



UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

 **DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : KALTOUM BELAHAMMUO

Thème

**Sur un problème inverse d'ordre deux qui modélise la direction
l'évolution de la corrosion dans un tube meralique encastre et
applications**

Soutenu publiquement le :21/06/2022

Devant le jury composé de :

D.r.Kaliche Kaltoum	M.C.B.univeersité de KASDI Merbah	- Ouargla Prés
D.r. Agti Mohmed	M.C.B.univeersité de KASDI Merbah	- Ouargla Examin
D.r.Said Mohamed Saïd	M.C.A.université de KASDI Merbah	- Ouargla Rappo

Remerciements

Je remercie ceux qui vous ont bénis, et ceux qui vous ont remerciés, ce n'est pas une survivance de grâce si vous ne croyez pas.

Merci à l'honorable professeur **Saïd Mohammed Al-Siad** et au comité de discussion pour leur suivi et leur supervision de ces travaux.

Tous les remerciements et l'appréciation qui ne répondent pas à son droit et ne répondent pas magnifiquement et ne pèsent pas magnifiquement à mes honorables professeurs qui m'ont inondé de la donne de connaissances tout au long de ma carrière universitaire au fruit de leur don qui est cette note.

Surtout le professeur **Kaliche Kalthoum** et M. **Maflah Mabrouk**.

Merci à tous ceux qui m'ont appris les lettres et m'ont diverti avec la douceur et le plaisir de la science dans les classes d'enseignement et au-delà.

Merci à ceux qui m'ont élevé, et à ceux qui m'ont soutenu dans toutes mes positions, mon estimée famille.

Un beau merci ne remplit pas son droit à mes amis qui m'ont aidé dans ce travail en particulier **Abouda Lamisse, Bougrada Somaya, Totti Nour Al Huda**.

Merci à mes collègues pour leur soutien à moi, en particulier ma jeune Messouda, que Dieu accorde le repos à son âme, Abbasi Hanan, ... Tous les enseignants, le personnel éducatif et les travailleurs humains moyens Kadour Said Threshold et Aqla, et tout le personnel éducatif du rugby moyen Abdul Razzaq pour deux sièges sociaux approuvés.

Merci à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce document uniquement sous la direction ou le soutien

الإهداء

أهدي هذه المسيرة القصيرة والجهد المتواضع

إلى المعطاء بلا حدود وحنان يملأ الفؤاد والقلوب فهو ضياء حياتي أُمي يحفظها الله
ويرعاها.

إلى اشتياقي وسندي في الحضور والغياب إلى من جعلني أجاهد بعزيمة وصبر في دروب
الحياة و بشغف في صفوف العلم إلى أبي رحمة الله عليه.

إلى من لا أخشى السقوط برفقتهم، و أستمد منه و طوق النجاة. إلى أخواتي وتوائم روعي
أخواتي العزيزات وأزواجهن.

إلى فرحة قلبي وبهجة حياتي أو لاد أخواتي محمد ضياء،منار، أحمد، سرين، محمد قصي،
جاد. إلى خليلاتي في الحياة وحبوبات قلبي ومؤنساتي، صديقاتي.

إلى كل من ساهم في إتمام هذا العمل و خصيصاً عبودة لميس

المخلص

وجود المشاكل العكسية في طبيعة الحالات الفيزيائية، جعلنا نقوم بالبحث عن حل المشكلة العكسية للكشف عن تآكل السطح الداخلي لأنبوب معدني لا نستطيع الوصول إليه بصعوبة، فستخدمنا طريقة الدبذبات الكهربائية على السطح الخارجي للوصول إلى درجة التآكل، بعد تحليل نتائج نتوصل إلى شدة التآكل للمشكلة العكسية.

كلمات مفتاحية

الجهد الكهربائي، مشكلة معكوسة، معادلة لابلاس، تطور التآكل، إمكانات كهربائية، وظيفة تطور التآكل.

Abstract

The presence of reverse problems in the nature of physical conditions, made us look for a solution to the reverse problem to detect the erosion of the inner surface of a metal tube that we can not reach with difficulty, we used the method of electric bears on the outer surface to reach the degree of corrosion , after analyzing the results of $u=0$ we reach the severity of corrosion.

Mots clés

Electric potential, Inverse problem, Laplace equation, corrosion evolution, poorly posed problem, properly posed problem, electrical potential, corrosion evolution function.

Résumé

La présence de problèmes inverses dans la nature des conditions physiques, nous a fait chercher une solution au problème inverse pour détecter l'érosion de la surface interne d'un tube métallique que nous ne pouvons pas atteindre avec difficulté, nous avons utilisé la méthode des courants électriques sur la surface extérieure pour atteindre le degré de corrosion, après avoir analysé les résultats de $u=0$ nous atteignons la gravité de la corrosion.

Keywords

Potentiel électrique, problème inverse, équation de Laplace, évolution de la corrosion *problème mal posé, problème bien posé, potentiel électrique, fonction d'évolution de corrosion.

Introduction

On sait que tous les problèmes physiques ont un énoncé et une forme mathématique. Les problèmes de physique mathématique sont modélisés par des équations aux dérivées partielles, qui sont un système d'équations aux dérivées partielles associées aux conditions aux limites et au développement du phénomène. Le modèle mathématique est formé à partir des conditions initiales "borderline".

Le chercheur a étudié une importante source d'eau à Gatineau, au Québec, qui a été réparée à plusieurs reprises. Cette étude avait un double objectif : déterminer l'étendue de la corrosion et mesurer l'importance des efforts extérieurs agissant sur la conduite, afin de pouvoir intervenir en temps utile.

