



Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté des mathématiques et sciences de la
matière



Département des Mathématiques

Mémoire Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités et statistiques

Présentée par : Benmenine Abdelkader

Thème

Estimation par ondelettes

Devant le jury composé de :

Agti Mohamed MAA. Université KASDI Merbah- Ouargla Président

Mensoul Brahim MAB. Universié KASDI Merbah- Ouargla Examineur

Boussad Abdelmalek MAA. Université KASDI Merbah- Ouargla Rapporteur

DÉDICACES

*Je dédie ce mémoire
A ma chère mère
A mon cher père
A mes soeurs et mes frères
A mes amies : **Bouad Aissa, Zine Abdellah, Hafadh Yassine**
A tous les membres de famille **Benmenine petit et grand***

REMERCIEMENT

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je remercie mon encadreur **Bousaad Abdelmalek**. Pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour son aide, ses conseils, ses remarques et sa patience pendant ce travail.

Je remercie **M.Agti Mohamed**, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **M. Mensoul Brahim** d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

J'adresse aussi des remerciements spéciaux tous les professeurs des mathématiques à l'université de Kasdi Merbah Ouargla.

Finalement, je tiens à exprimer mes profondes gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire.

NOTATIONS

- Φ : Fonction échelle (onde père).
- Ψ : Onde mère.
- (AMR) : Analyse multirésolution.
- db_N : Ondelettes de Daubechies.
- $L^2(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions carrés intégrables.
- $l^2(\mathbb{Z})$: Espace des suites de carré sommable.
- $f * g$: produit de convolution.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations	iii
Introduction générale	1
1 Ondelettes et Analyse multirésolution	2
1.1 Analyse multirésolution	2
1.2 Ondelettes	3
1.3 Construction d'une base d'ondelettes	4
2 Ondelettes de Daubechies	10
2.1 La construction des ondelettes de Daubechies	10
2.1.1 Méthode de la construction des ondelettes de Daubechies	11
2.2 Quelques propriétés des db_N	12
2.3 Exemples	12
2.4 Quelques exemples concernant les ondelettes de Daubechies	13
3 Estimation d'une densité de probabilité par ondelettes	16
3.1 Technique d'estimation par ondelettes	16
3.2 Le biais asymptotique	18
3.3 Exemple :	19
3.4 Variance asymptotique	20
Bibliographie	21

TABLE DES FIGURES

2.1	Ondelettes de Daubechies-db1-	13
2.2	Ondelettes de Daubechies-db2-	14
2.3	Ondelettes de Daubechies-db3-	14
2.4	Ondelettes de Daubechies-db5-	15
3.1	Le comportement du biais de l'estimateur à noyau engendré par les ondelettes de Daubechies [3]	19
3.2	Le graphe de la variance utilisant les ondelettes de Daubechies [3]	20

INTRODUCTION

LA théorie des ondelettes, comme nouvel outil mathématiques important, elle a été développée par Yves Meyer et de nombreux collaborateurs au milieu des années 80 [6]. Elle est imposée dans de divers domaines qu'ils soient théoriques ou pratiques [7, 5] : traitement du signal, compression et débruitage d'images numériques, analyse harmonique, etc... Son succès est dû à son pouvoir d'approximation et à sa facilité d'implémentation. En général [1], une ondelette mère est une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ qui engendre une base avec ses versions translatées et dilatées. Dans ce contexte, la problématique que nous avons fixée au début de notre travail était la mise en oeuvre des ondelettes en statistiques, et précisément l'estimation d'une densité de probabilité par la méthode des noyaux engendrés par les ondelettes proposée par [3, 4]. Le présent manuscrit est structuré de la manière suivante :

Premier chapitre : Donne d'une manière détaillée les rappels de base concernant les ondelettes et analyses multirésolutions .

Deuxième chapitre : présente les ondelettes de Daubechies et la technique de leurs construction

Troisième chapitre : Focalise sur l'exploitation des ondelette dans le domaine des statistiques précisément l'estimation d'une densité de probabilité à l'aide des noyaux engendrés par les ondelettes.

A la fin, une conclusion générale est rédigée pour résumer le travail.

ONDELETES ET ANALYSE MULTIRÉSOLUTION

1.1 Analyse multirésolution

Voire [2]

Soit $L^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs complexes et carré intégrable muni du produit scalaire et de la norme suivants :

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$
$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Définition 1.1.1. Un système de fonctions $\{\Phi_k/k \in \mathbb{Z}\}$ est appelé système orthonormé si est seulement si

$$(\Phi_k, \Phi_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k \overline{\Phi_j} dx = \delta_{k,j}$$

$$\text{Avec } \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

Un système orthonormé $\{\Phi_k/k \in \mathbb{Z}\}$ est appelé base orthonormale d'un sous-espace F de $L^2(\mathbb{R})$ si

$$\forall f \in F, f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \Phi_k(x) \text{ avec } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty.$$

Soit Φ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, tel que la famille de ces versions translâtées (i.e $\{\Phi(x - k)/k \in \mathbb{Z}\}$) est orthonormale.

