ENGLanguage=Latexlatex/frenchspacinglatex/directionlatex/indentfirst
ENGLanguage=Latexlatex/frenchspacinglatex/directionlatex/indentfirst

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah Ouargla

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
Spécialité : Mathématiques
Option : Algèbre et Géométrie

Présentée par:

NOUARA ZEHRI

Les Nombres Parfaits

Soutenu devant le juré composé de

Salim Badidja	MCA, Université de Ouargla	Président
Mohammed T. Benmoussa	MAB, Université de Ouargla	Examinateur
Brahim Mittou	MCB, Université de Ouargla	Encadreur

⋆ *Remerciments* ⋆

Avant tout je remercie " Allah" tout puissant pour m'avoir inspiré la volonté et la patience pour accomplir ce travail.
Un grand remerciement à mes parents " 'Boubekeur' et Sabah' ";et ma famille.
Un grand remerciement à mon encadreur " Dr. Brahim Mittou "; pour avoir accepté de m'assister pour diriger ce mémoire avec ses fructueux conseils ;sa disposition et son encouragement.
J'exprime ma vifs remerciements à chaque membre de jury pour l'attention toute particulière qu'ils ont accordées à ce travail et pour avoir acceptés de ma soutenir.
Je remercie également toute l'équipe administrative du département de Mathématiques à l'université de Kasdi Merbah Ouargla , et à toute la promotion Mathématiques de Algebre et Géométrie 2021-2022.

⋆ *Dédicace* ⋆

Je dédie ce modeste travail...

À la personne qui a le plus grand cœur du monde mon cher père **' Boubekeur '**.
qui m'a soutenue tout au long de mon parcours universitaire .

À la plus généreusefemme du monde, ma mère **' Sabah '** **"Qu'Allah"**me les préserve".

Pour son soutien moral, son encouragement tout a long de mes études.

'Qu'Allah' leur présente une bonne santé et une longue vie.

À mes chers frères: **' Moudjahed, Ali, Mohammed, Nassim, Oussama ',**

et mes chères sœurs: **' Asma, Israa, '**.

Je leur souhaite tous bonheur et de réussite dans leur vie.

À mom cher et vénéré mari **' Ismail '**.

Et la famille **' Barkat ,**

À toute la famille **' Zehri '** et **' Lamouri '** sans éxcéption.

⋆ ***Zehri Nouara*** ⋆

⋆ *Résumé* ⋆

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude des nombres parfaits qui sont définis comme suit. Un nombre parfait est un entier positif égal a la somme de ses diviseurs positifs excepté lui-même

Les nombres parfaits sont divisés en deux parties ; pairs et impairs.Mais avant de les étudier et s'approfondir dans leurs propriétés, nous avons dû définir la fonction sigma, qui joue un rôle important dans l'étude des nombres parfaits

⋆ *Summary* ⋆

In this memoir, we are interested in studying the perfect numbers which are known as follows

A perfect number is a positive integer equal to the sum of its positive divisors except itself.

The perfect numbers are divided into even and odd parts, but before we study them and searching into their properties, we had to define the sigma function which has an important role in studying the perfect numbers.

Contents

ENGLanguage=Latexlatex/frenchspacinglatex/directionlatex/indentfirst

Introduction

Le nombre est un concept mathématique qui exprime une valeur pouvant représenter des grandeurs, des quantités, des positions, $\cdots$ etc , et se compose d'un ou plusieurs chiffres .

On peut trouver les nombres dans plusieurs états : Pairs , impairs , naturels , réels , complexes ,entier , premier $\cdots$ ou **parfait**.

Donc c'est quoi un nombre parfait ?

Dans cet mémoire, nous allons introduire les nombres parfait, leurs catégories ainsi que leurs principales caractéristiques.

Cet mémoire se compose de deux chapitres:

Chapitre 1: Définition des fonctions arithmétiques et plus précisément la fonction sigma qui est ($\sigma(n)$= **la somme de tous les diviseurs unique de** n **incluant** 1 **et** n) et sa principale caractéristique est qu'elle est une fonction multiplicative.

Chapitre 2: Définition des nombre parfaits (**Un nombre parfait est un entier positif est égal a la somme de ses diviseurs positifs exclu lui même**).

Les anciens GREKS connaissaient bien l'existence des nombres parfaits et ont pris en considération les quatre premiers qu'ils connaissaient. Il pensaient que les nombres parfaits ont des propriétés mystiques et ont même été utilisés pour démontrer l'existence de **D I E U** .

On trouve deux catégories des nombre parfaits:

Les nombres parfaits pairs : qui ont une formule connue

$$(N = 2^{n-1}p)$$

avec n est un entier strictement positif et $p = 2^n - 1$ est premier , découverte partiellement par Euclide et puis totalement par Euler.

Les nombres parfaits impairs : Jusqu'aujourd'hui aucun nombre parfait impair n'a été trouvé, malgré qu'il n'y a pas de preuve de leur inexistence. Cependant, une formule pour ces nombres à été conjecturée en cas de leur existence. d'après Euler : tout nombre parfait impair N est de la forme

$$N = p^\alpha S^2$$

avec p est un nombre premier tel que $p \equiv 1(\text{mod}4)$,α est un entier naturel vérifiant $\alpha \equiv 1$ et S est un entier naturel impair ≥ 3 et premier avec p . Il a été démontré que le plus petit nombre parfait impair s'il existe est plus grand que 10^{1500} .

Chapter 1

La Fonction σ

La théorie des nombres, comme beaucoup d'autres branches des mathématiques, est souvent concernée avec des suites de nombres réels ou complexes. En théorie des nombres, de telles suites sont appelés les fonctions arithmétiques.

Les fonctions arithmétiques sont très importantes dans de nombreux parties des sciences théoriques et appliquées, et de nombreux mathématiciens ont montré un grand intérêt pour ce domaine. Dans ce chapitre, nous avons commencé par présenter les définitions, les concepts initiaux et les propriétés communes liés aux fonctions arithmétiques, puis nous avons abordé une étude plus approfondie et spécialisée de la fonction somme de diviseurs σ.

