

MODELISATION MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT TORRENTIEL A DEUX DIMENSIONS SPATIALES DANS UN CANAL A PENTE CONSIDERABLE

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELLING OF 2D UPERCRITICAL FLOW THROUGH CHANNEL WITH HIGH BOTTOM SLOPE

Berreksi Ali ¹, Kettab Ahmed ², Remini Boualem ³ & Benmamar Saâdia ⁴

¹ Université de Bejaia (Algérie)

Laboratoire de Recherches en Sciences de l'Eau "LRS-EAU" (E. N. Polytechnique d'Alger)

² Professeur à l'E.N. Polytechnique d'Alger (Algérie)

Directeur du laboratoire de Recherches en Sciences de l'Eau "LRS-EAU" (E. N. Polytechnique d'Alger)

³ Professeur à l'Université de Blida (Algérie)

Laboratoire de Recherches "LARHYSS" (Université de Biskra, Algérie)

⁴ Maître de Conférences à l'E. N. Polytechnique d'Alger (Algérie)

Laboratoire de Recherches en Sciences de l'Eau "LRS-EAU" (E. N. Polytechnique d'Alger)

Ali_Berreksi@yahoo.fr, Kettab@yahoo.fr, Reminib@yahoo.fr, Benmamar@yahoo.fr

Résumé :

Les écoulements à surface libre sont généralement modélisés par les équations de Saint Venant. Cependant, ces dernières ont été établies pour le cas des écoulements 1D et pour des canaux à faible pente ou presque horizontaux. Mais il se trouve que dans la réalité, on est souvent amené à étudier des écoulements dans des canaux à pente variable, tels que les coursiers d'évacuateurs de crues de surface, ce qui implique l'impossibilité d'utiliser directement les équations citées ci-dessus. Par conséquent, les équations de Saint Venant seront généralisées dans un premier temps au cas des écoulements à forte pente, et dans un second temps, au cas des écoulements 2D en régime non permanent. Le système d'équations ainsi obtenu, sera résolu moyennant le schéma aux différences finies explicite de MacCormack. Le modèle numérique élaboré sera soumis à l'épreuve en se proposant d'analyser un écoulement torrentiel bidimensionnel en régime non permanent, à travers un coursier d'évacuateur de crues à section transversale rectangulaire ayant une pente de fond assez importante.

Mots clés : Ecoulement torrentiel. Ecoulement 2D. Saint Venant. Modélisation mathématique. Modélisation numérique. Schéma explicite. Canal à forte pente.

Abstract:

The free surface flows are generally modelled by the Saint Venant equations. However, these equations were established for the cases of 1D flows and channels with negligible bottom slope or nearly horizontal. But it is that in reality, one is often brought to study flows in channels with variable slope, such as the spillways chutes, which implies impossibility of using the equations quoted previously. Consequently, the equations of Saint Venant will be generalized initially with the case of the steeply sloping flows, and in the second time, with the case of the unsteady 2D flows. The system of equations thus obtained, will be solved numerically by using the MacCormack explicit finite differences scheme. The elaborate numerical model will be subjected to the test while proposing to analyze a two-dimensional torrential unsteady flow through a rectangular spillways chute having a rather significant bottom slope.

Key words: Supercritical flow. 2D flow. Saint Venant. Mathematical modelling. Numerical modelling. Explicit Scheme. High bottom slope.

1. INTRODUCTION

L'analyse des écoulements torrentiels à deux dimensions spatiales représente un domaine d'étude assez intéressant dans le domaine de l'hydraulique des écoulements à surface libre. La modélisation mathématique de ce type d'écoulement se fait en utilisant les équations de Jean Claude Barré de Saint Venant. Ces dernières ont été établies pour la première fois en 1871 pour des écoulements à une dimension seulement, et par la suite généralisées aux cas bidimensionnel. On signale au passage que les équations de Saint Venant ont été obtenues par l'intégration suivant la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes en tenant compte de certaines hypothèses simplificatrices, appelées souvent hypothèses classiques de Saint Venant.

