



**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat

Option : Mathématiques appliquées

Spécialité : Modélisation et Analyse Numérique

Par : CHEDALA Fatma Zohra

Thème

Sur un problème d'écoulement d'un jet à surface libre

Soutenu publiquement le : 29/06/2022

Devant le jury composé de :

Pr. CHACHA Djamel Ahmed	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Pr. MEFLAH Mabrouk	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Directeur de thèse
Dr. AMARA Abdelkader	Université Kasdi Merbah - Ouargla	Co-directeur
Pr. GASMI Abdelkader	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examineur
Dr. LAIADI Abdelkader	Université de Mohamed Khider - Biskra	Examineur
Dr. TELLAB Brahim	Université de Kasdi Merbah - Ouargla	Examineur

Année universitaire 2021/2022

DÉDICACES

Je veux dédier ce modeste travail à :

Mon père et ma mère, mes frères, ma soeur et toute ma famille.

REMERCIEMENT

Je remercie Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant tous ces années d'étude.

Je tiens tout d'abord à remercier premier lieu, mes encadreurs Monsieur le **Pr. Mabrouk Meflah** et **Dr. Amara Abdelkader** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour leur continuité à me soutenir et à m'encourager.

Mes remerciements vont également à Messieurs **Pr. Chacha Djamel Ahmed**, **Pr. Gasmi Abdelkader**, **Dr. Laiadi Abdelkader** et **Dr. Tellab Brahim** d'avoir accepté de juger ce travail Je remercie également les membres du département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin qui ont contribué à la finalisation de ce travail.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

- $\nabla V = \text{grad}(V)$ le gradient d'un vecteur V
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\rho = \rho(\vec{x}, t)$: La masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .
- $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$: La vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point par le vecteur \vec{x} à l'instant t .
- P : La pression d'un fluide.
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$: Le produit scalaire de deux vecteurs.
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$: Le produit vectoriel de deux vecteurs
- $\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u$
- $\vec{\text{rot}}(V) = \nabla \wedge v$

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	i
Notations et Définitions	ii
Introduction	ix
1 Notions fondamentales sur la mécanique des fluides	1
1.1 Descriptions du mouvement	1
1.1.1 Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)	1
1.1.2 Méthode Eulérienne (description par le champ de vitesses)	2
1.1.3 Comparaison entre la méthode Eulérienne et Lagrangienne	2
1.2 Potentiel de vitesse	3
1.3 Quelques équations en mécanique des fluides	3
1.3.1 Équation de continuité	3
1.3.2 Lignes de courant	4
1.3.3 Fonction des lignes de courant et fonction potentielle	4
1.3.4 Équation d'Euler	5
1.3.5 Équation de Bernoulli	6

1.4	Étude dans le plan complexe	6
1.4.1	Exemples d'écoulements à potentiel complexe	7
1.5	Analyse dimensionnelle	8
1.5.1	Théorème pi de Vaschy-Buckingham	8
2	Les transformations conformes et la méthode des lignes de courant libre	10
2.1	Généralités sur les transformations conformes	10
2.1.1	Propriétés des transformations conformes	12
2.1.2	Quelques transformations classiques	13
2.2	Un type des transformations conformes	14
2.2.1	Transformation de Schwarz-Christoffel	14
2.3	Méthode des lignes de courant libre	17
3	Résolution analytique d'un problème de type jet devant un obstacle de forme triangulaire	18
3.1	Position du problème	18
3.2	La solution exacte	20
4	Résolution numérique d'un problème d'écoulement devant un obstacle de forme triangulaire par la méthode de troncation de la série	32
4.1	Formulation du problème	32
4.2	Procédure numérique	35
4.2.1	Comportement asymptotique au voisinage de $t = 0$	38
4.2.2	Formulation de la série	39
4.3	Résultats et discussion	40
4.3.1	Solution avec tension de surface	40
4.3.2	Solution sans tension de surface	47
	Bibliographie	63

TABLE DES FIGURES

2.1	Transformation de $\text{plan}(z)$ vers le $\text{plan}(Z)$ et l'inverse	11
2.2	Conservation d'angle α de $\text{plan}(z)$ vers le $\text{plan}(Z)$	13
2.3	Régions correspondantes dans le plan d'origine (le plan z) et le plan cartographique (le plan λ) pour la transformation de Schwarz-Christoffel.	16
3.1	Le plan z	19
3.2	Le plan Ω	22
3.3	Le plan $f = \phi + i\psi$	22
3.4	Le plan λ	23
3.5	La forme de surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$	30
3.6	Les formes de la surface libre pour quelques valeurs de β	31
4.1	Le plan z	36
4.2	Le plan potentiel complexe $f = \phi + i\psi$	37
4.3	Plan de la variable t	37
4.4	Les formes de surfaces libres pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et différentes valeurs de β	42
4.5	Un forme de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = 0$	43
4.6	Les formes de surfaces libres pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et différentes valeurs de β	44

4.7	Les formes de surfaces libres pour différentes valeurs du nombre de Weber α avec $\beta = \frac{\pi}{200}$	45
4.8	Les formes de surfaces libres pour différentes valeurs du nombre de Weber α avec $\beta = \frac{\pi}{4}$	46
4.9	Comparaison entre les formes de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = 0$, et la solution exacte.	48
4.10	Comparaison entre les formes de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$, et la solution exacte.	49
4.11	Comparaison entre les formes de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$, et la solution exacte.	50

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Quelques valeurs des coefficients a_k pour différentes valeurs de α avec $\beta = \frac{\pi}{6}$	41
4.2	Quelques valeurs des coefficients a_k pour différentes valeurs de β avec $\alpha =$ 10^8	41

INTRODUCTION

Historiquement, le comportement des fluides, en particulier l'eau, a été largement étudié en ingénierie, physique et mathématiques appliquées. Pour les problèmes les plus simples, beaucoup de lumière a été répandue sur ce terrain au fil des ans. Cependant, lorsque l'on traite des cas plus détaillés et intéressants, les équations et les conditions aux limites qui régissent deviennent de plus en plus complexes et non linéaires. En fonction de leur complexité et de leur nature, les problèmes de mécanique des fluides peuvent être divisés en différentes classes et diverses solutions analytiques et numériques sont développées par conséquent.

La classe des problèmes où la surface supérieure se situe entre un fluide (généralement de l'eau) et un autre fluide (généralement de l'air) est connue sous le nom de surface libre. Ce terme vient du fait que l'interface est libre de se déplacer avec l'évolution du système. La forme réelle de la limite de surface libre est l'une des inconnues de ces problèmes. Par conséquent, on détermine la forme de la surface libre fait partie de la solution.

Dans notre travail, on propose d'étudier un écoulement devant un obstacle de forme triangulaire et semi infini avec un angle β , l'écoulement est potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible, non visqueux et irrotationnel. Généralement, si on considère la tension de surface ou bien la gravité, cette condition rend le problème très difficile pour résoudre analytiquement, en négligeant cette force physique, la solution exacte peut être calculée en utilisant la théorie des lignes de courant libre introduite par Helmholtz en 1868

et Kirchhoff en 1869. Si l'effet de la tension de surface existe, on ne peut être pas résolu ce problème exactement. Dans ce cas, la méthode d'hodographe n'est pas possible à cause de la non-linéarité de la condition à la surface libre, le problème non linéaire est résolu numériquement. On utilise la technique de troncation de séries utilisée par Vanden Broeck et Killer [24], cette méthode est basée sur les transformations conformes pour le résoudre. Le problème bidimensionnel est alors un problème unidimensionnel où les inconnues sont à trouver par collocation, uniquement sur la surface libre.

Notre travail est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne des notions sur les deux modes de description : la description lagrangienne et la description eulérienne et quelques définitions préliminaires sur la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement des fluides. On présente aussi dans ce chapitre, la théorie de l'analyse non dimensionnelle.

Dans le second chapitre, on va présenter des concepts généraux concernant les transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel et leur utilisation, ainsi que des exemples.

Dans le troisième chapitre, on traite le problème d'écoulement bidimensionnel avec la surface libre d'un jet dans une région entre deux intersections semi-infinies. Dans le cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables. Dans ce cas, le problème admet une solution exacte. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. Nous utilisons d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, on présente le problème posé dans le troisième chapitre avec l'effet de la tension de surface. On s'intéresse à la résolution numérique de la solution du problème considéré en utilisant la méthode de troncation des séries. L'écoulement sera résolu pour chaque valeur du nombre de Weber α .

Enfin, on présente la conclusion générale de notre travail et un annexe pour présenter la méthode de Newton pour la résolution des systèmes non linéaires.

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Dans ce chapitre, on va voir : description et classification de mouvement des fluides, propriétés des fluides, ainsi que les équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

1.1 Descriptions du mouvement

La description du fluide en mouvement peut se faire de deux façons équivalentes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (méthode de Lagrange) ou on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (méthode d'Euler).

1.1.1 Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées.

Soit $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ le vecteur position d'une particule donnée et \vec{S}_0 est sa position initiale

au temps initial t_0 . En coordonnées cartésiennes : $\vec{S} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où x_0, y_0 et z_0 sont les coordonnées initiales et x, y et z les coordonnées au temps t de la particule. La vitesse $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ en \vec{S}_0 peut être calculée par :

$$u_x = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; u_y = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; u_z = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}$$

Les avantages de la représentation Lagrangienne sont :

- La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- La conservation de la masse est satisfaite.

1.1.2 Méthode Eulérienne (description par le champ de vitesses)

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode Eulérienne s'écrit pour la vitesse : $\vec{u}(\vec{S}, t)$ où $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ et $\vec{S} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

1.1.3 Comparaison entre la méthode Eulérienne et Lagrangienne

La méthode d'Euler permet d'exprimer la vitesse comme :

$$u(\vec{S}, t) = \frac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Si on intègre le système d'équations ci-dessus, on aboutit à des constantes d'intégration qui doivent être trouvées à partir des conditions initiales. La solution donne alors les

équations de Lagrange, $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ et on retrouve le système d'équations (1.1). En principe la méthode Lagrangienne peut donc être déduite de l'approche Eulérienne.

1.2 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse \vec{V} est irrotationnel, on peut définir une fonction ϕ scalaire telle que :

$$\vec{V} = \text{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi.$$

Le symbole ϕ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien, en considérant un écoulement plan ($\vec{V} = (u, v)$) on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \\ v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

où ϕ vérifie l'équation de Laplace.

1.3 Quelques équations en mécanique des fluides

Dans cette partie on va présenter des équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux :

1.3.1 Équation de continuité

Le principe de conservation de masse impose que l'augmentation de masse pendant un certain temps t , du fluide contenu dans ce volume, doit être égale à la somme des masses de fluide y qui entrent, diminuées par celles qui sortent, ce qui est donné par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

1.3.2 Lignes de courant

La description Eulérienne conduit elle aussi à une représentation du champ de vitesse, à un instant t , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle lignes de courant.

L'équation des lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que : Un petit déplacement $d\vec{x}$ sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{V} \wedge d\vec{x} = 0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{jk} v_j dx_k = 0.$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = 0, \\ v_3 dx_1 - v_1 dx_3 = 0, \\ v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = 0. \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)}.$$

Dans lequel t à la valeur fixée. Les lignes de courant ne peuvent pas se couper.

1.3.3 Fonction des lignes de courant et fonction potentielle

La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point. La définition d'une ligne de courant est donnée par l'équation :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

où u et v sont les composantes du vecteur vitesse \vec{V} .

Si $\phi(x, y)$ est une fonction potentielle à deux variables (x, y) vérifiant l'équation de Laplace donc il existe une autre fonction potentielle $\psi(x, y)$ dite fonction potentielle conjuguée à ϕ et tel que :

$$\begin{cases} u = \phi_x = \psi_y, \\ v = \phi_y = -\psi_x. \end{cases}$$

Ces relations sont reconnues par les conditions de Cauchy-Riemann.

La différentielle exacte de ψ nous donne :

$$d\psi = -vdx + udy,$$

alors si $\psi = \text{Cte}$ on retrouve l'équation du ligne de courant.

On introduit une fonction holomorphe $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ appelée le potentiel complexe de vitesse :

$$f = \phi + i\psi,$$

de plus

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \phi_x + i\psi_x, \\ &= u - iv, \end{aligned}$$

est appelée vitesse complexe de l'écoulement qui est aussi analytique.

1.3.4 Équation d'Euler

Pour un écoulement d'un fluide idéal, il ya une seule force $p(x, t)$ appelée la pression, si S_t est une surface de volume fluide, $p(x, t)$ est la force perpendiculaire exercée sur la surface S_t en un point $x \in S_t$ au temps t . Dans ce cas, il n'y a pas des forces tangentielles. Les forces sur Ω_t et sur S_t sont égales à :

$$- \int_{S_t} p n ds = - \int_{\Omega_t} \text{grad } p d\Omega_t,$$

où n est la normale unitaire extérieure et Ω_t est le volume du fluide.

Cette égalité montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force $\text{grad } p d\Omega_t$ exercée par le fluide environnant. L'équation de la balance des forces s'écrit alors :

$$\rho \left(\frac{Dv}{Dt} + v \text{grad } v \right) = -\text{grad } p.$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ, chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force F , l'équation précédent s'écrit sous la forme :

$$\frac{Dv}{Dt} + v \text{grad } v = -\frac{\nabla p}{\rho} + F,$$

c'est l'équation d'Euler.

1.3.5 Équation de Bernoulli

Dans le cas présent, l'équation d'Euler possède une intégrale première qui traduit le fait que l'énergie mécanique totale d'une particule fluide se conserve au cours du temps, car il n'y a pas de frottements.

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(P + \rho\vartheta).$$

Alors

$$\rho v \frac{d\vec{v}}{dt} = -v \text{grad}(P + \rho\vartheta),$$

ainsi on a

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (P + \rho\vartheta),$$

ou bien

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{d}{dt} (P + \rho\vartheta),$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} + \vartheta + \frac{v^2}{2} \right) = 0,$$

et ainsi on a pour chaque particule fluide que l'on suit, donc sur chaque trajectoire

$$\frac{P}{\rho} + \vartheta + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Or l'écoulement étant stationnaire, cette relation est vraie sur chaque ligne de courant. Dans un écoulement stationnaire, incompressible, de fluide parfait soumis à des forces de masse dérivant du potentiel g , on a, sur chaque ligne de courant :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{const.}$$

On verra que cette constante est la même sur chaque ligne de courant car l'écoulement est irrotationnel.

