banach dans une espace métrique complet.

Théorème :2.1
Soit (U, d) un espace métrique complet non vide , soit $0 < \omega \leq 1$ et on a $T : U \longrightarrow U$ un contractante telle que , pour chaque $u, v \in U$ la relation :

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v) \tag{2.1}$$

est vérifiée Alors l'opérateur T a une point fixe unique $u^* \in U$ En autre si $T^k (k \in \mathbb{N})$ est la séquence des opérateurs définis par :

$T^1 = T$ et

$$T^k = TT^{k-1} (k \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

alors pour tout $u_0 \in U$ la séquence $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers la point fixe u^*
Nous notons que si la contractante $T : U \longrightarrow U$ vérifiée la condition **(2.2)** est appelée une contraction ou une application contractive.

2.2 Équivalence entre le problème de type Cauchy et l'équation intégrale de Volterra

Dans cette section nous montrons que le problème de type Cauchy suivant :

$$D_{a_+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)); (0 < \alpha < 1, t > a) \tag{2.3}$$

$$D_{a^+}^{\alpha-1} y(a_+) = b; b \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

et l'équation intégrale de Volterra :

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, (t > a) \tag{2.5}$$

sont équivalentes dans le sens que ,si $y(t) \in L(a, b)$.

Lemme 2.2.1
l'opérateur d'intégration fractionnaire $I_{a^+}^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}(0 < \alpha < 1)$ est borné dans $L(a, b)$

$$\|I_{a^+}^{\alpha} g\| \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|g\|_1 \tag{2.6}$$

Preuve 2.2.1 soit $y \in L(a,b)$ nos prouvons pour n'importe quel $t \in [a,b]$ que **(3.1.2)** est vérifiée :
nous avons

$$I_{a^+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \tag{2.7}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\|I_{a^+}^{\alpha}\| = \|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t |(t-s)^{\alpha-1}| \|g\|_1 ds \\
&\leq \frac{\|g\|_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \qquad (t-s>0) \\
&\leq \frac{\|g\|_1}{\Gamma(\alpha)} \lceil -\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} \rceil_a^t \\
&\leq \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|g\|_1
\end{aligned}$$

car $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$,et comme $(t-a) \leq (b-a)$ nos obtonons

$$\|I_{a^+}^{\alpha} g\| \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|g\|_1$$

Théorème 2.2.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}(0 < \alpha < 1)$ soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que
$f(t,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$
si $y(t) \in L(a,b)$ alors $y(t)$ satisfait les relation **(2.3) et (2.4)** si et seulement si ,$y(t)$ satisfait l'équation intégrale **(2.5)**

Preuve 2.2.2

D'abord nous prouvons la nécessité .Soit $y(t) \in L(a,b)$ satisfait les relations **(2.3) et (2.4)** depuis que
$f(t,y) \in L(a,b)$

$$D_{a^+}^{\alpha} y(t) = \frac{d}{dt}(I_{a^+}^{1-\alpha} y)(t), (I_{a^+}^{0} y)(t) = y(t) \tag{2.8}$$

et d'après **(3.4.2)** nous voyons que $I_{a^+}^{1-\alpha}y(t) \in AC^1[a,b]$.Et comme

$I_{a^+}^{1-\alpha}y(t) = D_{a^+}^{\alpha-1}y(t)$ alors $D_{a^+}^{\alpha-1}y(t) \in AC^1[a,b]$ selon Lemme ...

l'intégrale $I_{a+}^{\alpha}f(s,y(s))$ existe dans $L(a,b)$. Appliquons l'opérateur $I_{a^+}^{\alpha}$ sur les deux côtés de ...

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y(t) = I_{a+}^{\alpha}f(t,y(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \end{aligned} \tag{2.9}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y(t) &= y(t) - \frac{D_{a^+}^{\alpha-1}y(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-\alpha)^{\alpha-1} \\ &= y(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

D'après **(2.9) et (2.10)** nous obtenons :

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds, (t > a) \tag{2.11}$$

avec $0 < \alpha < 1$,et par conséquent la nécessité est prouvée.

Maintenant nous prouvons suffisant.soit $y(t) \in L(a,b)$ satisfait l'équation **(2.7)** .Appliquons l'opérateur $D_{a^+}^{\alpha}$ aux deux cotés de **(2.7)** nous avons

$$D_{a+}^{\alpha}y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-1}) + (D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f(t,y(t)) \tag{2.12}$$

D'après

$$D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-\beta}$$

nous avons $D^{\alpha}(t-a)^{\alpha-1} = 0$ car $\alpha > \alpha - 1$ et selon la relation :

$D_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f(t) = I_{a^+}^{\alpha-\beta}f(t)$ tq :$\alpha > \beta > 0$ et

$f(t) \in L_p(a,b), (1\ leqp \leq \infty$ nous obtenons :

$$D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f(t,y(t)) = I_{a^+}^{\alpha-\alpha}f(t,y(t)) = f(t,y(t)) \tag{2.13}$$

Par conséquent (3.7.2) prend la forme :

$$D_{a+}^{\alpha}y(t) = f(t,y(t)), (0 < \alpha < 1, t > a)$$

et donc nous arrivons à l'équation (2.1)

Maintenant nous pouvions que la relation **(2.4)** aussi réalise.pour ceci nous appliquons l'opérateur $D_{a^+}^{\alpha-1}$ aux deux cotés de **(2.11)**

$$D_{a^+}^{\alpha-1}y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(D_{a^+}^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha-1}) + (D_{a^+}^{\alpha-1}I_{a^+}^{\alpha}f(t,y(t)) \tag{2.14}$$

d'apré la relation$D_{a^+}^{\alpha-1}(t-a)^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$ nous trouvons que :

$$D_{a^+}^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\alpha) \tag{2.15}$$

et selon la relation

$$D_{a^+}^{\beta}I_{a^+}^{\alpha}f(t) = I_{a^+}^{\alpha-\beta}f(t) \tag{2.16}$$

tq : $\alpha > \beta > 0$ et $f(t) \in L(a,b)$,$(1 \leq p \leq \infty$ nous avons :

$$D_{a^+}^{\alpha-1}I_{a^+}^{\alpha}f(t,y(t)) = I^{\alpha-\alpha+1}f(t,y(t)) = I_{a^+}f(t,y(t)) \qquad = \int_a^t f(s,y(s))ds \tag{2.17}$$

D'après **(2.14)** **(2.15)et** **(2.16)** nous arrivons à

$$D_{a^+}^{\alpha-1}y(t) = b + \int_a^t f(s,y(s))ds \tag{2.18}$$

Nous parlons dans **(2.16)** la limite $t \longrightarrow a^+$ nous obtenons la relation :
$D_{a^+}^{\alpha-1}y(a^+) = b$
Ainsi la suffisance est prouvée , qui accomplit la preuve du théorème **(2.2.1)**

Résultat :

Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : (a,b) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction tq : $f(t,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$
si $y(t) \in L(a,b)$ alors $y(t)$ satisfait les relations **(2.3) et (2.4)**si,et seulement si $y(t)$ satisfait l'équation intégrale

