



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



Université KASDI MERBAH OUARGLA

Institut de technologie

Département DE GÉNIE APPLIQUÉE

Mémoire de

**LICENCE PROFESSIONNELLE**

Spécialité : Mesures, Métrologie et qualité

Thème

---

# Estimation simultanée de la conductivité thermique et le flux de chaleur en Conduction inverse

---

Soutenue publiquement le : 19/06/2022

Réalisé par : ANTARI Hadjer et MKHADMI Radja

Mr	BOULAADJOU Younes	MAA	Université de Ouargla	Président
Pr	SETTOU Belkhir	MAB	Université de Ouargla	Examineur
Dr	NEGROU Belkhir	PROFESSEUR	Université de Ouargla	Encadrant

Année Universitaire 2021/2022

# Remerciements

*Avant tout merci à Allah qui nous a donné la puissance est la santé de continuer ce travail.*

*Nous tenons à remercier professeur « Negrou Belkhir » de nous avoir encadrés.*

*Nous remercions tout particulièrement Mr chatouane Mohammed amine et Mr Mihobei de nous avoir suivi notre travail de près avec sa rigueur scientifique et ses précieux conseils.*

*Nous tenons à remercier le directeur du centre de recherche d'analyse physico-chimique.*

*Nous remercions également MrBOULAADJOUL Younes pour avoir accepté de présider et Dr : SETTOU Belkhir pour avoir accepté d'examiner ce travail. Sans oublier nos enseignants [Mahbob AbdElbasset, Saidat Nedjemi].*

*Nos remerciements les plus vifs à toutes les personnes qui nous ont facilité la tâche pour acquérir les documents nécessaires à la réalisation de ce travail.*

# *Dédicace I*

*Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour,*

*A la mémoire de l'être le plus chère de ma vie*

*A mon cher père «Tahar » qui a été toujours à mes côtés pour me soutenir et m'encourager et belle-mère « Khadija Rahmani » et , ma chère mère « Mabrouk Abed » Que Dieu la bénisse et l'accueille dans son vaste paradis. . Que ce travail traduit ma gratitude ma gratitude et mon affection. Quoi que je fasse ou je dise, je ne saurai point de le remercier comme il se doit.*

*À mes frères à mes sœurs, qui m'ont toujours supporté et encouragé durant toutes mes études«Aissa, Zineb,Bachir, Zahira , Amina, Mohmed, Ikhlas »*

*À Tous mes amis, source d'espoir et de motivation «Asma, Halla,Afaf, Arwa ,Abir ,Aya, Rihab, chourouk»e À mon binome «HadjerAntari»,*

*A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer.*

*Puisse Dieu vous prêter bonne santé et langue vie à fin que je puisse a mon tour vous aider.*

**MKHADMI RADJA**

# *D*édicace2

*Je dédie ce travail:*

*A ma famille, elle qui m'a doté d'une éducation digne, son support et soutien continu, son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui.*

*Particulièrement; A mon père AHMED pour le goût à l'effort qu'il a suscité en moi, de par sa rigueur et diligence.*

*Et A ma chère maman OUIZA qui m'a soutenue et encouragé durant ces années d'études, que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.*

*A mon frère Ilias et mes sœurs (Rahil, Rabab et Soumia) et ceux qui ont partagés avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail, ils m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout le long de mon parcours.*

*A tous les membres de ma grande famille et toute personne qui porte de nom de ANTARI et SOUHANE.*

*Puisse Dieu, vous donne santé, bonheur courage et surtout réussite.*

**ANTARI HADJER**

# Table des Matières

	<i>page</i>
Remerciements	I
Dédicace1	II
Dédicace2	III
Table des Matières	IV
Liste des figures	VI
Nomenclature	VII
<i>Introduction générale</i>	<i>1</i>
<i>Chapitre 1: Conduction thermique</i>	<i>2</i>
1.1. Introduction	3
1.2. Définitions et loi de Fourier	3
1. 2. 1. Equation de la chaleur	3
1.3. Conditions aux limites	4
1.3.1 Température imposée	5
1.3.2 Flux imposé	5
1.3.3 Condition de convection	6
1.3.4 Conditions du quatrième type	6
1.4. Propriétés thermiques des matériaux	8
1.4.1 Conductivité thermique	8
1.4.2 Diffusivité thermique	8
1.4.3 Résistance thermique	8
1.4.4 La capacité thermique	8
1.5. Solutions numérique de l'équation de la chaleur en régime Transitoire	8
1.6. conclusion	
<i>Chapitre 2 : La méthode des différences finies</i>	<i>10</i>
2.1 Introduction	11
2-2 Définition de la méthode des différences finies	11
2-3-1 Série Taylor	11
2-3-1-1 Approximation de la dérivée première	12
2-3-1-2 Approximation de la dérivée seconde	13
2-4 Résolution de l'équation de conduction transitoire unidimensionnelle par différences finies	14
2-4-1 La méthode implicite	14
2-5 Conclusion	15
<i>Chapitre 3</i>	<i>16</i>
<i>La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres</i>	
3.1. introduction	17

3.2 La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT pour l'estimation des paramètres	17
3.2.1 Définition	17
3-2-2 Le problème direct	18
3-2-2 Le problème inverse	18
3-2-3-1 Capteurs multiples	19
3-2-4 Procédure itérative de la méthode de LEVENBERG- MARQUARDT	19
3-2-6 Méthodes de détermination des coefficients de sensibilité	21
3-2-6-1 Approximation par différence finie pour déterminer les coefficients de sensibilité.	21
3-2-7 Matrice de sensibilité	22
3-2-8 L'algorithme de calcul	22
3.2.9 L'organigramme	24
3.2.10 conclusion	25
<b>Chapitre 4 : Application</b>	<b>26</b>
4.1. introduction	27
4.3 Le problème direct	27
4.3 Le problème INVERSE :	29
4.4 conclusion	31
<b>Conclusion générale</b>	<b>33</b>
ANNEX A	35
Les résultats TEST	36
Les résultats ACIER	37
Références bibliographique	40

*Liste des figures*

<b>Les figures</b>	<b>page</b>
<i>Condition de la température</i>	5
<i>Condition de flux</i>	6
<i>Nomenclature pour la représentation des séries de Taylor</i>	12
<i>Nomenclature pour la représentation des fonctions par différences finies</i> <i>Série de Taylor</i>	13
<i>Schéma de la plaque</i>	19
<i>Le profil de la température teste au point de mesure <math>x = L</math></i>	29
<i>Le profil de la température l'échantillon d'acier au point de mesure <math>x = L</math></i>	30

# *Nomenclature*

$\lambda$	<i>Conductivité thermique</i>
T	<i>Température</i>
$c_p$	<i>Chaleur spécifique à pression constante</i>
$\rho$	<i>La densité des particules</i>
$\Delta x, h$	<i>Variation du déplacement</i>
$\Delta t$	<i>Variation du temps</i>
$\alpha$	<i>Diffusivité thermique</i>
$\sigma$	<i>Constant de « Stefan-Boltzmann »</i>
$h_r$	<i>Le coefficient de transfert de chaleur pour le rayonnement</i>
$h_r$	<i>Le coefficient de transfert de chaleur</i>
$q_e$	<i>Flux de chaleur entrant</i>
$q_{st}$	<i>Flux de chaleur stocké</i>
$q_s$	<i>Flux de chaleur sortant</i>
$q_g$	<i>Flux de chaleur générer</i>
A	<i>La surface</i>
V	<i>Volume</i>
$\lambda$	<i>Nombre de fourir</i>
Q	<i>Flux de chaleur</i>
C	<i>Capacité calorifique</i>
$Y_i$	<i>Température mesurée</i>
$T_i(P)$	<i>Température estimée</i>
P	<i>paramètres inconnus</i>
S(P)	<i>Erreur de la somme des carrés ou fonction objective</i>
J(P)	<i>Matrice de sensibilité</i>
$\bar{T}$	<i>La température sans dimension</i>
$J_{ij}$	<i>Coefficients de sensibilité</i>
$(?)^k$	<i>Nombre d'itérations</i>
$\mu^K$	<i>Paramètre d'amortissement</i>
$\Omega^K$	<i>Matrice diagonale</i>
$T(p^k)$	<i>Vecteur de la température</i>
$p^k$	<i>Vecteur des paramètres inconnus</i>
$\varepsilon$	<i>Critères d'arrêt</i>



## Introduction générale

Les transferts thermiques sont omniprésents tant dans la vie même de notre planète (la fusion des glaciers, le réchauffement des eaux des océans, les cycles climatiques), que dans l'existence humaine sur terre, exprimés par des gestes quotidiens de l'individu (réglage de la température du corps humain, préparation de la nourriture, réalisation d'un microclimat dans un habitat) ou par des techniques très diversifiées conduisant au progrès de la civilisation (utilisation de l'énergie thermique de diverses origines, moteurs thermiques, échangeurs de chaleur, isolation thermique). Ayant montré auparavant les éléments qui font la différence entre thermodynamique et thermocinétique transfert de la chaleur, il faut encore remarquer que l'étude de ce dernier s'appuie sur des concepts et des principes thermodynamiques.