1.1 Les Fonctions Arithmétiques

Définition 1.1.1. *On appelle fonction arithmétique, toute application f définie de $\mathbb{N}^*$ dans le corps $\mathbb{C}$.*

Définition 1.1.2. *Une fonction arithmétique non nulle f est dite multiplicative* ***ssi***

$$f(1) = 1 \text{ et pour tout } (m, n) = 1, f(mn) = f(m)f(n).$$

Une fonction arithmétique multiplicative f est dite complètement multiplicative ***ssi***

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{pour tout } m, n.$$

Théorème 1.1.1. ([2];[14]) *Soit f une fonction arithmétique. On a:*

1. *f est multiplicative* ***ssi***

$$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r})$$

pour tout nombre premier p_i et tout entier $\alpha_i \geq 1$.

2. *Si f est multiplicative, alors f est complètement multiplicative* ***ssi***

$$f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$$

pour tout nombre premier p et tout entier $\alpha \geq 1$.

1.2 La Fonction σ

La fonction diviseurs σ_s où $s \in \mathbb{C}$, c'est une fonction liée aux diviseurs d'un entier positif n comme suit:

$$\sigma_s(1) = 1 \ (\forall s \in \mathbb{C}),$$

$$\sigma_s : n \mapsto \sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s.$$

1. En particulier pour $s = 0$, la fonction σ_0 est notée par d et on a

$$\begin{aligned} d(n) &= \sum_{d|n} 1 \\ &= \text{ le nombre des diviseurs de } n. \end{aligned}$$

   Table des premières valeurs de la fonction d:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2

2. En particulier pour $s = 1$, la fonction σ_1 est notée par σ et on a

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sum_{d|n} d \\ &= \text{ la somme des diviseurs de } n. \end{aligned}$$

   Table des premières valeurs de la fonction σ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14

Dans la suite de ce chapitre, nous nous concentrerons sur l'étude des propriétés de la fonction σ.

Théorème 1.2.1. **([8])** *Si p est premier et $k \geq 1$, alors*

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + ... + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Démonstration. Si p est premier, alors il n'est divisible que par 1 et lui-même. Il s'ensuit que les diviseurs de p^k sont

$$1,\ p,\ p^2,\ \dots,\ p^{k-1},\ p^k.$$

C'est-à-dire que nous pouvons écrire

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + ... + p^{k-1} + p^k.$$

Notez que cette somme peut être écrite sous la forme

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j.$$

Nous commençons par définir S tel que

$$S = \sum_{j=0}^{n} ar^j$$

et procéder a la multiplication de S par r:

$$\begin{aligned} rS &= \sum_{j=0}^{n} ar^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} ar^k(ar^{n+1} - a) \\ &= s + (ar^{n+1} - a). \end{aligned}$$

La solution pour S nous donne que

$$s = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Mais dans notre cas $a = 1$ et $r = p$, donc

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

□

Théorème 1.2.2. *σ est une fonction multiplicative, i.e.,*

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \quad pgcd(a, b) = 1.$$

La preuve du Théorème 1.2.2 dépend principalement de lemme suivante:

Lemme 1.2.1. *Supposons que a et b soient des entiers relativement premiers avec*

$$a_i : 1 \leq i \leq s \text{ et } b_j : 1 \leq j \leq t$$

étant tous les diviseurs de a et b respectivement. Alors

$$S = \{a_i b_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\}$$

sont tous les diviseurs de ab.

Démonstration. Il est clair que l'élément du format $a_i b_j$ est un diviseur de ab. Il s'ensuit donc que S ne contient que des diviseurs de ab. Nous voulons montrer que tous les diviseurs de ab sont présents dans S.

On pose

$$d \mid ab \text{ et } D = pgcd(a, b) \text{ et } d' = \frac{d}{D} \in \mathbb{Z}.$$

Parce que $D \mid a$, $D = a_j$ pour certains j. Il s'ensuit que $d = Dd' = a_j d'$. On doit montrer que d' divise b. Parce que $d|ab$, $dk = ab$ pour un entier k, donc $Dd'k = ab$ si $d'k = \frac{a}{D}b$. Puisque $pgcd(a, b) = D$, on a $pgcd(\frac{a}{b}, \frac{d}{D}) = 1$ donc $pgcd(\frac{a}{d}, d') = 1$. Ainsi, par le lemme d'Euclide $d'|b$ donc $d' = b_i$ pour certains i au choix. $\square$

Nous pouvons maintenant procéder à la preuve de la Théorème 1.2.2.

Démonstration de Théorème 1.2.2. En utilisant la même notation que Lemme 1.2.1, soit

$$a_i : 1 \leq i \leq s \text{ et } bi : 1 \leq j \leq t$$

les diviseurs de a et b respectivement. Alors on a

$$\begin{aligned}
\sigma(a)\sigma(b) &= \left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j b_j\right)\\
&= \sum_i \sum_j a_i b_j\\
&= \sum_{d|ab} d\\
&= \sigma(ab).
\end{aligned}$$

$\square$

Chapter 2

Les Nombres parfaits

Un nombre parfait est un entier positif égal à la somme de ses diviseurs positifs excluant lui-même. En langage mathématique, cela signifie

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \text{ est nombre parfait } &\Leftrightarrow \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} d = n \\ &\Leftrightarrow \sigma(n) = \sum_{d|n} d = 2n. \end{aligned}$$

Les quatre premiers nombres parfaits sont 6, 28, 496 et 8128 car:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$$

Historiquement, les nombres parfaits sont apparus pour la première fois dans l'école pythagoricienne. Les anciens Grecs connaissaient bien l'existence des nombres parfaits et tenaient en haute estime ceux qu'ils connaissaient (les quatre premiers). On pensait que les nombres parfaits avaient des propriétés curatives mystiques et étaient même utilisés pour illustrer l'existence de Dieu. Selon certains hommes de religions monothéistes "Dieu a choisi de créer la terre en 6 jours car le chiffre 6 est parfait".

2.1 Les Nombres Parfaits pairs

Les nombres parfaits ont été étudiés par Euclide (autour du 3$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C.) mais sans qu'elles soient mêlées à aucune philosophie. Au contraire, Euclide a démontré un théorème fondamental sur ces nombres, qui est le suivant:

Théorème 2.1.1. ([5]) *Soit n un entier strictement positif. Si le nombre $p = 2^n - 1$ est premier alors le nombre $N = 2^{n1}p$ est parfait.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que le nombre $p = 2^n - 1$ est premier. L'ensemble des diviseurs du nombre $N = 2^{n1}p$ sont:

$$D = \{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}, p, 2p, 2^2p, ..., 2^{n-1}p\}.$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= \sum_{d/N} d = \sum_{d \in D} d \\
&= (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) + (p + 2p + 2^2p + ... + 2^{n-1}p) \\
&= (2^n - 1) + p(2^n - 1) \\
&= (2^n - 1)(p + 1) \\
&= 2^n(2^n 1) \\
&= 2^n p \quad (\text{car } p = 2^n - 1) \\
&= 2N.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que N est parfait, Le théorème est vérifié.