2.3 Quelques résultats d' existence et unicité de la solution du problème de type Cauchy

Dans cette section nous établissons l'existence d'une solution unique au problème (2.3) (2.4) de type cauchy dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$ défini dans (2.5) sous les conditions du théorème (2.2.1) et la condition de Lipschitz sur $f(t,y)$ par rapport à la deuxième variable .pour tout $y_1, y_2 \in G \subset \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq A|y_1 - y_2| \quad (A > 0), \tag{2.20}$$

ou $A > 0$ ne dépend pas de $t \in [a,b]$

théorème 2.3.1

soit $\alpha \in \mathbb{R}(0 < \alpha < 1)$ soit G un ensemble ouvert dans R et $f : (a,b) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction tq : $f(t,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$ et la condition **(2.17)** est satisfaite.
Alors il existe une solution unique $y(t)$ au problème de type Cauchy **(2.3)** **(2.4)** dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$

preuve 2.3.1

d'abord nous prouvons l'existence d'une solution unique $y(t) \in L(a,b)$ selon le théorème **(2.1.2)** il est suffisant de prouver l' existence d'une solution unique $y(t) \in L(a,b)$ à l'équation intégrale non linéaire **(2.5)** de Volterra . pour ceci nous appliquons la méthode connue, pour des équations intégrales non linéaires de Volterra de prouver d'abord le résultat sur une partie de l'intervalle $[a,b]$
l'équation **(2.5)** semble raisonnable dans n'importe quelle intervalle $[a,t_1] \subset [a,b]$ $(a < t_1 < b)$ choisissons t_1 telle que l'inégalité

$$A\frac{(t_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<1 \tag{2.18}$$

est vérifiée, et puis prouvons l'existence d'une solution unique $y(t)\in L(a,t_1)$ à l'équation **(2.5)** sur l'intervalle $[a,t_1]$ .pour ceci nous utilisons le théorème **(1.1.2)** du point fixe de Banach pour l'espace $L(a,t_1)$, qu'est clairement un espace métrique et avec la distance :

$$d(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|=\int_a^{t_1}|y_1(t)-y_2(t)|dt \tag{2.19}$$

Nous récrivons l'équation intégrale **(2.5)** sous la forme $y(t)=(Ty)(t)$,ou

$$(Ty)(t)=y_0(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \tag{2.20}$$

avec

$$y_0=\frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} \tag{2.21}$$

pour applique le théorème **(1.1.2)** de point fixe nous devons prouver ce qui suit :
1* si $y(t)\in L(a,t_1)$,alors $(Ty)\in L(a,t_1)$
2* pour toutes $y_1,y_2\in L(at_1)$ l'évaluation suivante est vérifiée :

$$\|Ty_1-Ty_2\|_1\leq\omega\|y_1-y_2\|_1,\omega=A\frac{(t_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.22}$$

Il découle de **(2.21)** que $y_0(t)\in L(a,t_1)$.Depuis que $f(t,y)\in L(a,b)$, et d'après le Lemme **(3.1.2)** avec $b=t_1$ et $g(t)=f(t,y(t))$ l'intégrale dans le côté droit de **(2.20)** appartient également à $L(a,t_1)$ et par conséquent $(Ty)(t)\in L(a,t_1)$ Maintenant nous prouvons l'évaluation (2.22). D'après (2.20), (2.21) et la définition de $L^\alpha(a,b)$ tq $L^\alpha(a,b)=\{y\in L(a,b);D^\alpha_{a+}\in L(a,b)$ utilisons la condition de Lipschitz (2.17) et appliquons la relation

$$\|I^\alpha_{a+}g\|_1\leq\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_1$$

avec ($b=t_1$ et $g(t)=f(ty_1(t)-f(t,y_2))$ nous avons :

$$\begin{aligned}\|Ty_1-Ty_2\|_{L(a,t_1)}&\leq\|I^\alpha_{a+}[|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|]\|_{L(a,t_1)}\\&\leq A\ \|\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t_1-s)^{\alpha-1}|Y_1(s)-y_2(s)|ds\ \|_{L(a,t_1)}\\&\leq\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\|y_1-y_2\|_{L(a,t_1}\int_a^t(t_1-s)^{\alpha-1}ds\\&\leq A\frac{(t_1-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{L(a,t_1)}=\omega\|y_1-y_2\|_{L(a,t_1}\end{aligned}$$

ce qui donne (2.22) selon (2.18) ω vérifié $0<\omega<1$, et par conséquence (d'après le ,théorème (1.1.2) il existe une solution unique $y^*\in L(a,t_1)$ à l'équation (2.5) dans l'intervalle $[a,t_1]$
D'aprés le théoréme (1.1.2) , la solution y^* est obtenu comme une limite de la séquence convergente $(T^my_0^*(t)$:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\|T^my_0^*-y^*\|_{L(a,t_1)}=0 \tag{2.23}$$

ou y_0^* est n'importe quelle fonction dans $L(a,b)$ si au moins un $b\neq0$ dans les conditions initiales (2.3) nous prouvons prendre $y_0^*(t)=y_0(t)$ avec $y_0(t)$ définie par (2.21) d'après (2.20) , la séquence $(T^my_0^*)(t)$ est définie par la formule de récurrence suivante :

$$(T^my_0^*)(t)=y_0(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,T^{m-1}y_0^*(s))ds(m=1,2...)$$

si nous dénotons $y_m(t)=T^my_0^*(t)$ alors la dernière relation prend la forme suivante :

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{m-1}(s)) ds (m \in \mathbb{N}) \tag{2.24}$$

et (2.23) peut récrit comme suit :

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \|y_m - y^*\|_{L(a,t_1)} = 0 \tag{2.25}$$

Ceci signifie que nous avons appliqué réellement la méthode d'approximation successive pour trouver une solution unique y^* à l'équation (2.5) dans $[a, t_1]$ après, nous considérons l'intervalle $[t_1, t_2]$ ou $t_2 = t_1 + h$,$h > 0$ et vérifie $t_2 < b$ récrivons l'équation(2.5) sous la forme

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} \qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \tag{2.26}$$

Depuis que la fonction $y(t)$ est uniquement définie sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, la dernière intégrale peut-être considérer comme fonction connue et nous récrivons la dernière équation comme suit

$$y(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \tag{2.27}$$

où y_0 est défini par :

$$y_0(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \tag{2.28}$$

est la fonction connue.Utilisons les mêmes arguments comme ci-dessus, nous concluons qu'il existe une solution unique $y^* \in L(t_1, t_2)$ à l'équation (2.5) dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. Prenons l'intervalle suivant $[t_2, t_3]$ ou $t_3 = t_2 + h_2$ et $h_2 > 0$ telle que $t_3 < b$ et par la répétition de processus, nous concluons qu'il existe un solution unique $y^* \in L(a, b)$ pour l'équation intégrale (2.5) de Volterra sur l'intervalle $[a, b]$
Ainsi ,il existe une solution unique $y(t) = y^*(t) \in L(a, b)$ à l'équation intégrale (2.5) de Volterra, et par conséquent au problème de type Cauchy (2.3) (2.4).
" pour terminer la preuve du théorème (2.2.2), nous devons prouver que la solution $y(t) \in L(a, b)$ est unique appartient à l'espace $L^\alpha(a, b)$ selon (2.5) il est suffisant de prouver cela $D_{a^+}^\alpha y(t) \in L(a, b)$. D'après la preuve ci -dessus, la solution est une limite de séquence $y_m \in L(a, b)$:

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \|y_m - y\|_1 = 0 \tag{2.29}$$

avec le choix de certain y_m sur chacun,$[a, t_1], ..., [t_{m-1}, b]$. d'après (2.3) et (2.17) nous avons

$$\|D_{a^+}^\alpha y_m - D_{a^+}^\alpha y\|_1 = \|f(t, y_m) - f(t, y)\|_1 \le A \|y_m - y\|_1 \tag{2.30}$$

Ainsi d'aprés (2.29) et (2.30) nous obtenons :

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \|D_{a^+}^\alpha y_m - D_{a^+}^\alpha\|_1 = 0$$

et par conséquent $D_{a^+}^\alpha y(t) \in L(a, b)$. Ceci accomplit la preuve du Théorème (2.2.2)

Chapitre 3

Présentation de quelques méthode numériques

Pour le cas des équations différentielles fractionnaires, obtenir une solution analytique exacte est très compliquée, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques. Nous allons traiter les méthodes que nous avons déjà vu dans le cas entier.