A ce titre, le sujet de l'étude de la corrosion des canalisations est important, notamment dans les centrales nucléaires, car il participe à la sécurité de la centrale et des autres postes de travail. Dans ce travail, nous considérons un problème inverse pour déterminer la corrosion qui se produit dans une partie intérieure inaccessible du tube à partir de mesures effectuées aux limites extérieures. Notre objectif est de déterminer les informations de cor-

rosion potentielle sur la surface interne du tube et de collecter des données électrostatiques sur une partie de la surface externe du tube afin que ces "signaux électriques" fournissent des données sur la surface interne difficile à atteindre. Cette information traduit et montre à quel point la surface interne du tube est corrodée. Parmi les études incluses dans cette étude figure un livre Choulli. M. Stability estimates for an inverse elliptic problem, J. Inverse Ill-posed prob1. 2002. et Fasino. D et Inglese. G. Discrete methods in the study of an inverse problem for Laplace's equation 1999. Le problème inverse peut être résolu par la méthode d'approximation TPA (thin plate approximation method). En trouvant l'algorithme et l'analyse numérique en

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Mais cet algorithme ne fonctionne que sur l'hypothèse que l'épaisseur est suffisamment petite par rapport au rayon du tube. Le cas où les données de Cauchy pour la borne extérieure et l'hypothèse de faible épaisseur sont données est abandonné, non étudié et évidemment très important pour les problèmes pratiques.

La principale difficulté de ce problème inverse est la mauvaise formulation d'un problème inverse. Les données mesurées ne sont présentées que sur une partie de la frontière extérieure et nous voulons définir une fonction inconnue sur la frontière intérieure. C'est-à-dire que l'une des limites est inconnue, et c'est ce que la nature impose à l'état physique. Si nous ne traitons pas correctement le problème inverse, les erreurs dans les données mesurées en traitement numérique seront amplifiées car toute petite erreur en résultera dans une grande

différence dans les résultats. Ce travail se compose de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons des concepts généraux sur les problèmes inverses avec quelques exemples, nous savons aussi pourquoi et à quoi servent les problèmes inverses.

Dans le deuxième chapitre, il montre le rôle des enjeux inverses dans certains enjeux de l'étude de l'évolution de la corrosion à l'intérieur des canalisations métalliques, et des exemples d'enjeux inverses (en dimension 1 et de rang 1, un enjeu inverse en dimension 2 et de rang 2) .

Le troisième chapitre est une étude appliquée d'un problème inverse et sa solution et comment identifier la corrosion et son pourcentage.

Au terme de cette étude, nous passons en revue la conclusion et la conclusion

Contents

Introduction	2
Introduction	3
1 Problème inverse	11
1.1 Définition générale d'un problème	12
1.1.1 Définition de problème directe	12
1.1.2 Type de problème	12
1.1.3 Conditions aux limites	14
1.2 Problème inverses	14
1.2.1 définition	14
1.2.2 Problèmes inverses linéaire	16
1.2.3 Problèmes inverses non linéaires	16
1.3 pourquoi utilises-tu le problème inverse	17
1.4 Utilise le problème inverse:	17
2 Le problème inverse de la corrosion	21
2.1 Etud de la corrosion des tubes par problème inverse	22

CONTENTS	10
2.2 Formulation du problème inverse	24
2.3 Quelques problèmes ouverts	26
3 Postuler à problème inverse	29
3.1 Une étude empirique	31
3.2 Enonce du problème	33
3.3 Résolution du problème (4)	33
3.3.1 Deuxième étape:	34
3.3.2 Description de l'algorithme	34
3.3.3 Application numérique	38
Bibliographie	41

Chapitre 1

Problème inverse

On sait que la plupart des phénomènes physiques sont modélisés dans des problèmes au moyen d'équations aux dérivées partielles (EDP), qui sont des équations de l'inconnu dans lesquelles se trouvent des fonctions (fonctions, applications) à plusieurs variables avec leurs dérivées, décrivant divers phénomènes physiques tels que le son propagation, distribution de chaleur, propagation des ondes électromagnétiques, etc.

1.1 Définition générale d'un problème

1.1.1 Définition de problème directe

Problèmes directs : [3] Les résultats sont déterminés à partir des causes qui les ont provoqués. On retrouve les caractéristiques du milieu (telles que la vitesse du son et la conductivité de la chaleur), qui sont exprimées en coefficients inclus dans l'équation, ainsi que les conditions initiales ou conditions aux limites. Bien que tous ces coefficients soient considérés comme connus lors de la modélisation, l'inconnue est la solution de l'équation aux dérivées partielles dans les problèmes directs.

Le problème (P) consiste à trouver une fonction u solution de

$$Au = f.$$

[3]

1.1.2 Type de problème

Problèmes bien posé

cite4

Trouver la solution qui satisfait un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites (conditions initiales et conditions frontières) forme un problème bien posé si les trois conditions suivantes satisfaites :

- 1) La solution existe.
- 2) Elle est unique.

3) Elle dépend continument des données.

[3] Et prendre cette forme :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x); & \text{pour } x \in]-1; 1[, \\ u(-1) = u(1) = h; & \text{pour } h \text{ estre connu} \end{cases}$$

Exemples :

1)

$$\begin{cases} g'' + ag = 0, & \text{sur }]0; 1[\\ u(0) = f, \\ u'(1) = g, \end{cases}$$

$$f = 13, g = 15$$

$$y = A \cos t + B \sin t$$

2) Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace et l'équation de la chaleur avec des conditions initiales spécifiées. Ils peuvent être considérés comme des problèmes « naturels », dans le sens où il y a des processus physiques qui résolvent ces problèmes. Type de conditions aux limites La définition correcte des conditions aux limites est un des éléments essentiels pour obtenir un problème bien posé, on rappelle les différentes manières d'imposer des.