Le transfert de chaleur est l'un des modes, les plus connus d'échange d'énergie lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un système à des températures différentes sont mises en contact, on constate une tendance à l'égalisation des températures. On dit qu'il y'a transfert de chaleur.

Il existe trois modes de transfert de chaleur, la conduction de la chaleur provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact, et se réalisant sans déplacement global de matière, par opposition à la convection qui est un transfert d'énergie thermique qui s'accompagne d'un transport de la matière à l'état de fluide et finalement le mode de transfert thermique par rayonnement

La résolution de ces problèmes est souvent complexe car le transfert de chaleur peut résulter de trois mécanismes de propagation obéissant à des lois bien différentes et mise on jeu parfois simultanément, aussi la résolution des problèmes de transfert de chaleur nécessite la connaissance des paramètres thermo-physique qui rentre en jeu dans le phénomène par mesurage en utilisant des instruments de mesure destinés spécifiques. Mais quelque fois la connaissance ou bien le mesurage de ces paramètres est difficile ou impossible, alors on passe à l'utilisation des techniques inverse pour l'estimation des ces paramètres.

Dans cette thèse nous allons essayer à utiliser la méthode de LevenbergMaquardt pour l'estimation des paramètres thermo-physique qui sont la conductivité thermique et la flux de chaleur applique dans un problème de la conduction thermique.

# **Chapitre 1**

## **Conduction thermique**

### Introduction

La conduction thermique est la transmission de la chaleur au sein d'un milieu solide ou fluide immobile. La conduction est le seul mode de transfert de chaleur possible dans un solide excepté pour les solides semi-transparents comme le verre qui laissent passer un rayonnement électromagnétique.

### Définitions et loi de Fourier

La théorie de la conduction repose sur la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \quad 1.1$$

Avec :  $\varphi$  : Densité de flux de chaleur transmis par conduction

$\lambda$  : Conductivité thermique du milieu

### Equation de la chaleur

A partir de la loi de Fourier 1.1 et le premier principe de thermodynamique l'équation de la conduction dans le cas plus général est établie, on peut l'écrire comme suit :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) + P \quad 1.2$$

Ou sous la forme algébrique :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + P$$

Avec :

$\rho$  : Masse volumique.

$C_p$ : Chaleur massique du matériau

$P$ : Source de chaleur volumique

## Chapitre 1 : Conduction thermique

---

Des hypothèses simplificatrices sont le plus souvent introduites, ce qui permet d'écrire l'équation de la conduction 1.2 sous forme souvent plus aisée à résoudre. Les hypothèses suivantes permettent d'écrire l'équation de la conduction sous forme d'équation de Fourier 1.3.

- Milieu homogène et isotrope :  $\lambda = \text{constante}$
- Pas de génération d'énergie à l'intérieur du système :  $P=0$
- Unidimensionnalité

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 1.3$$

Avec :  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  La diffusivité thermique.

Lorsque le régime est permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0 \quad 1.4$$

L'équation générale de la conduction peut aussi être écrite dans divers systèmes de coordonnées :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1.5$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1.6$$

En une dimension l'équation 1.6 devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1.7$$

- En coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1.8$$

### Conditions aux limites

L'intégration de l'équation de la conduction sous quelque forme que ce soit introduit des constantes d'intégration qu'on peut lever par l'utilisation des conditions aux limites qui identifient en fait le problème de la conduction. Ces conditions peuvent être d'au moins quatre types : La température est imposée c'est la condition du premier type ou condition de Dirichlet, le flux est imposé et cela correspond à une condition du type

## Chapitre 1 : Conduction thermique

---

Neumann ou de 2<sup>ème</sup> type, l'échange se fait par convection et c'est une condition du type Fourier ou du 3<sup>ème</sup> type et enfin un contact conductif assure une condition du 4<sup>ème</sup> type. Ces conditions peuvent être linéaires ou non.

### Température imposée

La température à la limite du système est imposée figure 1.1. Elle peut dépendre du temps et même varier le long de la frontière. Le cas le plus simple est la température constante sur toute la frontière. Une telle condition est expérimentalement difficile à réaliser.

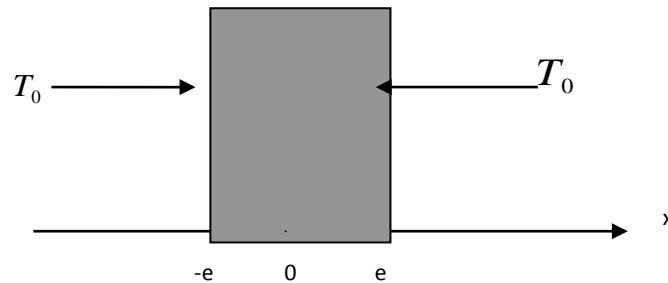


Figure 1.1 : Condition de la température

### Flux imposé

Une densité de flux de chaleur  $\varphi_0$  est imposée sur la frontière figure 1.2. Cette condition est connue sous le nom de condition de Neumann. Le flux que l'on ramène ou que l'on extrait de la paroi est conduit dans le matériau, on peut l'écrire comme suit :

$$\varphi = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{x,y,z} \quad 1.9$$

Un cas particulier de flux imposé est  $\varphi_0 = 0$  : cela signifie que la paroi est isolée thermiquement soit :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{x,y,z} = 0 \quad 1.10$$

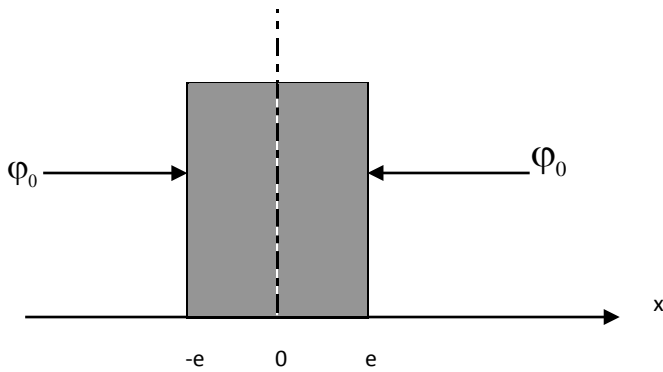


Figure 1.2 : Condition de flux

## Condition de convection

- **Convection imposée sur une paroi** : Lorsqu'une paroi échange de la chaleur par convection avec l'extérieur, la densité de flux qu'elle échange est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu fluide extérieur, multipliée par un coefficient d'échange  $h$  en  $W.m^{-2}.K^{-1}$  qui tient compte des différentes propriétés physiques et cinématiques du fluide léchant la paroi, cette condition est connue sous le nom de condition de Fourier :

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{x,y,z} = h(T - T_f) \quad 1.11$$

- **Rayonnement imposé sur une paroi** : En réalité en plus de la convection qu'on peut représenter par l'expression 1.11, il existe toujours une part d'énergie qui est échangée entre la paroi et le milieu environnant par rayonnement et qui peut être importante et même dépasser en intensité la convection dans le cas où la surface est à température élevée. Le flux échangé entre une paroi à la température  $T_p$  le milieu externe à la température  $T_{ext}$  s'écrit, si la paroi et le milieu peuvent être considérés comme noirs comme suit  $\sigma (T_p^4 - T_{ext}^4)$ .