Dans les hypothèses simplificatrices émises par Saint Venant, on retrouve celle correspondant à une pente de fond du canal très faible ou négligeable. Par conséquent, si l'on veut modéliser un écoulement dans un canal à pente quelconque, on ne peut alors appliquer directement le système de Saint Venant, car dans la pratique on est habituellement confronté à l'étude des écoulements à travers des canaux découverts à forte pente, qu'on retrouve généralement dans plusieurs ouvrages hydrauliques, notamment les coursiers d'évacuateurs de crues. De ce fait et comme l'objectif qu'on s'est fixé est l'étude des écoulements dans des canaux à pente variable, le système d'équations de Saint Venant a été généralisé afin de tenir compte de cet état de fait.

Les équations de base régissant le phénomène analysé ne peuvent être résolues que par des méthodes numériques, vue l'impossibilité d'utiliser des méthodes analytiques. Ainsi, on a opté pour l'utilisation d'un schéma explicite aux différences finies, en l'occurrence, le schéma de MacCormack, qui est précis à l'ordre deux en espace et en temps.

Le modèle numérique élaboré a été testé sur une application traitant un écoulement surface libre torrentiel en régime non permanent à travers un coursier à section transversale rectangulaire et à forte pente. La comparaison des résultats obtenus par l'utilisation du modèle numérique avec les mesures expérimentales montre une assez bonne concordance.

2. MODELISATION MATHEMATIQUE

Les équations du mouvement gouvernant les écoulements en régime non permanent à deux dimensions spatiales dans des canaux découverts à pente variable, traités dans la présente étude, ne sont autres qu'une généralisation des équations classiques de Barré de Saint Venant. Ces équations sont cependant obtenues à partir de l'intégration suivant la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes en utilisant certaines hypothèses simplificatrices (Audusse, 2004 ; Wu, 2008 ; Yen, 1973 ; Zienkiewicz et Taylor, 2000). Les équations de base écrites sous une forme conservative (Berreksi et al., 2004 ; Berreksi et al., 2005 ; Berreksi et al., 2008 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Ikni et al., 2004 ; Molls et Zhao, 2000 ; Rao, 2004) sont comme suit :

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad (1)$$

Avec, $U_t = (h, uh, vh)^t$

$$E_x = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \\ u v h \end{bmatrix} ; \quad F_y = \begin{bmatrix} v h \\ u v h \\ v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_y \end{bmatrix} ; \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -g h (S_{0x} - S_{fx}) \\ -g h (S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Où, S_{0x} et S_{0y} sont respectivement les pentes du fond du canal selon les directions x et y , tandis que S_{fx} et S_{fy} représentent les pentes de frottement selon les mêmes directions. Par ailleurs, les quantités h , u , v et g désignent respectivement la profondeur de l'écoulement, la vitesse longitudinale suivant

la direction x , la vitesse transversale suivant la direction y et l'accélération de la pesanteur. En outre, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$S_{ox} = \sin \alpha_x \quad (3)$$

$$S_{oy} = \sin \alpha_y \quad (4)$$

Où, α_x et α_y sont les angles d'inclinaison du fond du canal selon les directions x et y respectivement. Les pentes de frottement S_{fx} et S_{fy} , déduites de la formule de Manning, s'expriment dans l'ordre par :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (5)$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (6)$$

Dans les relations (5) et (6), n et b désignent le coefficient de rugosité de Manning et la largeur du canal.

3. MODELISATION NUMERIQUE

Les écoulements non permanents à surface libre sont régis par un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique non linéaire qui a rarement une solution théorique ; par conséquent et dans de tels cas, une solution numérique s'impose d'elle-même. Pour cela, et afin de résoudre les équations du mouvement, on a opté pour l'utilisation d'un schéma aux différences finies explicite du type "Prédicteur-Correcteur", précis à l'ordre deux, en espace et en temps, en l'occurrence le schéma de MacCormack (Berreksi et al., 2008 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Fennema et Chaudhry, 1990 ; Zoppou et Roberts, 2003). Ce schéma est composé d'une étape de Prédiction, d'une étape de Correction et d'une étape de Solution au nouveau pas de temps ($k+1$) dans laquelle on utilise les valeurs calculées dans les deux premières étapes.