Le problème mal posé

Les problèmes inverses sont un phénomène physique qui souvent ne se réalise pas de l'une ou l'autre des conditions, ou même des trois groupes mentionnés précédemment, et ce n'est pas très surprenant car ils sont fragmentés par la nature du phénomène, comme l'instabilité ou l'accès à plusieurs solutions.

1.1.3 Conditions aux limites

- [3] 1. La condition de Dirichlet : $u = f$
- 2. La condition de Neumann : $u = f$
- 3. La condition de Robin : $u + u = f$
- 4. La condition de Cauchy : $u = f$ et $u = g$

Dans ces conditions, u_n représente la dérivée normale à la frontière du domaine de calcul.

1.2 Problème inverses

1.2.1 définition

[3] Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct.

supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma.

connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres.

La résolution du problème inverse passe donc en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues

sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures.

Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

Exemple [3]

On s'intéresse à l'estimation de paramètres dans une équation aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (a \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f & \text{dans } \Omega]0; T[; \\ y(x, 0) = y(x) & \text{dans } \Omega; \\ \frac{\partial y}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma]0; T[; \quad (\partial n \neq 0) \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

C'est l'équation de la chaleur, y est la température, f est un terme source, a est la conductivité thermique, et g est le flux de chaleur (entrant ou sortant). On peut utiliser la même équation pour modéliser un écoulement monophasique (comme du pétrole) : y est la pression, f représente les puits de pompage, a est la perméabilité du milieu, et $g = 0$ pour un milieu ferme.

Le problème est le suivant : à partir de mesures de y en certains points et à certains instants, il faut identifier a . Le problème direct est évidemment trivial, mais le problème inverse peut être des plus compliqués.

1.2.2 Problèmes inverses linéaire

[3]

Un problème inverse linéaire peut être décrit par une équation de la forme $g = ux$. où g représente les mesures prises et a une forme linéaire, x représente les valeurs des paramètres du phénomène et u est un opérateur linéaire qui représente la relation entre les mesures et les paramètres du modèle.

1.2.3 Problèmes inverses non linéaires

Dans les problèmes inverses non linéaires la relation entre les observations et les paramètres du modèle est plus complexe. On écrit cette relation sous la forme $g = ux$ où cette fois, l'opérateur g est non linéaire.

Un point qu'il est important de remarquer. Infester les exemples de problèmes inverses pas linéaires. En fait, hormis quelques cas particuliers, c'est le cas de tous les problèmes inverses, au moins ceux qui sont les plus intéressants à étudier

1.3 pourquoi utilises-tu le problème inverse

On utilise le problème inverse pour trouver une solution à un phénomène physique de bornes élémentaires inconnues "une ou toutes" pour éviter de commettre des erreurs et éviter des risques pratiques, en particulier dans des ateliers tels que les centrales électriques, la base d'activité nucléaire, les travaux d'extraction, de transport et production de les matières actives, l'informatique revues médicales visuelles, et bien d'autres domaines d'activité la nature physique de la situation a nécessité que nous utilisions le problème inverse, et cela tient à sa nature.[3]

1.4 Utilise le problème inverse :

[3]

On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de systèmes complexes pour lesquels on a accès qu'à un petit nombre de mesures, par exemple : la Terre en géophysique, les tissus organiques en imagerie médicale, l'Univers en cosmologie, une salle de concert en acoustique architecturale . . .

Exemples 1

[3]

résolution d'un système linéaire, ingénierie pétrolière, tomographie en médecine, de convolution (en imagerie notamment), détermination des constantes d'une réaction chimique, détermination de la forme d'un obstacle par radar, acoustique sous-marine, . . .

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit Comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle, voire de problèmes non linéaires, c'est-à-dire que la modélisation peut s'approcher des observations en s'écartant des paramètres réels. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

Exemple 2

[3]

La différentiation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à le considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le prototype du problème mal posé, comme nous allons le voir.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A défini par

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Il est facile de voir directement que $A \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$. Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel

$$\text{Im}A = \{f \in H^1(0,1), u(0) = 0\}$$

où $H^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation

$$Af = g$$

est équivalente à

$$f(x) = g'(x) \text{ et } g(0) = 0.$$

L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(0,1)$ (bien entendu, elle l'est dans $H^1(0,1)$). En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0,1)$, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons une fonction $f \in C^1([0,1])$, et $n \in \mathbf{N}$. Soit

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x).$$

Alors

$$f'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2 x).$$

De simples calculs montrent que

$$\|f - f_n\|_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{1/2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors que

$$\|f' - f'_n\|_2 = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{1/2} = O(n)$$

Ainsi, la différence entre f' et f'_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre f et f_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est

donc pas continu. au moins avec ce choix des normes .

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques-uns des concepts mathématiques les plus importants liés au problème inverse, qui sont implicitement inclus dans l'étude, même si elle n'a pas été publiée.

Chapitre 2

Le problème inverse de la corrosion

La détection de la corrosion au sein d'un tube métallique est l'un des sujets les plus importants en ingénierie, notamment dans la gestion de la sûreté d'une centrale nucléaire, et il existe plusieurs façons d'y parvenir. Dans cet article, nous discuterons de la théorie mathématique du problème inverse de la détection de la corrosion à l'aide de tourillons électriques, c'est-à-dire que nous considérons la corrosion comme un problème inverse pour déterminer le degré de corrosion qui se produit dans une partie inaccessible du tube (plaque) à partir de mesures sur les limites extérieures. Notre objectif est de déterminer des informations sur la corrosion qui peut se produire sur la surface interne du tube que nous ne pouvons pas voir ou de déterminer le pourcentage d'usure à l'œil nu ou d'autres moyens de toucher (la capacité d'atteindre la surface étudiée), une partie qui est difficile ou impossible à atteindre, et collecter des données électrostatiques sur la partie de la surface extérieure du tube.