La réciproque du théorème d'Euclide pourrait être vraie (c'est à dire que tout nombre parfait est de la forme $N = 2^{n1}p$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 2^n - 1$ premier) mais ceci n'est pas encore démontré. Toutefois, Euler a montre que tout nombre parfait pair est de la forme donnée par Euclide dans son théorème. □

Théorème 2.1.2. ([5]) *Tout nombre parfait pair s'écrit sous la forme:*

$$N = 2^{n-1}p,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p = 2^n - 1$ *premier.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un nombre parfait pair. On écrit N sous la forme

$$N = 2^k l$$

avec $k, l \in \mathbb{N}^*$ et l impair. Comme la fonction σ est multiplicative et $pgcd(2^k, l) = 1$ (puisque l est impair), on a

$$\sigma(N) = \sigma(2^k l)\sigma(2^k)\sigma(l).$$

Mais, d'après la proposition 1,on a

$$\sigma(2^k) = \frac{2^{k+1}-1}{2-1} = 2^{k+1}-1.$$

D'où

$$\sigma(N) = (2^{k+1}-1)\sigma(l).$$

D'autre part, comme N est parfait, on a

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^k l) = 2^{k+1}l.$$

En comparant les deux formules obtenues pour $\sigma(N)$, on en déduit que l'on a

$$(2^{k+1}-1)\sigma(l) = 2^{k+1}l. \tag{2.1}$$

Cette identité montre que le nombre 2^{k+1} divise le nombre $(2^{k+1}1)\sigma(l)$, et puisque 2^{k+1} est premier avec $(2^{k+1}-1)$ alors 2^{k+1} divise $\sigma(l)$ (en vertu du lemme de Gauss) donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sigma(l) = 2^{k+1}r.$$

En substituant ceci dans (2.1), il vient que $l = (2^{k+1}-1)r$. La somme des diviseurs propres de l est donc égale à

$$\sigma(l) - l = 2^{k+1}r - (2^{k+1}-1)r = r.$$

Mais comme r est lui même un diviseur propre de l (puisque $l = (2^{k+1}-1)r$ et $k \geq 1$, on en déduit que l possède un unique diviseur propre qui est r. Ce qui n'est possible que si l est premier et $r = 1$. D'où $l = 2^{k+1}-1$ premier et $N = 2^k l$. Il ne reste qu'à prendre $n = k+1$ pour avoir $N = 2^{n1}(2n-1)$ avec (2^n-1) premier. Ce qui démontre le théorème. . $\square$

D'après les deux théorèmes d'Euclide et d'Euler, les nombres parfaits pairs sont ultimement liés aux nombres premiers s'écrivant sous la forme (2^n-1), avec $n \in \mathbb{N}$. Ces derniers nombre premiers sont connus sous le nom de **nombres premiers de Mersenne**.

Définition 2.1.1. *On appelle* ***nombre premier de Mersenne*** *tout nombre premier s'écrivant sous la forme* $(2^n - 1)$*, avec* $n \in \mathbb{N}$*. Les premiers nombres premiers de Mersenne sont:* $2^2 - 1 = 3$*,* $2^3 - 1 = 7$*,* $2^5 - 1 = 31$*,* $2^7 - 1 = 127$*,... etc.*

La proposition suivante précise que dans la forme $(2^n - 1)$ d'un nombre premier de Mersenne, l'entier positif n est nécessairement **premier**.

Proposition 2.1.1. ([5]) *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Si le nombre* $(2^n - 1)$ *est premier alors* n *est lui même premier.*

Démonstration. Montrons la contraposée de la proposition, qui est:

$$n \text{ n'est pas premier} \Rightarrow (2^n - 1) \text{ n'est pas premier.}$$

Supposons donc que n n'est pas premier et montrons que $(2^n - 1)$ n'est pas premier. Lorsque $n = 0$ ou 1, ce résultat est visiblement vrai. Supposons donc que $n \geq 2$. Comme n est supposé non premier alors n possède un diviseur a tel que $a \notin 1, n$. Écrivons $n = ab$ $(b \in \mathbb{N})$. Considérons la congruence triviale:

$$2^a \equiv 1(mod(2^a - 1).$$

En élevant les deux membres de celle-ci à la puissance b, on obtient:

$$2^{ab} \equiv 1(mod(2^a - 1)).$$

C'est à dire:

$$2^n - 1 \equiv 0(mod(2^a - 1)).$$

Ce qui montre que le nombre $(2^n - 1)$ est multiple du nombre $(2^a - 1)$ et puisque $(2^a - 1) \notin 1, 2^n - 1$ (car $a \notin 1, n$), alors $(2^n - 1)$ n'est pas premier, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve de la proposition. $\square$

Proposition 2.1.1 permet de préciser la forme d'un nombre premier de Mersenne ainsi que la forme d'un nombre parfait pair.

Corollaire 2.1.1. **([5])** *Un nombre premier de Mersenne est un nombre premier s'écrivant sous la forme* $(2^p - 1)$, *avec* p *premier.*

Remarque 2.1.1. A un certain temps On a cru a la véracité la réciproque de la proposition 5, c'est à dire que tout nombre de Mersenne est premier). Mais ceci s'est avéré inexact puisque le nombre de Mersenne $(2^{11} - 1) = 23 \times 89$ n'est pas premier Euler a découvert un résultat utile qui aide à montrer la non primalité de certains nombres de Mersenne .

Théorème 2.1.3. **([5])** *Soit* p *un nombre premier impair, Alors tout diviseur premier du nombre de Mersenne* $(2^p - 1)$ *est de la forme* $(2kp + 1)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Proof. Soit p un nombre premier impair et q un diviseur premier du nombre $(2^p - 1)$ on a donc

$$2^p \equiv 1(modq).$$

Cette congruence montre que l'ordre e de 2 modulo q divise p Mais puisque $e \neq 1$ (car $21 \not\equiv 1(modq)$ alors $e = p$. Par suite, comme on a $2^{q1} \equiv 1(modq)$ (en vertu du petit théorème de Fermat) alors le nombre $(q - 1)$ est multiple de $e = p$. Par ailleurs $(q - 1)$ est un multiple de 2 (car q est impair, en tant que diviseur du nombre impair $(2^p - 1)$). en résulte que $(q - 1)$ est multiple de $ppcm(2, p) = 2p$ Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q - 1 = 2kp$; soit $q = 2kp + 1$, comme il fallait le prouver. □

Exemple 2.1.1. Utilisons Théorème 2.1.4 pour montrer la non primalité de chacun des deux nombres de Mersenne $(2^{11} - 1)$ et $(2^{23} - 1)$.