3.1. Schéma de MacCormack

Une classe de méthodes aux différences finies étudiée par Lax et Wendroff (Dautray et Lions, 1988) est devenue très populaire dans le calcul de la dynamique des fluides. Ces méthodes sont basées essentiellement sur un développement d'ordre deux dans le temps en série de Taylor. Au milieu de celle-ci, on trouve le schéma explicite de MacCormack (Berreksi et al., 2008 ; Fennema et Chaudhry, 1992 ; Jovanović et Djordjević, 1995 ; MacCormack, 1971), qui est l'un des plus utilisés dans l'intégration des équations du mouvement du type hyperbolique non linéaire.

3.2. Formulation générale du schéma de MacCormack

La méthodologie du schéma de MacCormack consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de *Prédiction* et une autre de *Correction*. Le but est de calculer les valeurs des variables de l'écoulement au niveau du pas de temps ($k+1$) sachant que leurs valeurs sont connues au pas de temps k .

En vue d'illustrer les principales étapes de calcul du schéma de MacCormack, considérons le système d'équations du mouvement (1) donné ci-dessus. Le schéma de MacCormack appliqué à ce système se compose de deux principales étapes, à savoir :

▪ **Etape de Prediction**

$$\tilde{U}_{i,j} = U_{i,j}^k - \tau_x (E_{i+1,j}^k - E_{i,j}^k) - \tau_y (F_{i,j+1}^k - F_{i,j}^k) - \Delta t S_{i,j}^k \quad (7)$$

▪ **Etape de Correction**

$$\hat{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i,j} - \tau_x (\tilde{E}_{i,j} - \tilde{E}_{i-1,j}) - \tau_y (\tilde{F}_{i,j} - \tilde{F}_{i,j-1}) - \Delta t \tilde{S}_{i,j} \quad (8)$$

Où, $\tau_x = \Delta t / \Delta x$ et $\tau_y = \Delta t / \Delta y$

Dans lesquelles \tilde{U} et \hat{U} sont les valeurs intermédiaires de U. La valeur de la variable U au pas de temps (k+1) est telle que :

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j}) \quad (9)$$

Les indices i et j correspondent aux points du maillage suivant les directions x et y respectivement.

Dans l'exemple développé ci-dessus, auquel le schéma de MacCormack a été appliqué, les différences finies *Avants* sont utilisées pour approximer les dérivées partielles spatiales dans l'étape *Prediction* et les différences finies *Arrières* utilisant les variables prédites, sont utilisées dans l'étape *Correction*. Cependant, il est possible d'utiliser les différences finies *Arrières* dans l'étape *Prediction* et les différences finies *Avants* dans l'étape *Correction*, comme il est possible d'alterner la direction de différenciation d'un pas de temps à l'autre.

4. APPLICATION

Dans le but de valider l'aptitude des modèles mathématique et numérique à simuler les écoulements à surface libre dans des canaux à forte pente, nous allons étudier le cas d'un coursier d'évacuateur de crues de surface en modèle réduit (ANBT, 1987), qui est composé d'un déversoir latéral, d'un bac de réception, d'un coursier à forte pente et d'un saut de ski. La partie du modèle qui nous intéresse, c'est évidemment "le coursier", qui est un canal dont la pente du radier est d'environ 28° sur une longueur de 0.74 m et possédant une section rectangulaire symétrique ayant une largeur de 0.41 m.

L'étude expérimentale a été faite (ANBT, 1987 ; Berreksi et al., 2008) avec des débits de 0.0344 m³/s (débit réel : 1000 m³/s), de 0.0689 m³/s (débit réel : 2000 m³/s) et pour un débit exceptionnel de 0.093 m³/s (débit réel : 2700 m³/s).

On va déterminer par simulation numérique l'allure de la ligne d'eau au niveau de la paroi latérale pour les trois débits précédents. Les conditions de l'écoulement dans le coursier sont résumées dans le tableau suivant :

Conditions de l'écoulement dans le coursier			
Tirant d'eau à l'amont (m)	0.0656	0.1000	0.1300
Vitesse longitudinale (m/s)	1.2800	1.6805	1.7450
Vitesse transversale (m/s)	0	0	0

Les figures (1), (2) et (3) donnent respectivement, les profils des lignes d'eau le long de la paroi latérale du canal prismatique pour les trois débits étudiés.