3.1 Résolution numérique des équations différentielles d'ordre non entier

3.1 La méthode ADM (Méthode de composition d'Adomian)

La décomposition d'Adomian **(voir** [**2**] **et** [**4**]**)** est une méthode semi-analytique développée par le mathématicien américain **George Adomian** [**Adomian, 1988**] durant la seconde partie du $17^{iéme}$ siècle.
Elle est utilisée pour la résolution large éventail de problèmes dont les modèles mathématiques impliqués, à savoir les problèmes algébriques, différentiels, intégrales, intégrodifférentielle, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et les équations aux dérivées partielles.
L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré et donne la solution sous forme une série infinie, qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe [**Cherruault et al.,** 1992]

*** Description de la méthode**
considérerons l'équation fonctionnelle suivant :

$$A(u) = f, \tag{3.1}$$

Où **A** est un opérateur non linéaire (contenant des termes linéaire et des termes non linéaire)d'un espace de Hilbert H dans lui-même, et f une fonction donnée.On cherche $u \in H$solution de(2.31)
l'opérateur**A** est le terme linéaire est décomposé en :$L + R$ Où
L : est inversible
R :le Reste de l'opérateur linéaire de A est noté N O na : **A=L+R+N**
l'équation (3.1)s'écrit alors :

$$L(u) + N(u) + R(u) = f \tag{3.2}$$

si L^{-1} l'inverse de l'opérateur L :Ona l'expression

$$L^{-1}L(u) + L^{-1}N(u) + L^{-1}R(u) = L^{-1}(f)$$

d'où

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}(f) - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u) \tag{3.3}$$

donc d'où

$$L(u) = L^{-1}(f) - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u)$$

La méthode d'Adomain consiste calculer la solution sous forme d'une série

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{3.4}$$

On Remplaçant(3.4) dans(3.3) Oubtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}(f) - L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L^{-1}N(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \tag{3.5}$$

par construire la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

dont les éléments sont calculés récursivement on noté par $N(u)$ est la somme de la série

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.6}$$

Où chaque A_n est fonction de $u_0; u_1; u_2; ...; u_n$ la méthode proposer la construction d'une série de spéciaux appelés polynômes d'Adomain les quels sont Obtenus à partir des relation suivantes :

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + ... \tag{3.7}$$

$$N(u(\lambda)) = N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = ... \tag{3.8}$$

Où λ est un paramètre introduit par convenance de(3.7)et (3.8) en déduit

$$A_n = \frac{1}{n!}[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(u(\lambda))]_{\lambda=0}$$

En Remplaçant(3.6)dans(3.5) On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}(f) - L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n)$$

les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ peuvent être identifiés par les formules

$$\begin{cases} u_0 = L^{-1}(f) \\ u_1 = -L^{-1}R(u_0) - L^{-1}(A_0) \\ u_2 = -L^{-1}R(u_1) - L^{-1}(A_1) \\ u_{n+1} = -L^{-1}R(u_n) - L^{-1}(A_n) \end{cases}$$

Ainsi ,la solution (3.2) est déterminée mais en pratique les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ne peuvent étre tous calculés On utilise alors l'approximation

$$\varphi_n = \sum_{i}^{n-1} avec \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n = u$$

3.1.1 Les polynômes d'adomain

L'étape la plus importante de la méthode est celle du calcul des polynômes d'Adomian.
Définition 3.1.1.
les polynômes d'adomain sont définis par

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0), u_1, ..., u_n) = \dfrac{1}{n}[\dfrac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{i=0}^{n} \lambda^n u_i)]_{i=0} \end{cases}$$

où $A_0(u_0) = N(u_0) \quad A_1(u_0, u_1) = u_1 \dfrac{d}{du_0} N(u_0)$

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 \frac{d}{du_0} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{d^2}{du_0^2} N(u_0)$$

$A_3(u_0,u_1,u_2,u_3) = u_3\dfrac{d}{du_0}N(u_0) + u_1u_2\dfrac{d^2}{du_0}N(u_0) + \dfrac{1}{3}u_1^3\dfrac{d^3}{du_0}N(u_0)$ où

$\vdots$

$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v,n)N^v(N_0)$

où $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (devisé par $m!$)des v termes u_i dont la somme des i est égales à n, m étant le nombre de répétitions des mèmes termes dans le produit .

3.2 La méthode VIM

La méthode d'itération variationnelle (VIM) a été proposée et développée par le mathématicien chinois **Je-Haun-He** au début des années 1990 **[He,** 1999]**,[He, 2000],[He, 2007],** elle a été proposée la première fois pour résoudre de problèmes en mécanique. Cette méthode a été employée pour résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non-linéaires avec des approximations successives rapidement convergentes vers la solution exacte si elle existe. La méthode est basée sur la détermination du multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

*** Description de la méthode (voir [7])**

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$L(u) + N(u) = g(t) \tag{3.9}$$

où L est un opérateur différentiel linéaire, N est un opérateur non-linéaire et g une fonction connue. Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode d'itération variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)[L(u_n(\tau) + N(u_n(\tau)) - g(\tau)]d\tau, n \geq 0 \tag{3.10}$$

où λ est un multiplicateur générale de Lagrange. L'indice n représente la $n^{éme}$ approximation et $u_n(\tau)$ est considéré comme une variation restreinte c'est-à-dire $\delta u_n(\tau) = 0$. Pour résoudre l'équation (3.12) par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifier de manière optimale via l'intégration par parties. Alors les approximations successives un de la solution$u(t)$vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction $u_0$bien choisie (qui doit au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = u(t)$$

On considérerons l'équation fractionnaire de Riccati suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u = A(t) + B(t)u + C(t)u^2, \\ \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itération variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + I^\alpha\lambda(t)[\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} - A(t) - B(t)u_n - Cu_n^2] \tag{3.12}$$

$$Lu + Ru + Nu = g(x)$$

Par identification du multiplicateur, l'approximation s'écrit sous la forme

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)(\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} - A(t) - B(t)\tilde{u}_n - C(t)\tilde{u}_n^2)dt \tag{3.13}$$

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + I^\alpha\lambda(x)[Lu_n + R\tilde{u}_n(x) + N\tilde{u}_n(x) - g(x)]$$

Avec λ est le multiplicateur général du Lagrange, l'indice n représente la $n^{éme}$ approximation $u_n(t)$ est considéré comme étant une variation réduite c'est-à-dire

$$\delta\tilde{u}_n(t) = 0, \delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta(\int_0^x \lambda(t)\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha}dt) = 0$$

Cela conduit aux conditions stationnaires

$$1+\lambda|_{t=0}=0 \quad ,\lambda|_{t=0}=0$$

qui donne $\lambda=-1$. En substituant cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (3.13) on obtient la formule itérative :