D'après ce théorème, les diviseurs premiers du nombre $(2^{11} - 1)$ sont de la forme $(22k + 1)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ La première valeur de $k(k = 1)$ donne le nombre premier 23 et on vérifie que 23 divise effectivement $(2^{11} - 1)$.

D'où $(2^{11} - 1)$ n'est pas premier . De même, d'après Théorème 2.1.4, les diviseurs premiers du nombre $(2^{23} - 1)$ sont de la forme $(46k)$ $k \in \mathbb{N}^*)$. La première valeur même de k $(k = 1)$ donne le nombre premier 47 et on vérifie que 47 divise effectivement $(2^{23} - 1)$. D'où $(2^{23} - 1)$ n'est pas premier. Les deux exemples qu'on vient de voir, et qui concernent la non-primalité de certains nombres de Mersenne, constituent un cas particulier d'un théorème plus général de E. Lucas.

Théorème 2.1.4. ([5]) *Soit $p > 3$ nombre premier vérifiant $p \equiv 3 \pmod 4$. Si le nombre $(2p+1)$ est lui aussi premier, alors le nombre de Mersenne (2^p-1) est composé et $(2p+1)$ est l'un de ses facteurs premiers*

Démonstration. Soit $q = 2p + 1$. Comme q est supposé premier alors d'après le petit théorème de Fermat, on a $2^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, c'est à dire $2^{2p} \equiv 1 \pmod q$, ce qui s'écrit encore $(2^p - 1)(2^p + 1) \equiv 0(\mod q)$ on a donc ou bien

$$2^p \equiv 1(modq) \tag{2.2}$$

ou

$$2^p \equiv -1(modq). \tag{2.3}$$

Montrons que la seconde alternative est impossible. Procédons par l'absurde en supposons que $2^p \equiv -1(\text{mod } q)$, ceci équivaut à $2^p \equiv 2p \pmod q$. En divisant sur 2 les deux membres de cette dernière congruence (ce qui est autorisé puisque $pgcd(2, q) = 1$, on obtient $2^{p-1} \equiv p \pmod q$. Mais comme 2^{p-1} est un carré parfait (car $(p-1)$ est pair), il en résulte que p est un résidu quadratique modulo q. D'un autre coté, on a d'après la loi de la réciprocité quadratique:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}. \tag{2.4}$$

Mais comme $(\frac{q}{p}) = (\frac{2p+1}{p}) = (\frac{1}{p}) = 1$ et $\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2} = \frac{p-1}{2}p$ est impair (car $p \equiv 3 \pmod 4$ Relation (2.4) entraîne $(\frac{p}{q}) = -1$. Ce qui montre que p n'est pas un résidu quadratique modulo q. Ces deux résultats contradictoires concernant le caractère quadratique de p modulo q montrent que l'alternative (2.3) est impossible et c'est avec l'alternative (2.2) que l'on a $2^p \equiv 1 \pmod q$. Par conséquent $(2^p - 10 \bmod q)$ et $(2^p - 1)$ est un multiple de q. Enfin puisque $(2p - 1 > 2p + 1 = q$ (car $p > 3$) il s'en suit que le nombre de Mersenne $(2^p - 1)$ est composé. Le théorème est démontré. □

Remarque 2.1.2. 1. La non primalité des deux nombres de Mersenne $(2^{11}-1)$ et $(2^{23}-1)$ (montrée précédemment en se servant du théorème d'Euler) s'obtient par le théorème de Lucas en prenant $p = 11$ puis $p = 23$.

2. Les nombres premiers p tels que $(2p+1)$ soit aussi premier sont connus sous le nom de nombres premiers de Sophie Germain. On pense qu'il existe une infinité de nombres premiers de Sophie Germain mais ceci reste pour le moment des suppositions. Des hypothèses générales sur les nombres premiers, proposées par A. Schinzel, montrent qu'il existe même une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3 \pmod 4$ et $(2p+1)$ soit premier. On en déduit du théorème précédent de E Lucas que sous les hypothèses de Schinzel, il existe une infinité de nombres de Mersenne composés. On pense aussi qu'il existe une infinité de nombres de Mersenne premiers et d'ailleurs on ne cesse d'en découvrir de nouveaux, mais ceci est loin d'être démontrable par les outils mathématiques actuels. Après avoir étudié le lien capital entre les nombres parfaits pairs et les nombres premiers de Mersenne, voyons maintenant quelques propriétés relativement simples des nombres parfaits pairs

Quelques propriétés simples des nombres parfaits pairs

À l'heure actuelle (Join 2022), seuls 51 nombres parfaits sont connus. Le tableau suivant en contient quelques-uns (pour la version complète de ce tableau, voir [10]):

Rang	Nombre parfait	Chiffres	Année
1	6	1	AVANT JC
2	28	2	AVANT JC
3	496	3	AVANT JC
4	8128	4	AVANT JC
5	33550336	8	1456
6	8589869056	10	1588
7	137438691328	12	1588
8	2305843008139952128	19	1772
9	265845599156...615953842176	37	1883
10	191561942608...321548169216	54	1911
11	131640364585...117783728128	65	1914
12	144740111546...131199152128	77	1876
13	235627234572...160555646976	314	1952
14	141053783706...759537328128	336	1952
15	541625262843...764984291328	770	1952
16	108925835505...834453782528	1327	1952
17	994970543370...675139915776	1373	1952
18	335708321319...332628525056	1973	1957
19	182017490401...437133377536	2561	1961
20	407672717110...642912534528	2663	1961
21	114347317530...558429577216	5834	1963
22	598885496387...324073496576	5985	1963

23	395961321281...702691086336	6751	1963
24	931144559095...790271942656	12003	1971
25	100656497054...255141605376	13066	1978
26	811537765823...603941666816	13973	1979
27	365093519915...353031827456	26790	1979
28	144145836177...957360406528	51924	1982
29	136204582133...233603862528	66530	1988
30	131451295454...491774550016	79502	1983
31	278327459220...416840880128	130100	1985
32	151616570220...600565731328	$455, 663$	1992
33	838488226750...540416167936	517430	1994
34	849732889343...028118704128	757263	1996
35	331882354881...017723375616	841842	1996
36	194276425328...724174462976	1791864	1997
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
46	144285057960...837377253376	25674127	2009
47	500767156849...221145378816	25956377	2008
48	169296395301...626270130176	34850340	2013
49	451129962706...557930315776	44677235	2016
50	109200152134...402016301056	46498850	2017
51	110847779864...007191207936	49724095	2018

On a remarqué d'après la table que les nombres parfaits pairs se terminent toujours (dans leur représentation décimale) par le chiffre 6 ou par les deux chiffres 2 et 8 dans cet ordre. Il est facile de confirmer cette remarque par des techniques usuelles de congruences.