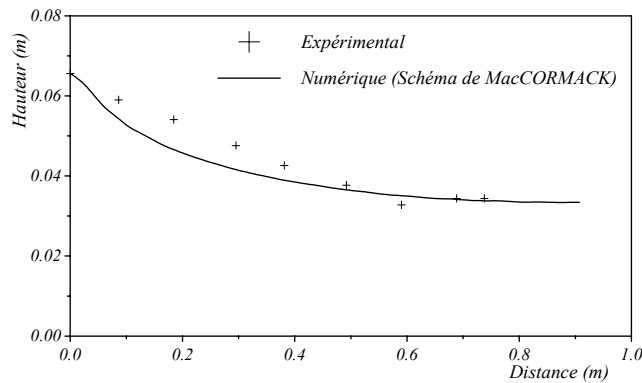


Fig 1 . Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de 0.0344 m³/s

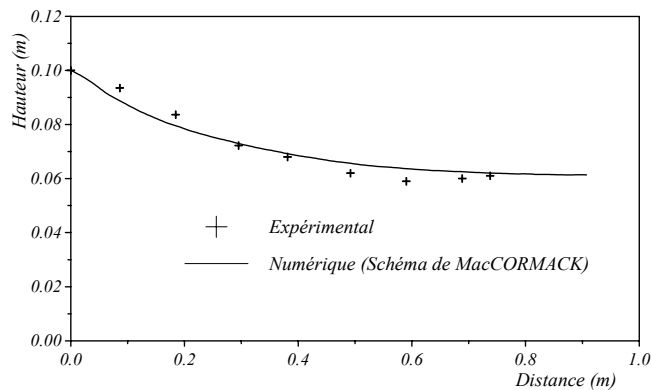


Fig 2 . Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de 0.0689 m³/s

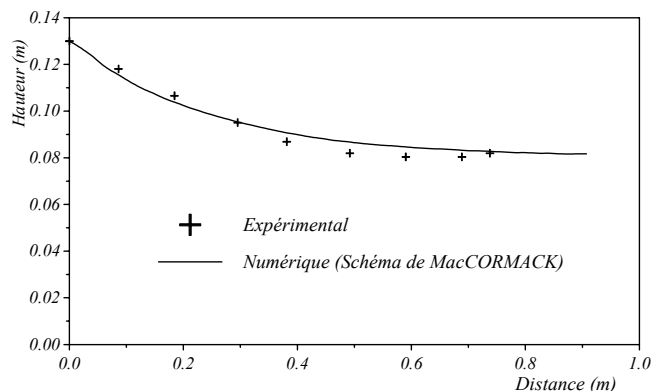


Fig 3 . Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de 0.093 m³/s

En comparant les résultats obtenus numériquement avec les mesures expérimentales, on constate une assez bonne concordance, notamment pour les débits de 0.0689 m³/s et 0.093 m³/s. Par ailleurs, on remarque aussi que la profondeur de l'écoulement diminue en fonction de la distance avec l'augmentation de la pente de fond dans un canal prismatique, ce qui est cohérent. De ce fait, on peut dire que le modèle numérique élaboré est apte à simuler les écoulements torrentiels dans des canaux à pente considérable.

Les profils de la vitesse d'écoulement au niveau de la paroi, pour les trois débits précédents, sont illustrés dans les figures (4), (5) et (6) ci-après.