1.4 Étude dans le plan complexe

Pour les écoulements plan, les points $M(x, y)$ du plan peuvent être repérés par le complexe $z = x + iy$, le vecteur vitesse en M représenté par le complexe $V = u + iv$, et

le potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$.

Pour que la fonction $f(z)$ soit *holomorphe* (dérivable par rapport à z), il faut que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{cases}$$

Alors :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - iv = V.$$

Toute fonction holomorphe permet de définir un champ de vitesse susceptible d'être celui d'un écoulement irrotationnel à vitesse conservative. Il est souvent commode d'utiliser la forme polaire : $z = r \cdot \exp(i\theta)$

1.4.1 Exemples d'écoulements à potentiel complexe

Écoulement uniforme

On définit un écoulement uniforme de vitesse constante V_∞ formant un angle $\alpha = \pi$ avec l'axe de $x = 0$ à partir du potentiel complexe suivant

$$f(z) = V_\infty \cdot \exp(-i\pi) \cdot z.$$

On a :

Ligne de courant : $\phi = V_\infty(x\cos\pi + y\sin\pi) = -xV_\infty = cte.$

Équipotentiellles : $\psi = V_\infty(y\cos\pi - x\sin\pi) = -yV_\infty = cte.$

Vitesse complexe $\frac{df}{dz} = u - iv = V_\infty \cdot \exp(-i\pi)$, cela implique :

$$\begin{cases} u = V_\infty \cos\pi = -V_\infty, \\ v = V_\infty \sin\pi = 0. \end{cases}$$

Écoulement entre deux plans non parallèles faisant un angle α

En considérant le sommet de l'angle est à l'origine, une des parois est confondue avec l'axe Ox . Soit le potentiel complexe

$$f(z) = A \cdot z^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Lignes de courant : $\phi = A \cdot r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) = cte.$

Équipotentiellles : $\psi = A \cdot r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) = cte.$

Vitesse complexe $\frac{df}{dz} = u - iv = V_{\infty} \cdot \exp(-i\alpha)$, alors :

$$\begin{cases} u = V_{\infty} \cos\alpha. \\ v = V_{\infty} \sin\alpha. \end{cases}$$

On note que si $\alpha = \pi$, on obtient un écoulement uniforme. On note aussi que :

$$\frac{df}{dz} = A \cdot \frac{\pi}{\alpha} \cdot z^{\frac{\pi-\alpha}{\alpha}}.$$

Alors ;

○ Si $\alpha > \pi$, $\xi = \frac{df}{dz}$ la vitesse complexe sera infinie lorsque $z \rightarrow 0$.

○ Si $\alpha < \pi$, $\xi = \frac{df}{dz}$ la vitesse complexe sera nulle lorsque $z \rightarrow 0$.

1.5 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une méthode qui s'intéresse à l'obtention d'équations décrivant des phénomènes à partir de la simple supposition que celles-ci peuvent être caractérisées par certaines variables. Le résultat d'une analyse dimensionnelle est l'obtention de groupes sans dimensions équivalents au système dimensionnel.

Cette opération réduit le nombre de variables décrivant le problème.

1.5.1 Théorème pi de Vaschy-Buckingham

Le théorème pi de Vaschy-Buckingham est un théorème fondamental à l'analyse dimensionnelle, il a été énoncé et publié par Vaschy et Buckingham en 1914, il peut être énoncé comme suit :

soit un phénomène physique comprenant n variables, dans les dimensions des quelles interviennent p grandeurs fondamentales, l'équation :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

qui régit le phénomène peut se mettre sous forme

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

ou $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$ sont des variables sans dimensions indépendants (nombre de Reynolds, Froude, Weber, etc...).

CHAPITRE 2

LES TRANSFORMATIONS CONFORMES ET LA MÉTHODE DES LIGNES DE COURANT LIBRE

Dans ce chapitre, on va présenter des concepts généraux concernant les transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel et leur utilisation, ainsi que des exemples.

2.1 Généralités sur les transformations conformes

Les problèmes en mécanique des fluides consistent à résoudre des équations différentielles et aux dérivées partielles à partir de la connaissance des conditions aux limites qui sont imposées par la nature du problème physique . En général la géométrie du corps est complexe et les difficultés dans l'analyse de l'écoulement autour d'un corps donné dépendent largement de la forme de ce corps. Il faut remarquer que dans le cadre des études, basées sur les potentiels complexes, les formes géométriques des corps étudiés étaient simples mettant en évidence alors les limitations de cette approche.

Des méthodes numériques pour la résolution de ces problèmes pratiques existent. On citera , par exemple, la méthode des différences finies utilisée pour la discrétisation des opérateurs différentiels. La résolution est effectuée dans un maillage simple, pour des com-

modités de calcul. Cependant, cela est incompatible avec la géométrie des conditions aux limites de sorte qu'il faut alors effectuer une transformation du plan physique afin de se ramener à des conditions aux limites plus simples dans le plan de travail. Ce qui nous ramène donc à l'utilisation des transformations conformes.

Une transformation d'un domaine D qui conserve toutes les angles en grandeur et en sens est dite transformation conforme de D .

Théorème 2.1.1 *Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D telle que $f'(z) \neq 0$ en tout point de D . Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de D .*

Définition 1 *Considérons deux plans (x, y) et (X, Y) et une transformation ponctuelle bijective :*

$$X = X(x, y) \quad Y = Y(x, y)$$

qui à tout point $m(x, y)$ lui associe le point $M(X, Y)$ et inversement.

Lorsque, dans le plan (x, y) , le point m décrit une courbe (c) , le point M dans le plan (X, Y) décrit une courbe (C) qui est l'image de (c) dans la transformation.

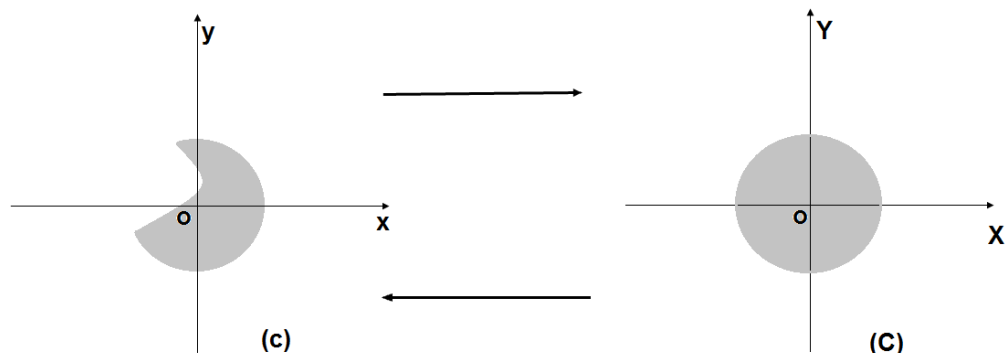


FIGURE 2.1 – Transformation de plan(z) vers le plan(Z) et l'inverse

Parmi toutes ces transformations ponctuelles bijectives certaines vérifient, au moins

dans certains domaines D du plan complexe, les relations de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

La transformation est alors dite "transformation conforme" dans D , ce qui conduit au résultat suivant :

Les transformations conformes peuvent toutes s'écrire sous la forme :

$$Z = g(z), z = G(Z)$$

où

$$Z = X + iY, z = x + iy$$

2.1.1 Propriétés des transformations conformes

Dans ce paragraphe on va présenter quelques propriétés des transformations conformes.

1- Holomorphie

Il résulte de la définition même que $g(z)$ doit être dérivable dans D et uniforme : elle est donc **holomorphe dans D** , mais si on prolonge la définition de $g(z)$ à tout le plan complexe, cette fonction doit nécessairement présenter des singularités en dehors de D ou sur les frontières de D (sinon tout comme $f(z)$, ce serait une constante d'après le théorème de Liouville).

2- Conservation des angles et points singuliers

La fonction $g(z)$ étant holomorphe dans D , la transformation conforme conserve les angles. plus précisément, si deux courbes γ et γ' passant par un point $z_0 \in D$ et se coupent sous l'angle α , leurs transformées Γ et Γ' passent par le point transformé Z_0 et se coupent en général dans le plan (Z) sous le même angle α

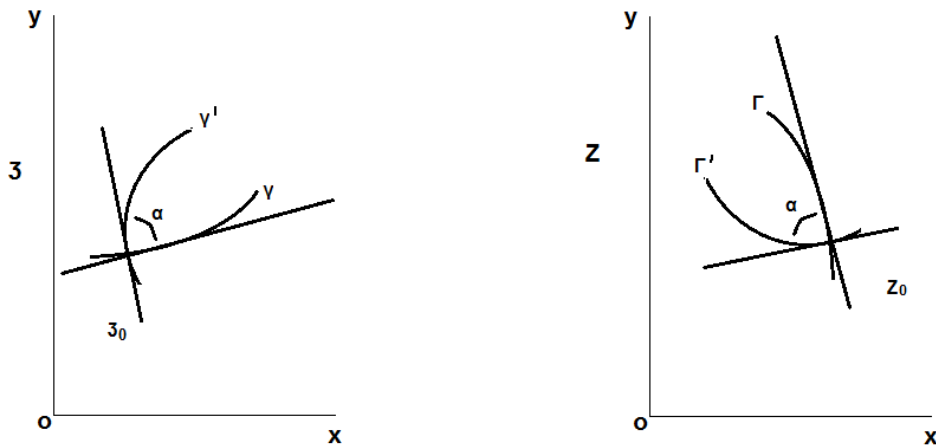


FIGURE 2.2 – Conservation d'angle α de $\text{plan}(z)$ vers le $\text{plan}(Z)$

En effet, un développement au voisinage de z_0 s'écrit, sous réserve que $g(z)$ soit holomorphe en z_0 et $g'(z_0)$ soit non nul :

$$dZ = g'(z_0)dz$$

ce qui montre que l'on passe du voisinage de z_0 au voisinage de Z_0 par une similitude définie par le nombre complexe $g'(z_0) \neq 0$.

En étendant le domaine de définition de $g(z)$ à tout le plan complexe, on a donc le résultat suivant :

- 1- Une transformation $g(z)$ conserve les angles en tout point du plan complexe où $g'(z)$ n'est ni nul ni infini.
- 2- Les points où $g'(z)$ est nul ou non défini sont dits **points singuliers** de la transformation conforme.

2.1.2 Quelques transformations classiques

Dans ce titre, on va présenter trois types de transformations classiques.

Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction liée au coefficient α et rotation d'un angle α .

Transformation inverse

Une transformation linéaire $w = z^{-1}$ pour z non nul est une transformation les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

2.2 Un type des transformations conformes

Une transformation conforme est une application du plan z au plan ζ de la forme $z = f(\zeta)$, où f est une fonction analytique de ζ . Les transformations conformes préservent les angles entre les petits arcs sauf aux points où $df/d\zeta = 0$. De tels points sont appelés points critiques de la transformation, et des courbes lisses passant par de tels points dans le plan z peuvent donner des valeurs angulaires dans le plan z .

2.2.1 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est l'une des formes de cartographie les plus courantes et les plus utiles. Il cartographie l'intérieur d'un polygone fermé dans le plan z sur la moitié supérieure du plan z , tandis que la limite du polygone correspond à l'axe réel du plan z .

On définit la transformation de Schwarz-Christoffel par la formule :

$$\frac{dz}{d\lambda} = k(\lambda - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\lambda - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\lambda - c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \dots \quad (2.1)$$

• Ici, les sommets A, B, C , etc, dans le plan z , sous-tendent les angles intérieurs α, β, γ , etc. (Voir la figure 2.3).

• a, b, c etc., sont les points sur l'axe réel du plan z correspondant aux sommets A, B, C , etc.

Le polygone dans le plan z est fermé, les angles α, β, γ , etc, doit satisfaire la relation suivante :

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - 2)\pi$$

où n est le nombre de sommets dans le polygone.

La constante K détermine l'échelle du polygone et son orientation, tandis que la constante d'intégration détermine l'emplacement de l'origine dans le plan z . Des constantes a, b et c , peuvent être choisis arbitrairement et les autres seront déterminés par la forme du polygone.

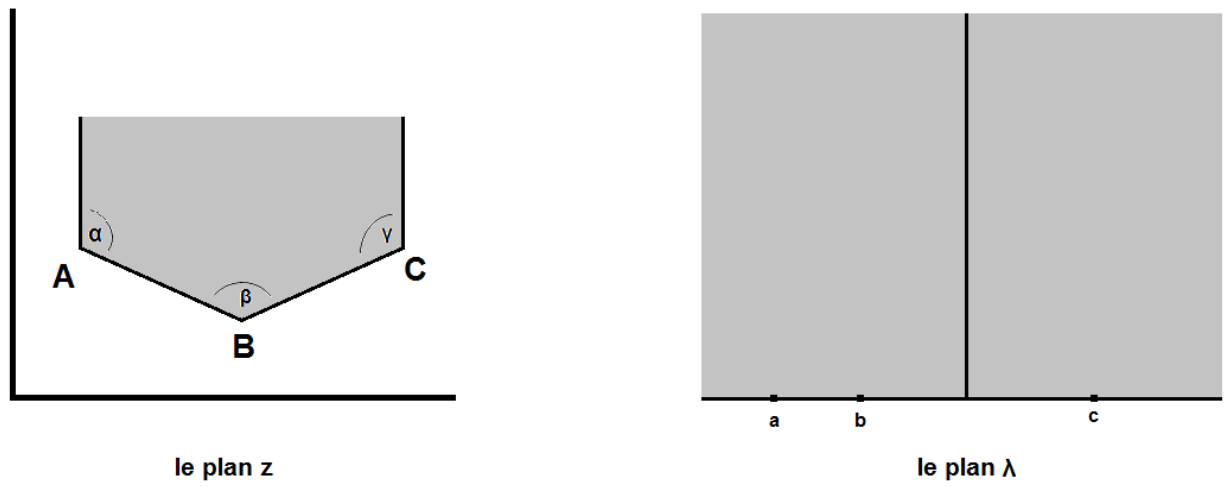


FIGURE 2.3 – Régions correspondantes dans le plan d'origine (le plan z) et le plan cartographique (le plan λ) pour la transformation de Schwarz-Christoffel.