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)-I^\alpha[\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha}-A(t)-B(t)u_n-C(t)u_n]dt \tag{3.14}$$

et la solution exacte est donnée par

$$u(x)=\lim_{n\longrightarrow\infty}u_n(x)$$

Exemple :
On considère l'équation fractionnaire de Riccati suivante :

$$\begin{cases}\dfrac{d^\alpha u}{dt^\alpha}=-u^2(t)+1\\ u(0)=0\end{cases}$$

avec $0<\alpha\leq 1$
si $\alpha=1$ la solution exacte est

$$u(t)=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

D'après l'équation (3.14) la correction fonctionnelle est donnée par :

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)-I^\alpha[\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha}+u_n^2-1]dt \tag{3.15}$$

Par la formule ditération (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
u_0(t)&=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\
u_1(t)&=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)}\\
u_2(t)&=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)}+\frac{2^{3+2\alpha}\Gamma(4\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)t^{5\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)}\\
&-\frac{64^\alpha\Gamma(2\alpha+1)^2\Gamma(\frac{1}{2}+3\alpha)t^{7\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. La nième solution approximation de la méthode des itérations variationnelles converge vers la solution exacte. Donc nous rapprochons la solution

$$u(x)=\lim_{n\longrightarrow\infty}u_n(x).$$

3.3 La méthode HPM

La méthode de perturbation d'homotopie, a été proposée et développée par le mathématicien chinois **Ji-Haun-He en 1999** [**He,** 1999],[**He, 2004**],[**He, 2006**]. Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre des problèmes de aux limites non-linéaire et à valeurs initiales. La méthode de perturbation d'homotopie, est un outil mathématique puissant pour étudier une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. Elle est obtenue avec succès par de combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation.La solution numérique selon la méthode **HPM** est de considérée une série de fonctions qui converge rapidement vers la solution exacte (quand elle existe).cette méthode permet de transformer la résolution d'une problème difficile en un problème simple à résoudre.La méthode de purturbation d'homotopie(**HPM**)est basée sur l'hypothèse de l'existence d'un petit paramètre $\rho\in[0,1]$ affublé à l'équation étudiée [**Jin,** 2008].**(voir [8] et [9])**

*** Description de la méthode**
Pour illustrer le concept de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0 \quad , r \in \Omega \tag{3.16}$$

avec les conditions aux limites :

$$B(u, \frac{du}{d\eta}) = 0, \quad r \in \Gamma \tag{3.17}$$

où A est un opérateur différentielle général, B est un opérateur définissant les conditions aux limites,$f(r)$ est une fonction analytique connue, u est la fonction inconnue et Γ la frontière du domaine Ω. D'une façon générale, l'opérateur A peut être décomposé en deux opérateurs Let N, oùL est un opérateur linéaire et$N$ est un opérateur non linéaire. Donc l'équation (2.19) peut être récrite comme suit :
$L(u) + N(u) - f(r) = 0$
On construit une homotopie $v(r,p) : \Omega \times [0,1] \longrightarrow R$, qui satisfait

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \tag{3.18}$$

où

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \tag{3.19}$$

où $r \in \Omega$,$p \in [0,1]$ est le paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de l' équation (2.19) qui satisfait les condition aux limites (3.17).
D'après les équations (3.18) et (3.19) nous avons :

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0,$$
$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0,$$

Le changement de$p$ de zéro à l'unité transorme $u_0(r)$ en u_r En topologie avec cette dernièr propriété,la fonction $v(r,p)$ est appelée homotopie .selon la métode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre ,et supposons que les solutions des équations (3.18) et (3.19) peuvent être écrites comme une série de puissance de$p$

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \tag{3.20}$$

3.4 Méthode NIM (Nouvelle méthode itérative)

Récemment, Daftardar-Gejji et Jafari [Daftardar-Gejji et Jafari, 2006] ont proposé une nouvelle technique de résolution d'équations fonctionnelles linéaires / non-linéaires appelée nouvelle méthode itérative (NIM) ou (DJM). La nouvelle méthode itérative a été largement utilisée par de nombreux chercheurs pour le traitement d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, linéaires et non linéaires d'ordre entier et fractionnaire. La méthode converge vers la solution exacte si elle existe par des approximations successives. L'avantage de cette méthode est qu'elle est facile à comprendre et à appliquer, elle fournit de meilleurs résultats et ne nécessite aucune hypothèse restrictive pour les termes non linéaires, contrairement à certaines techniques existantes.
*** Description de la méthode**

équation fonctionnelle générale suivante :

$$u = N(u) + f, \tag{3.21}$$

où N est un opérateur non-linéaire d'un espace de Banach $B \rightarrow B$et f est une fonction connue.
On cherche une solution $u$de l'équation (3.24) sous forme d'une série :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \tag{3.22}$$

L' opérateur non linéaire N peut être décomposé comme suit :

$$N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i = N(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty}\{N(\sum_{j=0}^{i} u_j) - N(\sum_{j=0}^{i-1} u_j)\} \tag{3.23}$$

À partir des équations (3.21) et (3.22), l'équation (3.23) peut être représentée sous la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + N(u_0) + \sum_{i=0}^{\infty}\{N(\sum_{j=0}^{i} u_j) - N(\sum_{j=0}^{i-1} u_j)\} \tag{3.24}$$

Nous définissons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} & u_0 = f, \\ & u_1 = N(u_0), \\ & u_{n+1} = N(\sum_{j=0}^{n} u_j) - N(\sum_{j=0}^{n-1} u_j), n = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3.25}$$

puis

$$u_1 + u_2 + ... + u_{n+1} = N(u_0 + u_1 + ... + u_n), n = 1, 2, ...,$$

et

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i)$$

Si N est une contraction, c'est-à-dire :

$$\|N(x) - N(y)\| \leq k\|x - y\|, 0 < k < 1,$$

alors, a partir de (3.25), nous avons

$$\begin{aligned} & u_0 = f, \\ & \|u_1\| = \|N(u_0)\| \leq k\|u_0\|, \\ & \|u_2\| = \|N(u_0 + u_1) - N(u_0)\| \leq k\|u_1\| \leq k^2\|u_0\| \\ & \|u_3\| = \|N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1)\| \leq k\|u_2\| \leq k^3\|u_0\| \\ & \vdots \\ & \|u_{n+1}\| = \|N(u_0 + u_1 + ... + u_n) - N(u_0 + u_1 + ... + u_{n-1})\| \\ & \leq k\|u_n\| \leq k^{n+1}\|u_0\|, n = 0, 1, 2, ..., \end{aligned}$$

et la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

converge absolument et uniformément vers une solution de l'équation (3.20), ce qui est unique du point de vu du Théorème des points fixes de Banach 1.2. Pour plus de détails, vous pouvez voir [Bhalekar et Daftardar-Gejji, 2011]. La solution approximative à n-terme de l'équation (3.20) est donnée par :

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$$

Chapitre 4

Applications et tests numériques

L'équation différentielle fractionnaire de Riccati est étudié par nombreux auteurs en utilisant différentes méthodes numériques telles que ADM, VIM et HPM. Dans ce chapitre on va essayer de résoudre l'équation de Riccati par la méthode MFTDM.