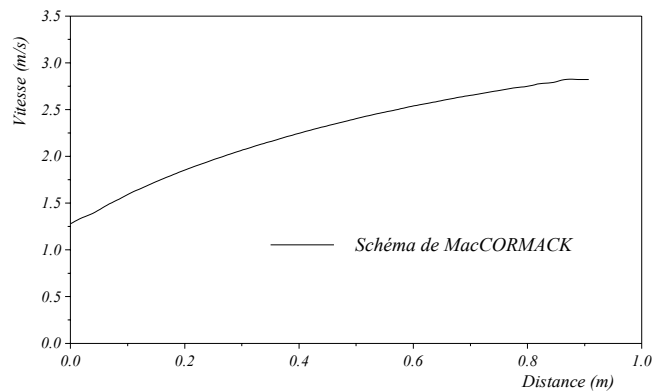


Fig 4. Profil de la vitesse le long de la paroi pour un débit de 0.0344 m³/s

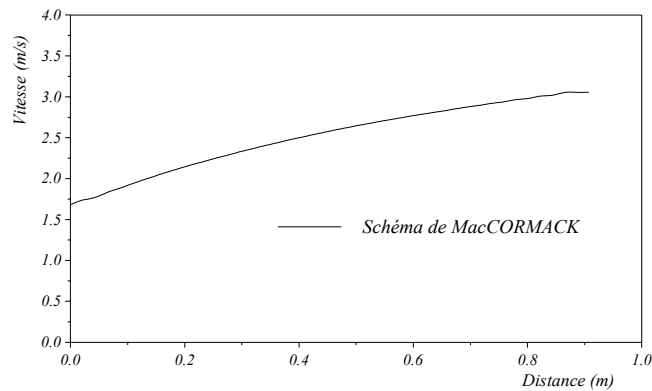


Fig 5. Profil de vitesse le long de la paroi pour un débit de 0.0689 m³/s

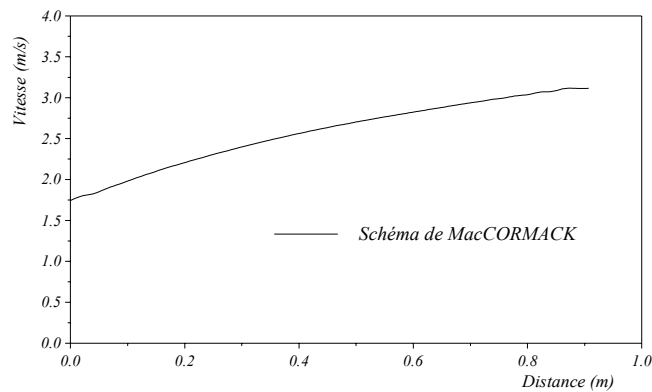


Fig6. Profil de vitesse le long de la paroi pour un débit de 0.093 m³/s

A partir de ces courbes, on remarque essentiellement que l'écoulement dans un canal prismatique avec une pente de radier considérable, engendre une augmentation de la vitesse en fonction de la distance.

5. CONCLUSION

La modélisation mathématique puis numérique des écoulements torrentiels à deux dimensions spatiales à travers des canaux à ciel ouvert à forte pente fût l'objectif principal de la présente analyse.

Le modèle mathématique régissant ce phénomène a été déterminé à partir de la généralisation des équations de Barré de Saint Venant qui ont été obtenues par l'intégration suivant la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes. La généralisation en question permet de tenir compte, d'une part, du caractère bidimensionnel de l'écoulement, et d'autre part, de l'effet d'une pente de fond importante, car les équations de base de Saint Venant ont été élaborées en supposant une faible pente de fond du canal, ce qui ne coïncide guère avec la pratique, notamment dans les coursiers d'évacuateurs de crues qui sont généralement à forte pente.

Etant du type hyperbolique non linéaire, Le système d'équations du mouvement déterminé ne peut avoir une solution théorique simple, et par conséquent, on a eu recours à l'utilisation des procédés numériques, où on a opté pour le schéma aux différences finies explicite de MacCormack, qui est du type "Prédicteur-Correcteur", précis à l'ordre deux, en espace et en temps.

Le modèle numérique ainsi élaboré a été testé dans le cas d'un écoulement à surface libre torrentiel à travers un coursier d'évacuateur de crues à section transversale rectangulaire et ayant une pente de fond assez importante, d'environ 28°. Il a été constaté principalement un rabaissement de la profondeur d'écoulement et par suite une augmentation de la vitesse d'écoulement. Les résultats numériques obtenus sont en bonne concordance avec les résultats des mesures expérimentales. Par suite, on peut dire que la qualité des résultats obtenus avec le modèle numérique basé sur une discrétisation des équations du mouvement avec le schéma explicite de MacCormack montre l'aptitude de ce modèle à traiter le type d'écoulement étudié dans des canaux découvert à pente variable.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Agence Nationale des Barrages et Transfert (ANBT) : *"Etude d'avant-projet détaillé du barrage de l'Oued CHERF"*. Modèle Réduit Hydraulique, Rapport Partiel No. 11, 1987.