2.3 Méthode des lignes de courant libre

Cette théorie consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornés par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur lesquelles la pression est supposée constante.

Principe : On présente les deux cas suivantes :

- Le premier cas où si aucune surface libre n'est pas présente et l'effet de la gravité n'est pas considérée l'écoulement dans le plan physique est un polygone.
- Le deuxième cas où les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de la gravité et la tension de surface sont négligeables, le domaine de l'écoulement dans le plan transformé par une transformation conforme appropriée est aussi un polygone.

Dans les deux cas on peut trouver la solution exacte du problème.

L'idée de base est l'introduction de la variable complexe définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta.$$

où $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y , respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse.

On note que la fonction Ω possède les propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = \text{const.}$

Par conséquent, dans le plan Ω , le domaine d'écoulement est présenté par une figure plane de côtés rectilignes (polygone). C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone. Il vient que, si nous pouvons transformer le plan Ω vers la moitié supérieure (reps. inférieure) d'une certaine variable complexe λ , alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminées.

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION ANALYTIQUE D'UN PROBLÈME DE TYPE JET DEVANT UN OBSTACLE DE FORME TRIANGULAIRE

Dans ce chapitre, nous considérons un problème d'écoulement d'un jet devant un obstacle de forme triangulaire. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux. Dans le cas où en négligeant les effets de la gravité et de la tension de surface, la solution exacte peut être calculer en utilisant la théorie des ligne de courant libre introduite par Kirchhoff.

3.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel d'amplitude fini H d'un fluide incompressible et non visqueux et irrotationnel devant un obstacle de forme triangulaire et semi infini.

L'écoulement est limité par les parois du canal AO et OB et la surface libre $A'B'$.

Nous choisissons comme repère de référence, AO sur l'axe xox' et le point O est l'origine du plan (x, y) .

Nous supposons que l'écoulement est uniforme lorsque x tend vers moins l'infini et lorsque y tend vers moins l'infini, aux points O et M la vitesse est nulle.

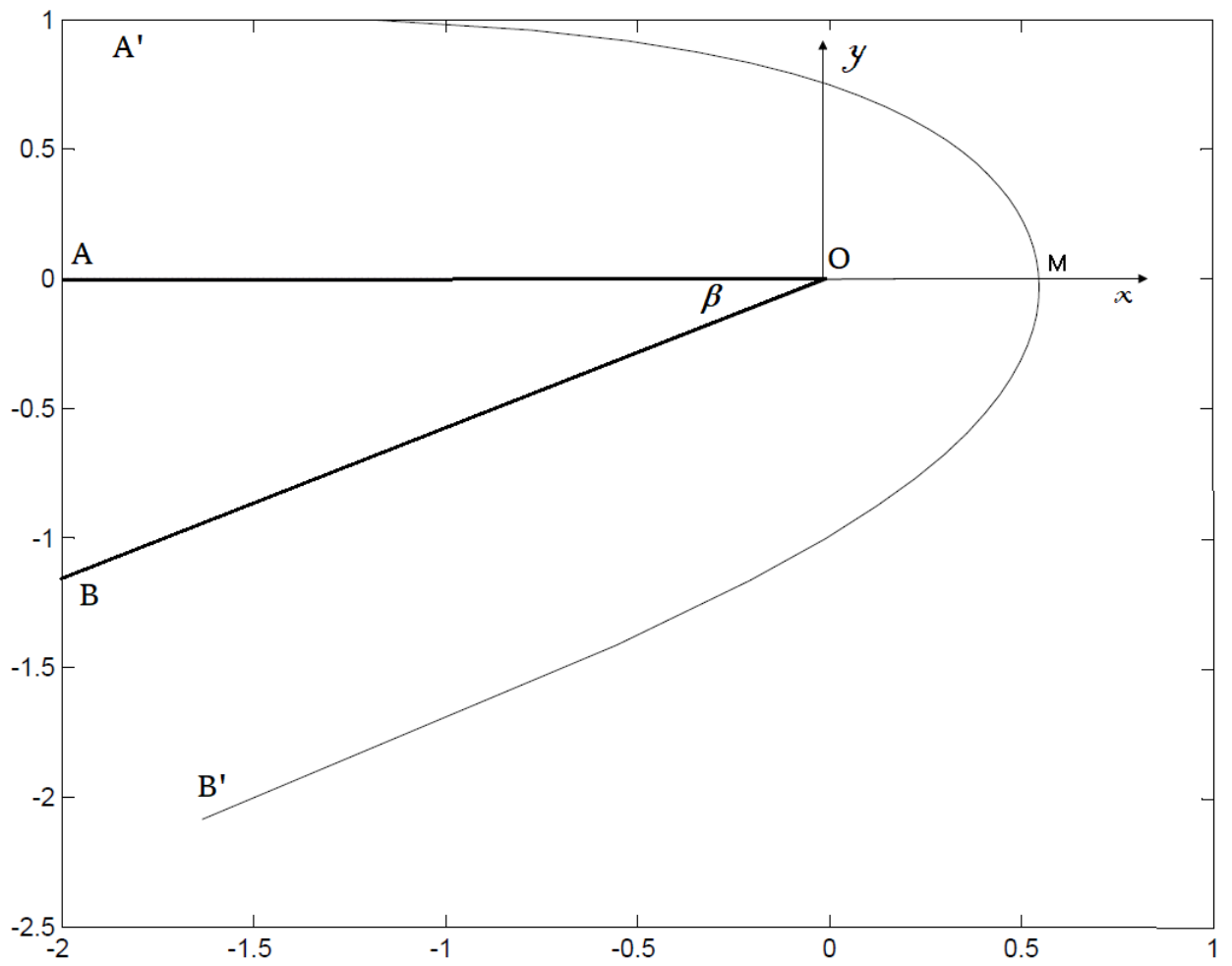


FIGURE 3.1 – Le plan z

Nous nous intéressons à des écoulements potentiels, irrotationnels et bidimensionnels, nous pouvons définir un potentiel complexe :

$$f = \phi + i\psi,$$

où ϕ et ψ représentent la fonction potentiel et la fonction de courant respectivement, la dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

Puisque l'effet de la tension de surface et l'effet de gravité sont négligés, l'équation de *Bernoulli* sur la surface libre s'écrit comme suite

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} = c^{te} \quad (3.1)$$

où q est le module de vecteur vitesse, P est la pression et ρ la densité du fluide.

On a la densité et la pression sont des constantes sur la surface libre de l'écoulement, donc la forme de l'équation de Bernoulli devient

$$q = c^{te} \quad \text{sur } ABC. \quad (3.2)$$

3.2 La solution exacte

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode des lignes de courant libres pour trouver la solution exacte de notre problème, en utilisant la technique utilisée par Kirchhoff(1869).

1^{er} étape

On transforme le domaine d'écoulement réel (x, y) en un domaine d'écoulement de frontière polygonale du plan $(\log(\frac{U}{q}), \theta)$ par la transformation de hodographe Ω

Plan z	Plan Ω
$A = (-\infty, 0)$	$A = (0, 0)$
$B = (-\infty, -\infty)$	$B = (0, -\pi + \beta)$
$O = (0, 0)$	$O = (0, +\infty)$
$M = (L, 0)$	$M = (0, -\beta)$

2^{eme} étape

Le domaine d'écoulement réel, dans le plan z est transformé à une bande de largeur HU dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$ puis que ψ est constante pour chaque ligne de courant, la transformation est donnée par le tableau suivant :

Plan z	Plan f
$A = (-\infty, 0)$	$A = (-\infty, 0)$
$B = (-\infty, -\infty)$	$B = (+\infty, 0)$
$O = (0, 0)$	$O = (0, 0)$
$M = (L, 0)$	$M = (0, UHL)$

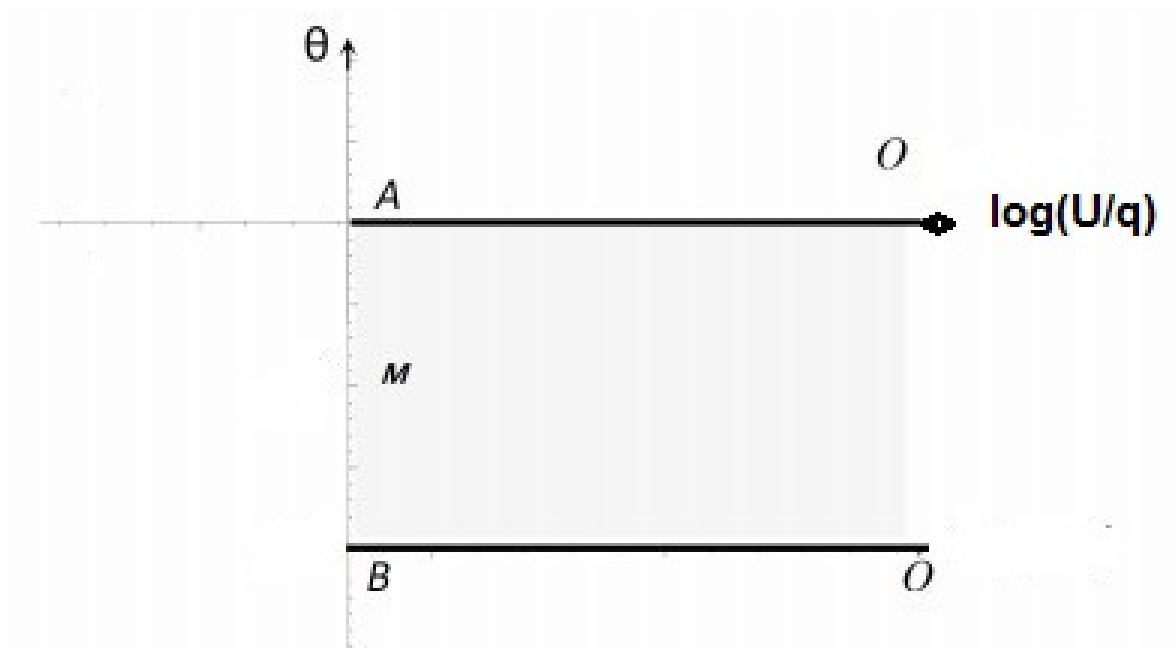


FIGURE 3.2 – Le plan Ω

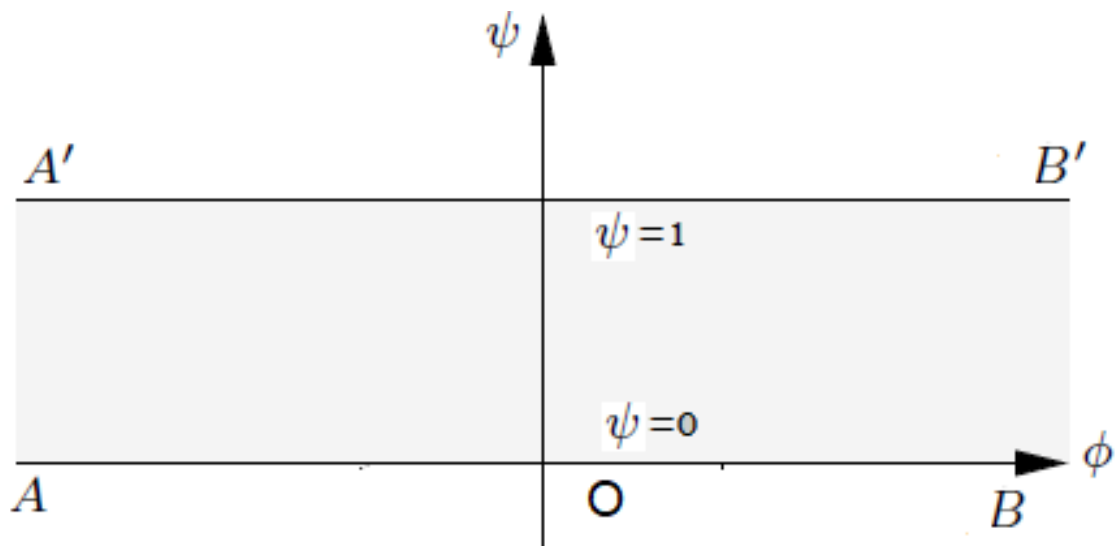


FIGURE 3.3 – Le plan $f = \phi + i\psi$.

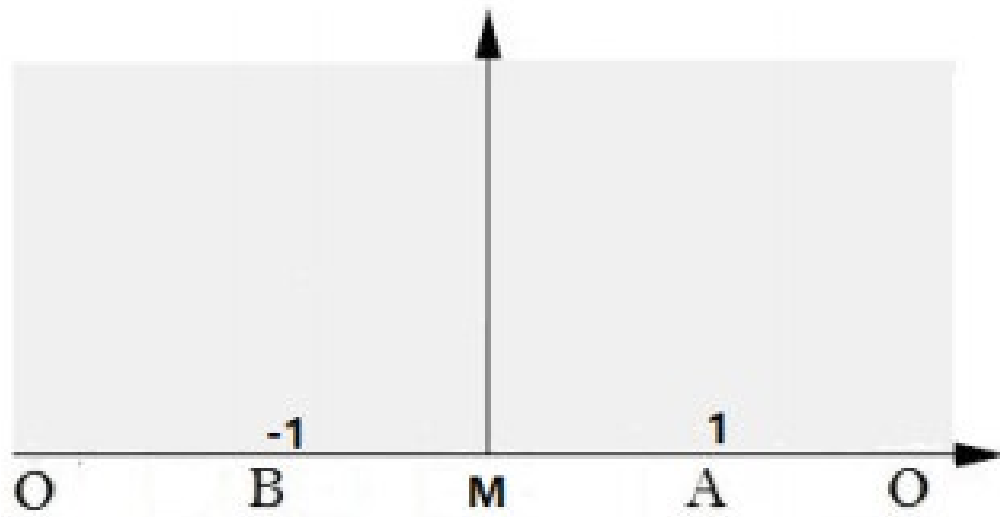


FIGURE 3.4 – Le plan λ

3^{eme} étape

Nous utilisons la transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer le domaine d'écoulement Ω en un demi-plan supérieur de variable λ :

Plan Ω	Plan λ
$A = (0, 0)$	$A = (1, 0)$
$B = (0, -\pi + \beta)$	$B = (-1, 0)$
$O = (0, +\infty)$	$O = (+\infty, 0)$
$M = (0, -\beta)$	$M = (0, 0)$

4^{eme} étape

On utilise la transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer le domaine d'écoulement f en un demi-plan supérieur de variable λ :

Plan f	Plan λ
A	$A = (1, 0)$
B	$B = (-1, 0)$
O	$O = (-\infty, 0)$
M	$M = (0, 0)$

5^{eme} étape

Dans cette étape on recherche une transformation qui transforme le domaine d'écoulement z à le domaine d'écoulement f .