Proposition 2.1.2. **([5])** *La représentation décimale de tout nombre parfait pair se termine ou bien par* 6 *ou bien par* 28 *Plus précisément, pour tout nombre parfait pair*

N on a:

$$N \equiv 6(mod 10) \ ou \ N \equiv 28(mod 100).$$

Démonstration. Soit N un nombre parfait pair. D'après Euler, N s'écrit sous la forme $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, avec p premier et $(2^p - 1)$ premier. Si $p = 2$, on obtient $N = 6$ qui vérifie bien $N \equiv 6 \pmod{10}$ Supposons pour la suite que le nombre premier p est impair. Donc ou bien $p \equiv 1 \pmod 4$, ou bien $p \equiv 3 \pmod 4$.

1. Si $p \equiv 1 \pmod 4$. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 4k + 1$. Par suite, on a $N = 2^{p-1}(2^p 1) = 2^{4k}(2^{4k+1} - 1) = 16^k(2.16^k - 1)$. Comme $16 \equiv 1 \pmod 5$, il en résulte que $N \equiv 1 \pmod 5$. Enfin, les deux congruences $N \equiv 0$ mod 2) et $N \equiv 1 \pmod 5$ entraînent que l'entier $(N - 6)$ est à la fois un multiple de 2 et de 5 et il est par conséquent un multiple de $PPCM(2, 5) = 10$. Ce qui montre que $N \equiv 6 \pmod{10}$.

2. si $p \equiv 3 \pmod 4$. Dans ce cas, p s'écrit $p = 4k + 3$ $(k \in \mathbb{N})$. D'où $N = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1)$. En posant $n = 2^{4k+2}$ il vient que $N = n(2n - 1)$. Mais puisque $n = 2^{4k+2} = 416^k \equiv 4 \pmod 5$, on peut écrire $n = 5l + 4$ pour un certain $l \in \mathbb{N}$. D'où

$$\begin{aligned} N &= n(2n-1) \\ &= (5l+4)(10l+7) \\ &= 50l^2 + 75l + 28 \\ &\equiv 28(mod 25). \end{aligned}$$

   Ceci montre que l'entier $(N - 28)$ est un multiple de 25 Mais puisque $(N - 28)$ est aussi un multiple de 4 (car N est visiblement un multiple de 4) alors $(N - 28)$ est un multiple de $ppcm(4, 25) = 100$. D'où $N \equiv 28 \pmod{100}$. La preuve de la proposition est complète

□

La proposition qui suit révèle un lien important entre les nombres parfaits et les nombres triangulaires. Rappelons d'abord la définition d'un nombre triangulaire.

Définition 2.1.2. *Un nombre naturel est dit* ***triangulaire*** *s'il est la somme des entiers naturels depuis* 0 *jusqu'à un certain nombre. Plus précisément,* $N \in \mathbb{N}$ *est* ***triangulaire*** *s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que:*

$$N = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les premiers nombres triangulaires son: 0,1,3,6,10,15,21,28,$\cdots$ *etc*

Proposition 2.1.3. ([5]) *Tout nombre parfait pair est triangulaire.*

Démonstration. Soit N un nombre parfait pair. D'après le théorème 7 d'Euler, N s'écrit $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, avec p et $(2^p - 1)$ sont des nombres premiers. En posant $n = 2^p - 1$, il vient que $N = \frac{n(n+1)}{2}$ ce qui montre que N est triangulaire. La proposition est démontrée. □

Nous poursuivons avec une proposition élémentaire mais remarquable attribuée à l'historien des Mathématiques.

Proposition 2.1.4. ([5];[6]) *Tout nombre parfait pair, strictement plus grand que* 6*, s'écrit comme une somme de cubes des nombres impairs consécutifs depuis* 1 *jusqu'à un certain nombre, plus précisément, tout nombre parfait pair* N *s'écrit sous la forme*

$$N = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3,$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration. La preuve est basée sur la formule suivante qu'on démontre par récurrence

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1) \ (n \in \mathbb{N}^*). \tag{2.5}$$

Soit un nombre parfait pair $N > 6$, en vertu du Théorème 2.1.2 d'Euler, N s'écrit $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, avec p et $(2^p - 1)$ qui sont nombres premiers. Comme par hypothèse

$N > 6$, alors $p \neq 2$ et donc p est un nombre premier impair. En posant $n = 2^{\frac{p-1}{2}} \in \mathbb{N}^*$, il vient que $N = n^2(2n^2 - 1)$. Grâce à (2.5), on a enfin

$$N = 1^3 + 3^3 + ... + (2n1)^3,$$

qui est bien l'écriture recherchée de N. La proposition est démontrée. □

En liaison avec Proposition 2.1.4, on peut se poser la question de savoir si tout nombre parfait pair (> 6) peut s'écrire comme une somme d'un nombre bien déterminé de cubes d'entiers naturels (une somme de 5 cubes par exemple), le théorème suivant de Farhi répond a cette question.

Théorème 2.1.5. ([7]) *Tout nombre parfait pair, strictement plus grand que* 6*, s'écrit comme une somme de* 5 *cubes d'entiers naturels.*

Démonstration. Cette preuve est basée sur l'identité suivante:

$$2n^6 - 2 = (n^2 + n - 1)^3 + (n^2 - n - 1)^3 \; (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2.6}$$

facilement vérifiable.

Maintenant, soit N un nombre parfait pair, strictement plus grand que 6. D'après Théorème 2.1.2, N s'écrit $N = 2^{p1}(2^p - 1)$, avec p et $(2^p - 1)$ sont des nombres premiers. Comme par hypothèse $N > 6$, on a $p > 2$.

1. Pour $p = 3$, on obtient $N = 28 = 1^3 + 3^3$, qui est une somme de deux cubes d'entiers naturels et est à plus forte raison une somme de 5 cubes d'entiers naturels (en complétant par des zéros).