4.1 Implémentation du MFTDM pour l'équation de Riccati

Considérons l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante

$$D_t^\alpha u = P(t)u^2 + Q(t)u + R(t), 0 < t < T, 0 < \alpha \leq 1 \tag{4.1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = C$$

L'intervalle $[0;T]$ peut-être divisé en une suite de sous intervalles $[t_0;t_1]$; $[t_1;t_2]$; ...
$[t_{N-1}, t_N]$,dans les quels $t_0 = 0$,$t_N = T$ et

$$\cup_{t=0}^{N-1}\Omega_i = [0, T]$$

ou $\Omega_i = [t_i, t_{i+1}]$peuvent être choisis de la même longueur. L'équation (4.1) peut être résolue par la méthode de FTDM Comme nous voulons appliquer la méthode FTDM dans chaque sous intervalle,nous aurons bésoin d'une valeur initiale connue est celle au point $t_0 = 0$ du premier sous intervalle $[t_0, t_1]$ Pour les autres valeurs initiales, elles seront calculé partir des solutions approximatives précédentes. Alors on aura la l'algorithme suivante dans $\Omega_0 = [t_0, t_1]$

$$\begin{cases} u_{0,0}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k = C \\ u_{0,1}(t) = I^\alpha f(t, u_{0,0}) = I^\alpha [p(t)u_{0,0}^2 + Q(t)u_{0,0} + R(t)] \\ u_{0,2}(t) = I^\alpha [f(t, u_{0,0} + u_{0,1}) - I^\alpha f(t, u_{0,0})] = I^\alpha [p(t)u_{0,1}^2 + 2p(t)u_{0,0}u_{0,1} + Q(t)u_{0,1}] \\ \vdots \\ u_{0,k}(t) = I^\alpha [f(t, \sum_{j=0}^{k-1} u_{0,j}) - I^\alpha f(t, \sum_{j=0}^{k-2} u_{0,j}] \\ = I^\alpha [p(t)u_{0,k-1}^2 + 2p(t)(\sum_{j=0}^{k-2} u_{0,j})u_{0,k-1} + Q(t)u_{0,k-1}] \\ \Phi_0, N_0(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j(t)}(t), N_0 \in N - 0 \end{cases} \tag{4,2}$$

et dans chaque intervalle $\Omega_i = [t_i, t_{i+1}], (i = 1, 2, ..., N-1)$ona :

$$\begin{cases} u_{i,0}(t) = \Phi_{i-1}, N_0(t_i); \\ u_{i,1}(t) = I_{t_i}^\alpha f(t, u_{i,0}) = I_{t_i}^\alpha [p(t)u_{i,0}^2 + Q(t)u_{i,0} + R(t)] \\ u_{i,2}(t) = I_{t_i}^\alpha [f(t, u_{i,0} + u_{i,1}) - f(t, u_{i,0})] = I_{t_i}^\alpha [p(t)u_{i,1}^2 + 2p(t)u_{i,0}u_{i,1} + Q(t)u_{i,1}] \\ \vdots \\ u_{i,k}(t) = I_{t_i}^\alpha [f(t, \sum_{j=0}^{k-1} u_{i,j}) - I^\alpha f(t, \sum_{j=0}^{k-2} u_{i,j})] \\ = I_{t_i}^\alpha [p(t)u_{i,k-1}^2 + 2p(t)(\sum_{j=0}^{k-2} u_{i,j})u_{i,k-1} + Q(t)u_{i,k-1}] \\ \Phi_i, N_0(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{i,j}(t), N_0 \in N - 0, i = 1, 2, ..., N-1 \end{cases} \tag{4,3}$$

Or,la solution du problème est sous la forme suivante :

$$\Phi_{N_0}(t) = \begin{cases} \Phi_0 N_0(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j}(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ \Phi_i N_0(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j}(t), t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ i = 1, 2, ..., N-1 \end{cases}$$

Alors, cette méthode va nous donner des solutions dans chaque intervalle Ω_i qui sont continues au point t_i,i.e.,au point d' extrémité des sous-intervalles.

4.2 Exemples numérique

Exemple 4.2.1 On considère l'équation non linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$D^{0.75}(D^{1.5}y(t)) = \frac{20}{7\Gamma(0.7)x^{0.7}} + x^4 - y^2(x) \tag{4.4}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y^{'}(0) = 0$

La solution par la méthode **ADM** dans conformité avec méthode d' Adomian nous avons répéter d'écrire l'équation **(4.4)** comme suit :

$$y(x) = D^{-2.25}(\frac{20}{7\Gamma(0.7)x^{0.7} + x^4}) - D^{-2.25}(y^2(x)) \quad donc \tag{4.5}$$

nous avons la relation récursive

$$y_0(x) = D^{-2.25}(\frac{20}{7\Gamma(0.7)x^{0.7}} + x^4)$$

$$y_{n+1}(x) = D^{-2.25}(A_n(x)), n \geq 0 \tag{4.6}$$

Exemple 4.2.2
On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D^{\alpha}u(t) = -u^2, t > 0 \tag{4.7}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1 \tag{4.8}$$

La solution exacte de cette équation avec $\alpha = 1$, est $u(t) = \dfrac{1}{1+t}$ En utilisant les formules (4,5) et (4,6) avec $t_0 = 0$,$t_N = 5$,$t_{i+1} - t_i = 0.5$,$N_0 = 3$,et pour $\Omega_0 = [t_0, t_1] = [0, 0.5]$ on obtient :

$$\begin{cases} u_{0,0}(t) = 1; \\ u_{0,1}(t) = A_{0,0}t^{\alpha}, ou \ \ A_{0,0} = -\dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_{0,2}(t) = A_{0,1}t^{2\alpha} + A_{0,2}t^{3\alpha}, ouA_{0,1} = 2\dfrac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}, A_{0,2} = -\dfrac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)} \\ u_{0,3}(t) = A_{0,3}t^{3\alpha} + A_{0,4}t^{4\alpha} + A_{5,0}t^{5\alpha} + A_{0,6}t^{6\alpha} + A_{0,7}t^{7\alpha}, ou \ \ A_{0,3} = -2A_{0,1}\dfrac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}, \\ A_{0,4} = 2\dfrac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)}(-A_{0,2} + \dfrac{A_{0,1}}{\Gamma(\alpha+1)}), A_{0,5} = \dfrac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)}(-A_{0,1}^2 + \dfrac{2A_{0,1}}{\Gamma(\alpha+1)}), \\ A_{0,6} = -2A_{0,1}A_{0,2}\dfrac{\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma(6\alpha+1)}, A_{0,7} = -A_{0,2}^2\dfrac{\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(7\alpha+1)} \\ \Phi_{0,3}(t) = u_{0,0}(t) + u_{0,1}(t) + u_{0,2} + u_{0,3}(t) \end{cases}$$

pour$\alpha = 1$, on trouve :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 - \frac{1}{63}t^7$$

pour

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

on trouve :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1 - 1.11033t^{\frac{1}{4}} + 2.2568t^{\frac{1}{2}} - 5.5260t^{\frac{3}{4}} + 6.7340t - 6.7809t^{\frac{5}{4}} + 4.5151t^{\frac{3}{2}} - 1.1386t^{\frac{7}{4}}$$

pour

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\Phi_{1,3}(t) = 0.6579 &- 0.4884(t-0.5)^{\frac{1}{2}} + 0.6426(t-0.5) \\ &- 0.8646(t-0.5)^{\frac{3}{2}} + 0.6706(t-0.5)^2 \\ &- 0.4001(t-0.5)^{\frac{5}{2}} + 0.1626(t-0.5)^3 - 0.0269(t-0.5)^{\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

pour $\alpha = \frac{3}{4}$, on trouve

$$\begin{aligned}\Phi_{1,3}(t) = 0.6579 - 0.4709(t-0.5)^{\frac{3}{4}} &+ 0.4662(t-0.5)^{\frac{3}{2}} - 0.4568(t-0.5)^{\frac{9}{4}} \\ &+ 0.2795(t-0.5)^3 - 0.1294(t-0.5)^{\frac{15}{4}} \\ &+ 0.0405(t-0.5)^{\frac{9}{2}} - 0.0053(t-0.5)^{\frac{21}{2}}\end{aligned}$$