On pose

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\Phi(2^j x - k)$$

et

$$V_j = \left\{ f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \Phi_{j,k}(x) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty \right\}$$

Dans ce cas on dit que Φ engendre la suite $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$

Définition 1.1.2. Soit Φ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, on appelle la suite des sous-espaces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ analyse multirésolution (AMR) de $L^2(\mathbb{R})$ engendrée par Φ ssi :

1. $\forall j \in \mathbb{Z}$ la famille $\{\Phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormal pour l'espace V_j
2. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$
3. $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Définition 1.1.3. Si $\{V_j\}$ est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ engendrée par Φ , on appelle Φ ondelette-père.

1.2 Ondelettes

Soit $\{V_j\}$ est une (AMR) dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après la deuxième propriété on à

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} \Rightarrow V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

avec W_j est le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}

donc nous pouvons écrire avec la façon suivante :

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \dots = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_j \\ &\Rightarrow V_{j+1} = V_0 \oplus \bigoplus_{k=0}^{k=j} W_k \end{aligned}$$

D'ou

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \geq 0} V_j} = V_{j+1} = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j$$

Définition 1.2.1. S'il existe une fonction $\Psi \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall j \in \mathbb{Z}, \{\Psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\Psi(2^j x - k)\}$ est une base orthonormale de W_j . On appelle la fonction Ψ ondelette mère.

D'après les définitions précédentes nous pouvons représenter n'importe quelle fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec la série suivante

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \Psi_{j,k}(x)$$

Avec les coefficients $a_k, b_{j,k}$ sont :

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\Phi_{0,k}(x)} dx, b_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\Psi_{j,k}(x)} dx$$

Remarque 1.2.1. On peut commencer à un niveau j_0 arbitraire et on obtient la formule suivante :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \Psi_{j,k}(x)$$

1.3 Construction d'une base d'ondelettes

Le problème de la construction d'une onde mère est lié à la résolution du problème suivant :

1. Trouver $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ tq : $\{\Phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.
2. Quelle est la condition imposée sur Φ pour que
 - (a) $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$
 - (b) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$
3. Trouver une ondelette mère Ψ

Les propositions suivantes va nous permettre de résoudre le problème précédent.

Proposition 1.3.1. Soit $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ le système de fonctions $\{\Phi_{0,k}(x)/k \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale si est seulement si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Avec $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de f .

Preuve : On pose

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-k)dx$$

D'après Parseval on a :

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(\omega) \overline{(\hat{\Phi}(\omega) \exp(-ik\omega))} d\omega$$

$$\iff a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Phi}(\omega)|^2 \exp(-ik\omega) d\omega$$

Par la décomposition de l'intégrale sur \mathbb{R} en intervalle de longueur 2π on obtient :

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{\Phi}(\omega)|^2 \exp(-ik\omega) d\omega$$

Par le changement de variable $\omega = \xi + 2l\pi$ on a :

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\Phi}(\xi + 2l\pi)|^2 \exp(-ik\xi) d\xi$$

$$\implies a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\omega + 2l\pi)|^2 \exp(-ik\omega) d\omega \tag{1.1}$$

D'autre part la transformée de Fourier inverse de la suite $\{a_k\}$ est :

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{a}(\omega) \exp(ik\omega) d\omega \quad (1.2)$$

de (1.1) et (1.2) on obtient le fameux résultat suivant :

$$\hat{a}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\omega + 2l\pi)|^2$$

Finalemnt,

$\{\Phi_{0,k}(x)/k \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale

$$\iff a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-k)dx = \delta_{0,k}$$

$$\iff \hat{a}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(-ik\omega) = 1$$

$$\iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\omega + 2l\pi)|^2 = 1$$

Proposition 1.3.2. La suite des sous espaces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est emboîtés, $V_j \subset V_{j+1}$ si et seulement s'il existe une fonction $m_0(\omega)$ 2π -périodique et $m_0 \in L^2(0, 2\pi)$ tq :

$$\hat{\Phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.3)$$

Démonstration. **Condition nécessaire :** Supposons que $V_0 \subset V_1$, et $\Phi \in_0$

$$\implies \exists (h_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(2x - k)$$

$$\implies \hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\frac{\omega}{2}) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Posons $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega)$, m_0 est 2π -périodique

$$\implies \Phi(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Condition suffisante : Il suffit de prouver que $V_0 \subset V_1$ (puisque la condition $V_0 \subset V_1$ implique $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$).