Nous utilisons la fonction de Kirchhoff :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (3.3)$$

Alors :

$$\Omega = \log\left(U \cdot \frac{dz}{df}\right) \quad (3.4)$$

$$\implies e^\Omega = U \cdot \frac{dz}{df}.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{dZ}{df} \times \frac{df}{d\lambda}. \quad (3.5)$$

Alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^\Omega \quad (3.6)$$

$$\frac{dZ}{df} = \frac{1}{U} e^\Omega \quad (3.7)$$

on utilise la relation suivante :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = K(\lambda - \lambda_A)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_B)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_C)^{\frac{\beta}{\pi}-1} \quad (3.8)$$

tel que

$$\beta_A = \frac{\pi}{2}, \beta_B = \pi \text{ et } \beta_C = \frac{\pi}{2}.$$

Cela implique

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = K(\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

$$\implies \Omega = K \int \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}\sqrt{\lambda-1}} d\lambda + P, \quad (3.10)$$

$$\implies \Omega = K \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) + P, \quad (3.11)$$

ici, P et K deux constantes.

Pour déterminer les valeurs des constantes, on choisit le point $A(\lambda = 1; \Omega = 0)$, on trouve :

$$0 = K \log(1) + P, \quad (3.12)$$

$$\implies P = 0, \quad (3.13)$$

et, on choisit encore le point $C(\lambda = -1; \Omega = i(-\pi + \alpha))$, cela implique

$$i(-\pi + \alpha) = K \log(-1) = K \log(i^2), \quad (3.14)$$

ou bien :

$$K = -1 + \frac{\alpha}{\pi}, \quad (3.15)$$

enfin

$$\Omega = \left(-1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda), \quad (3.16)$$

c'est la relation entre les deux transformations Ω et λ . Et alors :

$$\frac{dZ}{df} = \frac{1}{U} \exp\left(\left(-1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)\right). \quad (3.17)$$

D'autre part, on cherche une autre relation entre les transformations f et λ . On utilise la même relation

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - \lambda_A)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_B)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_C)^{\frac{\beta}{\pi}-1}, \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_A = 0, \beta_B = \pi \text{ et } \beta_C = 0. \\ \Rightarrow \frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - 1)^{-1}(\lambda + 1)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

on trouve :

$$f = M \int \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} d\lambda + N, \quad (3.20)$$

alors

$$f = -\frac{M}{2} \log\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) + N, \quad (3.21)$$

cela implique

$$f = \frac{M}{2} \log\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) + N, \quad (3.22)$$

pour déterminer les constantes M et N , on choisit le point $O(\lambda = \infty; f = 0)$

$$0 = \frac{M}{2} \log(1) + N. \quad (3.23)$$

Alors

$$N = 0, \quad (3.24)$$

et le point $B(\lambda = 0; f = iHU)$, on trouve

$$iHU = \frac{M}{2} \log(i^2) = M \log(i) = M \log \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \frac{i\pi M}{2}, \quad (3.25)$$

mais

$$M = \frac{2HU}{\pi}, \quad (3.26)$$

ou bien

$$f = \frac{HU}{\pi} \log \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right), \quad (3.27)$$

on trouve la relation

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{2HU}{\pi} \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}, \quad (3.28)$$

cela implique

$$f = \frac{HU}{\pi} \log \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \Leftrightarrow e^{\frac{\pi f}{HU}} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 + e^{\frac{\pi f}{HU}}}{1 - e^{\frac{\pi f}{HU}}}, \quad (3.29)$$

est la relation entre les deux plans f et λ .

6^{eme} étape

Pour la solution de notre problème en utilisant la relation suivante

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}, \quad (3.30)$$

cela implique

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{dZ}{df} \times \frac{df}{d\lambda}, \quad (3.31)$$

ou bien

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{1}{U} e^{\Omega} \times \frac{2HU}{\pi} \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}, \quad (3.32)$$

alors

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{1}{U} e^{\left(-1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)} \times \frac{2HU}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 - 1}, \quad (3.33)$$

et

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)^{\left(-1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)}}{\lambda^2 - 1} \right], \quad (3.34)$$

après les calculs, on trouve

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{(\lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2})^{\left(-1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)}}{\lambda^2 - 1} \right], \quad (3.35)$$

tel que : $-1 \leq \lambda \leq 1$. Alors

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{(\lambda + i\sqrt{1-\lambda^2})^{(-1+\frac{\alpha}{\pi})}}{\lambda^2 - 1} \right] = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\cos\left(\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right) \arccos\lambda\right) + i \sin\left(\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right) \arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} \right]. \quad (3.36)$$

Cela implique

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\cos\left(\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right) \arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} + i \frac{\sin\left(\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right) \arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.37)$$

- Si : $\alpha = 0$, alors

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\cos(-\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} + i \frac{\sin(-\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.38)$$

ou bien :

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} + i \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right] \quad (3.39)$$

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\cos\left(-\frac{1}{2}\arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} + i \frac{\sin\left(-\frac{1}{2}\arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} \right], \quad (3.40)$$

$$z - z_0 = -\frac{H}{\pi} \left[\log \frac{\sqrt{\lambda+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda+1} - \sqrt{2}} + i \log \frac{\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-\lambda} - \sqrt{2}} \right], \quad (3.41)$$

$$z - z_0 = \frac{H}{\pi} \left[\log \frac{\sqrt{\lambda+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{\lambda+1}} + i \log \frac{\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-\lambda}} \right], \quad (3.42)$$

avec $-1 \leq \lambda \leq 1$.

- Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\cos\left(-\frac{2}{3}\arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} + i \frac{\sin\left(-\frac{2}{3}\arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} \right]. \quad (3.43)$$

Après les calculs on trouve

$$Z - Z_0 = \frac{H}{\pi} \left[\log[(2\cos A - 1)(\cos A - 1)] - i\sqrt{3}\log[(2\cos A + 1)(\cos A - 1)] \right] \quad (3.44)$$

$$\text{tel que : } A = \frac{\arccos\lambda}{3}.$$

• Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[\frac{\cos\left(-\frac{5}{6}\arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} + i \frac{\sin\left(-\frac{5}{6}\arccos\lambda\right)}{\lambda^2 - 1} \right], \quad (3.45)$$

cela implique

$$Z - Z_0 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \left[\log \left[(2\cos C + \sqrt{3})(2\cos C + 1)(\cos C + 1) \right] \right], \quad (3.46)$$

ou bien

$$\begin{aligned} Z - Z_0 = & \frac{-\sqrt{3}}{2} \left[\log \left[\frac{(2\cos C + \sqrt{3})(2\cos C + 1)(\cos C + 1)}{(2\cos C - \sqrt{3})(2\cos C - 1)(\cos C - 1)} \right] \right. \\ & \left. + i \log \left[\frac{(2\sin C + \sqrt{3})(2\sin C + 1)(\sin C + 1)}{(2\sin C - \sqrt{3})(2\sin C - 1)(\sin C - 1)} \right] \right], \end{aligned}$$

$$\text{avec } C = \frac{\arccos\lambda}{6}.$$

Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ on trouve la relation suivante

$$\begin{cases} x = \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{\lambda + 1}}{\sqrt{2} + \sqrt{\lambda + 1}} \right) - H + x_0 \\ y = \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{\lambda - 1}}{\sqrt{2} + \sqrt{\lambda - 1}} \right) + H + y_0 \end{cases} \quad (3.47)$$

x_0 et y_0 deux constants.

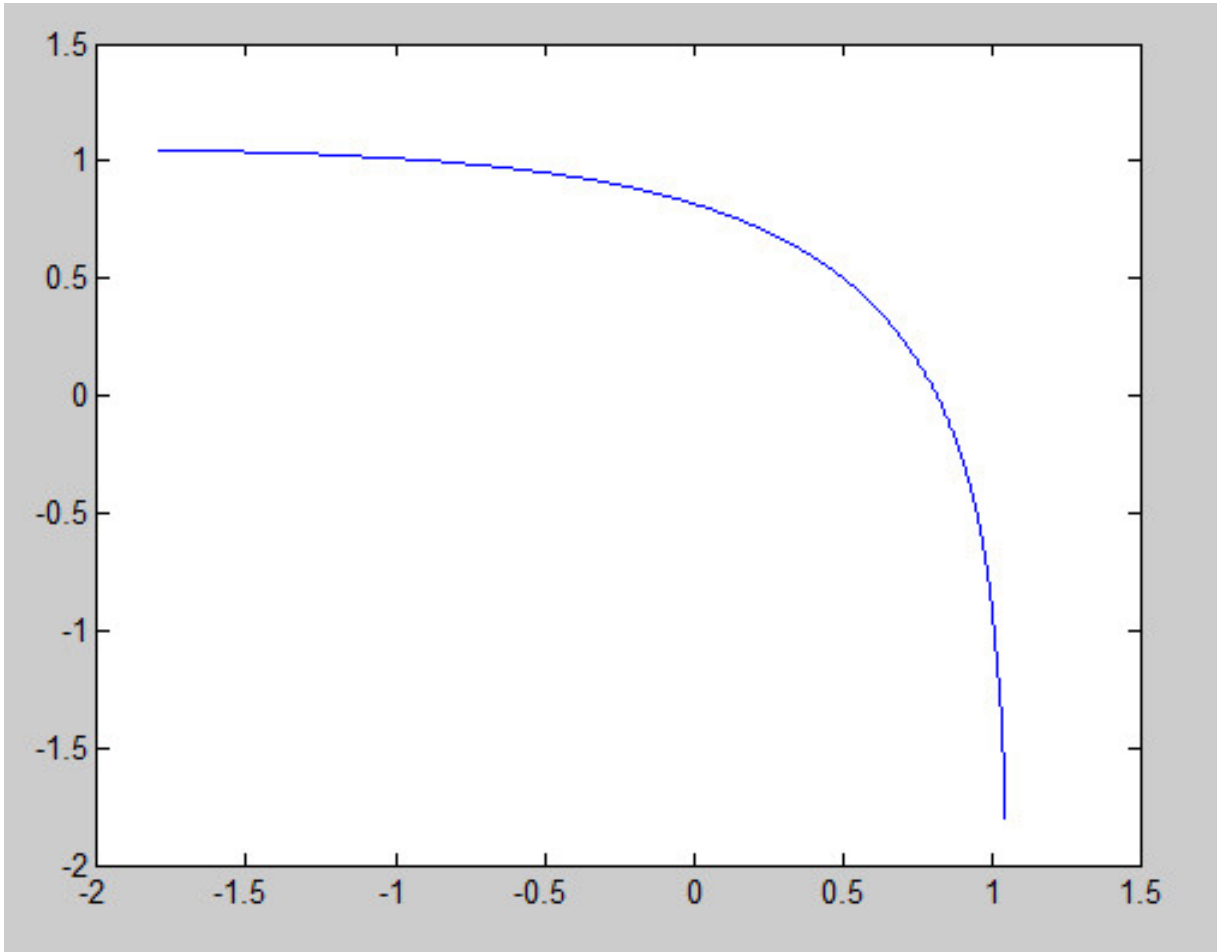


FIGURE 3.5 – La forme de surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} x = H \left(1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \log \frac{2 \cos(C) + \sqrt{3}}{2 \cos(C) - \sqrt{3}} + \frac{1}{\pi} \log \frac{(2 \cos(C) - 1)(1 - \cos(C))}{(2 \cos(C) + 1)(\cos(C) + 1)} \right) + x_0 \\ y = H \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \log \frac{2 \sin(C) + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2 \sin(C)} - \frac{1}{\pi} \log \frac{(2 \sin(C) + 1)(\sin(C) + 1)}{(2 \sin(C) - 1)(1 - \sin(C))} \right) + y_0 \end{cases} \quad (3.48)$$

avec $C = \frac{\arccos(\lambda)}{6}$.

• Pour $\beta = \frac{\pi}{4}$ on trouve :

$$\begin{cases} x = H \left(-1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \log \frac{2 \cos(D) - \sqrt{2}}{2 \cos(D) + \sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \log \frac{1 - \cos(D)}{\cos(D) + 1} \right) + x_0 \\ y = H \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \log \frac{\sqrt{2} - 2 \sin(D)}{2 \sin(D) + \sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \log \frac{1 - \sin(D)}{\sin(D) + 1} \right) + y_0 \end{cases} \quad (3.49)$$

d'où $D = \frac{\arccos(\lambda)}{4}$. Donc le graphe est donné dans la figure suivante

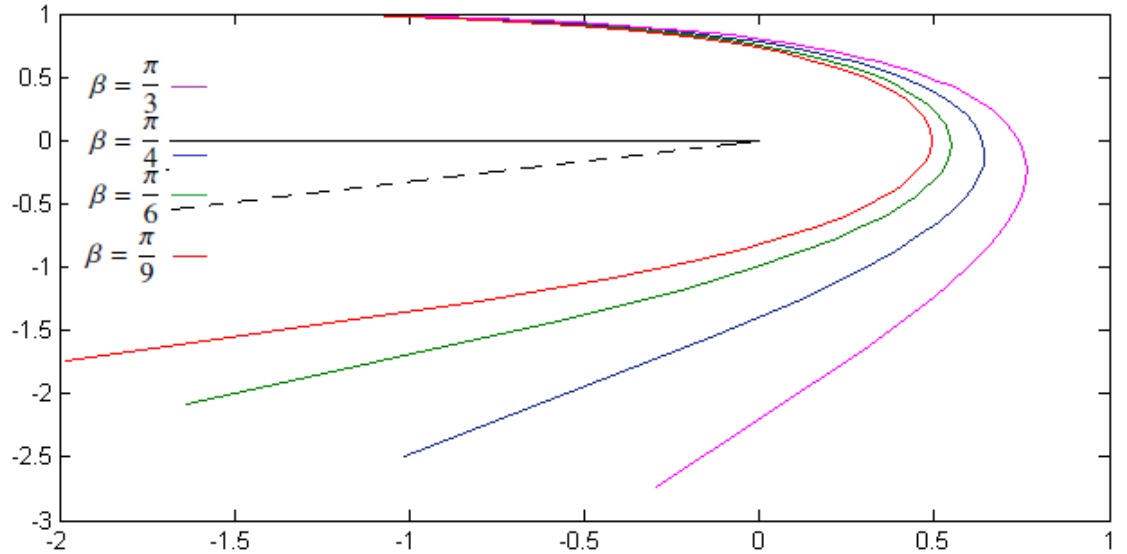


FIGURE 3.6 – Les formes de la surface libre pour quelques valeurs de β .