Où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann. Si seul le rayonnement est présent ce qui est le cas par exemple lorsqu'on fait le vide autour de la paroi en question, la condition à la paroi s'écrit simplement :

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \sigma (T_p^4 - T_{ext}^4) \quad 1.12$$

## Conditions du quatrième type

## Chapitre 1 : Conduction thermique

---

Si le problème étudié comporte deux milieux en contact, on devra écrire une condition pour chaque frontière. La conservation du flux à l'interface des deux milieux et dans le cas d'un contact parfait s'écrit :

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \text{ et } T_1 = T_2 \quad 2.13$$

Si le contact n'est pas parfait on a :

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + R = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \text{ et } T_1 \neq T_2 \quad 1.14$$

## Propriétés thermiques des matériaux

### Conductivité thermique

La conductivité thermique caractérise le pouvoir conducteur de la matière. Sa connaissance est suffisante en régime stationnaire pour définir le champ de température  $\lambda$  (W/m°C). Sa définition est donnée par la loi de Fourier, équation 1.1.

### Diffusivité thermique

C'est la vitesse de propagation de la chaleur dans la matière. Elle est nécessaire pour étudier les processus de conduction en régime instationnaire :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{m}^2/\text{s})$$

### Résistance thermique

La résistance thermique fait intervenir l'épaisseur de la paroi pour caractériser le passage du flux de chaleur. Plus la résistance thermique est grande, plus le matériau est isolant. La résistance exprime le rapport entre l'épaisseur et le produit entre la conductivité thermique et la surface traversée par la chaleur. Sa dimension est : [°C/W].

### La capacité thermique

C'est la quantité de chaleur que peut emmagasiner un matériau par rapport à son volume. Elle est définie par la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1°C la température de 1mètre cube de matériau. L'unité de la capacité calorifique ( $\rho C$ ) est : [J/m<sup>3</sup>. °C]. Plus la capacité thermique est élevée, plus la quantité de chaleur que peut stocker le matériau est grande. Généralement ce sont les matériaux les plus lourds qui possèdent la plus grande capacité thermique.

## Solutions numérique de l'équation de la chaleur en régime transitoire

Les méthodes numériques sont très utiles pour la résolution des problèmes de la conduction de la chaleur,... lorsque ces problèmes n'ont pas de solutions analytiques due à leur non linéarité et à la complexité des géométries et des conditions aux limites. Le développement des outils informatiques et les calculateurs à grande vitesse a amélioré l'utilisation des ces méthodes dans plusieurs branches des sciences de l'ingénieur. Plusieurs problèmes compliqués peuvent être maintenant résolus rapidement et avec un coût très bas.

Les méthodes des différences finies sont parmi les méthodes numériques les plus utilisées dans la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles de transfert de chaleur et de matière, avec les méthodes des éléments finis et les méthodes des volumes finis. Les méthodes des différences finies sont simples et faciles à formuler et peuvent être aisément généralisées aux problèmes à deux et trois dimensions. Dans le chapitre qui suit, il sera donné un résumé général sur les



## Chapitre 1 : conduction thermique

---

méthodes des différences finies qui nous permettent ensuite de résoudre les problèmes de la conduction de la chaleur dans le reste de notre travail.

### **1.6. Conclusion**

Dans cette partie, nous avons appris les transformations thermiques, la condition et son équation différentielle ... et tout cela est considéré comme une introduction afin d'étudier le problème direct et inverse des transformations thermiques

## **Chapitre 2**

### **La méthode des différences finies**

### La méthode des différences finies

#### 2.1 Introduction

Les méthodes numériques sont très utiles pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides, de transfert de chaleur, de transfert de matière,... lorsque ces problèmes n'ont pas de solutions analytiques du fait de leur non linéarité et de la complexité des géométries et des conditions aux limites.

#### Définition de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations reliant les valeurs de fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les unes des autres.

En mathématiques, et plus précisément en analyse, une différence finie est une expression de la forme  $f(x + b) - f(x + a)$  (où  $f$  est une fonction numérique) ; la même expression divisée par  $b - a$  est appelée un taux d'augmentation (ou taux de variation), et il est possible, plus généralement, de définir des différences divisées de la même manière. L'approximation des dérivées par les différences finies joue un rôle central dans les méthodes aux différences finies utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles, notamment pour les problèmes de conditions aux limites.

Approximation des dérivées par différences finies par développement en série de Taylor

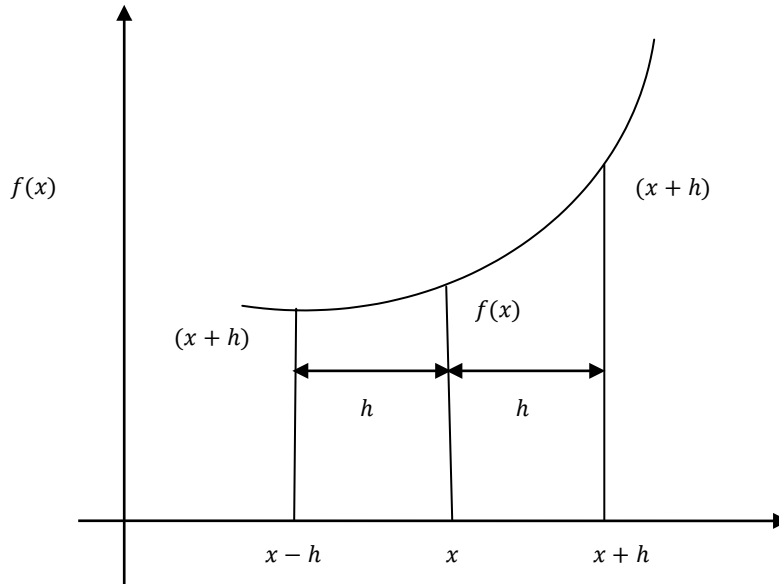
#### Série Taylor

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point de cet intervalle, et on suppose que  $f$  est indéfiniment différentiable en  $x_0$ . La série de Taylor de  $f$  à  $x_0$  est la série de fonctions:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (h)^n \dots (2 - 1)$$

## Chapitre2 : la méthode des différences fines

Considérez le développement en série de Taylor de la fonction  $f(x+h)$  et  $f(x-h)$  au point  $x$ , comme le montre Figure. II-1 :



**Figure. 2.1: Nomenclature pour la représentation des séries de Taylor**

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) \dots (2 - 2a)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) \dots (2 - 2b)$$

### Approximation de la dérivée première

Les premières dérivées progressives (droite) et régressives (gauche) de la fonction  $f(x)$  sont obtenues par les équations (1- a) et (1- b) respectivement :

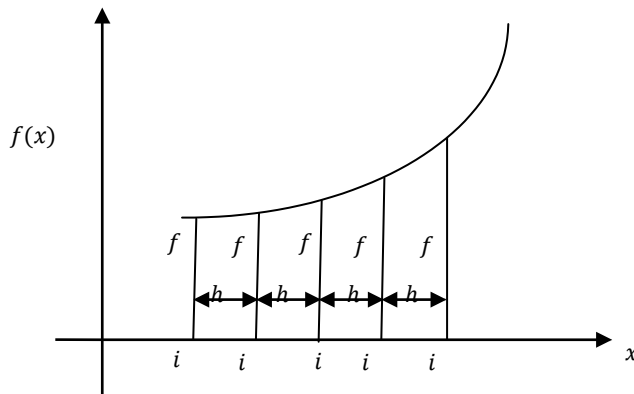
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ (progressive) } \dots (2 - 3a)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \text{ (regressive) } \dots (2 - 3b)$$

En soustrayant les équations (1- b) de (1- a), l'approximation de la dérivée première de la fonction  $f(x)$  par des différences fines centrées d'ordre deux, est déterminée par :