On note par \hat{V}_0 (resp \hat{V}_1) l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de V_0 (resp V_1) alors :

$$\begin{aligned} \hat{V}_0 &= \{\hat{f}(\omega) = m(\omega)\Phi(\omega)/m \in L^2(0, 2\pi) \wedge m 2\pi\text{-périodique}\} \\ \hat{V}_1 &= \{\hat{f}(\omega) = m'(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2})/m' \in L^2(0, 2\pi) \wedge m' 2\pi\text{-périodique}\} \end{aligned}$$

Soit $f \in V_0 \iff \exists (h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ tq : } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(x - k) \iff \hat{F}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega) \hat{\Phi}(\omega)$

mais on à :

$$\hat{\Phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\implies \hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega) m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Posons : $m'(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-2ik\omega) m_0(\omega)$, donc on à, $m'(\omega + 2\pi) = m'(\omega) \implies m'(\omega)$ est 2π -périodique.

Donc

$$\hat{f}(\omega) = m'\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\implies \hat{f} \in \hat{V}_1$$

$$\implies f \in V_1$$

■

Lemme 1.3.1. Soit Φ une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ tq : $\{\Phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale. Pour chaque fonction $m_0 \in L^2(0, 2\pi)$ et 2π -périodique vérifiant (1.3) vérifie

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \tag{1.4}$$

Démonstration. Avec la condition (1.3) on a :

$$|\hat{\Phi}(2\omega + 2k\pi)|^2 = |m_0(\omega + k\pi)|^2 |\hat{\Phi}(\omega + k\pi)|^2 \tag{1.5}$$

Puisque $\{\Phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale alors $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(2\omega + 2k\pi)|^2 = 1$

$$(1.5) \implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + k\pi)|^2 |\hat{\Phi}(\omega + k\pi)|^2 = 1$$

En séparant la somme en deux cas : k pair et k impair

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + 2l\pi)|^2 |\hat{\Phi}(\omega + 2l\pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + 2l\pi + \pi)|^2 |\hat{\Phi}(\omega + \pi + 2l\pi)|^2 = 1$$

$$\implies |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

■

Proposition 1.3.3. Soit Φ une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ tq : $\{\Phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale vérifiant (1.3) et (1.4). Si Φ vérifie les conditions suivantes :

1. $\int_{\mathbb{R}} K(x, y) dy = 1$, avec $K(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(x-k) \Phi(y-y)$

$$2. \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(x - k)| \right) < +\infty$$

Alors $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Pour une démonstration détaillée de de cette proposition voir, [2]

Proposition 1.3.4. Soit Φ engendrant une (AMR) dans $L^2(\mathbb{R})$ et $m_0(\omega)$ est une fonction vérifie (1.3). Si on pose

$$\hat{\Psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.6)$$

Avec : $m_1(\omega) = \overline{m_0(\omega + \pi)} \exp(-i\omega)$

Alors la fonction Ψ est une ondelette mère (avec Ψ est la transformée de Fourier inverse de $m_1(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2})$).

Démonstration. On va démontrer la proposition sur 3 étapes

1. la famille des fonctions $\{\Psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Psi}(\omega + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_1\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)|^2 |\Phi\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi + \pi\right)|^2 |\Phi\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi\right)|^2 |\Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2l\pi + \pi\right)|^2 |\Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi\right)|^2 \\ &= |m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right)|^2 + |m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\Phi\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2l\pi\right)|^2 \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.3.1 on obtient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = |m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)|^2 + |m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 = 1$$

Donc l'ensemble $\{\Psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale.

2. Dans cette étape on va montrer que $\{\Phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale à $\{\Psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
Pour la démonstration de cette étape nous avons besoin à la formule de Poisson suivantes :

Formule de Poisson :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{k}{a}\right) = a \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\pi a) \exp(-2ik\pi a \omega)$$

On a $\{\Phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale à $\{\Psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \iff \forall k \in \mathbb{Z} : \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \overline{\Psi(x-k)} dx = 0$

Posons : $f(k) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \overline{\Psi(x-k)} dx$

$\implies f(k) = (\Phi * \tilde{\Psi})(k); \quad \text{avec } \tilde{\Psi}(x) = \overline{\Psi(-x)}$

$\implies \hat{f}(\omega) = \hat{\Phi}(\omega) \hat{\Psi}(\omega)$

D'après la formule de poisson on a :

Pour $a = -\frac{1}{2\pi}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k) \exp(ik\pi\omega) \quad (1.7)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\Psi}(\omega + 2k\pi)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi + \pi\right) \exp(-i\frac{\omega}{2}) \exp(-ik\pi) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi\right) \exp(-i\frac{\omega}{2}) \\ &\quad - \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + 2\pi\right) \exp(-i\frac{\omega}{2}) \\ &= m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \exp(-i\frac{\omega}{2}) - m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \exp(-i\frac{\omega}{2}) = 0 \end{aligned}$$