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME D'ÉCOULEMENT DEVANT UN OBSTACLE DE FORME TRIANGULAIRE PAR LA MÉTHODE DE TRONCATION DE LA SÉRIE

Dans ce chapitre, on va étudier le même problème posé dans le troisième chapitre, mais en tenant compte de l'effet de la tension, ce problème devient très difficile à résoudre analytiquement à cause de la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre, alors une approche numérique dite technique de la troncation de la série est adoptée pour le résoudre. Le problème est caractérisé par le nombre de Weber noté α , défini par la formule suivante

$$\alpha = \frac{\tilde{\rho}\tilde{U}\tilde{H}}{\tilde{T}},$$

où \tilde{T} est la tension de surface, $\tilde{\rho}$ est la densité du fluide et \tilde{H} profondeur du fluide.

4.1 Formulation du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel d'amplitude fini H d'un fluide incompressible et non visqueux et irrotationnel devant un obstacle de forme triangulaire

et semi infini. L'écoulement est limité par les parois du canal AO et OB et la surface libre $A'B'$.

Nous choisissons comme repère de référence, AO sur l'axe xox' et le point O est l'origine du plan (x, y) .

Nous introduisons la fonction potentielle de vitesse $\tilde{\varphi}$ et la fonction de courant $\tilde{\psi}$ alors les conditions de Cauchy-Riemann sont données par :

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}},$$

et

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}.$$

Alors

$$\tilde{f} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

sur la surface libre, la condition de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}} = const,$$

où :

- \tilde{p} : est la pression du fluide sur la surface libre.
- \tilde{q} : le module de vitesse.
- \tilde{p}_0 : est la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre.

L'objectif du problème consiste à déterminer la fonction $\tilde{\varphi}(\tilde{z})$ telle que :

$$\Delta \tilde{\varphi} = 0, \tag{4.1}$$

avec les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}} = 0, \quad \text{sur } OB, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \text{sur } AO, \end{array} \right. \tag{4.2}$$

et la condition

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] = Cte, \tag{4.3}$$

sur la surface libre $A'MB'$.

On a

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{K}\tilde{T},$$

où

$$|\xi| = \exp(\tau).$$

Soient \vec{e}_T, \vec{e}_N les vecteurs tangentiels et normal sur la surface libre respectivement, ds désigne un élément de longueur d'arc sur la surface libre. Alors

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K \vec{e}_N = \frac{1}{R} \vec{e}_N \implies \left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \frac{1}{R}.$$

Ou bien

$$V = (u, v) = (e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta), q = \left| \vec{V} \right|$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| &= \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| \\ &= \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{1}{q} \right| \\ &= \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{q} \right| \\ &= \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{1}{q} \right| \\ &= \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \left[\frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} + \frac{d\theta}{d\psi} \frac{d\psi}{ds} \right] \frac{ds}{dt} \frac{1}{q} \right|. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= 0 \text{ et } \frac{ds}{dt} = q \\ \frac{d\theta}{dt} &= q \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \\ \frac{d\phi}{ds} &= \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{ds} \\ \frac{d\phi}{ds} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} u + \frac{\partial \phi}{\partial y} v \right) \frac{dt}{ds} = (u^2 + v^2) \frac{1}{q} = q \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{d\phi} q^2 \text{ sur } A'B' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau} \\ q^2 &= (u^2 + v^2) = |\xi|^2 = |e^{\tau-i\theta}|^2 = e^{2\tau} \\ K &= e^{2\tau} \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \right| \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| \left| \frac{1}{q} \right| \\ V &= (u, v) = (e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta), q = |\vec{V}| = e^\tau \\ \vec{e}_T &= \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = (\cos \theta, \sin \theta) \implies \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta) \\ \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \right| &= 1 \\ K &= \frac{1}{R} = e^\tau \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right|. \end{aligned}$$

Alors :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| e^\tau = 1 \quad \text{on} \quad A'B', \psi = 1, -\infty \leq \phi \leq +\infty, \quad (4.4)$$

avec les conditions suivantes :

$$Im\xi = 0 \quad \text{on} \quad \psi = 0, -\infty \leq \phi \leq \phi_O, \quad (4.5)$$

et

$$\frac{Re\xi}{Im\xi} = \beta \quad \text{on} \quad \psi = 0, \quad \phi_O \leq \phi \leq +\infty. \quad (4.6)$$

4.2 Procédure numérique

L'idée principale de cette méthode est basée sur la théorie des transformations conformes et qui consiste à transformer le domaine occupé par l'écoulement en un demi disque d'un autre plan où la surface libre aura porté sur la circonférence et les parois rigides sur les rayons. Par cette méthode on a pu déterminer avec précision le comportement du vecteur au voisinage des points de contact des parois rectilignes et la solution qui est caractérisé par un paramètre dite nombre de Weber.

La transformation qui applique le domaine de l'écoulement du plan f dans le plan t est donnée par :

$$f = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^2 . \quad (4.7)$$

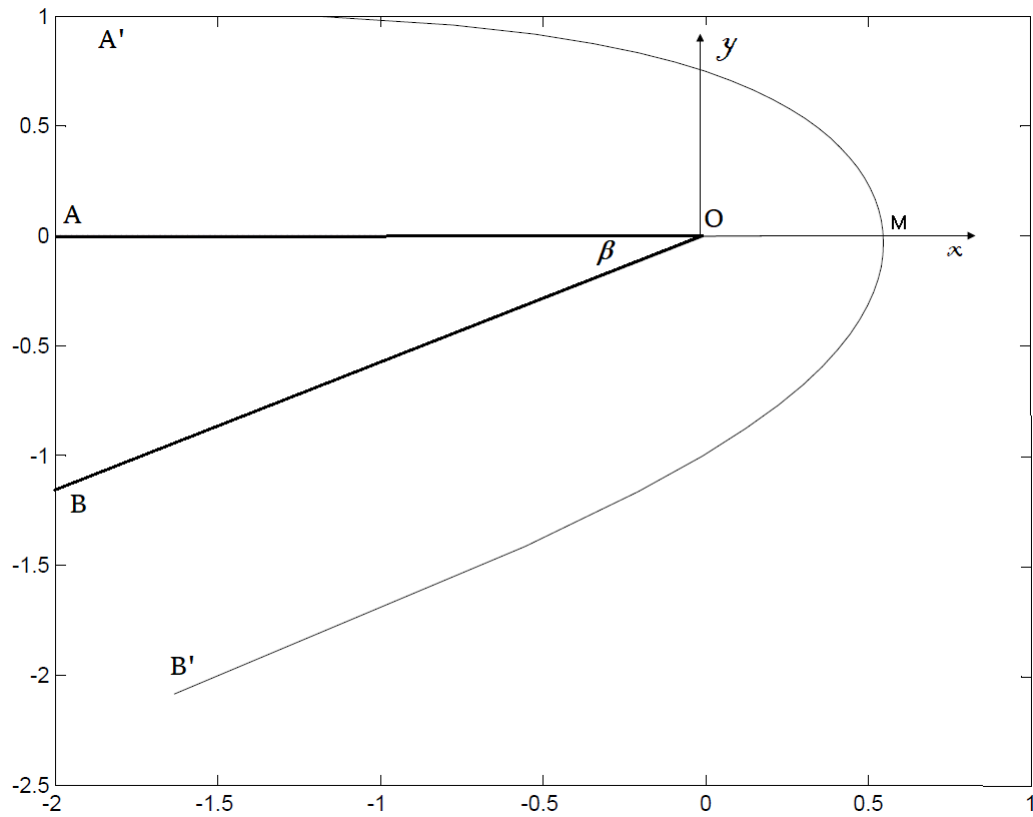


FIGURE 4.1 – Le plan z

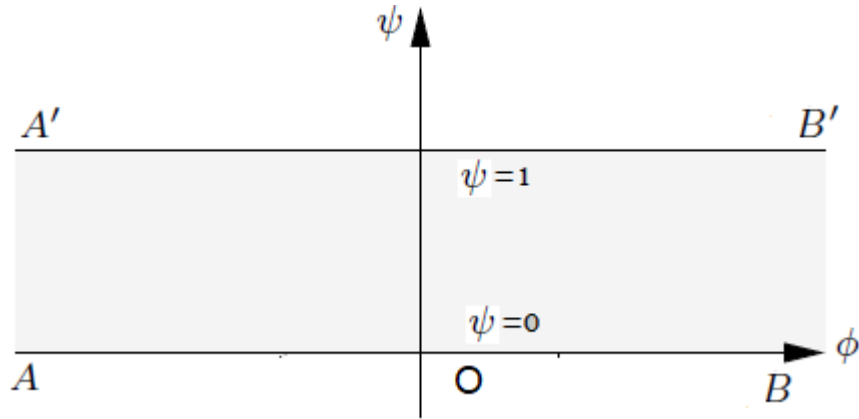


FIGURE 4.2 – Le plan potentiel complexe $f = \phi + i\psi$.

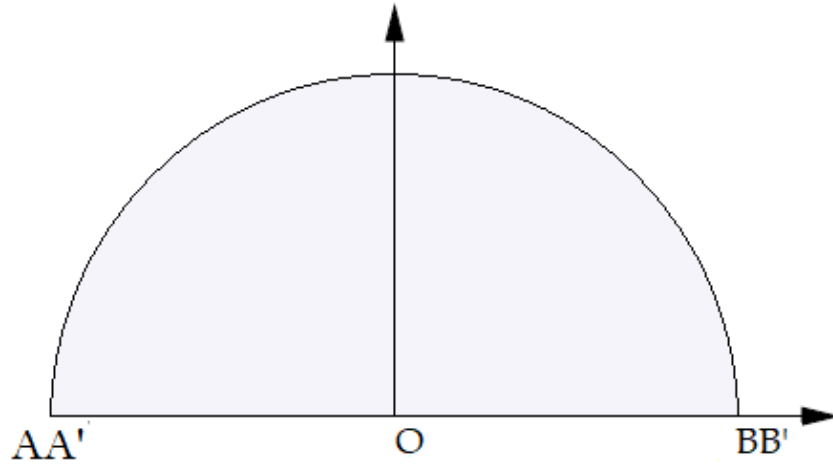


FIGURE 4.3 – Plan de la variable t

Les points de la surface libre dans le plan t sont donnés par la relation :

$$t = |t|e^{i\sigma} = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi, \quad (4.8)$$

et dans le plan f par

$$f = \phi + i, \quad \text{lorsque} \quad -\infty \leq \phi \leq +\infty. \quad (4.9)$$

Dans le plan de l'écoulement réel, O c'est le point singulier, où la vitesse est nulle.

En substituant (4.8) dans l'équation (4.9) on trouve :

$$f = \phi + i = \frac{2}{\pi} \log \frac{e^{i\sigma} + 1}{e^{i\sigma} - 1} \quad \text{sur la surface libre,} \quad (4.10)$$

cela implique :

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{-2}{\pi \sin \sigma}. \quad (4.11)$$

Donc :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{-\pi \sin \sigma}{2}, \quad (4.12)$$

sur la surface libre.

D'autre part, on a sur la surface libre :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}. \quad (4.13)$$

Alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{-\pi \sin \sigma}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}. \quad (4.14)$$

Alors l'équation de Bernoulli sur la surface libre devient :

$$\exp(2\tau) - \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right| \exp(\tau) = 1 \quad (4.15)$$

4.2.1 Comportement asymptotique au voisinage de $t = 0$

La configuration de l'écoulement au voisinage de $t = t_0$ dans le plan t est la même dans le plan z au point O ; or l'écoulement au voisinage de $z = 0$ est un écoulement dans un angle β , dont la fonction complexe f est donnée par :

$$f(z) \sim a \frac{\beta}{\pi} (z - z_0)^{\frac{\pi}{\beta}} - f_0$$

cela implique

$$(z - z_0) \sim \left[\frac{\pi}{a\beta} (f - f_0) \right]^{\frac{\beta}{\pi}}$$

comme

$$\xi(t) = u - iv = \frac{df}{dz}$$

on peut écrire alors :

$$\xi \sim \circ \left(t^{1 - \frac{\beta}{\pi}} \right) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

4.2.2 Formulation de la série

Le but de cette partie est de rechercher $\xi(t)$ après avoir déterminé le comportement local de l'écoulement au voisinage au point singulier O ,

telle que :

$$\xi = g(t) \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right). \quad (4.17)$$

où :

- a_k sont des coefficients des réels à déterminer.
- $g(t)$ contient les zéros de la fonction vitesse.