2. Pour $p = 5$ 5, on trouve $N = 496 = 4^3 + 6^3 + 6^3$, qui est une somme de trois cubes d'entiers naturels et est à fortiori une somme de 5 cubes d'entiers naturels (en complétant par des zéros).

3. Supposons pour la suite que $p > 5$. Donc p s'écrit sous l'une des deux formes: $p = 6k + 1$ ou $p = 6k + 5$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

(a) $(p = 6k+1, (k \in \mathbb{N}^*)$.

(b) Dans ce cas, on a $N = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{6k}(2^{6k+1} - 1)$. Mais en prenant $n = 2^k$ dans (2.6), on obtient $2^{6k+1} - 2 = a^3 + b^3$, avec $a = n^2 + n - 1$ et $b = n^2 - n - 1$. D'où

$$\begin{aligned} N &= 2^{6k}(2^{6k+1} - 1) \\ &= 2^{6k}(a^3 + b^3 + 1) \\ &= (2^{2k}a)^3 + (2^{2k}b)^3 + (2^{2k})^3 \end{aligned}$$

qui est une somme de 3 cubes d'entiers naturels et est à fortiori une somme de 5 cubes d'entiers naturels (en complétant par des zéros).

(c) $(p = 6k+5, k \in \mathbb{N}^*)$. Dans ce cas, on a

$$N = 2^{p1}(2^p - 1) = 2^{6k+4}(2^{6k+5} - 1) = 2^{6k+3}(2^{6k+6} - 2) = 2^{6k+3}(642^{6k} - 2).$$

En remarquant que $64 = 3^3 + 3^3 + 2^3 + 2$, il vient que $N = 2^{6k+3}((3^3 + 3^3 + 2^3 + 2)2^{6k} - 2))$. Donc

$$N = (2^{2k+1})^3((3 \cdot 2^{2k})^3 + (3 \cdot 2^{2k})^3 + (2 \cdot 2^{2k})^3 + (2 \cdot 2^{6k} - 2)). \tag{2.7}$$

Mais en prenant $n = 2^k$ dans (2.6), on obtient $22^{6k} - 2 = a^3 + b^3$ (avec $a = n^2 + n - 1$ et $b = n^2 - n - 1$), laquelle reportée dans (2.7) aboutit à

$$\begin{aligned} N &= (2^{2k+1})^3((3 \cdot 2^{2k})^3 + (3 \cdot 2^{2k})^3 + (2 \cdot 2^2k)^3 + a^3 + b^3 \\ &= (3 \cdot 2^{4k+1})^3 + (3 \cdot 2^{4k+1})^3 + (2 \cdot 2^{4k+1})^3 + (2^{2k+1}a)^3 + (2^{2k+1}b)^3 \end{aligned}$$

qui est bien une somme de 5 cubes d'entiers naturels. Le théorème est confirmé.

□

Remarque 2.1.3. Il est probable que le théorème précédent puisse s'améliorer pour donner la proposition : Tout nombre parfait, strictement plus grand que 6, s'écrit comme somme de 3 cubes d'entiers naturels . On constate en effet que les premiers nombres parfaits (> 6) concordent avec cette proposition

$$28 = 2^2(2^3 - 1) = 0^3 + 1^3 + 3^3,$$

$$496 = 2^4(2^5 - 1) = 4^3 + 6^3 + 6^3,$$

$$8128 = 2^6(2^7 - 1) = 4^3 + 4^3 + 20^3,$$

$$33550336 = 2^{12}(2^{13} - 1) = 16^3 + 176^3 + 304^3,$$

$$8589869056 = 2^{16}(2^{17} - 1) = 720^3 + 1336^3 + 1800^3.$$

2.2 Les Nombres Parfaits impairs

Pour les nombres parfaits impairs, aucun n'a été découvert à ce jour mais sans pouvoir apporter la preuve de leur inexistence ! Dans cette section, nous aborderons certaines de leurs propriétés.

Théorème 2.2.1. **([5])** *Si n est de la forme $6k-1$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors n n'est pas un nombre parfait.*

Démonstration. Soit k un entier positif. Si nous supposons que n est un entier positif de la forme $6k-1$, alors $n \equiv 1 \pmod 3$. Supposons maintenant que d soit un diviseur de n. Cela signifie $n = d\frac{n}{d} \equiv 1 \pmod 3$. Cela implique deux cas:

$$d \equiv 1 \pmod 3 \text{ and } \frac{n}{d} \equiv 1 \pmod 3$$

ou

$$d \equiv 1 \pmod 3 \text{ and } \frac{n}{d} \equiv -1 \pmod 3.$$

Il découle de chaque cas que $d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod 3$. Ainsi

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod 3.$$

D'autre part, on peut directement calculer $2n = 2(6k-1) = 12k-2 \equiv 1 \pmod 3$. Ainsi n ne peut pas être parfait. Ceci achève la preuve. □

Remarque 2.2.1. Le théorème 2.2.1 nous dit, s'il existe un nombre parfait impair N, alors

$$N \equiv 1 \pmod 4.$$

Théorème 2.2.2. **([5])** *Tout nombre parfait impair, s'il existe, doit s'écrire de la forme $12m+1$ ou $36m+9$.*

Démonstration. Soit N un nombre parfait impair. Alors d'après le théorème **??** on sait que N ne peut pas être de la forme $6k-1$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc il doit être de la forme $6k+1$

ou $6k+3$. D'autre part, Remarque 2.2.1 confirme que $N \equiv 1 \pmod 4$.

Donc on a

$$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod 4, \\ N \equiv 1 \pmod 6, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod 4, \\ N \equiv 3 \pmod 6. \end{cases}$$

Par conséquent, N doit être de la forme $12m+1$ ou $12m+9$ ($m \in \mathbb{Z}$).