D'après (1.7) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k) \exp(ik\pi\omega) = 0 \implies \forall k \in \mathbb{Z} : f(k) = 0 \implies \{\Phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale à $\{\Psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

3. Dans cette étape on va démontrer que toute fonction $f \in V_1$ a une seule représentation de la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \Phi(x-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \Psi(x-k)$$

tq : (α_k) et (β_k) sont deux suites dans $l^2(\mathbb{Z})$

On a

$$f \in V_1 \implies f(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2x-k)$$

$$\implies \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} a\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

D'autre part $\{\Phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale

$$\implies |m_0(\frac{\omega}{2})|^2 + |m_0(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 = 1$$

$$\implies |m_0(\frac{\omega}{2})|^2 + |m_1(\frac{\omega}{2})|^2 = 1$$

$$\implies m_0(\frac{\omega}{2})\overline{m_0(\frac{\omega}{2})} + m_1(\frac{\omega}{2})\overline{m_1(\frac{\omega}{2})} = 1$$

$$\implies \hat{\Phi}(\frac{\omega}{2}) = m_0(\frac{\omega}{2})\overline{m_0(\frac{\omega}{2})}\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2}) + m_1(\frac{\omega}{2})\overline{m_1(\frac{\omega}{2})}\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2})$$

$$\iff \hat{\Phi}(\frac{\omega}{2}) = \overline{m_0(\frac{\omega}{2})}\hat{\Phi}(\omega) + \overline{m_1(\frac{\omega}{2})}\hat{\Psi}(\omega)$$

Donc

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}a(\frac{\omega}{2})\overline{m_0(\frac{\omega}{2})}\hat{\Phi}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2}}a(\frac{\omega}{2})\overline{m_1(\frac{\omega}{2})}\hat{\Psi}(\omega)$$

En passant au domaine temporel, on déduit que f possède une représentation unique dans la base $\{\Phi(x - k), \Psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

■

ONDELETTES DE DAUBECHIES

Dans ce chapitre nous essayons d'exposer la méthode de construction des ondelettes de Daubechies orthogonale et a support compact dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour un plus de détail concernant cette technique de construction voir [1]

2.1 La construction des ondelettes de Daubechies

L'idée de la construction d'une base d'ondelettes orthogonale et a support compact proposée par I.Daubechies [1] est basée sur les étapes suivantes :

1. poser $m_0(\omega) = (\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^N \mathcal{L}(\omega)$ (avec : $N \geq 1$ et $\mathcal{L}(\omega)$ est un polynome trigonométrique).
2. De la condition d'orthogonalité $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$ trouver $m_0(\omega)$
3. A partir de l'équation $\hat{\Phi}(\omega) = m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2})$ nous pouvons obtenir la formule suivante :

$$\hat{\Phi}(\omega) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^{j=n} m_0(\frac{\omega}{2^j}) \hat{\Phi}(0) \quad (2.1)$$

$$\text{où } \Phi(0) = 1$$

Avec la transformée de Fourier inverse nous pouvons trouver l'onde père de Daubechies.

4. Grace a la relation

$$\hat{\Psi}(\omega) = m_1(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2}) \quad (2.2)$$

$$\text{où } m_1(\omega) = \overline{m_0(\omega + \pi)} \exp(-i\omega)$$

nous obtenons l'onde père de Daubechies.

2.1.1 Méthode de la construction des ondelettes de Daubechies

Etape 01 : Soit $m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\omega)$ (avec : $N \geq 1$ et $\mathcal{L}(\omega)$ est un polynome trigonométrique).

On pose :

$$M_0(\omega) = |m_0(\omega)|^2$$

$$\implies M_0(\omega) = \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^N P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

Démonstration. puisque $\mathcal{L}(\omega)$ est un polynome trigonométrique, $|\mathcal{L}(\omega)|$ est un polynome de $\cos(\omega)$. Utilisant la relation $\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\omega)}{2}$ on obtient $|\mathcal{L}(\omega)| = P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$.

D'un autre coté on a $\left|\frac{1 - e^{-i\omega}}{2}\right| = \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \implies M_0(\omega) = \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^N P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$ ■

Etape 02 : De la condition d'orthogonalité

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

$$\iff M_0(\omega) + M_0(\omega + \pi) = 1$$

$$\iff \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^N P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) + \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)^N P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$$

En effectuant le changement de variable suivant : $y = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$\implies (1 - y)^N p(y) + yp(1 - y) = 1 \quad tq : y \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Dans [1] Daubechies a donner des conditions nécessaire et suffisantes pour qu'un polynome $P()$ soit une solution de l'équation (2.3), et dans [2] elle a prouvé que toute solution de (2.3) est sous la forme :

$$p(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k y^k + y^N R\left(\frac{1}{2} - y\right)$$

avec : $R(.)$ est un polynome de degré impair et $R(y) \geq 0 \quad \forall y \in [0, 1]$

Finalement, nous pouvons obtenir le polynome $\mathcal{L}(\omega)$ de l'équation suivante :

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

Dans ce contexte, Daubechies dans [1] a démontré que :

$$|m_0(\omega)|^2 = c_N \int_{\omega}^{\pi} \sin^{2N-1}(x) dx \quad (2.4)$$

dans le cas $R \equiv 0$, et c_N est calculée sous la contrainte $m_0(0) = 1$.