On obtient :

$$\xi = u - iv = (t)^{1-\frac{\beta}{\pi}} \times \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right) \quad (4.18)$$

Après des simplifications on trouve :

$$\xi = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma) + i\left(1 - \frac{\beta}{\pi}\right)\sigma + i\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma)\right),$$

donc

$$\theta(\sigma) = \left(\frac{\beta}{\pi} - 1\right)\sigma - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2k\sigma) \quad (4.19)$$

et

$$\tau(\sigma) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right). \quad (4.20)$$

Pour déterminer les coefficients a_k de la série, faisant une troncation de la série après N termes, après on discrétise l'intervalle $[0, \pi]$ en N points comme suit :

$$\sigma_I = \frac{\pi}{N}\left(I - \frac{1}{4}\right), I = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (4.21)$$

Forme de la surface libre

On utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{u - iv} = \exp(-\tau + i\theta) \quad (4.22)$$

cela implique :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \exp(-\bar{\tau}(\sigma)) \cos(\bar{\theta}(\sigma)) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \exp(-\bar{\tau}(\sigma)) \sin(\bar{\theta}(\sigma)) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (4.23)$$

4.3 Résultats et discussion

4.3.1 Solution avec tension de surface

La méthode numérique utilisée dans cette étude est utilisée pour calculer des solutions pour différentes valeurs du nombre de Weber et plusieurs valeurs de l'angle β . Si l'influence de la tension de surface est prise en compte, les résultats du calcul montrent qu'il existe une solution pour différentes valeurs $\alpha \geq 15$.

En conséquence, les coefficients a_k de la série (4.18) se sont avérés décroître très rapidement pour différentes valeurs de β et de nombre de Weber, par exemple, lorsque $\beta = \frac{\pi}{6}$ et pour différentes valeurs de nombre de Weber, nous avons les résultats dans table 4.1. Dans le table 4.2, nous montrons certains des coefficients de la série (4.18) et le nombre de Weber associé pour plusieurs valeurs de β .

α	a_1	a_{10}	a_{30}	a_{40}
15	$-5,9992 \times 10^{-2}$	$-1,2431 \times 10^{-5}$	$-7,4921 \times 10^{-5}$	$-7,7403 \times 10^{-6}$
30	$-2,8782 \times 10^{-2}$	$1,4646 \times 10^{-4}$	$1,0553 \times 10^{-5}$	$7,8078 \times 10^{-7}$
100	$-8,4190 \times 10^{-3}$	$4,8330 \times 10^{-5}$	$3,0019 \times 10^{-6}$	$3,4234 \times 10^{-7}$

TABLE 4.1 – Quelques valeurs des coefficients a_k pour différentes valeurs de α avec $\beta = \frac{\pi}{6}$

β	a_1	a_{10}	a_{30}	a_{40}
$\frac{\pi}{4}$	$-7,5004 \times 10^{-9}$	$4,5432 \times 10^{-11}$	$2,9368 \times 10^{-12}$	$2,2746 \times 10^{-13}$
$\frac{4\pi}{6}$	$-3,3335 \times 10^{-9}$	$2,0192 \times 10^{-11}$	$1,3052 \times 10^{-12}$	$1,0109 \times 10^{-13}$

TABLE 4.2 – Quelques valeurs des coefficients a_k pour différentes valeurs de β avec $\alpha = 10^8$

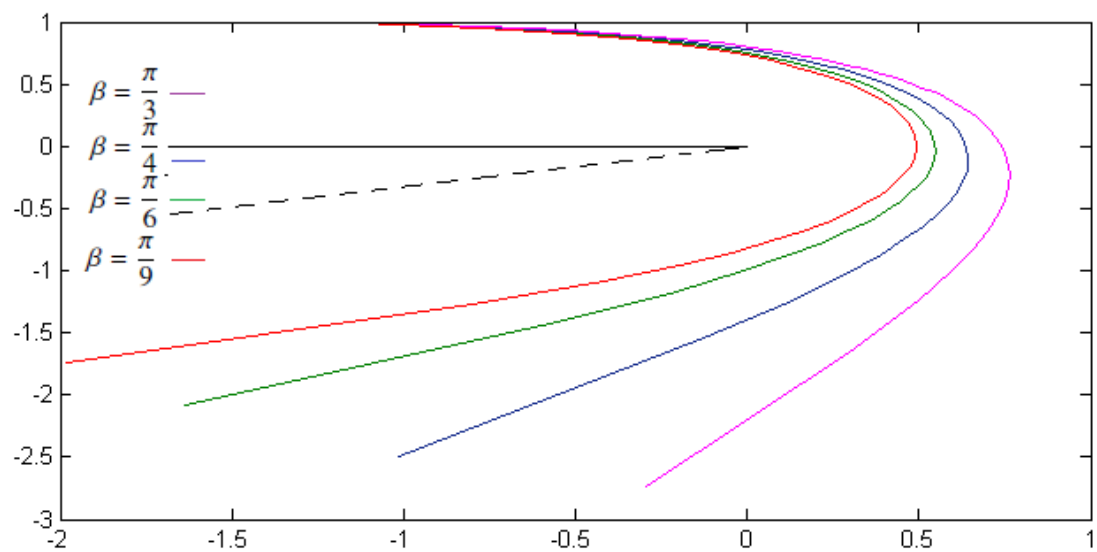


FIGURE 4.4 – Les formes de surfaces libres pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et différentes valeurs de β .

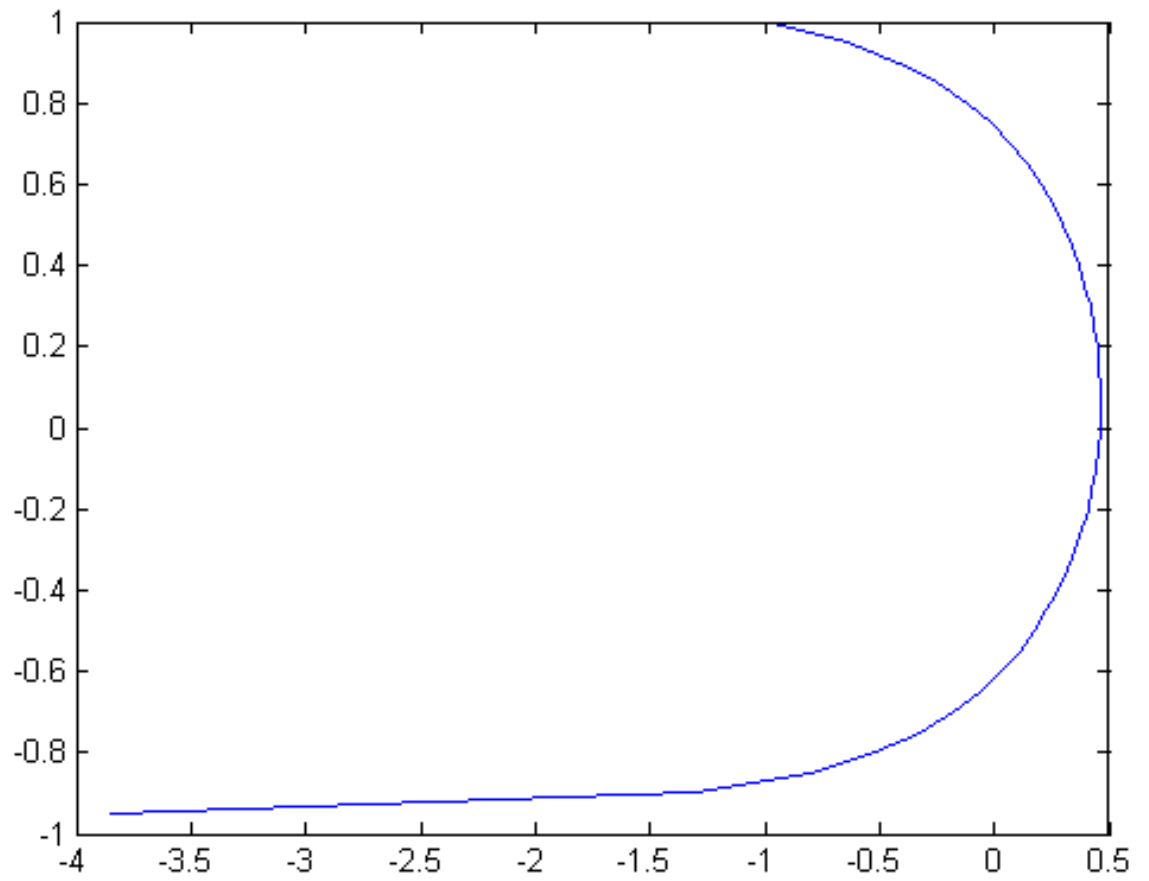


FIGURE 4.5 – Un forme de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = 0$.

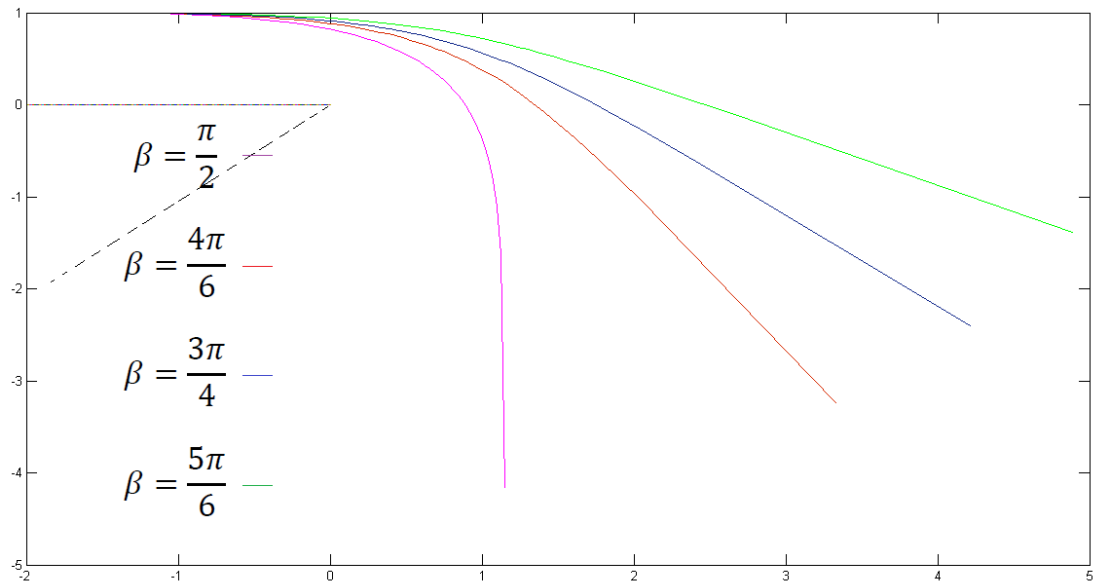


FIGURE 4.6 – Les formes de surfaces libres pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et différentes valeurs de β .

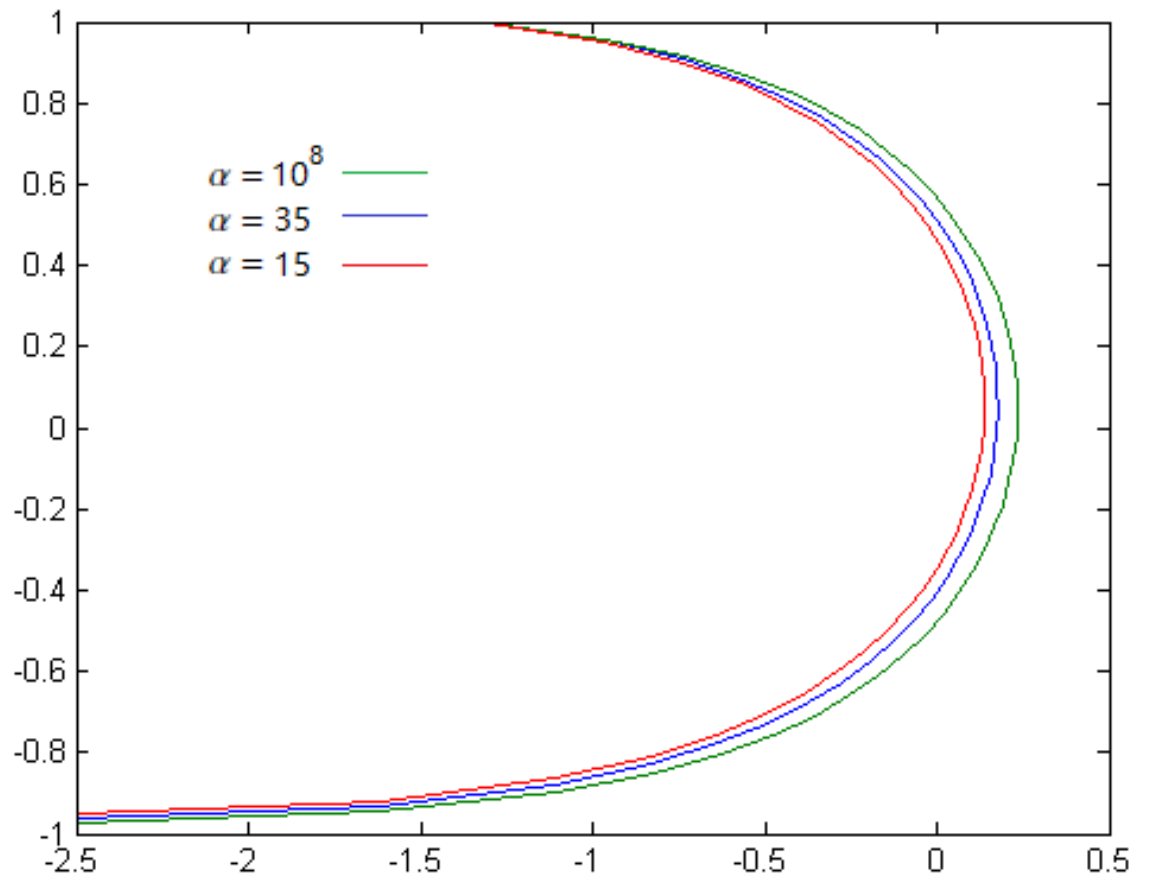


FIGURE 4.7 – Les formes de surfaces libres pour différentes valeurs du nombre de Weber α avec $\beta = \frac{\pi}{200}$.