Maintenant, dans le cas où $N = 12m+9$, si nous supposons que $3 \nmid m$, alors il doit être vrai que:

$$\sigma(N) = \sigma(12m+9) = \sigma(3(4m+3)) = \sigma(3)\sigma(4m+3) = 4\sigma(4m+3).$$

Cela signifie $4|\sigma(N)$, soit $\sigma(N) \equiv 1 \pmod 4$, alors que nous avons

$$\sigma(N) = 2N = 2(12m+9) \equiv 2 \pmod 4,$$

donc N ne peut pas être parfait. Ainsi, il doit être vrai que $3|m$ donc N a la forme $N = 36m+9$. La preuve est complète. $\square$

Remarquons qu'un nombre parfait impair n'est jamais une puissance d'un nombre premier. En effet, pour tout nombre premier impair p et tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \frac{p}{p-1}p^\alpha.$$

Mais comme $p \geq 3$ (car p est un nombre premier impair), on a $\frac{p}{p-1} \leq 3^2 < 2$. D'où $\sigma(p^\alpha) < 2p^\alpha$. Ce qui montre que p^α est insuffisant et il n'est donc pas parfait. Un nombre parfait impair possède au moins 2 facteurs premiers distincts. On améliorera ce résultat en montrant que tout nombre parfait impair possède au moins 3 facteurs premiers distincts, comme on donnera (sans démonstration) le meilleur résultat obtenu, en ce sens Euler était le premier a donner un résultat valable concernant la structure des nombres parfaits impairs, mais imaginé par des autres mathématiciens avant lui.

Théorème 2.2.3. **([5])** *Tout nombre parfait impair N est de la forme:*

$$N = p^{\alpha} S^2$$

avec p est un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$, α est un entier naturel vérifiant $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ et S est un entier naturel impair ≥ 3 et premier avec p.

Démonstration. Soit N un nombre parfait impair et soit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$(avec $k, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \cdots, p_k$ des nombres premiers impairs deux à deux distincts) sa décomposition en produit de nombres premiers. Comme N ne peut être une puissance d'un nombre premier (remarque ci dessus), on a systématiquement $k \geq 2$. L'hypothèse $\ll$ N est parfait $\gg$ équivaut à $\sigma(N) = 2N$, et puisque la fonction σ est multiplicative, ceci équivaut à:

$$\sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdots \sigma(p_k^{\alpha_k}) = 2N \tag{2.8}$$

ça nous montre que $\sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdots \sigma(p_k^{\alpha_k})$ est pair mais il n'est pas multiple de 4. Cependant ceci n'est possible que lorsque un et un seul des nombres $\sigma(p_i^{\alpha_i})(1 \leq i \leq k)$ est pair sans être un multiple de 4 et tous les autres sont impairs. Même si on est ramené a réordonner les nombres premiers $p_1, \cdots, pk$, on peut supposer que $\sigma(p_1^{\alpha_1})$ est pair sans être un multiple de 4(ce qui équivaut à $\sigma(p_1^{\alpha_1}) \equiv 2 \pmod 4$) et que tous les nombres $\sigma(p_i^{\alpha_i})(2 \leq i \leq k)$ sont impairs. Comme p_1 est impair, on a $p_1 \equiv 1 \pmod 4$. Mais en supposant $p_1 \equiv -1 \pmod 4$, on aura

$$\begin{aligned}
\sigma(p_1^{\alpha_1}) &= 1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1} \\
&\equiv 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{\alpha} (mod 4) \\
&\equiv 0 \text{ ou } 1 (mod 4),
\end{aligned}$$

qui est en contradiction avec $\sigma(p_1^{\alpha_1}) \equiv 2 \pmod 4$. On a obligatoirement $p_1 \equiv 1$ (mod 4). En utilisant cette dernière congruence, on a:

$$\begin{aligned}
\sigma(p_1^{\alpha_1}) &= 1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1} \\
&\equiv 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 (mod 4) \\
&\equiv (\alpha_1 + 1) (mod 4).
\end{aligned}$$

Par conséquent $alpha_1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$; d'où $\alpha_1 \equiv 1 \pmod 4$ (puisque $\sigma(p_1^{\alpha_1}) \equiv 2$ (mod 4)). Finalement pour tout $i \in 2, \cdots, k$, on a:

$$\begin{aligned}\sigma(p_i^{\alpha_i}) &= 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i} \\ &\equiv 1 + 1 + \cdots + 1 (mod 2) \\ &\equiv \alpha_i + 1 (mod 2).\end{aligned}$$

Et du moment que $sigma(p_i \alpha_i) \equiv 1 \pmod 2$, il s'en suit que

$$\alpha_i \equiv 0 (mod 2).$$

Par récapitulation, on a $p_1 \equiv \alpha_1 \equiv 1 \pmod 4$ et $\alpha_i \equiv 0 \pmod 2$ pour tout $i \in 2, \cdots, k$. Il ne reste qu'à poser $p = p_1$,$\alpha = \alpha_1$ et $S = p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}}$ pour obtenir la forme recherchée $N = p^\alpha S^2$ avec les propriétés requises. □

On appelle la structure d'Euler de N (N étant un nombre parfait impair) l'écriture $N = p^\alpha S^2$ (avec les propriétés du Théorème 2.2.3 sur p, α et S) et le nombre premier p (qui est le seul facteur premier de N déposant impair) s'appelle le facteur premier isolé de N.

Remarque 2.2.2. Théorème 2.2.3 stipule que tout nombre parfait impair est de la forme $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). La structure des nombres parfaits impairs permet d'en déduire une propriété assez bizarre sur ces nombres, lesquels parait il inexistants!

Corollaire 2.2.1. ([5]) *Tout nombre parfait impair N peut s'écrire comme une somme de deux carrés d'entiers naturels, c'est à dire sous la forme*

$$N = a^2 + b^2 (a, b \in \mathbb{N})$$

.

Démonstration. Soit

$$R := \{a^2 + b^2, aveca, b \in \mathbb{N}\}.$$

On sait aussi que:

1. L'ensemble R est stable par multiplication, i.e., $(n, m \in R : nm \in R.)$

2. Un nombre premier impair p appartient à R si et seulement s'il est de la forme:

$$p = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}).$$

Maintenant, soit N un nombre parfait impair. N s'écrit $N = p^{\alpha}S^2$, avec p premier, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, S un entier ≥ 3 et $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$. D'après la propriété (2) ci-dessus de l'ensemble R, on a $p \in R$ et $S^2 \in R$ (puisque $S^2 = S^2 + 0^2$). Il s'ensuit, d'après (1) ci dessus, que $p^{\alpha}S^2 \in R$; c'est à dire $N \in R$. □

Corollaire 2.2.2. ([5]) *Un nombre parfait impair (s'il existe) ne peut être un multiple du nombre* 105.