Définition 2.1.1. Les ondelettes construites à l'aide des fonctions $m_0(\omega)$ satisfaisant (2.4) sont appelées ondelettes de Daubechies (on les note par db_N).

2.2 Quelques propriétés des db_N

Les ondelettes de Daubechies possèdent les propriétés suivantes :

1. $supp(\Phi) \subseteq [0, 2N - 1]$
2. $supp(\Psi) \subseteq [-N + 1, N]$
3. $\forall l = 0, 1, \dots, N - 1 : \int_{\mathbb{R}} x^l \Psi(x) dx = 0$ (possède N momments nuls)

2.3 Exemples

Soit $N = 1$ on va construire dans ce cas les ondelettes de Daubechies $db_1(\Phi, \Psi)$

On a

$$|m_0(\omega)|^2 = c_1 \int_{\omega}^{\pi} \sin(x) dx \quad (2.5)$$

Etape 01 : Trouver c_1 sous la contrainte $m_0(0) = 1$

$$(2.5) \implies 1 = c_1 \int_0^{\pi} \sin(x) dx = c_1 [-\cos(x)]_0^{\pi} \implies c_1 = \frac{1}{2}$$

Etape 02 : (2.5) $\implies |m_0(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \int_{\omega}^{\pi} \sin(x) dx = \frac{1 + \cos(\omega)}{2}$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part on a : } \cos(\omega) &= \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \\ \implies \frac{1 + \cos(\omega)}{2} &= \frac{2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{4} = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right) \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2}\right) \end{aligned}$$

Puisque m_0 est un polynome trigonométrique à coefficients réels on a $\overline{m_0(\omega)} = m_0(-\omega)$

$$\implies |m_0(\omega)|^2 = m_0(\omega) m_0(-\omega)$$

Etape 03 : posons $m_0 = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2}$

D'après (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \hat{\Phi}(0) \\ &\text{où } \hat{\Phi}(0) = 0 \\ \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + e^{-i\frac{\omega}{2^j}}\right) \\ \implies \prod_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + e^{-i\frac{\omega}{2^j}}\right) &= \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{1 - e^{-i\frac{\omega}{2^{j-1}}}}{1 - e^{-i\frac{\omega}{2^j}}}\right) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{1 - e^{-i\frac{\omega}{2^n}}}\right) \\ \implies \hat{\Phi}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{1 - e^{-i\frac{\omega}{2^n}}}\right) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \end{aligned}$$

Avec la transformée de Fourier inverse nous obtenons $\Phi(x) = 1_{[0,1]}(x)$

Concernant Ψ , de l'équation (2.2) on a :

$$\hat{\Psi}(\omega) = \overline{m_0(\omega + \pi)} \exp(-i\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}(\omega) = \overline{\left(\frac{1 + e^{-i(\omega+\pi)}}{2}\right)} e^{-i\omega} = \frac{e^{-i\omega} - 1}{2}$$

Prenant la transformée de Fourier inverse nous obtenons :

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.4 Quelques exemples concernant les ondelettes de Daubechies