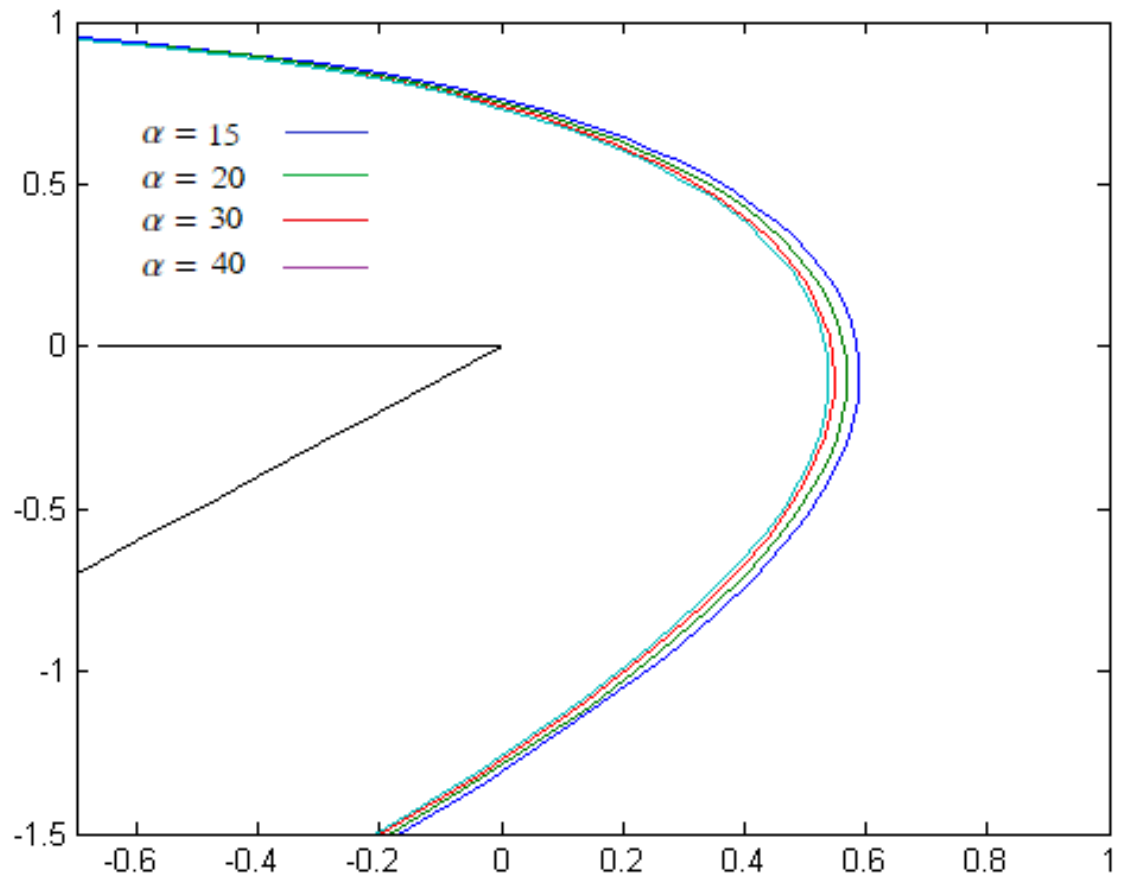


FIGURE 4.8 – Les formes de surfaces libres pour différentes valeurs du nombre de Weber α avec $\beta = \frac{\pi}{4}$

4.3.2 Solution sans tension de surface

Dans le cas où le nombre de Weber tend vers l'infini, l'effet de la tension de surface est négligée. Cela implique :

$$e^{2\bar{\tau}} = 1 \quad (4.24)$$

sur la surface libre.

Dans ce cas, on retrouve la même forme de surface libre que l'on peut trouver analytiquement. Nous avons calculé ces solutions numériquement en utilisant la procédure décrite ci-dessus, et nos résultats sont cohérents avec les résultats théoriques et expérimentaux. La comparaison des formes de lignes de courant libre obtenues par nos méthodes avec les solutions théoriques exactes, est présentée dans Fig 4.9, Fig 4.10 et Fig 4.11 pour $\beta = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ respectivement.

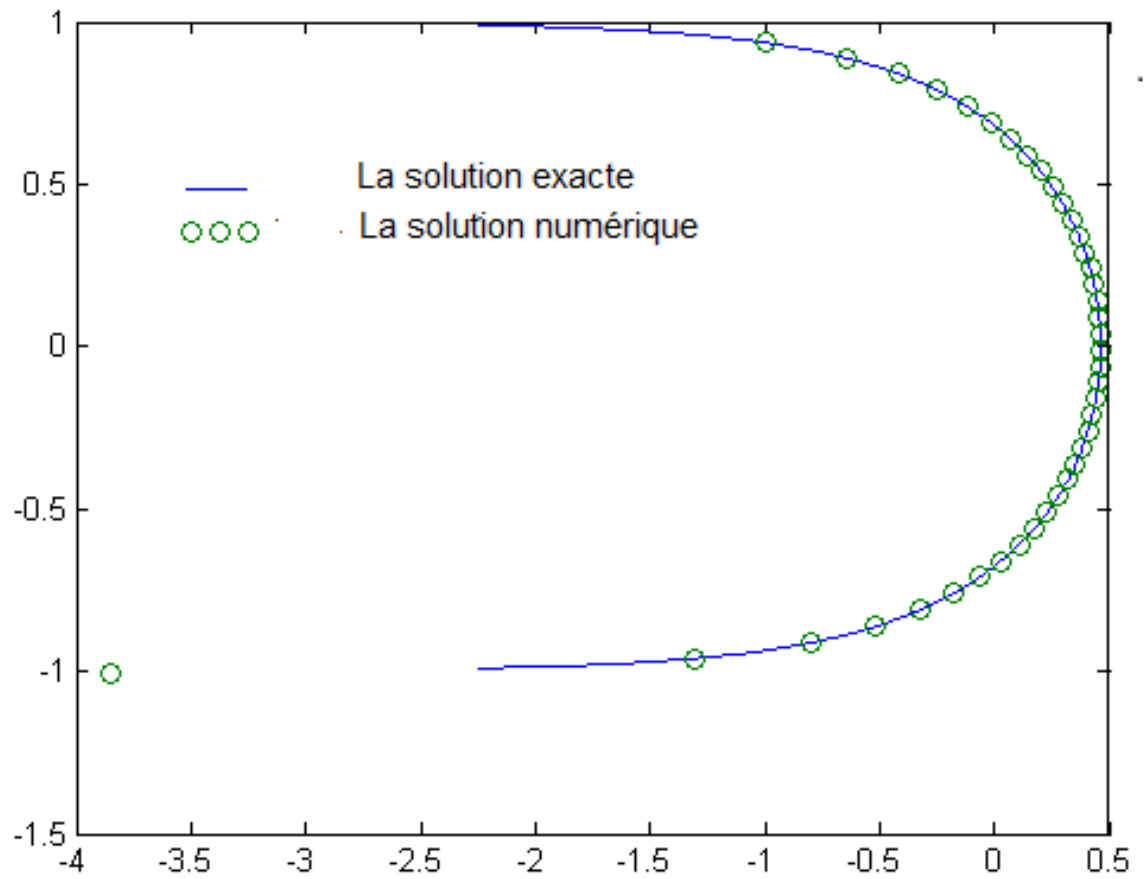


FIGURE 4.9 – Comparaison entre les formes de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = 0$, et la solution exacte.

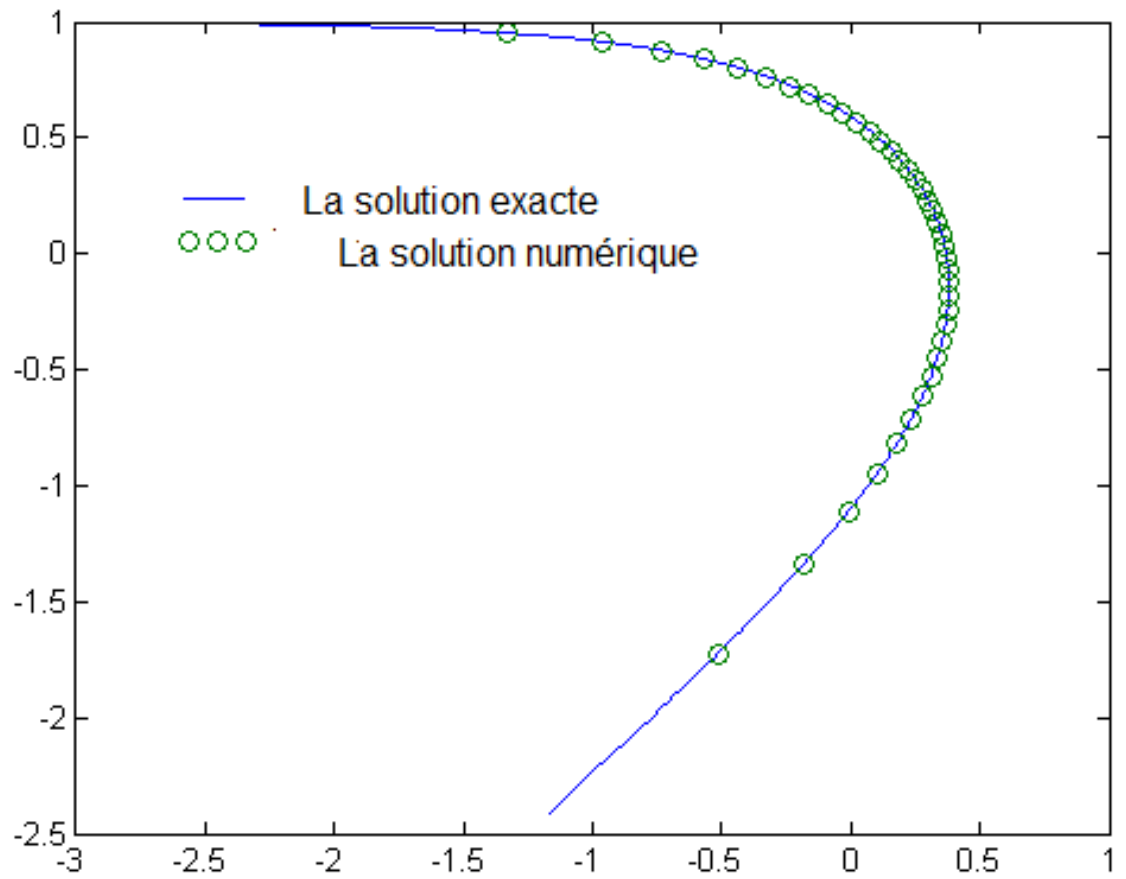


FIGURE 4.10 – Comparaison entre les formes de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$, et la solution exacte.

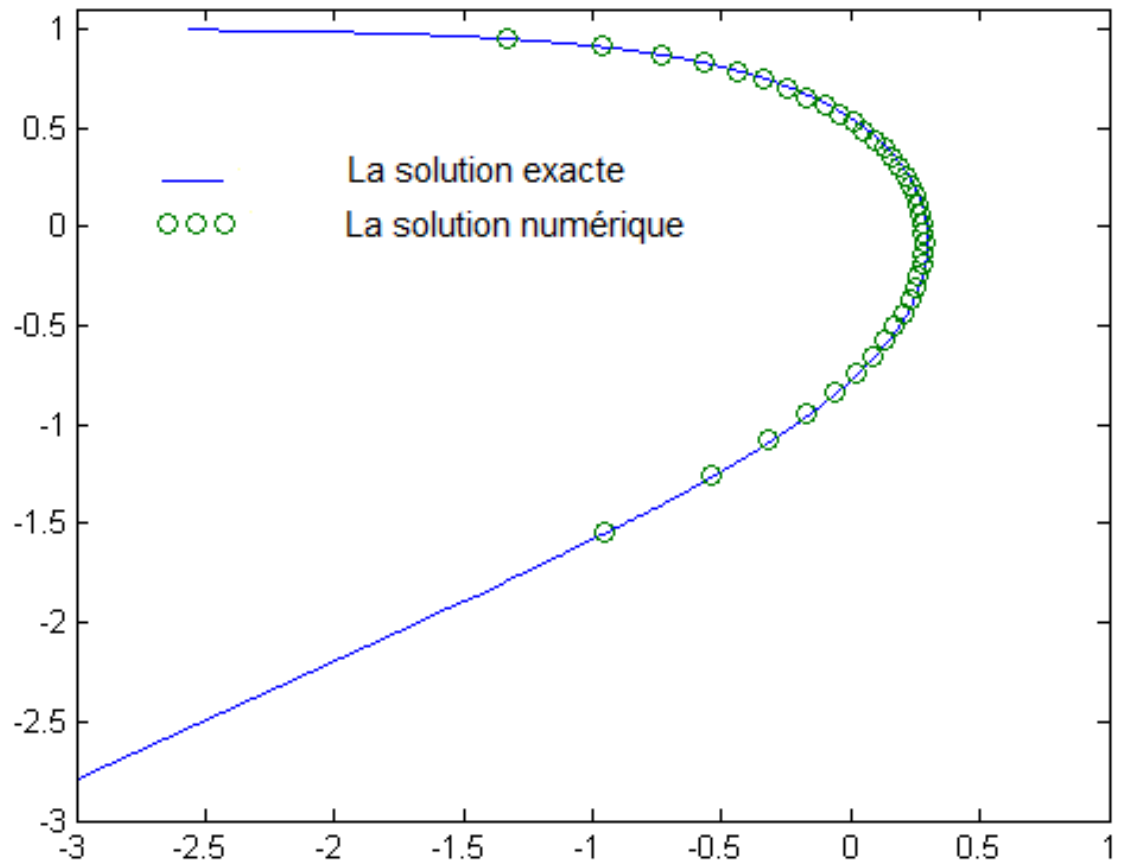


FIGURE 4.11 – Comparaison entre les formes de surface libre pour le nombre de Weber $\alpha = 10^8$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$, et la solution exacte.

CONCLUSION

Dans ce travail, on se propose d'étudier un problème bidimensionnel avec la surface libre d'un jet dans une région entre deux intersections semi-infinies, le fluide est supposé non visqueux et incompressible et l'écoulement est irrotationnel.