## Chapitre2 : la méthode des différences fines

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ (Centeré) ... (3 - 3c)}$$



**Figure.2.2: Nomenclature for the representation of functions by finite differences Taylor series**

Si nous introduisons maintenant la notation suivante :

$$x = ih, x + h = (i + 1)h, x - h = (i - 1)h, \text{ etc ... (2 - 4a)}$$

$$f(x) = f_i, f(x + h) = f_{i+1}, f(x - h) = f_{i-1}, \text{ etc ... (2 - 4b)}$$

La représentation des premières dérivées de la fonction  $f(x)$  au point  $x$ , donnée par les équations s'écrit respectivement :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \text{ (progressive) (2 - 5 a)}$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \text{ (regressive) (2 - 5 b)}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \text{ (Centrée) (2 - 5 c)}$$

### Approximation de la dérivée seconde

Pour avoir la représentation de la dérivée seconde  $f''(x)$  au point  $x$  de la fonction  $f(x)$  par différences finies, on considère le développement en série de Taylor des fonctions  $f(x-2h)$  et  $f(x+2h)$  Suivant:

## Chapitre2 : la méthode des différences fines

$$f(x + 2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \dots \quad (2 - 6a)$$

$$f(x - 2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \dots \quad (2 - 6b)$$

Cela signifie que :

$$f''(x) = \frac{f(x) + f(x + 2h) - 2f(x + h)}{h^2} \text{ (progressive) } \dots \quad (2 - 7a)$$

$$f''(x) = \frac{f(x - 2h) + f(x) - 2f(x - h)}{h^2} \text{ (regressive) } \dots \quad (2 - 7b)$$

$$f''(x) = \frac{f(x - h) + f(x + h) - 2f(x)}{h^2} \text{ (Centré) } \dots \quad (2 - 7c)$$

Si nous introduisons maintenant la notation suivante :

$$x = ih, \quad x + h = (i + 1)h, \quad x - h = (i - 1)h \dots, \text{ etc } \dots \quad (2 - 8a)$$

$$f(x) = f_i, \quad f(x + 2h) = f_{i+2}, \quad f(x - 2h) = f_{i-2}, \text{ etc } \dots \quad (2 - 8b)$$

$$f''_i = \frac{f_i + f_{i+2} - 2f_{i+1}}{h^2} \text{ (progressive) } \dots \quad (2 - 9a)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-2} + f_i - 2f_{i-1}}{h^2} \text{ (regressive) } \dots \quad (2 - 9b)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} + f_{i+1} - 2f_i}{h^2} \text{ (Centré) } \dots \quad (2 - 9c)$$

### Résolution de l'équation de conduction transitoire unidimensionnelle par différences finies :

Les schémas aux différences finies ont été développés qui ne sont pas limitatifs de la taille des pas de temps  $\Delta t$ . L'une de ces méthodes est la méthode implicite.

#### 2-4-1 La méthode implicite

On utilise un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde dans l'espace :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ in } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{T_i^{n+1} + T_i^n}{\Delta t} \dots \quad (2 - 10)$$

## Chapitre2 : la méthode des différences fines

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \dots (2 - 11)$$

Par compensation, on obtient

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \dots (2 - 12)$$

En réglant  $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  la température à l'itération (n + 1) est donné par :

$$-DT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2D)T_i^{n+1} - DT_{i+1}^{n+1} = T_i^n \dots (2 - 13) \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\lambda T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \rightarrow T_{i-1} = \frac{Q\Delta x}{\lambda} + T_i = T_{i+1}$$

Températures aux nœuds lorsque  $t=t_1=3s$   $n=1$

$$i = 1 \rightarrow -D \left( \frac{Q\Delta x}{k} + T_1^2 \right) + (2D)T_1^2 - DT_2^2 = T_1^1$$

$$i = 2 \rightarrow -DT_1^2 + (1 + 2D)T_2^2 - DT_3^2 = T_2^1$$

$$i = 3 \rightarrow -DT_2^2 + (1 + 2D)T_3^2 - DT_4^2 = T_3^1$$

$$i = 4 \rightarrow -DT_3^2 + (1 + 2D)T_4^2 - D \left( \frac{Q\Delta x}{k} + T_4^2 \right) = T_4^1$$

On voit que les inconnues à l'itération n+1 sont liées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 + D & -D & 0 & 0 \\ -D & 1 + 2D & -D & 0 \\ 0 & -D & 1 + 2D & -D \\ 0 & 0 & -D & 1 + D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ [T_4^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^1 + D \frac{Q\Delta x}{k} \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ [T_4^1 + D \frac{Q\Delta x}{k}] \end{bmatrix} \dots (2 - 14)$$

## Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons développé une méthode d'analyse et de calcul du Comportement thermique de conduction dans un système linéaire. Nous avons commencé par définir les équations qui définissent la conduction de la chaleur en régime constant pour plaque.

## Chapitre2 : la méthode des différences fines

---

Aussi, résoudre les équations aux dérivées partielles, en développant un code de calcul Sous l'environnement MATLAB.

Les résultats de ce chapitre serviront dans le calcul de la fonction à estimer ou bien l'inconnue qui est définie dans notre mémoire comme la conductivité thermique et flux de chaleur dans la suite de cette étude.



## **Chapitre 3**

# **La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres**

## La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT

### Pour l'estimation des paramètres

#### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons résoudre le problème inverse, la méthode de LEVENBERG MAQUARDT est utilisée, dans le cas où il n'est pas possible d'utiliser un outil pour calculer ou d'identifier un ou des grandeurs thermophysiques telle que la conductivité thermique et le flux de chaleur.

#### La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT pour l'estimation des paramètres

##### Définition

Il s'agit d'une méthode itérative pour résoudre les problèmes d'estimation des paramètres par minimisation des moindres des moindres carrés non linéaires. Il a été appliqué pour résoudre divers problèmes inverses impliquant l'estimation de paramètres inconnus.

La résolution du problème de transfert de chaleur inverse à l'aide de la méthode Levenberg-Marquardt peut être correctement organisée selon les étapes de base suivantes :

- Le problème direct
- Le problème inverse
- La procédure itérative
- Les critères d'arrêt
- L'algorithme de calcul

Nous présentons ci-dessous les détails de chacune de ces étapes appliquées à la solution d'un problème de test de conduction thermique inverse, impliquant la situation physique suivante :

Considérons la conduction thermique transitoire linéaire dans une plaque solide rectangulaire homogène, de longueur  $L$ . La distribution de température dans la plaque est évaluée en 1-D par la fonction de température  $T(x, t)$ .

La formulation mathématique de ce problème de conduction thermique est donnée sous forme:

## Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < l > 0 \dots (3-1a)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = Q \quad , \quad t > 0 \dots (3-1b)$$

$$\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } x = l \quad , \quad t > 0 \dots (3-1c)$$

$$T(x, 0) = T_i \text{ pour } t = 0 \quad 0 \leq x \leq L \dots (3-1d)$$

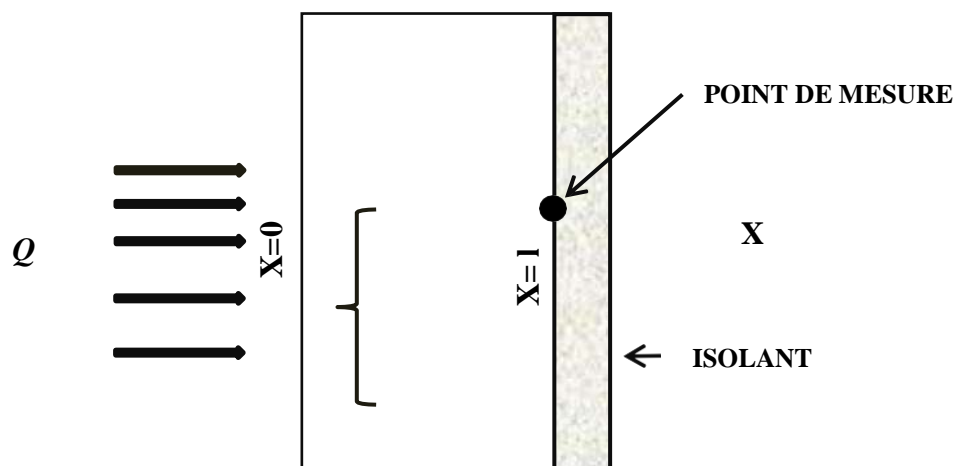


Figure 3-1: Schéma de la plaque

### Le problème direct

L'objectif du Problème direct associé au problème physique décrit ci-dessus est alors de déterminer le champ de température  $T(x, t)$  dans la plaque.