Dans $\Omega_2 = [t_2, t_3] = [1, 1.5]$ on obtient :
suivrons (4.2) et pour $\alpha = 1$ on trouve :

$$\begin{aligned}&\Phi_{2,3}(t) = 0.4936 - 0.2436(t-1) + 0.1203(t-1)^2 \\ &- 0.0594(t-1)^3 + 0.0195(t-1)^4 - 0.0048(t-1)^5 + 0.0007932(t-1)^6 + 0.00005593(t-1)^7 \\ &\vdots\end{aligned}$$

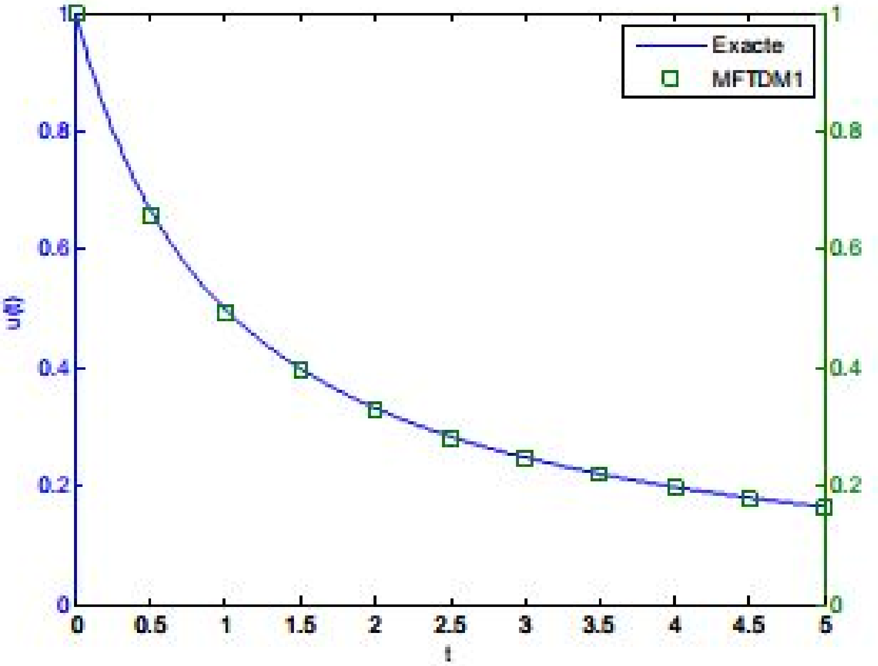
Ainsi de suite,jus qu'a $\Omega_9\Omega = [t_9, t_{10}] = [4.5, 5]$ on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_{11,3}(t) = 0.1808 - 0.0327(t-4.5) &+ 0.0059(t-4.5)^2 - 0.0011(t-4.5)^3 \\ &+ 1.288.10^{-4}(t-4.5) - 1.1643.10^{-5}(t-4.5)^5 \\ &+ 7.0169.10^{-7}(t-4.5)^6 - 1.8124.10^{-8}(t-5.5)^7\end{aligned}$$

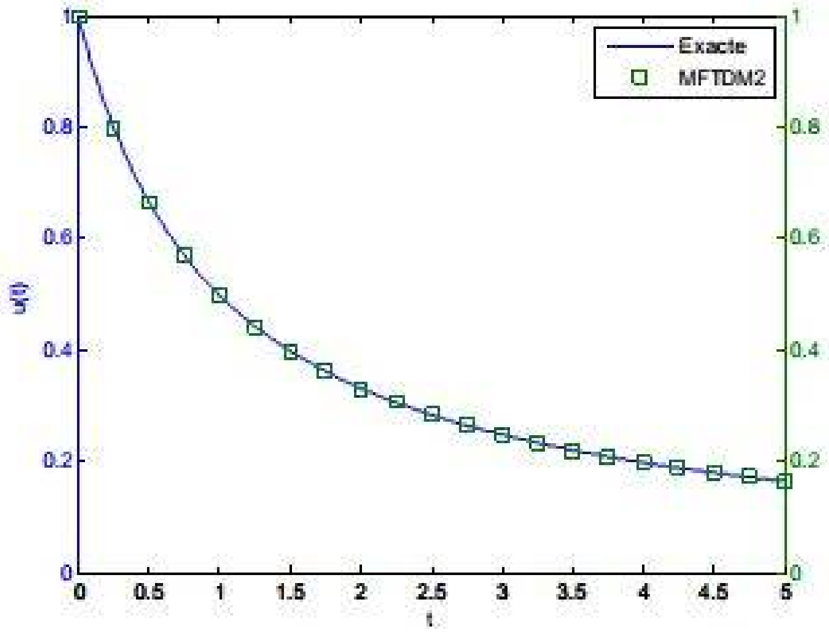
Maintenant, on donne un tableau de comparaison entre la solution exacte et les solution approximative en utilisant les méthodes ADM, FTDM, MFTDDM1 ($t_{i+1} - t_i = 0.5$) et MFTDM2 ($t_{i+1} - t_i = 0.25$) c'-à-dire comparaison entre les erreurs :

Approximation de la solution de l'équation (4,7) pour$\alpha = 1$ par MFTDM1.

t	ADM	FTDM	FTDM1	FTDM2
0	0	0	0	0
0.5	0.0417	0.0088	0.0088	0.00084743
1	0.5	0.0714	0.0064	0.00061792
1.5	2.0250	0.1868	0.0045	0.000045917
2	5.3333	0.2540	0.0033	0.0003763
2.5	11.1607	0.2325	0.0024	0.00025513
3	20.2500	0.9643	0.0019	0.00014803
3.5	33.3472	6.2526	0.0012	0.00011449
4	51.2000	26.8190	0.0012	0.00011449
4.5	74.5568	86.7611	0.00099761	0.000069719
5	104.1667	233.1349	0.00085933	0.00010401