[3]



2.1 Etud de la corrosion des tubes par problème inverse

[3]

le problème d'identifier et de localiser la corrosion à l'intérieur d'un pipeline. Ces contrôles sont très important par exemple en industrie pétrolière car ils permettent de prévenir des dégradations qui peuvent déboucher sur des incendies difficiles à maîtriser. Deux types d'inspection des pipelines sont possibles. Nous pouvons par exemple envoyer un courant électrique sur la partie extérieure du pipeline et mesurer ensuite le potentiel résultant sur cette même partie. En général, le potentiel est solution d'un problème aux limites pour l'équation de Laplace. À partir des mesures, nous essayons de localiser la corrosion et de déterminer son étendue. Les modèles mathématiques existant dans la littérature sont en dimension deux, ce qui correspond dans l'exemple présent à une section du pipeline. Le problème aux limites est posé sur un domaine dont une partie de sa frontière intérieure est inconnue (ce qui modélise la partie corrodée). Dans l'autre méthode d'inspection, nous procédons par imagerie ther-

mique. Le problème aux limites est similaire, sauf que l'équation de Laplace est remplacée par l'équation de la chaleur. Pour l'un ou l'autre des modèles, le problème inverse consiste à déterminer la partie inconnue du bord du domaine à partir de mesures frontières.

La formulation de ce problème inverse est relativement simple. La section du pipeline est représentée par un domaine Ω de \mathbb{R}^2 , dont la frontière extérieure est notée Γ_1 et la frontière intérieure Γ_2 . La partie corrodée de Γ_2 , inconnue, est notée γ . Si f est le courant électrique que nous appliquons sur Γ_1 (en fait f est supportée sur une partie de Γ_1) alors le potentiel électrique à l'intérieur de la section du pipeline est solution du problème aux limites.

$$p = \begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Nous considérons le problème de déterminer γ à partir de mesures sur une partie M de Γ_1 :

$$u = g, \quad \text{sur } M.$$

Pour la stabilité, il est usuel pour ce type de problème de munir l'ensemble des parties inconnues γ du bord par la distance de Hausdorff d_H . Dans ce cas, nous avons des résultats de stabilité de type

$$d_H(\gamma_1, \gamma_2)(d(g_1, g_2)), \text{ pour } d_H(\gamma_1, \gamma_2) \text{ assez petit,}$$

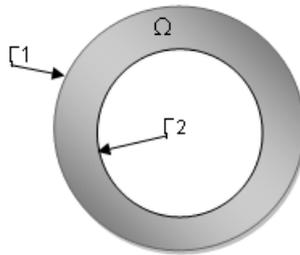
pour une certaine distance d sur l'ensemble des mesures.

2.2 Formulation du problème inverse

[3]

Supposons un domaine $\Omega = \{x \mid r_1 < |x| < r_2\} \subset \mathbb{R}^2$ (voir figure (2.2)) et les bornes $\Gamma_1 = \{x \mid |x| = r_1\}$ et $\Gamma_2 = \{x \mid |x| = r_2\}$.

[3]



Supposons que Ω est un corps métallique à conductivité constante. Dans le domaine Ω , on considère un champ électrostatique. Le potentiel électrique u satisfait l'équation de Laplace en Ω , c'est-à-dire

$$\Delta u = 0, \text{ en } \Omega.$$

Soit Γ_0 un ouvert de la frontière extérieure Γ_2 de Ω qui est une partie "accessible". Sur Γ_0 , les données de Dirichlet et les données de Neumann du potentiel électrique u sont données, c'est-à-dire

$$u(x) = \phi(x), \quad x \in \Gamma_0$$

$$u_n(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_0$$

où u_n est la dérivée normale extérieure de u sur la frontière. Nous désignons la partie restante de la frontière extérieure de Ω par Γ_2 .

$$\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \setminus \Gamma_0$$

Nous supposons que la corrosion ne s'est produite que sur la frontière intérieure du domaine Ω et la corrosion peut être décrite par une fonction non négative γ dans la condition aux limites sur la frontière intérieure. c'est-à-dire

$$u_n + \gamma u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1$$

où $\gamma \geq 0$ représente les dommages dus à la corrosion. Le problème inverse dont nous discutons dans cet article est de trouver le coefficient inconnu γ à partir des données de Cauchy ϕ et sur Γ_0 . Nous allons traiter ce problème inverse par les étapes suivantes :

Étape 1[4] : Obtenir les données de Cauchy sur le cercle intérieur en résolvant le problème de Cauchy pour les équations de Laplace. Nous utilisons la méthode itérative des éléments de frontière pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = \phi(x), & x \in \Gamma_0 \\ u_n(x) = \phi, & x \in \Gamma_0 \end{cases}$$

Notre but est d'obtenir les données de Cauchy sur Γ_1 :

$$u(x) = \phi_1(x), \quad x \in \Gamma_1; \quad u_n(x) = \psi_1(x), \quad x \in \Gamma_1.$$

Étape 2[5] : Obtenez l'impédance γ à partir des données de Cauchy sur le cercle intérieur.

Pour la condition aux limites

$$u_n + \gamma u = 0, \quad x \text{ sur } \Gamma_1,$$

γ peut être obtenu par

$$\gamma = -\frac{u_n}{u}|_{\Gamma_1} = -\frac{\psi_1}{\phi_1}, \quad \text{si } \phi_1 \neq 0 \text{ et } u \neq 0$$

2.3 Quelques problèmes ouverts

[3]

Nous donnons une sélection de problèmes inverses elliptiques et paraboliques ouverts. Nous nous sommes limités à quelques problèmes parmi les plus significatifs. Bien évidemment, il y en a tant d'autres.