Les objectifs principaux de ce travail :

- De donner la solution exacte du problème où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables, et pour l'angle β est variable.
- De chercher la solution numérique dans le cas où l'effet de la tension de surface est existe, en utilisant la technique de troncation de la série et d'étudier l'influence de la tension de surface sur la forme du jet.

ANNEXE 1 : QUELQUES NOTIONS PRELIMINAIRES

Définitions :

- On appelle écoulement bidimensionnel un écoulement où le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe (O, x, y) c'est à dire les champs vectoriels des vitesses V à deux composantes (u, v) .

- Un écoulement est dit irrotationnel si $rot \vec{V} = 0$.

- Un écoulement stationnaire si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable de temps : $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

- Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique ρ est constante.

- Un écoulement est dit potentiel s'il existe une fonction ϕ tel que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\phi = \nabla\phi$$

- On dit qu'un écoulement uniforme si ces composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace.

ANNEXE

Contenu :

A.1. Méthode de Newton

A.2. Algorithme de Newton pour la résolution des systèmes non linéaires $f(x) = 0$

A.3. Code numérique pour le problème du chapitre 4

A.1. Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

ou les f_i sont fonctions réelles non linéaires des variables x_1, x_2, \dots, x_n .

On peut noter le système sous la forme :

$$F(X) = 0$$

ou : $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

Le but est de trouver un ensemble de n valeurs réelles :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$ vérifiant simultanément les n équations du système (4.25) .

Notons que si chaque fonction f_i est continue et différentiable, alors, par un développement de Taylor dans le voisinage d'un estimé X^k proche de X^* , on obtient

$$f_i(X^*) = f_i(X^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^*} (x_j^* - x_j^k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^k) (x_r^* - x_r^k) \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_j \partial x_r} \Big|_{X=X^*} + \dots = 0$$

por $i = 1, 2, \dots, n$

Si $X^{(k)}$ est un estimé proche de X^* les termes $(x_r^* - x_r^k)^p$ tel que $p > 2$, sont négligeables.

Alors :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^k} (x_j^* - x_j^k) = -f_i(X^k)$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$

ou en terme matriciel :

$$E^{(k)} \cdot \Delta X^{(k)} = F^{(k)}$$

avec :

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \Big|_{X=X^k} \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.26)$$

et :

$$\Delta X_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)} \quad \text{et} \quad F_i^k = -f_i(X^{(k)}).$$

L'équation (4.26) est un système linéaire, où toutes les quantités sont connues sauf les ΔX^k .

En utilisant la méthode de Jordan avec stratégie du pivot total implicite pour déterminer ΔX^k dont on présentera dans la suite son algorithme ΔX^k est l'estimé de l'erreur commise en approximant X^* par X^k .

On peut donc obtenir un meilleur estimé $X^{(k+1)}$ de X^* par :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X_j^{(k)}$$

On continue jusqu'à : $|f(X^{k+1})| < \varepsilon$

A.2 Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $F(X) = 0$

Étant donné $X^{(0)}$;

1. Calculer

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \Big|_{X=X^k}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)})$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j = F_i^{(k)}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \Delta X_i^{(k)}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(X^{(k+1)})| < \varepsilon$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifié, arrêter.

A.3 Code numérique pour le problème du chapitre 4

```
clc
clear
w=0.14
alpha= 100000000
for i=1 :40
a(i)=0.00025
t(i)=-(pi/(80))*(i-(1/2))
end
*****
Nombre d'itération m
for m=1 :6
*****
Calculs sum1(i) , sum2(i), sum3(i)
for i=1 :40
sum1(i)=0
sum2(i)=0
sum3(i)=0
end
for i=1 :40
for k=1 :40
sum1 (i)= sum1 (i) + a (k)*cos(2*(k-1)*t(i)) sum2 (i)= sum2 (i) + a (k)*sin(2*(k-1)*t(i))
sum3 (i)= sum3 (i) + 2*(k-1)* a(k)*cos(2*(k-1)*t(i))
end
end
*****
ÉVALUATION DE LA FONCTION f
for i=1 :40
f(i)= exp (2 *sum1(i)) *(((1-w(2))2)/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 * t(i))))(1/2) - (pi/(2 *
```

```

alpha)) * sin(t(i)) * abs(-2 * sum3(i) + 2 * ((1 - w(2)) * cos(2 * t(i)))/(1 + w(4) - 2 * w(2) *
cos(2 * t(i)))) * exp(sum1(i)) * ((1 - w(2))2)/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 * t(i)))1/4 - 1
end

```

RÉSOLUTION DE LA N*N SYSTÈME LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE LU

```

fori = 1 : 40

```

```

forj = 1 : 40

```

```

diff(i, j) = 2 * cos(2 * (j - 1) * t(i)) * exp(2 * sum1(i)) * ((1 - w(2))2)/(1 + w(4) - 2 *
w(2) * cos(2 * t(i)))1/2 - (pi/(2 * alpha)) * sin(t(i)) * (-2 * (2 * (j - 1) * cos(2 * (j - 1) *
t(i))) * sign(-2 * sum3(i) + 2 * ((1 - w(2)) * cos(2 * t(i)))/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 *
t(i)))) * exp(sum1(i)) * ((1 - w(2))2)/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 * t(i)))1/4 + cos(2 *
(j - 1) * t(i)) * exp(sum1(i)) * ((1 - w(2))2)/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 * t(i)))1/4 *
abs(-2 * sum3(i) + 2 * ((1 - w(2)) * cos(2 * t(i)))/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 * t(i))))))
end

```

```

end

```

```

u = inv(diff)

```

```

b = u * f'

```

```

a = a - b'

```

```

end

```

Méthode D'Euler

```

fori = 1 : 40

```

```

xd(i) = 2/(pi * sin(t(i))) * exp(-sum1(i)) * ((1 - w(2))2)/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 *
t(i)))-1/4 * cos((1/2) * atan((sin(2 * t(i) - 2 * sum2(i)) + w(2) * sin(2 * sum2(i)))/(cos(2 *
t(i) - 2 * sum2(i)) - w(2) * cos(2 * sum2(i)))) * t(i))

```

```

yd(i) = 2/(pi * sin(t(i))) * exp(-sum1(i)) * ((1 - w(2))2)/(1 + w(4) - 2 * w(2) * cos(2 *
t(i)))-1/4 * sin((1/2) * atan((sin(2 * t(i) - 2 * sum2(i)) + w(2) * sin(2 * sum2(i)))/(cos(2 *
t(i) - 2 * sum2(i)) - w(2) * cos(2 * sum2(i)))) * t(i))
end

```

```
 $x(40) = 0$   
 $y(40) = 0$   
for  $i = 1 : 39$   
 $x(40 - i) = x(41 - i) + (pi/80) * xd(40 - i)$   
 $y(40 - i) = y(41 - i) + (pi/80) * yd(40 - i)$   
end  
plot( $x, y$ )
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Amara et A. Gasmi, *The effet of surface tension on the jet flow in U-shaped channel*, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. **Vol. 118**, No. 3 (2018), 625-635.
- [2] S. Amiroudine et J. L. Battaglia, *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris. (2011).
- [3] G. K. Batchelor, *An Introduction to fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1967).
- [4] D. Bernoulli et J. Bernoulli, *Hydrodynamics and Hydraulics*, Dover Publications Inc, (2009). *Trans. by T. Carmody and H. Kobus, Preface by H. Rouse.*
- [5] B. J. Binder, J. M. Vander Broeck et F. Dias, *On satisfying the radiation condition in free-surface flows*, *J .Fluid Mech*, **624**, (1986), 179-189.
- [6] G. Birkhoff et E. H Zarantonello, *Jets, Wakes and Cavities*, New York, Academic Press, Inc, (1957).
- [7] B. Bouderah et H. Mekias, *A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom*, *Kybernetes* 31, No. 2 (2002), 305-316.
- [8] B. Bouderah, A. Gasmi, et H. Serguine, *Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow*, *International Mathematical Forum*. **2**, (2007), no. 66, 3273 - 3277.

- [9] B. Bouderah et H. Mekias, "The effects of surface tension on a two dimensional free surface flow produced by a source, *Far East Journal of Applied Mathematics*, **4**, (2000) 159 - 170.
- [10] N. Bounab et B. Bouderah, Computing Solution of the Flow due to a Nozzle, *International Journal of Computer Applications*, **67**, (2013), no 13, (0975 - 8887).
- [11] S. J. Chapman et J. M. Vanden Broeck, Exponential asymptotics and capillary waves, *Siam J. Appl. Math* , **62**, (2002), 1872-1898.
- [12] F. Z. Chedala, A. Amara et M. Meflah, " Numerical and analytical calculations of the free surface flow between two-infinite straights" , *J. Appl. Math, C, M* , **62**, (2020), 2353-0588.
- [13] J. W. Choi, Free surface waves over a depression, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **65**, (2002), 329-335.
- [14] G. D. Crapper, An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude, *J. Fluid Mech* , **2** (1957), 532-540. MR 0091075 .
- [15] G. D. Crapper, Introduction to Water Waves, *Ellis Horwood Limited*, (1984).
- [16] I. G. Currie, Fundamental Mechanics of Fluids, Third Edition, *New York. Basel*, (2003).
- [17] F. Dias et J. M. Vanden Broeck, Open channel flows with submerged obstructions, *J. Fluid Mech*, **206**, (1989), 155-170.
- [18] F. Dias et J. M. Vanden-Broeck, "Flows emerging from a nozzle and falling under gravity, *J. Fluid Mech*, **213**, (1990), 465.
- [19] F. Dias et J. M. Vanden Broeck, Nonlinear free-surface flow past a submerged inclined flat plate, *Phys. Fluids.*, **A3**, (1991), 2995-3000 .
- [20] L. K. Forbes et L. W. Schwartz, Free-surface flow over a semicircular obstruction, *J. Fluid Mech*, **114**, (1982), 299-314.

- [21] A. Gasmi, Two-dimensional cavitating flow past an oblique plate in a channel. *J. Comput. Appl. Math.* **259**, (2014), 828-834.
- [22] A. Gasmi, Numerical Study of Two-Dimensional Jet Flow Issuing from a Funnel. *Proceedings in Mathematics and Statistics.* **pp, 87**, (2014), 161-169.
- [23] A. Gasmi et A. Amara, Free-surface profile of a jet flow in U-shaped channel without gravity effects. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang).* **Vol. 28**, (2018), no. 3, 393-400. .
- [24] A. Gasmi et H. Mekias, "The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet emanating, *J. Phys. A. Math,* **Gen, 36**, (2003), 851-862.
- [25] F. Guechi et M. Dahel, *Free surface flow modeling between two plates*, International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics **4**, (2012), no 3, 179-184.
- [26] A. Laiadi et A. Merzougui, Numerical solution for a free surface flow over multiple obstacles. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **Vol. 6(1)** , (2018), pp. 266-275, ISSN : 2090-729X.
- [27] H. Mekias et J. M. Vanden-Broeck, "Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free surface, *J. phys. Fluids,* **A3**, (1991) 2562.
- [28] A. Recking, D. Richard et G. Degoutte, " Torrents et rivières de montagne : Dynamique et aménagement", *France, Editions Quae*, (2013).
- [29] G. G. Stokes, On the theory of oscillatory waves, *Trans. Camb. Philos. Soc,* **8**, (1847), 441-455.
- [30] J. M. Vanden Broeck, Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle, *Phys. Fluids,* **27**, (1984), 1090-1093.
- [31] J. M. Vanden Broeck, Free surface flow over a semi-circular obstruction in a channel, *Phys. Fluids,* **30**, (1987), 2315-2317.

- [32] J. M. Vanden Broeck, *Gravity-Capillary free surface flows*, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).
- [33] J. M. Vanden Broeck et J. B. Keller, Pouring flows, *Phys. Fluids*, **29**, (1986), 3958-3961.

Abstract:

In this work, we study a problem of two-dimensional flow with the free surface of the jet in a region between two semi-infinite straight intersections at point O, this problem is calculated analytically for each angle Beta and numerically for each of the various values of the Weber number and angle Beta. By assuming that the flow is potential, irrotational and that the fluid is incompressible and inviscid, and by taking account only the surface tension for a numerical method using the series truncation, and without the effect of gravity and surface tension for the analytic method utilize the hodograph transformation. The obtained results confirmed a good agreement between them when the Weber number tends to infinity.

Keywords: free surface flow, Weber number, surface tension, exact solution.

Résumé:

Dans ce travail, nous étudions un problème d'écoulement bidimensionnel avec la surface libre d'un jet dans une région entre deux intersections semi-infinies au point O, ce problème est calculé analytiquement pour chaque angle Beta et numériquement pour chacun des différents valeurs du nombre de Weber et de l'angle Beta. En supposant que l'écoulement est potentiel, irrotationnel et que le fluide est incompressible et non visqueux, et en ne tenant compte que de la tension de surface pour une méthode numérique utilisant la troncature de séries, et sans l'effet de la gravité et de la tension de surface pour la méthode analytique, utiliser le transformation de l'hodographe. Les résultats obtenus ont confirmé un bon accord entre eux lorsque le nombre de Weber tend vers l'infini,

Mots-clés: Ecoulement à surface libre, nombre de weber, tension de surface, solution exacte.

ملخص:

في هذا العمل ، قمنا بدراسة مسألة ثنائية البعد لتدفق سائل مع السطح الحر في منطقة بين تقاطع نصف مستقيمين عند النقطة O, يتم حساب هذه المشكلة تحليليًا لكل زاوية بيتا وعددًا من أجل قيم مختلفة لعدد ويبر والزاوية بيتا. بافتراض أن التدفق كموني وغير قابل للدوران وأن السائل غير قابل للضغط وغير لزج ، مع الأخذ بعين الاعتبار التوتر السطحي فقط بالنسبة للطريقة العددية و ذلك باستخدام طريقة الاقتطاع المتسلسل ، وبدون تأثير الجاذبية والتوتر السطحي استخدمنا طريقة التحويلات المتطابقة للطريقة التحليلية. أكدت النتائج التي تم الحصول عليها وجود اتفاق جيد بينهما عندما يؤول عدد ويبر إلى المالانهاية .

كلمات مفتاحية : تدفق على سطح حر, عدد ويبر, توتر السطح, حل دقيق.