### Le problème inverse

Est un problème inverse de conduction de la chaleur dans lequel les paramètres, et  $Q$  seront estimés. La solution de ce problème de conduction inverse est basée sur la minimisation du critère des moindres carrés :

$$S(P) = \sum_{i=1}^l [Y_i - T_i(P)]^2 \dots (3-2a)$$

Peut s'écrire sous forme matricielle comme :

$$S(P) = [Y - T(P)]^T [Y - T(P)] \dots (3-2b)$$

## Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

Les températures estimées sont obtenues à partir de la solution du problème direct avec des estimations pour les quantités inconnues. Nous considérons les trois cas particuliers suivants trois cas particuliers :

- 1) Capteur unique
- 2) Capteurs multiples
- 3) Différence des valeurs des écarts-types des mesurages

### 3-2-3-1 Capteurs multiples

le vecteur transposé des résidus est alors donné par :

$$[Y - T(P)]^T = [\bar{Y}_1 - \bar{T}_1, \bar{Y}_2 - \bar{T}_2, \dots, \bar{Y}_M - \bar{T}_M] \dots (3 - 3)$$

Considérant le temps

$$[Y - T(P)] = [\bar{Y}_1 - \bar{T}_1, \bar{Y}_2 - \bar{T}_2, \dots, \bar{Y}_M - \bar{T}_M] \dots (3 - 4)$$

L'expression (P) devient de la forme :

$$S(P) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I [Y_{im} - T_{im}(P)]^2 \dots (3 - 5)$$

### Procédure itérative de la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT

Pour minimiser le critère des moindres carrés qui sont donnés par l'équation (3-5) il faut mettre les dérivées de (λ, Q) par rapport aux paramètres connus (λ, Q) égales à zéro, alors :

$$\frac{\partial S(P)}{\partial \lambda} = \frac{\partial S(P)}{\partial Q} = 0 \dots (3 - 6a)$$

Cette condition nécessaire pour la minimisation de (P) peut être représentée sous la forme de suivante :

$$\nabla S(P) = 2 \left[ -\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right] [Y - T(P)] = 0 \dots (3 - 6b)$$

où

### Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

$$\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [T_1, T_2, T_3, \dots, T_i] \dots (3-7)$$

et

$$\bar{T} = [T_{i1}, T_{i2}, \dots] \text{ pour } i = 1, 2 \dots l$$

$$J(P) = \left[ \frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_2}{\partial Q} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial T_l}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_l}{\partial Q} \end{bmatrix} \dots (3-8a)$$

Où

$$\frac{\partial T_i}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{i1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial T_{i2}}{\partial \lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{im}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \dots (3-8b)$$

et

$$\frac{\partial T_i}{\partial Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{i1}}{\partial Q} \\ \frac{\partial T_{i2}}{\partial Q} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{im}}{\partial Q} \end{bmatrix} \dots (3-8c)$$

## Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

---

pour  $i = 1, \dots, I$

Les éléments de la matrice de sensibilité sont appelés les Coefficients de sensibilité.

Le coefficient de sensibilité  $J$ , est ainsi défini comme la dérivée première de la température estimée au temps  $t$ , par rapport au paramètre inconnu  $P$ , soit

$$J_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \dots (3 - 8e)$$

Le numéro de ligne  $k$  est lié au temps de mesure  $t_n$  et au numéro du capteur  $m$  par l'expression suivante :

$$i = (n - 1)M + m \dots (3 - 9)$$

$I$  = nombre de mesures en chaque point de mesures

$m$  = nombre de points de mesures

$j$  = coefficient de sensibilité

Après avoir calculer la matrice de sensibilité, la procédure itérative, ci-dessous est utilisée pour l'estimation du vecteur de paramètre  $P$

$$P^{k+1} = P^k + [(J^k)^T J^k + \mu^k \Omega^k]^{-1} (J^k)^T [Y - T(P^k)] \dots (3 - 11)$$

### Les critères d'arrêt

Les critères suivants ont été suggérés par Dennis et Schnabel pour arrêter la procédure itérative de la Méthode de Levenberg-Marquardt donnée par l'équation

(2.1.13) :

- $S(P^{k+1}) < s_1 \dots (3 - 12a)$
- $\|[(J^k)^T [Y - T(P^k)]]\| < s_2 \dots (3 - 12d)$
- $\|P^{k+1} - P^k\| < s_3 \dots (3 - 12c)$

Avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sont des petites valeurs.

### Méthodes de détermination des coefficients de sensibilité

Il existe plusieurs approches différentes pour le calcul des coefficients de sensibilité. Nous présentons ci-dessous, à l'aide d'exemples illustratifs, trois de ces approches, à savoir : (1) l'approximation par différences finies, (2) le problème des valeurs limites et (3) la solution analytique directe.

## Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

### Approximation par différence finie pour déterminer les coefficients de sensibilité.

La dérivée première apparaissant dans la définition du coefficient de sensibilité, peut être calculée par différences finies. Si une différence directe est utilisée, le coefficient de sensibilité par rapport au paramètre  $P_j$ , est approximé par

$$J_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \varepsilon P_j, \dots, P_n) - T_i(P_1, P_2, P_j, \dots, P_n)}{\varepsilon P_j} \dots (3 - 13a)$$

Où  $\varepsilon \approx 10^{-5}$  or  $10^{-6}$

Si l'approximation du premier ordre donnée par l'équation (2.1.31.a) n'est pas suffisamment précise, les coefficients de sensibilité peuvent être approximés en utilisant des différences centrales de la forme suivante :

$$J_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + sP_j, \dots, P_n) - T_i(P_1, P_2, P_j - sP_j, \dots, P_n)}{2sP_j} \dots (3 - 13b)$$

### Matrice de sensibilité

On peut donc écrire la matrice de sensibilité sous la forme

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & \dots & J_{1j} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & \dots & J_{2j} \\ J_{31} & J_{32} & \dots & \dots & J_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{i1} & J_{i2} & \dots & \dots & J_{ij} \end{bmatrix} \dots (3 - 12)$$

### L'algorithme de calcul

L'algorithme de LM permet de linéariser le problème en effectuant un développement en série de Taylor autour d'une solution estimée

- **Étape 1** : Résoudre le problème de transfert thermique direct donné par les équations (3 - 1) avec l'estimation disponible  $p^k$  afin d'obtenir le vecteur de la température  $T(p^k) = (T_1, T_2, \dots, T_l)$
- **Étape 2** : Calculer  $S(p^k)$  à partir de l'équation (3 - 2b)

**Étape 3** : Calculer la matrice de sensibilité  $J^k$  définie par l'équation (3 - 2b), en utilisant les valeurs courantes de  $P^k$

- **Étape 4** : résoudre le système linéaire d'équations algébriques suivant, obtenu à partir de la procédure itérative de la méthode **Levenberg-Marquardt**, équation (3 - 2b)

## Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

---

$$[(J^k)^T J^k + \mu^k \Omega^k \Delta P^k] = (J^k)^T [Y - T(P)]$$

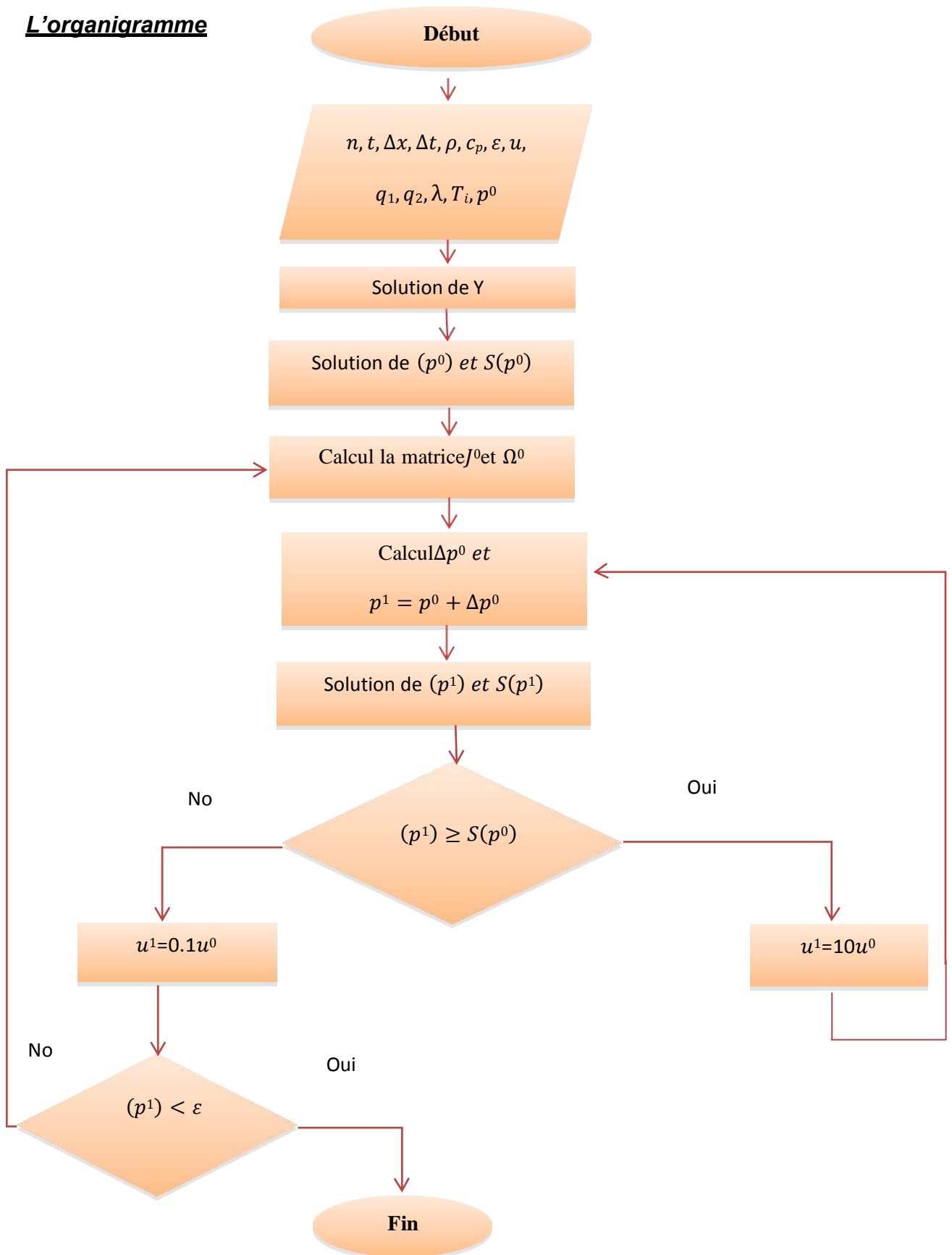
Afin de calculer  $\Delta P^k = P^{k+1} - P^k$

- **Étape 5** : Calculez la nouvelle estimation  $p^{k+1}$  comme  $P^{k+1} = P^k + \Delta P^k$
- **Étape 6** : Résolvez le problème direct (3-1) dans  $0 < x < l$  pour  $t > 0$  avec la nouvelle estimation  $p^{k+1}$  afin de trouver  $S(p^{k+1})$ , tel que défini par l'équation (3-2b)
- **Étape 7** : *if*  $S(p^{k+1}) \geq S(p^k)$  remplacer  $\mu^k$  par  $10 \mu^k$  et retourner à l'étape 4.
- **Étape 8** : *if*  $S(p^{k+1}) < S(p^k)$  accepter la nouvelle estimation  $p^{k+1}$  et remplacer  $\mu$  par  $0.1 \mu^k$
- **Étape 9** : Vérifier les critères d'arrêt donnés par les équations (3-14-a.b.c). Arrêter la procédure itérative si l'un d'eux est satisfait ; sinon, remplacer  $k$  par  $k+1$  et revenir à l'étape 3.



# Chapitre 3 : La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

## L'organigramme



## Chapitre 3 :La méthode de LEVENBERG-MAQUARDT Pour l'estimation des paramètres

---

### Conclusion

Après avoir résolu le problème direct avec des paramètres inconnus, puis calculé le coefficient de sensibilité qui se présente sous la forme d'un vecteur, puis calculé la matrice de sensibilité, de manière à pouvoir extraire la valeur du paramètre inconnu qui sont le flux de chaleur et la conduction de la chaleur. Nous comparons graphiquement le résultat avec le problème direct et itérons jusqu'à ce que nous atteignons la valeur finale pour eux.

# **Chapitre 4**

## **Application**

## APPLICATION

### Introduction

Dans ce chapitre la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT est utilisée pour l'élaboration de l'organigramme d'évaluation des paramètres Thermo-physiques  $\lambda$  et le flux de chaleur  $Q$  (conductivité thermique et le flux de chaleur). La méthode de LEVENBERG-MARQUARDT basée sur la minimisation du critère des moindres carrés est destinée à l'application aux problèmes inverses d'estimation de paramètres non linéaires et non linéaire et fortement mal conditionnée La solution d'un problème inverse par cette méthode passe par les étapes suivantes.

- le problème direct
- le problème inverse
- la procédure itérative
- le critère d'arrêt
- l'algorithme de calcul

### Le problème direct

Supposons donc que cette plaque occupe l'intervalle  $[0, L]$  de l'axe  $Ox$  et qu'à l'instant  $t=0$ , la distribution de température soit connue en tout point  $x \in [0, L]$  et est égale à  $T_{\infty}(x)$ . Supposons en outre avoir placé à la surface limitée par  $x=0$  un flux de chaleur  $Q$ . La quantité représente la puissance par unité de longueur fournie au point  $x=0$  et à l'instant  $t > 0$ . La surface à  $x=L$  est supposée isolée.

Le problème direct est formulé mathématiquement par le système d'équation suivant :

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{à } 0 \leq x \leq L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-1a)$$

Conditions aux limites :

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = Q(t) \quad \text{pour } x=0 \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-1b)$$

## Chapitre4 : application

$$-\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 1c)$$

Condition initiale :

$$T(x, 0) = T_i \text{ pour } t = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq L \quad (4 - 1d)$$

Ce système d'équation a été résolu par la méthode implicite des différences finies présentée dans le chapitre précédent, et les résultats du calcul sont présentés dans les figures suivantes :

Pour les résultats teste :

L'épaisseur L est .....	1
Le nombre de pas de l'espace suivant x nx est .....	101
Le temps d'échauffement tmax .....	1
Le nombre de pas de l'espace suivant nt.....	51
La chaleur spécifique C.....	1
La conductivité thermique K.....	1
Le flux de chaleur Q .....	1
Le nombre d'itération Max .....	100

Les résultats obtenus au point de mesure x= L sont présenté dans la figure suivante :