Soient Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^n , de frontière $\Gamma, Q = \Omega(0, T)$ et $\Sigma = \Gamma(0, T)$. Nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u + P(x)u - \partial_t u = 0, & \text{dans } Q \\ u(., 0) = a, \\ u = g, & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Un premier problème inverse classique dans ce cas consiste à déterminer $P = P(x)$ à partir de la donnée finale $u(0, T)$. Si w est connu dans un sous domaine w de Ω , nous avons unicité et stabilité pour ce problème. De même si nous remplaçons dans (1), l'opérateur Δ par $s\Delta, s > 0$ étant le paramètre de diffusion, alors le problème est génériquement, par

rapport à s , bien posé. Plus précisément, nous avons unicité et dépendance continue. sauf peut être pour un ensemble au plus dénombrable de paramètres. En dehors de ces deux cas le problème, en toute généralité, reste ouvert. Le second problème qui reste ouvert aussi concerne la détermination $p = p(x)$ à partir de la donnée frontière $\partial_\nu u$ sur Σ ou sur une partie de celle - ci.

Revenons au problème de conductivité inverse, pour lequel nous avons démontré un résultat de stabilité pour une famille à un paramètre. De nouveau Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^n . Nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}((1 + x_D)\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Le problème inverse à déterminer D à partir de la mesure frontière ∂_ν sur γ , γ étant une partie de Γ . Pour ce problème, nous savons qu'il y a unicité si D est un polyèdre convexe ou si une partie du bord de D est supposé connue. En dehors de ces cas, le problème, en toute généralité, reste ouvert.

Nous avons problème ouvert pour le problème inverse que nous. Il s'agissait, dans un matériau semi conducteur, de tester la résistance du contact entre le métal et le semi-conducteur. Nous introduisons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + x_D u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Pouvons - nous alors déterminer de façon unique D à partir de la mesure frontière $\partial_\nu u$ sur γ , γ étant une partie de Γ . Nous avons démontré dans le Problème 1 que nous avons unicité si une partie du bord de D est connue. Nous avons aussi unicité dans le cas où D est un polygone convexe . Comme pour le problème de la conductivité inverse, hormis ces deux cas, le problème en toute généralité reste ouvert.

Le problème de déterminer le potentiel dans une équation de Schrödinger à partir d'un opérateur DN partiel reste ouvert malgré les progrès récents. Le dernier résultat en date, dont nous nous donnons pas les détails ici, est dû à C. E. Kenig, J. Sjöstrand et G. Uhlmann. Énonçons le problème en toute généralité. Soit encore une fois Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^n , de frontière Γ , et notons Γ_0 et Γ_1 deux parties fermés de Γ , d'intérieurs non vides. À $q \in L^\infty(\Omega)$ telle que 0 n'est pas valeur propre de l'opérateur $A_q = -\Delta + q$ ayant pour domaine $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, nous associons l'opérateur de DN partiel

$$\tilde{A}_q : f \in h \in H^{1/2}(\Gamma), \text{supp}(h) \subset \Gamma_0 \longrightarrow \partial_\nu u|_{\Gamma_1},$$

où u est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u + qu = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Le problème inverse (ouvert) consiste alors à déterminer à partir de \tilde{A} .

Chapitre 3

Postuler à problème inverse

Dans ce chapitre, nous allons étudier un problème inverse pour déterminer la corrosion dans un tube métallique difficile à atteindre (nous prenons la très petite surface à étudier comme une forme plate). Notre zone d'étude est située à l'intérieur d'un tube métallique encastré dans sa partie inférieur, et est donc inaccessible. Nous prendrons des mesures sur le dessus du tube métallique que n'est pas en contact avec le sol. pour cela, nous allons transmettre un champ électrique dans cette partie, et effectuer des mesures. Concevoir ensuite ce problème par un problème de Laplace mixte à terme inconnue dans les conditions aux limites, ce terme qui peut prendre plusieurs, formes. Cette fonction détecte la présence ou l'absence de corrosion à l'intérieur du panneau. pour cela, on fait des mesures électriques sur différentes intervalles de temps, cela nous renseigne sur la détection et le développement de la corrosion dans cette partie du tube, on va d'abord formuler notre problème qui est un problème inverse, et on fera cela.

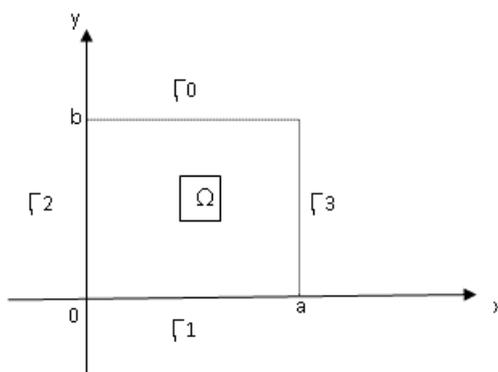
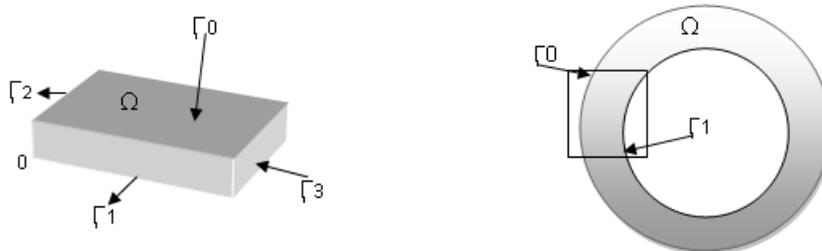
Faire une étude théorique. Nous allons montrer que ce problème a une solution unique, et que cette solution est également stable.