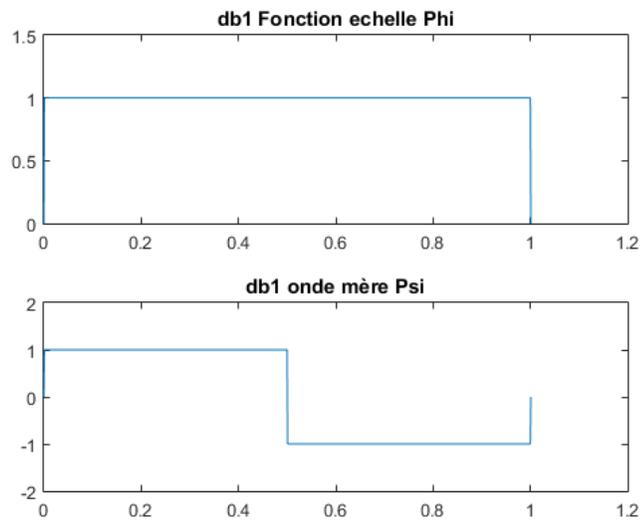


FIGURE 2.1 – Ondelettes de Daubechies-db1-

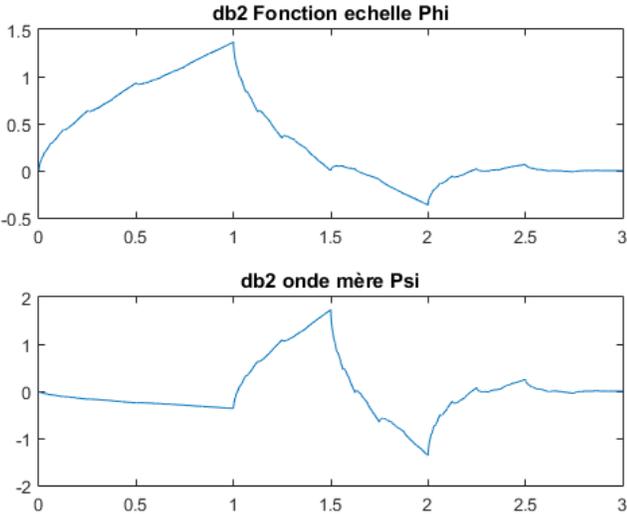


FIGURE 2.2 – Ondelettes de Daubechies-db2-

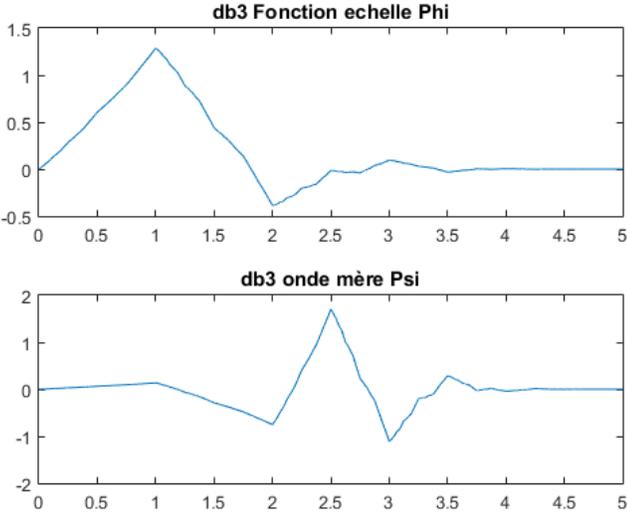


FIGURE 2.3 – Ondelettes de Daubechies-db3-

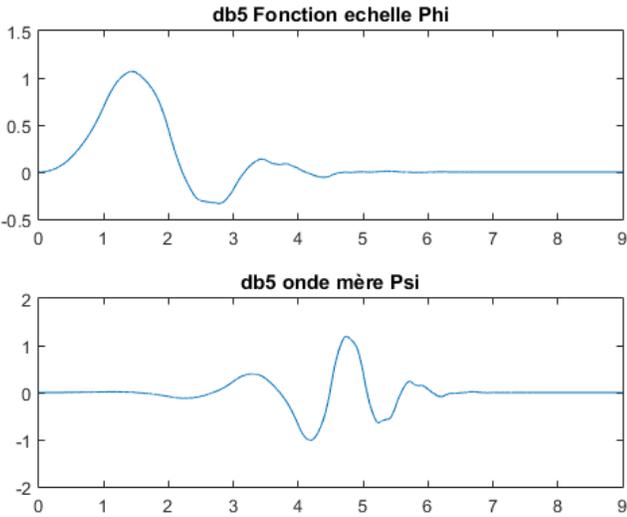


FIGURE 2.4 – Ondelettes de Daubechies-db5-

ESTIMATION D'UNE DENSITÉ DE PROBABILITÉ PAR ONDELETTES

L'application la plus répandue des ondelettes en statistiques est l'estimation d'une densité de probabilité, ceci est lié au fait que les ondelettes possèdent la propriété d'engendrer des noyaux aux estimateurs. Ce chapitre focalise l'attention sur une technique d'estimation d'une densité de probabilité à l'aide des noyaux engendrés par les ondelettes de Daubechies proposé par [3]

3.1 Technique d'estimation par ondelettes

On considère

1. $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une (AMR) dans $L^2(\mathbb{R})$ engendrée par la fonction Φ
2. X_1, X_2, \dots, X_n est un échantillon i.i.d de densité $f(x)$
3. $K(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(x - k)\Phi(y - k)$ est un noyau engendré par Φ
4. L'opérateur de projection de $f \in L^2(\mathbb{R})$ dans V_j est :

$$\mathcal{P}_h(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_h(x, y)f(y)dy$$

où $h = \frac{1}{2^j}$ et $K_h(x, y) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right)$

L'estimateur proposé par [3] est sous la forme

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K_h(x, X_i) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right) \tag{3.1}$$

Pour étudier le comportement asymptotique de l'estimateur nous avons besoins aux définitions et théorèmes suivants

Définition 3.1.1. On dit qu'un noyau d'ordre m si est seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^k K(x, y) dy = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ x^k, & \text{si } k = 1, \dots, m-1 \\ \alpha(x) \neq x^m \end{cases} \quad (3.2)$$

Définition 3.1.2. On dit qu'une onde mère $\Psi(x)$ possède des moments nuls d'ordre m si est seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^l \Psi(y) dy = 0, l = 0, 1, \dots, m-1$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^m \Psi(y) dy \neq 0$$

Théorème 3.1.1. Soit $\{V_j\}$ est une (AMR) dans $L^2(\mathbb{R})$ et Ψ est une onde mère. Ψ possède des moments nuls d'ordre m si est seulement si $K(x, y)$ est d'ordre m .