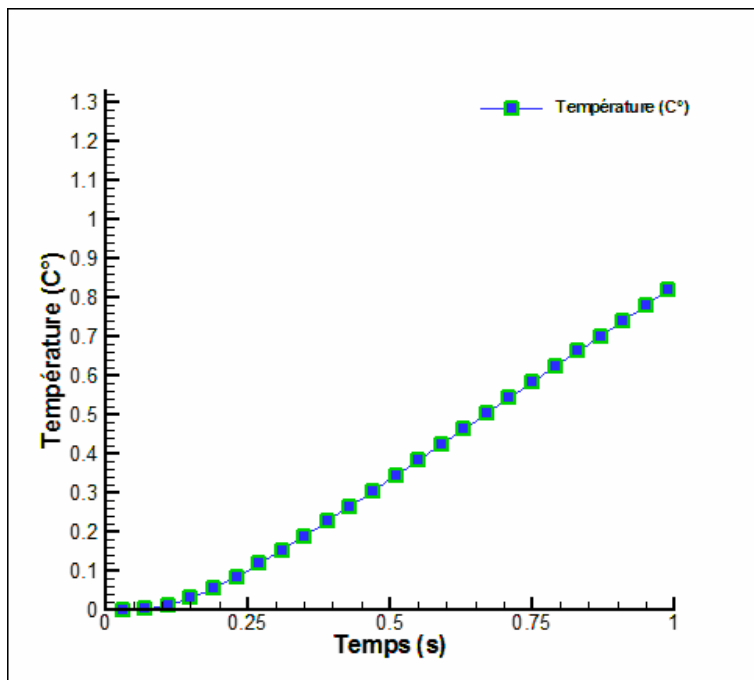


Figure (4-1) : Le profil de la température teste au point de mesure x = L

Pour l'acier :

L'épaisseur L est .....	0.05
Le nombre de pas de l'espace suivant $x_{nx}$ est .....	101
Le temps d'échauffement $t_{max}$ .....	100
Le nombre de pas de l'espace suivant $n_t$ .....	51
La chaleur spécifique C.....	3120000
La conductivité thermique K.....	25
Le flux de chaleur $q_{max}$ .....	10
Le nombre d'itération Max .....	100

Les résultats obtenus au point de mesure  $x = L$  sont présentés dans la figure suivante :

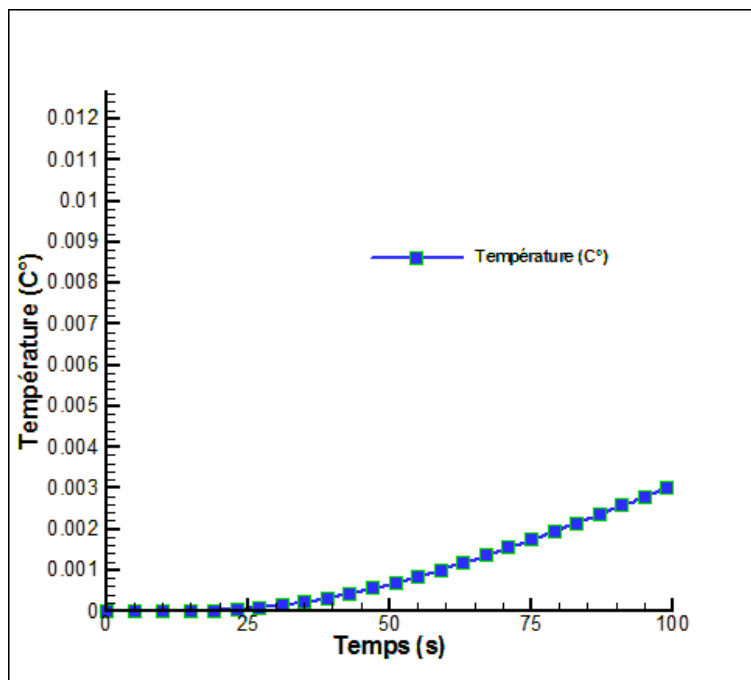


Figure (4-2) : Le profil de la température l'échantillon d'acier au point de mesure  $x = L$

### Le problème INVERSE :

Dans notre problème de conduction inverse, pour l'estimation des propriétés Thermo-physiques, ces paramètres sont considérés inconnus et l'information additionnelle est obtenue à travers des mesures des températures transitoires dans les positions  $x_1$  et  $x_2$  comme il est présenté sur la figure (3-1) aux instants  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ).

## Chapitre 4 : application

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda (?) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \text{ à } 0 \leq x \leq L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 2a)$$

Conditions aux limites :

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = Q(?) \text{ pour } x = 0 \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 2b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 2c)$$

Condition initiale :

$$T(x, 0) = T_i \text{ pour } 0 \leq x \leq L \quad (4 - 2d)$$

Et les mesures de température à l'intérieur de la plaque à étudier dans les positions  $x_1$ .

$$T(t_i, x_M) = Y_{iM} \dots (4 - 3)$$

Pour  $x = x_M$  ( $x = L$ ) et  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ )

L'algorithme de Levenberg Marquardt présentée dans le chapitre précédent a été appliquée, un programme en MATLAB a été réalisé pour trouver des solutions, dont ci- dessous :

Pour les résultats test :

<b>L'épaisseur L est .....</b>	<b>1</b>
<b>Le nombre de pas de l'espace suivant x nx est .....</b>	<b>101</b>
<b>Le temps d'échauffement tmax .....</b>	<b>1</b>
<b>Le nombre de pas de l'espace suivant nt.....</b>	<b>51</b>
<b>La chaleur spécifique C.....</b>	<b>1</b>
<b>La conductivité thermique K.....</b>	<b>1</b>
<b>Le flux de chaleur qmax .....</b>	<b>1</b>
<b>Le nombre d'itération Max .....</b>	<b>100</b>

### Résultats

<b>Valeurs initiales K et Q</b>	<b>0.1</b>
<b>La conductivité thermique estimé K.....</b>	<b>1</b>
<b>Le flux de chaleur estimé Q .....</b>	<b>1</b>

## Chapitre 4 : application

Nombre d'itération .....	8
S(P).....	0

Pour le cas Acier :

L'épaisseur L est (m).....	0.05 m
Le nombre de pas de l'espace suivant $n_x$ est .....	101
Le temps d'échauffement t max .....	100 (s)
Le nombre de pas de l'espace suivant $n_t$ .....	51
La chaleur spécifique C (j /kg C°) .....	3120000
La conductivité thermique $K(W m^{-1}K^{-1})$ .....	25
Le flux de chaleur Q (J/s) .....	10
Le nombre d'itération Max .....	100
<b>Résultats</b>	
La conductivité thermique $K(W m^{-1}K^{-1})$ .....	25
Le flux de chaleur Q (J/s) .....	10
Nombre d'itération .....	60
S(P).....	0

### Conclusion

Dans ce chapitre la Méthode des différences finies été utilisée pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles de conduction thermique en un système d'équations algébriques tri diagonales. Puis un programme en MATLAB été utilisée pour la résolution des systèmes d'équations tri diagonales. Aussi la MDF est utilisée pour calculer les coefficients de sensibilités en deux points de mesure. Et finalement Un programme Fortran 90 de l'algorithme de la Méthode de Levenberg-Marquardt est utilisée pour estimer les deux paramètres Thermo-physiques et les résultats obtenus montrent qu'avec l'utilisation des mesures exactes les paramètres identifiés sont exact



# Conclusion générale

---

## Conclusion Générale

Dans ce travail, notre objectif principal était de résoudre un problème inverse en conduction thermique pour l'estimation de deux paramètres (des constantes thermo physiques), simultanément par la méthode de LEVENBERG MAQUARDT en utilisant des mesures de température, des mesures de température simulées numériquement à partir de la résolution du problème direct de la conduction thermique par la méthode des différences finies. Un programme en MATLAB a été établi à cet effet, les résultats obtenus ont été exactes, c'est-à-dire les paramètres utilisés pour obtenir les mesures de température simulées ont été exactement identifiés par la méthode. Devant l'importance des résultats obtenus par cette introduction aux problèmes inverses transfert de chaleur, nous espérons ouvrir une porte à d'autres études plus détaillées utilisant des mesures expérimentales réelles pour analyser l'effet de bruits de mesures enregistrées sur la précision de la méthode ainsi que la stabilité de la méthode.