Ensuite, nous allons résoudre ce problème en construisant un algorithme itératif qui donne une série de problèmes qui se croisent et qui donne des valeurs approchées des fonctions d'impédance, qui déterminent. La toux d'usure. Enfin, nous étudions la convergence et Fournissons une application numérique avec passing.

3.1 Une étude empirique

[3] Laisser $\Omega =]0; a[\times]0; b[$; $a > 0$; $b > 0$ et Γ est la frontière de Ω la frontière est décomposée en quatre domaines ouverts disjoints : $\Gamma_0; \Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3$, ou :

$$\Gamma_0 =]0; a[\times b; \quad \Gamma_1 =]0; a[\times 0; \quad \Gamma_2 = 0] \times]0; b[; \quad \Gamma_3 = a] \times]0; b[;$$



supposons que Γ_1 , soit la partie enchâssée de Ω , donc inaccessible. alors la valeur limite sur Γ_1 est inconnue, le potentiel électrique, u satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \tag{3.1.1}$$

ou les valeurs de Dirichlet et Neuman sur Γ_0 du potentiel électrique u sont connues et sont données comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y) = f & \text{dans } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = g & \text{dans } \Gamma_0 \quad \partial n \neq 0. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

ou $(f;g)$ sont deux fonctions données dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. puisque $(f;g)$ sont connus, on peut facilement résoudre le problème(1) – (2) . la partie inaccessible de la frontière est le Γ_1 qui est censé être corrodé. l'apparition de tout corrosion Γ_1 , est modélisée par une fonction $\gamma = \gamma(x)$, Il s'agit donc de trouver $\gamma = \gamma(x)$ tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = 0 \quad \text{dans } \Gamma_1 \quad (3.1.3)$$

Notre problème est : Trouver les fonctions f_1 et g_1 , solution du problème suit :

$$p = \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Gamma_1, \\ u = f_1 & \text{dans } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_1 & \text{dans } \Gamma_1. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

ou $f_1 \neq 0$ De (3) on en déduit

$$\gamma = -\frac{g_1}{f_1} \quad \Gamma_1$$

pour résoudre le problème (4), nous allons construire un algorithme qui donne une bonne approximation de la fonction $\gamma = \gamma(x)$. Cet algorithme donne une suite $\gamma_n = \gamma_n(x); n \in \mathbb{N}$ de valeurs approchées de la fonction $\gamma = \gamma(x)$.

Nous allons montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonctions $\gamma = \gamma(x)$.

Enfin, nous faisons une application numérique en donnant un exemple concret.

3.2 Enonce du problème

[9] En général, problèmes tels que : Trouver une fonction u telle que :

$$le \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g \quad \text{dans } \Gamma_a, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = h \quad \text{dans } \Gamma_b. \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Ou Ω est un domaine ouvert borné dans \mathbb{R}^2 , et f est donné dans $L^2(\Omega)$. $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_d$ étant la frontière de Ω avec la condition $\Gamma_c \cap \Gamma_d = \phi$.

Admet une unique solution ou moins dans $H^1(\Omega)$.

En effet : on peut par exemple appliquer le théorème du mail gram, et en déduire que : Le problème (6) admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$ [1].

Mais si le Ω est convexe, on montre dans que le problème (6) admet une unique solution au moins dans l'espace $H^2(\Omega)$, de plus cette solution est stable (4) et (5).

3.3 Résolution du problème (4)

[8] La résolution du problème (4), se fera en plusieurs étapes.

Premier étape :

On résout le problème (1) – (2). A partir des valeurs limites (2), nous voulons déterminer les fonctions des valeurs, limites dans (4). Nous déterminons donc la fonction d'impédance y donnée, par la formule (5).

3.3.1 Deuxième étape :

[10] Construction d'un algorithme itératif de résolution du problème (4) Dans cette section, nous construisons algorithme itératif décrivant une séquence de problèmes approches comme celui construit dans (6), cet algorithme basé sur une itération de problèmes approches de notre problème (4) cet algorithme qui conduit à déterminer la fonction inconnus γ . On mettre dans (7), que cet algorithme converge .

3.3.2 Description de l'algorithme

[9] 1) Spécifiez une valeur initiale V^0 du potentiel électrique u sur Γ_1

2) Résolvez le problème suivant :

$$p_0 \left\{ \begin{array}{ll} \Delta U^0(x, y) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U^0(x, y) = v^{(0)}(x) & \text{dans } \Gamma_1, \\ U^0(x, y) = 0 & \text{dans } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ \frac{\partial U^0(x, y)}{\partial \eta} = g(x) & \text{dans } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Nous déterminons $U^0(x; y); (x; y) \in \Omega$ et $W^0(x) = \frac{\partial U^0(x, y)}{\partial \eta}$ sur Γ_1 .

On peut alors déterminer $\gamma_0 = -\frac{w^{(0)}}{v^{(0)}}$, qui est la première approximation de la fonction de

γ . Après, on résout le problème suivant :

$$p_{2k+2} \left\{ \begin{array}{ll} \Delta U^{(1)}(x, y) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U^{(1)}(x, y) = f(x) & \text{dans } \Gamma_0, \\ U^{(1)}(x, y) = 0 & \text{dans } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ \frac{\partial U^{(1)}(x, y)}{\partial \eta} = w^{(1)}(x) & \text{dans } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

On détermine $U^1(x; y); (x; y) \in \Omega$ et $V^{(1)} = U^{(1)}$ sur Γ_1 , alors on détermine $\gamma_1 = -\frac{w^{(0)}}{v^{(0)}}$, lequel à deuxième approximation de γ .