Démonstration. Pour chaque polynome $p(x)$ d'ordre m on a :

$$p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(x - k) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \sqrt{2^j} \Psi(2^j x - k)$$

avec

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \Phi(x - k) dx$$

et

$$b_{j,k} = \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \Psi(2^j x - k) dx$$

condition nécessaire :

Supposons que Ψ possède des moments nuls d'ordre m

$$\forall l = 0, 1, \dots, m-1 : x^l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y^l \Phi(y - k) dx \right) \Phi(x - k) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(y - k) \Phi(x - k) dy$$

Donc

$$\forall l = 0, 1, \dots, m-1 : x^l = \int_{-\infty}^{+\infty} y^l K(x, y) dy$$

Pour $l=m$ on a

$$x^m = \int_{-\infty}^{+\infty} y^m K(x, y) dy + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \sqrt{2^j} \Psi(2^j x - k)$$

et la partie $(\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \sqrt{2^j} \Psi(2^j x - k) \neq 0$ puisque Ψ possède des moments nuls d'ordre m)

$$\implies x^m \neq \int_{-\infty}^{+\infty} y^m K(x, y) dy$$

Donc $K(x, y)$ est d'ordre m .

Condition suffisante :

Voir [3] ■

Définition 3.1.3. Soit $\{V_j\}$ est une (AMR), et $K(x, y)$ le noyau engendré par Φ . On dit que l'(AMR) est symétrique si est seulement si $K(-x, y) = K(x, -y)$

3.2 Le biais asymptotique

Dans cette étape nous essayons d'étudier le biais asymptotique de l'estimateur 3.1.

On pose $b_m(x) = x^m - \int_{-\infty}^{+\infty} -K(x, y)y^m dy$

Proposition 3.2.1. Soit $K(x, y)$ est un noyau engendré par ondelettes d'ordre m alors :

1. $b_m(x)$ est périodique de période 1
2. $\forall h > 0 : x^m - \int_{-\infty}^{+\infty} K_h(x, y)y^m dy = h^m b_m(\frac{x}{h})$
3. si (AMR) est symétrique on a : $b_m(-x) = (-1)^m b_m(x)$

Théorème 3.2.1. Soit $f \in \Delta^{m, \alpha}(\mathbb{R})$ tq :

$$\Delta^{m, \alpha}(\mathbb{R}) = \{f \in C^m(\mathbb{R}) : |f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq A |x - y|^\alpha / x, y \in \mathbb{R}\}$$

avec $\alpha > 0$ et $A > 0$

On suppose que le noyau vérifie la condition suivante :

$$\exists C > 0 \text{ tq : } \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)(x - y)^{m+\alpha}| dy \leq C$$

quand $n \rightarrow +\infty$ $h \rightarrow 0$ et $nh \rightarrow 0$ alors :

$$E(\hat{f}(x)) - f(x) = \frac{-1}{m!} f^{(m)}(x) b_m(\frac{x}{h}) h^m + O(h^{m+\alpha}) \quad (3.3)$$

Concernant la démonstration voir [3].

3.3 Exemple :

Soit Φ_N l'onde père de Daubechies (La fonction échelle de db_N) à support compact dans $[0, 2\pi]$. Les auteurs dans [??] ont montré que :

1. Le noyau $K(x, y)$ engendré par Φ_N est d'ordre N .

2.
$$b_N(x) = x^N - \sum_{l=0}^N C_N^l a_N^l \Phi_N^{N-l}(x)$$

avec :

$$\begin{cases} C_N^l = \frac{N!}{l!(N-l)!} \\ a_N^l = \int_0^{2\pi} x^l \Phi_N(x) dx \\ \Phi_N^{N-l}(x) = \sum_{k=-2N+2}^0 k^{N-l} \Phi_N(x-k) \end{cases}$$

Les figures ci-dessous donne une interprétation au comportement des $b_N(x)$ pour les différentes ondelettes de Daubechies.