Audusse, E. : *"Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes"*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 193 pages, Septembre 2004.

Berreksi, A., Remini, B. et Kettab, A. : *"Calcul des écoulements bidimensionnels supercritiques dans des canaux à géométrie variable et à forte pente"*. Premier Colloque International sur l'Eau et l'Environnement (CIEE'04), Ecole Normale Supérieure d'Hydraulique de Blida, Algérie, pp. 52-57, 07-08 Décembre, 2004.

Berreksi, A., Benmamar, S., Remini, B. et Kettab, A. : *"Simulation numérique des écoulements supercritiques à travers un élargissement de canal à forte pente"*. Algerian Journal of Technology, AJOT, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pp. 33-40, Mai 2005.

Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B., Benmamar, S. et Ikni, T. : *"Analyse d'un écoulement torrentiel à travers un rétrécissement de canal à pente variable"*. Séminaire National sur l'Eau dans son Environnement, SNEE, Université de Blida, Algérie, pp. 43-47, 07-08 Juin, 2008.

Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B., Benmamar, S. et Ikni, T. : *"Analyse d'un écoulement torrentiel à travers un élargissement symétrique de canal à pente variable"*. Séminaire National d'Hydraulique 2008, Université de Chlef, Algérie, 23-24 Novembre, 2008.

Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B. and Benmamar, S.: *"Computation of two-dimensional unsteady supercritical flows in open channel contraction of spillway chutes"*. Dam Engineering, International Papers of Technical Excellence, Water Power and Dam Construction, Vol. XIX, Issue 3, pp. 149-168, December 2008.

Bhallamudi, S. M. et Chaudhry, M. H.: *"Computation of flows in open channel transitions"*. Jour. of Hydr. Research, Vol. 30, No. 1, pp. 77-93, 1992.

Dautray, R. et Lions, J. L. : *"Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques"*. Edition Masson, Paris, 1988.

Fennema, R. J., et Chaudhry, M. H.: *"Explicit methods for 2-D transient free-surface flows"*. Jour. of Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 116, No. 8, pp. 1013-1034, August, 1990.

Ikni, T., Berreksi, A., Remini, B. et Kettab, A. : *"Etude et analyse des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variables et prismatiques en utilisant des équations de Saint Venant à deux dimensions"*. Premier Séminaire International sur l'Eau et les Risques dans le Contexte Saharien, Université de Laghouat, 19-23 Novembre, 2004.

Jovanović, M. et Djordjević, D.: *"Experimental verification of the MacCormack numerical scheme"*. Advances in Engineering Software, Vol. 23, pp. 61-67, 1995.

MacCormack, R. W.: *"Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer"*. Lectures Notes in Physics, Springer-Verlag, Vol. 8, pp. 151-163, 1971.

Molls, T. et Zhao, G.: *"Depth-averaged simulation of supercritical flow in channel with wavy sidewall"*. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 6, pp. 437-445, June 2000.

Rao, P.: *"A parallel hydrodynamic model for shallow water equations"*. Applied Mathematics and Computation, Vol. 150, pp. 291-301, 2004.

Wu, W. : *"Computational river dynamics"*. Taylor & Francis Group Edition, London, 494 pages, 2008.

Yen, B. C.: *"Open-channel flow equations revisited"*. Jour. of the Engrg. Mech. Div., ASCE, Vol. 99, No. EM5, pp. 979-1009, October 1973.

Zienkiewicz, O. C. et Taylor, R. L.: *"The finite element method, Volume 3: Fluid dynamics"*. Fifth Edition, Butterworth-Heinemann Edition, 334 pages, 2000.

Zoppou, C. et Roberts, S.: *"Explicit schemes for Dam-Break simulations"*. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 129, No. 1, pp. 11-34, January 2003.