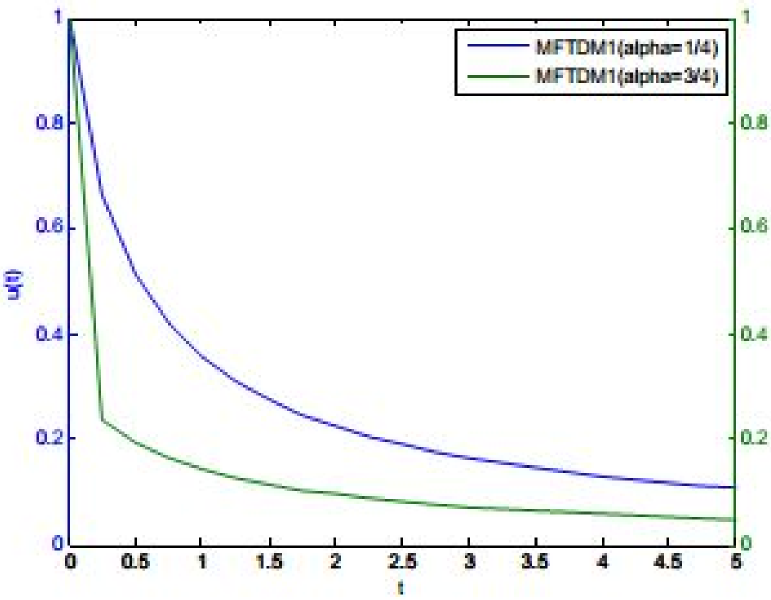


Approximation de la solution de l'équation(4,7) pour $\alpha = 1$ par MFTDM2



Approximation de la solution de l'équation (4,7) par MFTDM1 pour$(\alpha = \dfrac{1}{4}, \alpha = \frac{3}{4})$

t	VIM	FTDM	MFTDM1	MFTDM2
0	0	0	0	0
0.5	0.00025758	0.00025883	0.00025883	0.000049053
1	0.0225	0.0225	0.0039	0.00022741
1.5	0.2104	0.2111	0.0062	0.00021262
2	0.5997	0.6042	0.0049	0.00017709
2.5	0.3820	0.3622	0.0029	0.00010375
3	9.3765	9.3093	0.0014	0.00005306
3.5	44.0777	43.8865	0.00065309	0.000020676
4	142.3391	141.8628	0.00027042	0.0000012536
4.5	375.0332	373.9634	0.00011343	0.0000011825
5	863.2916	861.0793	0.00005746	0.000023861
5.5	1800.8	1795.0793	0.000033403	0.000048465
6	3481.4	3473.6	0.000012288	0.000054646



Exemple 4.2.3:
On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D^{\alpha}u(t) = 1 - u^2, t > 0 \tag{4,9}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 0 \tag{4,10}$$

La solution exacte de cette équation avec$\alpha = 1$ est

$$u(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} - 1}$$

Suivrons les méme étapes donnés dans l'exemple précédent(avec$t_{i+1} - t_i = 0.5$ pour MFTDM1 et $t_{i+1} - t_i = 0.2$ pour MDFTM2) nous pouvons obtenir les résultats suivante :

Exemple :4.2.4

On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D^{\alpha}u(t) = 1 + 2u - u^2, t > 0 \tag{4,7}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 0 \tag{4,8}$$

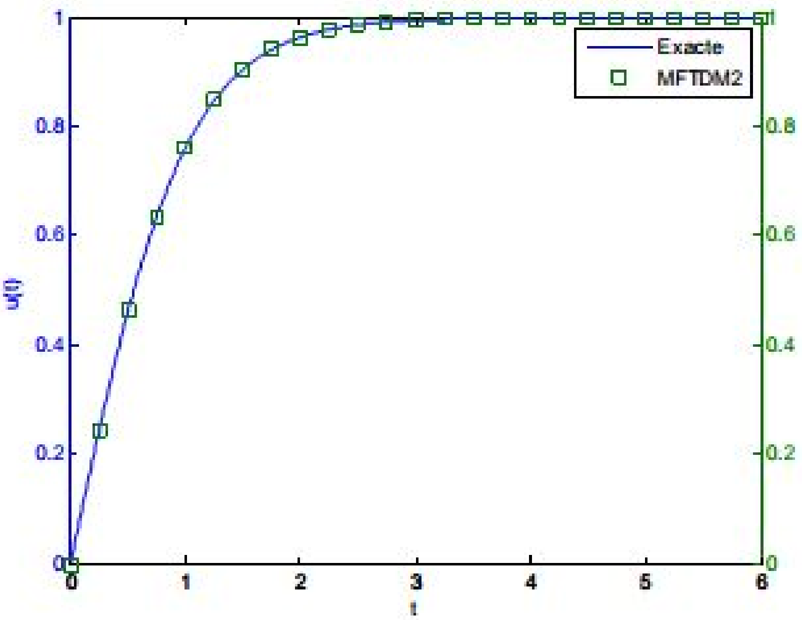
la solution exact de cette équation avec $\alpha = 1$ est :

t	HPM	FTDM	MFTDM1	MFTDM2
0	0	0	0	0
0.6	0.0011	0.0084	0.0084	0.0021
1.2	0.5878	0.0087	0.0039	0.0008417
1.8	7.6495	0.7831	0.0623	0.0048
2.4	37.8459	3.1010	0.0206	0.0022
3	121.8108	5.3251	0.0032	0.00064441
3.6	308.4643	5.1096	0.00063168	0.00016723
4.2	669.4937	6.4950	0.00011524	0.000026777
4.8	1303.7	34.3739	0.000021909	0.000015381
5.4	2341.6	158.6346	0.000004807	0.000017197
6	3949.2	530.2428	0.0000016745	0.000004853

$$u(t) = 1 + \sqrt{2}tanh(\sqrt{2}t + (\frac{1}{2})log((\sqrt{2}-1)/(\sqrt{2}+1)) \tag{4,8}$$

Suivrons les mémes étapes donnés dans les exemples précédents(avec $t_{i+1} - t_i = 0.6$ pour MFTDM1 et $t_{i+1} - t_i = 0.3$ pour MFTDM2) nous pouvons obtenir les résultat suivante :

Approximation de la solution de l'équation (4,7) par MFTDM1 pour $\alpha = 1$



Approximation de la solution de l'équation (4,7) par MFTDM2 pour$\alpha = 1$:

Exemple 4.2.5

On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D^{\alpha}u(t) = 1 + 2u - u^2, t > 0 \tag{4,11}$$

avec la condition initiale

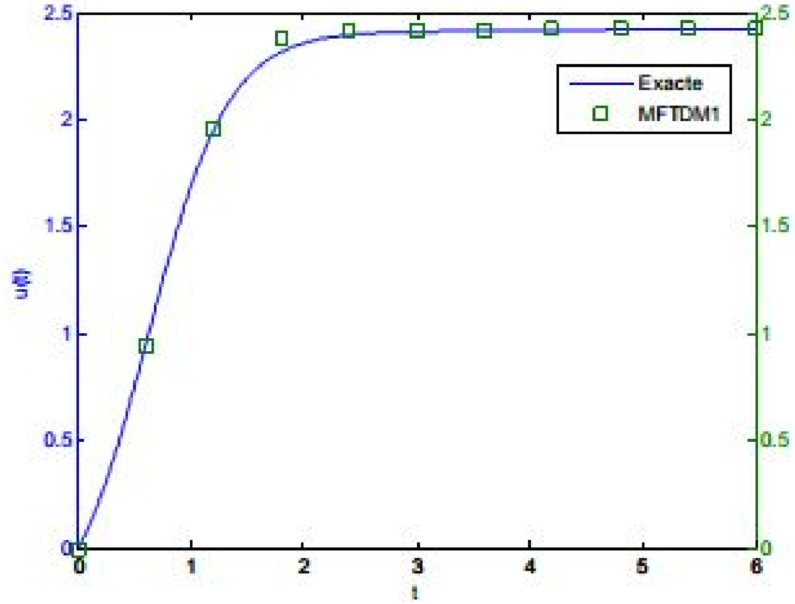
$$u(0) = 0 \tag{4,12}$$

La solution exacte de cette équation avec$\alpha = 1$ est :