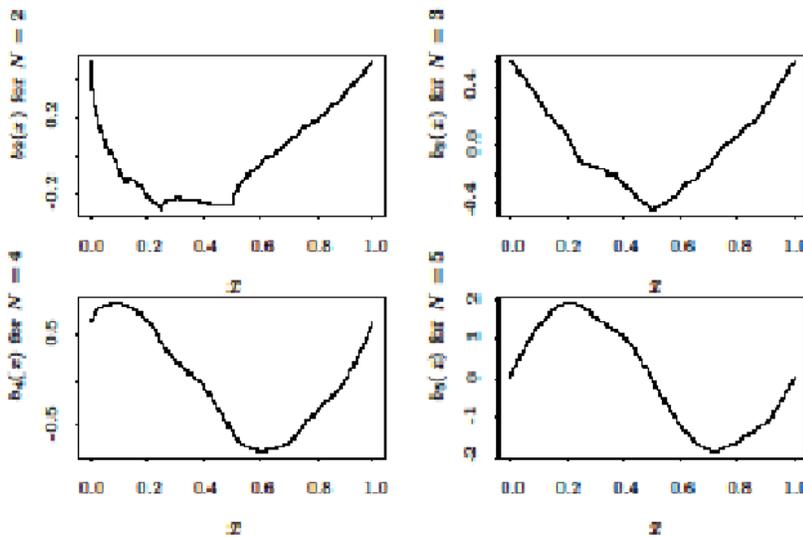


FIGURE 3.1 – Le comportement du biais de l'estimateur à noyau engendré par les ondelettes de Daubechies [3]

3.4 Variance asymptotique

Dans cette partie nous donnons la formule de la variance asymptotique pour l'estimateur (3.1) à l'aide du théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont uniformément bornées alors :*

$$\text{Var}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{nh} f(x) V\left(\frac{x}{h}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x, y) dy = K(x, y)$$

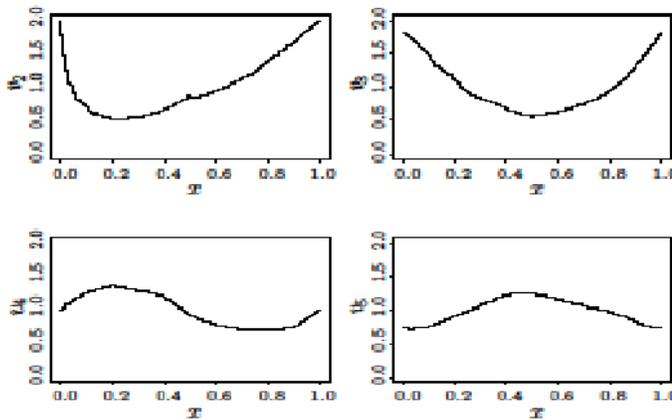


FIGURE 3.2 – Le graphe de la variance utilisant les ondelettes de Daubechies [3]

CONCLUSION GÉNÉRALE

Durant l'élaboration de ce modeste que nous nous sommes fixés, nous avons essayé de donner d'une manière détaillé les définitions et les propriétés de base concernant les ondelettes et analyses multirésolutions dans le premier volet, puis nous avons englobé d'une manière suffisante les ondelettes de Daubechies et la technique de leurs construction. A la fin de ce mémoire nous avons présenté une technique qui exploite les ondelettes de Daubechies dans l'estimation d'une densité de probabilité à l'aide des noyaux engendrés par les les versions dilatées et translatées des ondelettes. Finalement nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste monde des statistiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ingrid DAUBECHIES. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets". In : *Communications on pure and applied mathematics* 41.7 (1988), p. 909-996.
- [2] Ingrid DAUBECHIES. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [3] Su-Yun HUANG. "Density estimation by wavelet-based reproducing kernels". In : *Statistica Sinica* (1999), p. 137-151.
- [4] Su-Yun HUANG et WJ STUDDEN. "Density estimation using spline projection kernels". In : *Communications in Statistics-Theory and Methods* 22.11 (1993), p. 3263-3285.
- [5] Sheila R MESSER, John AGZARIAN et Derek ABBOTT. "Optimal wavelet denoising for phonocardiograms". In : *Microelectronics journal* 32.12 (2001), p. 931-941.
- [6] Yves MEYER. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, 1992.
- [7] Martin VETTERLI. "Wavelets, approximation, and compression". In : *IEEE Signal Processing Magazine* 18.5 (2001), p. 59-73.

Résumé :

Notre objectif dans ce mémoire est de présenter la notion des ondelettes et analyses multirésolutions, focaliser sur les ondelettes de Daubechies à support compact et estimer une densité de probabilité à l'aide des ondelettes.

Mots-Clés : Ondelettes-Ondelettes à support compact-Estimation-Densité-Noyau

Abstract :

Our aim in this dissertation is to present the wavelets and multiresolutions notion, focus on the study of the compactly-supported Daubechies wavelets and estimate a probability density function using wavelets.

Key-Words :Wavelets-Compactly-supported wavelets-Estimation-Density-Kernel