Par une récurrence sur K , on suppose que l'approximation d'ordre K est obtenue c'est-à-d supposons que : $w^{(k)} = \frac{\partial U^{(k)}(x)}{\partial \eta}$ sur Γ , soit connu. Maintenant, nous pouvons résoudre le problème suivant :

$$p \left\{ \begin{array}{ll} \Delta U^{(2k+1)}(x, y) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U^{(2k+1)}(x, y) = f(x) & \text{dans } \Gamma_0, \\ U^{(2k+1)}(x, y) = 0 & \text{dans } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ \frac{\partial U^{(2k+1)}(x, y)}{\partial \eta} = w^{(k)} & \text{dans } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Maintenant, nous pouvons déterminer

$$U^{(2K+1)}(x; y); (x; y) \in \Omega$$

et $V^{(K+1)} = U^{(2K+1)}(x)$ sur Γ_1 . on en déduit $\gamma_{2K+1} = -\frac{w^{(k)}}{v^{(k+1)}}$.

A partir de $V^{(K+1)}$, on peut obtenir

$U^{(2K+1)}(x; y); (x; y) \in \Omega$ et $w^{(k+1)} = \frac{\partial U^{(2k+2)}(x)}{\partial v}$ sur Γ_1 , en résolvant le problème suivant :

$$[10]p_1 \left\{ \begin{array}{ll} \Delta U^{(2k+2)}(x, y) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U^{(2k+2)}(x, y) = v^{(k+1)}(x) & \text{dans } \Gamma_1, \\ U^{(2k+2)}(x, y) = 0 & \text{dans } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ \frac{\partial U^{(2k+2)}(x, y)}{\partial \eta} = g(x) & \text{dans } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

On détermine alors $\gamma_{2K+1} = -\frac{w^{(k+1)}}{v^{(k+1)}}$. On obtient donc une suite :

$$\gamma_j = \gamma_j(x) = -\frac{U^j_v}{U^j}|_{\Gamma_1}; j \in \mathbb{N}$$

On continue l'itération jusqu'à obtenir : $\|u_{k+1} - u_k\| \leq \epsilon$, où ϵ est un petit nombre réel fixe positif.

Résolution d'un problème de modèle (Pk)

[8] Nous allons résoudre le problème suivant :

$$P_{2k+1} \left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u(x, y) = f(x) \quad \text{dans } \Gamma_1, \\ u(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} = g(x) \quad \text{dans } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème (P). Nous utiliserons la méthode de séparation des variables.

On pose : $z_n(x) = \frac{2}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}$. pour $n \geq 1$, le système (z_n) forme une base orthogonale dans l'espace $L^2(]0, a[)$ et une ortho normale dans l'espace $H^1(]0, a[)$. On peut écrire : $u(x; y) = \sum u_n(y) z_n(x)$ on voit directement que : $u(0; y) = u(a; y) = 0$, alors $u = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Si on pose $K_n = \frac{n\pi}{a}$ on obtient : $\Delta = \sum (\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - (\frac{n\pi}{a})^2 u_n) z_n = 0$.

Puisque le système (z_n) est libre. On en déduit que :

$$u_n(y) = \alpha_n \exp(-K_n y) + \beta_n \exp(k_n(y - b))$$

On montre dans (2) que toutes les fonctions développables en séries de Fourier forment un sous-espace dense dans L^2

. Supposons que les fonctions f et g soient développables en série de fourier, leur évolution peut s'écrire :

$$f = \sum f_n z_n(x) \text{ et } g = \sum g_n z_n(x), \text{ ou } f_n = \int_0^a f(x) z_n(x) dx \text{ et } g_n = \int_0^a g(x) z_n(x) dx.$$

Pour le problème (P_0) les valeurs limites sont :

$$U(x; y) = f = V^{(0)} \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \frac{\partial U(x; y)}{\partial \eta} = g(x) \text{ sur } \Gamma_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} z_n(x) |_{(x, b)} = g(x) \text{ Depuis } g(x) = \sum g_n z_n(x) .$$

$$\text{alrs } \frac{du_n(b)}{dy} = g_n$$

On détermine les constantes α_n et β_n en utilisant les conditions aux limites sur Γ_0 . Apres calcul, on obtient la solution du problème (p) est :

$$u(x, y) = \sum \frac{(k_n g_n - f_n) \exp(-k_n y) + (k_n g_n - f_n \exp(-k_n b)) \exp k_n (y - b)}{2k_n \exp(-k_n b)} z_n(x) \quad (3.3.1)$$

Nous appliquons cette méthode pour résoudre des problèmes (P_0); (P_{2K+1}); (P_{2K+2}) tel qu'a chaque itération, on remplace les fonctions f et g par leurs valeurs.

La solution du problème (P_0) est :

$$U^{(0)}(x, y) = \sum \frac{k_n v_n^0 - g_n \exp(-k_n b) + \exp(-k_n b) + (g_n + k_n v_n^0 - h_n \exp(-k_n b)) \exp(y - b)}{k_n (1 + \exp(-k_n b))} z_n(x) \quad (3.3.2)$$

Alors que la solution du problème (p_{2k+1}) est :

$$U^{(2k+1)}(x, y) = \sum \frac{(f_n k_n \exp(-k_n b) - w_n^{(k)}) \exp(-k_n y) + (w_n^{(k)}(-k_n b) h_n + k_n f_n) \exp(y - b)}{k_n (1 + \exp(-2k_n b))} z_n(x) \quad (3.3.3)$$

Maintenant, on peut déterminer γ_{2k+1} il est donné par : $\gamma_{2k+1} = -\frac{w^{(k)}}{v^{(k+1)}}$

De la même manière, la solution du problème (p_{2k+2}) est donnée :

$$U^{(2k+2)}(x, y) = \sum \frac{k_n v_n^{(k+1)} - g_n \exp(-k_n b) + \exp(-k_n b) + (g_n + k_n v_n^{k+1} - g_n \exp(-k_n b)) \exp(y - b)}{k_n(1 + \exp(-k_n b))} z_n(x) \tag{3.3.4}$$

et $\gamma_{2k+2} = -\frac{w^{(k+1)}}{v^{(k+1)}}$. On répète des itérations successives sur k jusqu' à satisfaire le critère de convergence comme : $\|u_{k+1} - u_k\| \leq \epsilon$, est ϵ un nombre réel positif suffisamment petit fixé.