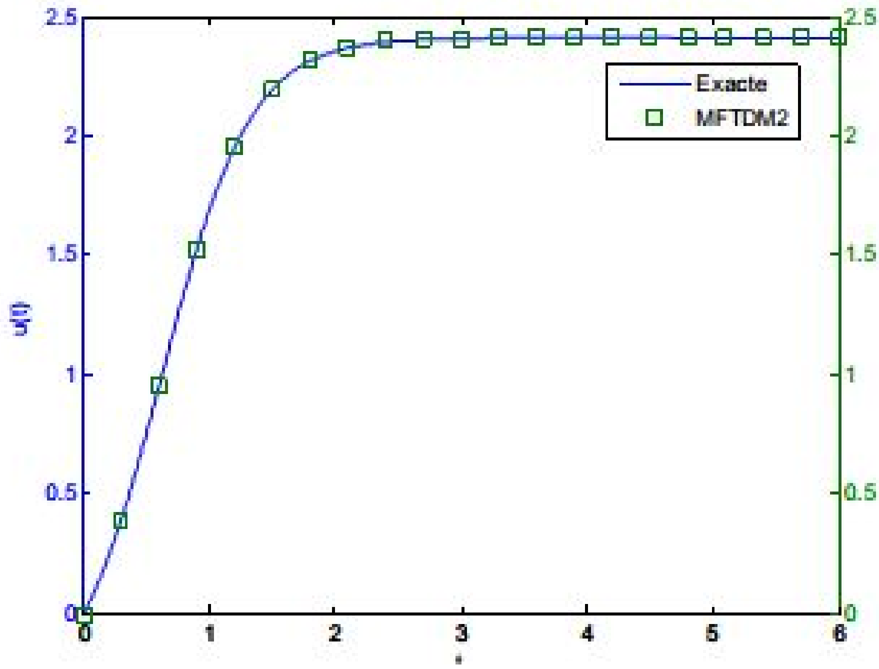
$$u(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh(\sqrt{2}t + (\frac{1}{2})\log((\sqrt{2}-1)/(\sqrt{2}+1))) \tag{4,13}$$

Suivrons les méme étapes donnés dans les exemples précédents(avec $t_{i+1} - t_i = 0.6$ pour MFTDM1 et $t_{i+1} - t_i = 0.3$ pour MFTDM2) nous pouvons obtenir les résultats suivante :

Approximation de la solution de l'équation(4,9) pour $\alpha = 1$ par MFTDM1



Approximation de la solution de l'équation(4,9) pour $\alpha = 1$ par MFTDM2



4.3 Conclusion générale

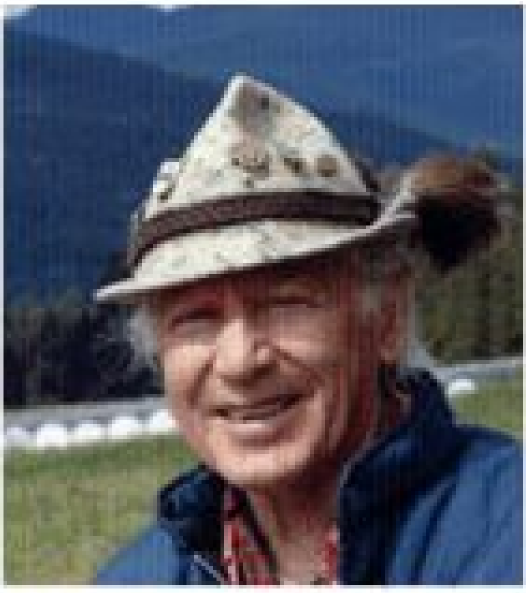
Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire quelques unes des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre non entier. Nous avons citer par exemple les méthodes ADM, VIM, HPM et MFTDM, tout en donnant une plus grande importance à la méthode MFTDM car c'est une méthode plus précise que les autres. Nous avons pris des exemples d'équation différentielle ordinaire ainsi que des équations aux dérivées partielles. Pour l'équation de Riccati, nous avons essayé de donné un algorithme de résolution de cette équation par la méthode MFTDM, puis nous sommes intéressés aux questions d'existence et d'unicité de la solution pour terminer ce travail par des résultats numériques qui assurent l' efficacité de cette méthode.

Nous comptons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autres équations, et développer d'autres méthodes numériques de résolution des équations différentielles fractionnaires, moins couteuses et plus précises que celle proposées dans ce mémoire.

4.4 Annexe

Dans ce qui suit, nous avons essayé de donner un compte rendu historique de certaines des personnalités mentionnées dans notre mémorandum, ce qui a eu un impact important sur le travail et les recherches qu'ils ont présentés au monde.

Georg Friedrich Bernhard Riemann,
né le 17 septembre 1826 à Breselenz, état de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à 'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale. En 1840, Bernhard établit à
Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au Lyceum (collège).
Après le décès de sa grand-mère en 1842,il v a à Lunebourg pour continuer ses études secondaires.Au lycée,Riemann étudie la
Bible intensivement,mais il est distrait par les mathématiques ; Il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique. En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille. En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Car Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Stiener et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Götingen sous la direction de Gauss. Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment la sphère de Riemann. Il approfondira cette théorie en 1857, en faisant progresser la théorie des fonctions abéliennes. On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales,pour suivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des fluides, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann en introduisant les invariants de Riemann.



Michèle Caputo
Anniversaire : le 5 mai 1927.
Lieu de naissance : Ferrara, Italie.
Degrés :

- 1950 Mathématiques (laurea) Université de Ferrare.
- 1955 Physique (laurea) Université de Bologne.
- 1959 Géodésie (libéra docenza) Ministère de la éducation d' Italie.

Joseph Liouville, né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d' un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul. Il est diplômé de l'école polytechnique.Deux ans plus tard, il intégré l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté des sciences de Paris sous la direction de Siméon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard. Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il est répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école polytechnique en 1838.
À côté des réussites académiques, il est un remarquable organisateur. Liouville fonde en 1836 le Journal de mathématiques pures et appliquées parfois appelé Journal de Liouville, qui garde sa haute réputation au XXIe siècle. Il publie beaucoup dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudonyme de Besge Liouville publia dans divers domaines des mathématiques,dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie

Bibliographie

[1] E. Artin, The Gamma Function, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964)

[2] R. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.

[3] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London : Springer ;1999.

[4] H. E. Roman, M. Giona, Fractional diffusion equation on fractals. J. Phys, A25 (1992), 2107- 2117.

[5] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis. 5(2002), 367-386, .

[6] M., A study on the convergence of variational iteration method. Ma- thematical and Computer Modelling, 51(2010) 1181–1192.

[7] N.H. Sweilam, M.M.Khader, A.M.Mahdy, Numerical studies for solving Fractional Di§erential Equation, Departemment of Mathematics, Cairo University, Benha University, Zagazig University, EGYPT, 2012.

[8] Biazar, J., On the convergence of homotopy perturbation method. Jour- nal of the Egyptian Mathematical Society, 23(2015) 424–428

[9] J., Ghazvini, H., Homotopy perturbation method for solving hyperbo- lic partial differential equations. Computers and Mathematics with Applica- tions, 56(2008) 453–458

[10] B. Guo, X. Pu, F. Huang. Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions, China, 2015.

[11] S.G. Samko, AA. Kilbas , O. I. Marichev,Fractional integrals and derivatives Theory and Applivations , Russian , Belarus, Yverdon, 1993

[12] Calcul des différentielles à indice quelconques, journal de l' école polytechnique, 13, section 21(1932).

[13] A.M.A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. Fract. Calc. 7 (1995), 89-100

[14] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993. K. Haouam, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires , Thèse, Constantine, 2007.

[15] A.A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Différential Equations 41 (2005), 84-89

[16] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.