Démonstration. Démontrons par l'absurde admettons qu'il existe un nombre parfait impair N multiple du nombre $105 = 3 \times 5 \times 7$. La décomposition de N en produit de facteurs premiers s'écrit:

$$N = 3^{\alpha}5^{\beta}7^{\gamma}n,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$ et n est un entier naturel impair et premier avec chacun des nombres 3, 5 et 7. Comme les nombres premiers 3 et 7 sont congrus à 3 modulo 4 alors aucun d'eux ne peut être le facteur premier isolé de N en se basant sur la structure d'Euler. Par conséquent les exposants α et γ de ces facteurs premiers 3 et 7 de N sont obligatoirement pairs, on a forcement $\alpha \geq 2$ et $\gamma \geq 2$. Comme la fonction arithmétique $k \to \frac{\sigma(k)}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) est multiplicative (car σ est multiplicative), on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(N)}{N} &= \frac{\sigma(3\sigma)}{3\sigma} \cdot \frac{\sigma(5\beta)}{5\beta} \cdot \frac{\sigma(7\gamma)}{7\gamma} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} \\
&= \frac{1 + 3 + \cdots + 3^{\alpha}}{3^{\alpha}} \cdot \frac{1 + 5 + \cdots + 5^{\beta}}{5^{\beta}} \cdot \frac{1 + 7 + \cdots + 7^{\gamma}}{7^{\gamma}} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} \\
&= (1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{\alpha}})(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^{\beta}})(1 + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{7^{\gamma}})\frac{\sigma(n)}{n} \\
&\geq (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}) \\
&= \frac{494}{245} > 2.
\end{aligned}$$

D'où $\sigma(N) > 2N$ ce qui dément le fait que N est parfait. Cette contradiction nous mène a dire qu'il n'existe aucun nombre parfait impair qui soit un multiple du nombre 105. □

Remarque 2.2.3. Corollaire 2.2.2 serait évident si le nombre 105 était abondant. Mais ce n'est pas le cas puisque le nombre 105 est déficient (en effet, on a $\sigma(105) = 192 < 210 = 2 \times 105$).

Voyons maintenant le nombre minimum de facteurs premiers distincts que pourrait avoir un nombre parfait impair. Le théorème suivant est relativement simple a démontrer, sachant qu'un nombre parfait impair n'est jamais une puissance d'un nombre premier.

Théorème 2.2.4. ([5]) *Tout nombre parfait impair possède au moins 3 facteurs premiers distincts*

La démonstration dépend principalement sur le lemme suivant:

Lemme 2.2.1. ([5]) *Soit N un nombre parfait et soient $p_1, \cdots, p_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) ses diviseurs premiers deux à deux distincts. Alors, on a:*

$$\prod_{i=1}^{k}(\frac{p_i}{p_i - 1}) > 2.$$

Démonstration. Le nombre parfait N s'écrit $N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$). D'après Théorème 1.2.1, on a:

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_{k+1}} - 1}{p_k - 1} \\
&< \frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_{k+1}}}{p_k - 1} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} N.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme N est parfait, on a $\sigma(N) = 2N$. On en déduit que:

$$2N < \prod_{k}^{i=1} \frac{p_i}{p_i - 1} N,$$

d'où l'inégalité recherchée:

$$\prod_{k}^{i=1} \frac{p_i}{p_i - 1} > 2.$$

Le lemme est prouvé. □

Démonstration du Théorème 2.2.4. Admettons qu'il existe un nombre parfait impair N ayant au plus 2 facteurs premiers distincts. Comme $N \neq 1$ et N ne peut être une puissance d'un nombre premier (voir section IV), alors N possède exactement 2 facteurs premiers distincts. Le nombre N s'écrit donc :

$$N = p^{\alpha} q^{\beta},$$

avec α, $\beta \in \mathbb{N}^*$ et p et q deux nombres premiers impairs distincts. Quitte à permuter p et q, on peut supposer $p < q$. ça entraine $p \geq 3$ et $q \geq 5$. Il s'ensuit que $\frac{p}{p-1} \leq \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$ et $\frac{q}{q-1} \leq \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}$. Donc

$$\frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1} \leq \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2,$$

qui est en contradiction avec Lemme 2.2.1. Cette absurdité finit la démonstration. □

Enfin, nous conclurons notre note par un ensemble de propriétés des nombres parfaits impairs, sans preuve, avec des références auxquelles le lecteur intéressé pourra se référer.

1. Si un nombre parfait impair existe alors il est plus grand que 10^{1500} ([13]).

2. Si un nombre parfait impair existe alors il contient au moins 10 facteurs premiers distincts ([12]).

3. Si un nombre parfait impair qui n'est pas un multiple de 3 existe alors il contient au moins 12 facteur premiers distincts ([11]).

4. Si un nombre parfait impair existe alors son plus grand diviseur premier est supérieur à 10^8 ([15]).

Bibliography

[1] Apostol, T. M. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York.

[2] Derbal, A. (2012–2013). *Coures Élémentaire sur les Fonctions Arithmétiques*, Cours de post-graduation a l'école supérieure de Kouba, Algeria.

[3] Dickson, L. E. (1952) *History of Theory of Numbers Vol. I*, Chelsea Publishing Company, New York.

[4] Dickson, L. E. (1913) Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors, *Amer. J. Math*, 35, 413–422.

[5] Farhi, B. (2014). Les nombres parfaits. Available at http://farhi.bakir.free.fr.

[6] Farhi, B. (2015). On the representation of an even perfect number as the sum of a limited number of cubes, arXiv:1504.07322v1 (27 Apr 2015).

[7] Farhi, B. (2017). On the representation of an even perfect number as the sum of five cubes, *Funct. Approx. Comment. Math*, 75(2), 277–278.

[8] Garcia, A. (2014). On perfect numbers, *Saint Mary's College of California.*

[9] Gür, R. & Bircan, N. (2010). On perfect numbers and their relations, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5(27), 1337–1346.

[10] List of perfect numbers. *Wikipedia*, Wikipedia Foundation, December 2021.

[11] Nielsen, P. (2007). Odd perfect numbers have at least nine different prime factors, *Math. Comp.*, 76, 2109–2126.

[12] Nielsen, P. (2015). Odd perfect numbers Diophantine equations, and upper bounds, *Math. Comp.*, 84, 2549–2567.

[13] Ochem, P. & Rao, M. (2012). Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}, *Math. Comp.*, 81, 1869–1877.

[14] Schwarz, W. & Spilker, J. (1994). *Arithmetical Functions*, Cambridge University Press, Great Britain.

[15] Takeshi, G. & Yasuo, O. (2008). Odd perfect numbers have a prime factor exceeding 10^8, *Math. Comp.*, 77, 1859–1868.