Remarque : Dans le cas ou la plaque est Minc, on obtient la solution de chaque problème en prenant la limite dans la formule 7.8.9.10 quand b tend vers zée.

3.3.3 Application numérique

Méthode numérique Nous utiliserons la méthode des différences pour résor résoudre les problème (p_n) , avec les données suivantes : $h = 0.1; a = 0.1; b = 1, f(x) = x^2 \quad g(x) = 2 + x \quad v^0 = 1. \epsilon = 10^{-3}$ Nous obtenons les résultants : La première colonne du tableau 1,

x	y1	y2	y3	y4	y5	y6
0.1	0.373	0.345	0.312	0.273	0.221	0.189
0.2	0.251	0.225	0.189	0.135	0.912	0.613
0.3	0.600	0.312	0.268	0.227	0.179	0.147
0.4	0.827	0.535	0.245	0.218	0.727	4.018
0.5	0.406	1.250	1.233	2.273	0.806	5.107
0.6	0.857	1.241	1.000	2.000	0.857	4.500
0.7	0.891	1.225	7.000	1.815	0.891	3.769
0.8	0.914	1.208	5.333	1.684	0.914	3.200
0.9	0.931	1.191	4.263	1.588	0.931	2.793
1.0	0.943	1.176	3.571	1.515	0.943	2.504
1.1	1.067	1.211	2.894	1.450	1.089	2.004

FIGURE 3.1: Resultat de γ

indiquent les valeurs de $x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 10; h = 0.1; x_0 = 0.1;$

Les autres colonnes du tableau 1, indique les éléments γ_1 à γ_6 de la suite (γ_n) de fonctions approchées de $\gamma = \gamma(x)$

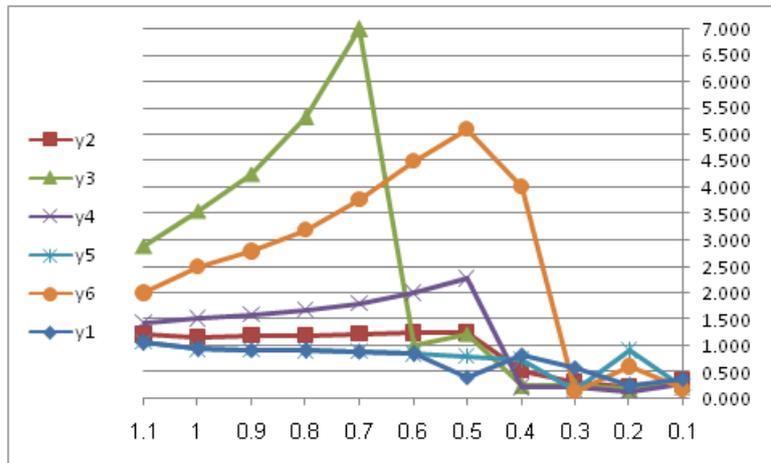


FIGURE 3.2: Resultat de analyse numérique de γ

figure (1) montre le changement de roulements au l du temps dans toutes les régions d'expérience plaque métallique la modes est 6 en fonction de temps x ou $x \in [0; 1; 1; 1]$

Cette figure est une traduction de tableau (1).

On remarque sur la figure (1) une variation dans les courbes pour les sites et cela indique la différence du pourcentage d'érosion dans les positions avec la différence Nous concluons que plus le signal est élevé, plus la corrosion est importante.

Conclusion

Bien qu'il soit difficile de détecter la corrosion dans les tubes métalliques pour sa surface interne, le problème inverse l'a rendu possible en le rendant stable par analyse numérique des données du signal électrique de sa surface externe.

Bibliographie

- [1] Brezis. H. Analyse Fonctionnelle, Paris : Masson, 1983.
- [2] Grisvard P. Alternative of Fredholm relating to the problem of Dirichlet in a polygon. Boll : Un. Mat. 1972 ; Ital. 5(4), 132-164.
- [3] Grisvard P. Singularities in boundary values problems. Paris : Dunod, 1992.
- [4] Chouli M. Stability estimates for on inverse elliptic problem. Jourual of inverse problems 3 posed ; Prob :2002,(10),N 6, 601-610.
- [5] Teviot A, Winter R. Introduction to partial differential equations a computational approach.Eng : Springer, 2008.
- [6] Cheng J, Chouli M, Yang X. An iterative BEM method for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe. Numerical Mathematics A journal of Chinese universities. Ang, 2005, Vol. 14 N 3.
- [7] Chouli M.Introduction aux problemes inverses elliptiques et parabolique. Vering Berlin, Heidelberg : Springer 2009.
- [8] Choulli. M. Une introduction aux problème inverses elliptiques et paraboliques. springer.2008-2011.

- [9] Choulli. M. Stability estimates for an inverse elliptic problem, *J. Inverse Ill-posed Probl.* 10(2002), No. 6, 601-610.
- [10] Fasino. D et Inglese. G. Discrete methods in the study of an inverse problem for laplace's equation, *LMA Journal of Numerical Analysis*, 19(1999), 105-118.