## ANNEX A

```
function [Temperatures] = tri_diagonal(n, T, lambda, q1, q2, k,
delta_x)
    A = zeros(n);
    A(1,1) = 1+lambda;
    A(n,n) = 1+lambda;
    for i = 2 : n-1
        A(i,i) = 1+2*lambda;
    end
    j = 1;
    for i = 2 : n
        if j<n
            A(i,j) = -lambda;
        end
        j = j+1;
    end
    i = 1;
    for j = 2 : n
        if i<n
            A(i,j) = -lambda;
        end
        i = i+1;
    end
    % B
    B1=zeros(n, 1);
    B1(1,1) = lambda*(q1*delta_x)/k;
    B1(n,1) = lambda*(q2*delta_x)/k;
    B = T + B1;
    % Temperatures = zeros(n, n);
    for i = 1 : n
        TT = inv(A) * B;
        Temperatures(:,i) = TT;
        B = TT+B1;
    end
end
```

## Les résultats TEST

	S(p)	$\lambda$	Q
It .: 1 .. res .:	5481.7359412400	10.0000	10.000
It .: 2 .. res .:	1.8101087085	1.7278	1.018
It .: 3 .. res .:	7.0780768418	.5362	1.002
It .: 4 .. res .:	.6550011067	.8072	1.006
It .: 5 .. res .:	.0144885394	.9651	1.000
It .: 6 .. res .:	.0000148147	.9988	1.000
It .: 7 .. res.:	.0000000001	1.0000	1.000
It .: 8 .. res.:	.0000000000	1.0000	1.000

## Les résultats ACIER

lt .: 1 .. res .:	.0022194042	1.0000	1.000
lt .: 2 .. res .:	.0084008404	.1464	1.590
lt .: 3 .. res .:	.0005872749	.2221	1.176
lt .: 4 .. res .:	.0002243293	.3309	1.240
lt .: 5 .. res .:	.0001961722	.4407	1.369
lt .: 6 .. res .:	.0001934911	.5376	1.492
lt .: 7 .. res .:	.0001930461	.6232	1.599
lt .: 8 .. res .:	.0001928830	.7004	1.692
lt .: 9 .. res .:	.0001927918	.7711	1.773
lt .: 10 .. res .:	.0001927314	.8367	1.845
lt .: 11 .. res .:	.0001926880	.8980	1.911
lt .: 12 .. res .:	.0001926551	.9557	1.970
lt .: 13 .. res .:	.0001926294	1.0103	2.025
lt .: 14 .. res .:	.0001926087	1.0621	2.076
lt .: 15 .. res .:	.0001925916	1.1116	2.123
lt .: 16 .. res .:	.0001925774	1.1590	2.167
lt .: 17 .. res .:	.0001925654	1.2044	2.209
lt .: 18 .. res .:	.0001925551	1.2481	2.249
lt .: 19 .. res .:	.0001925461	1.2903	2.286
lt .: 20 .. res .:	.0001925383	1.3311	2.322
lt .: 21 .. res .:	.0001925314	1.3706	2.356
lt .: 22 .. res .:	.0001925253	1.4089	2.388
lt .: 23 .. res .:	.0001925198	1.4461	2.419

lt :: 24 .. res ::	.0001925149	1.4823	2.449
lt :: 25 .. res ::	.0001925104	1.5177	2.478
lt :: 26 .. res ::	.0001925063	1.5522	2.506
lt :: 27 .. res ::	.0001925026	1.5860	2.533
lt :: 28 .. res ::	.0001924991	1.6192	2.559
lt :: 29 .. res ::	.0001924959	1.6518	2.585
lt :: 30 .. res ::	.0001924929	1.6840	2.609
lt :: 31 .. res ::	.0001924901	1.7158	2.634
lt :: 32 .. res ::	.0001924874	1.7472	2.658
lt :: 33 .. res ::	.0001924849	1.7785	2.681
lt :: 34 .. res ::	.0001924824	1.8098	2.705
lt :: 35 .. res ::	.0001924801	1.8410	2.728
lt :: 36 .. res ::	.0001924777	1.8725	2.751
lt :: 37 .. res ::	.0001924754	1.9042	2.774
lt :: 38 .. res ::	.0001924731	1.9365	2.797
lt :: 39 .. res ::	.0001924708	1.9695	2.821
lt :: 40 .. res ::	.0001924684	2.0035	2.845
lt :: 41 .. res ::	.0001924659	2.0387	2.870
lt :: 42 .. res ::	.0001924632	2.0756	2.896
lt :: 43 .. res ::	.0001924604	2.1145	2.923
lt :: 44 .. res ::	.0001924572	2.1562	2.951
lt :: 45 .. res ::	.0001924535	2.2013	2.982
lt :: 46 .. res ::	.0001924493	2.2512	3.015
lt :: 47 .. res ::	.0001924441	2.3073	3.052
lt :: 48 .. res ::	.0001924374	2.3721	3.095

lt .: 49 .. res .:	.0001924282	2.4493	3.145
lt .: 50 .. res .:	.0001924147	2.5455	3.206
lt .: 51 .. res .:	.0001923922	2.6726	3.285
lt .: 52 .. res .:	.0001923482	2.8557	3.396
lt .: 53 .. res .:	.0001922374	3.1588	3.574
lt .: 54 .. res .:	.0001918214	3.8009	3.932
lt .: 55 .. res .:	.0001897990	6.0606	5.080
lt .: 56 .. res .:	.0006085137	24.2617	12.554
lt .: 57 .. res .:	.0000001088	24.8805	10.013
lt .: 58 .. res .:	.0000000000	24.9992	10.000
lt .: 59 .. res .:	.0000000000	25.0000	10.000
lt .: 60 .. res .:	.0000000000	25.0000	10.000

## Références bibliographique

[1] **M. Necati Ozisik and Helcio R. B. Orlande**, Inverse heat transfer. Taylor & Francis, New York, 2000.

[2] **M. Necati Ozisik**, Heat Conduction 2<sup>nd</sup> Edition, JOHN Wiley & SONS, USA 1993.

[3] transfert de chaleur 1 conduction et convection .

.

## **Résumé**

L'objectif de cette étude est la mise en œuvre des techniques inverses afin d'estimer des propriétés thermiques et des conditions aux limites difficiles à mesurer ou à estimer. Pour cela, un programme a été créé qui nous permet de réaliser l'algorithme de cette méthode.

Afin de prouver l'efficacité de ce programme, il a été fait référence à des simulations numériques sur une plaque de propriétés et d'épaisseur connues. . L'utilisation d'un champ ou de champs de température change en fonction du temps, dans laquelle une certaine confusion aléatoire est introduite pour simuler les mesures réalistes de cette expérience. Cela nous a permis de revenir aux caractéristiques recherchées.

**Mots clés :** Méthode inverse, Différences finies, Conduction de la chaleur, conductivité thermique

### **Abstract:**

The objective of this study is the implementation of inverse techniques in order to estimate thermal properties and boundary conditions that are difficult to measure or estimate.

For this, a program has been created that allows us to perform the algorithm of this method. In order to prove the effectiveness of this program, reference was made to numerical simulations on a plate of known properties and thickness. . Using a temperature field or fields changes over time, in which some random confusion is introduced to simulate the realistic measurements of this experiment. This allowed us to return to the characteristics sought

**Key words:** Inverse Method, heat conduction, finite difference, thermal conductivity.

### **ملخص:**

الهدف من هذه الدراسة هو تنفيذ التقنيات العكسية من اجل تقدير الخصائص الحرارية والشروط الحدية التي يصعب قياسها او تقديرها لتقدير بعض الخصائص الفيزيائية مثل الناقلية الحرارية والانتشار الحراري تم الاستعانة بطريقة ليفنيرق ماركوت لتقدير المعالم. ومن اجل هذا تم انشاء برنامج يمكننا من تحقيق خوارزمية هذه الطريقة . ومن اجل اثبتت فعالية هذا البرنامج تم الرجوع الى محاكات عديدة على صفيحة ذات خصائص و وسمك معلومين النتيجة المتحصل عليها من خلال المحاكات العددية الأشكال المباشر سمح بحساب درجة الحرارة خلال هذه الصفيحة في اماكن وضع المجسات الحرارية . استخدام حقل او حقول تغيرات درجات الحرارة بدلالة الزمن ، والتي يتم ادخال بعض التشويش العشوائي لمحاكات القياسات الواقعية لهذه التجربة . مكنتنا من الرجوع الى الخصائص المطلوب.

**الكلمات المفتاحية :** الفوارق المنتهية، التوصيل الحراري ، النموذج العكسي، الناقلية الحرارية