

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA  
MATIÈRE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté En Vue De L'obtention Du

**DIPLÔME DE MASTER**

EN MATHÉMATIQUES

**Option** : Probabilité et Statistique

Par

**Zebiri Zineb**

Intitulé

La Préviation de Processus autorégressif  
moyenne mobile intégré par la méthode de  
Filtre de Kalman

Membres du jury

AMARA Abdelkader	M. C. A	UKMO	Président
MEDDI Fatima	M. C. B	UKMO	Examineur
ARBIA Hanane	M. C. B	UKMO	Rapporteur

2022-2023

# Table des matières

Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des tableaux	vi
Table des figures	vii
Notations et abreviations	viii
Introduction	1
<b>1 Notions de base sur les processus stochastique et les séries chronologiques</b>	<b>3</b>
1.1 Processus stochastique . . . . .	3
1.1.1 Classification des processus stochastique . . . .	4
1.1.2 Stationnarité . . . . .	5
1.1.3 Non stationnarité . . . . .	7
1.1.4 Autocorrélations simple et partielle . . . . .	10
1.1.5 Processus bruit blanc . . . . .	12
1.2 Séries chronologiques . . . . .	13
1.2.1 Schémas de décomposition d'une série chronologique . . . . .	15

1.2.2	Deux opérateurs de chronologie . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Processus autorégressif moyenne mobile intégré</b>	<b>21</b>
2.1	Les modèles autorégressifs AR(p) . . . . .	21
2.1.1	Stationnarité . . . . .	22
2.1.2	La fonction d'autocovariance . . . . .	22
2.1.3	Fonction d'autocorrélation et système de Yule-walker . . . . .	24
2.1.4	Fonction d'autocorrélation partielle . . . . .	25
2.1.5	Estimation des paramètres (Estimateurs de Yule-Walker) . . . . .	25
2.1.6	Propriétés d'un AR(1) . . . . .	26
2.1.7	La prévision des modèles autorégressifs AR(p)	28
2.2	Les modèles moyennes mobiles MA(q) . . . . .	29
2.2.1	Stationnarité . . . . .	30
2.2.2	Les fonction d'autocovariance et d'autocorrélation	30
2.2.3	Moyennes mobiles de premier ordre . . . . .	31
2.2.4	La prévision des modèles moyennes mobiles MA(q)	32
2.3	Les modèles autoregressif moyenne mobile ARMA(p,q)	33
2.3.1	Stationnarité . . . . .	33
2.3.2	Autocorrélation d'un ARMA(p,q) . . . . .	33
2.3.3	Prédiction dans le modèle ARMA(p,q) . . . . .	36
2.4	Modèle autorégressif moyenne mobile intégré ARIMA(p,d,q)	37
2.4.1	Prévisions des processus ARIMA(p,d,q) . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Prédiction par la méthode de filtre de kalman</b>	<b>39</b>
3.1	Estimation au sens des moindres carrés . . . . .	39
3.1.1	Problème . . . . .	40
3.2	Estimateur linéaire optimal . . . . .	42
3.3	Estimateur linéaire optimal et récursif . . . . .	43
3.3.1	Vecteurs aléatoires décorrés . . . . .	44
3.3.2	Vecteurs aléatoires corrélés . . . . .	44

3.4	Filtre de Kalman . . . . .	45
3.4.1	Position du problème . . . . .	46
3.4.2	Equations du filtre . . . . .	47
3.4.3	Algorithme . . . . .	49
3.5	Application de la méthode de filtre de kalman sur don- nées réelles . . . . .	49
3.5.1	Etude de la stationnarité . . . . .	50
3.5.2	Stationnarisation . . . . .	51
3.5.3	Le modèle de notre série chronologique . . . . .	52
3.5.4	Estimation des paramètres du modèle ARIMA(0,1,2)	53
3.5.5	Les entrées de l'équations de base du Filtre de Kalman sous R . . . . .	54
3.6	La prévision . . . . .	55
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

# Dédicace

*D'abord, je remercie mon DIEU qui ma donnèe le courage et la force pour accomplir ce modeste travail.*

*Mes très chers parents...*

*Ma première maitresse, ma chère mère à la plus belle créature que Dieu a créée sur terre, A l'homme fort qui m'a fait aimer pour apprendre et me développer, mon cher père merci pour tes nobles valeurs et pour ton soutien constant.*

*Mes très chers sœurs (Selma ,Boutheyna ,Ahlem et la petite Yassmin)  
Mon seul et cher frère (Abd Elhamid ).*

*Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité. Dieu vous garde pour moi.*

*Je veux aussi me consacrer à tous les enseignants qui ont bâti mon niveau d'éducation dès mon plus jeune et à tous ceux qui me connaissent.*

# Remerciements

*Je remercie ALLAH tout puissant de m'avoit donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail.*

*Que Toutes les formes de Prière et de Salat soient adressées à notre Ame et Conscience Sidna Mohammed, notre lumière dans cette vie.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr. Arbia hanane, je remercie Madame pour l'honneur qu'elle a fait en acceptant d'être mon encadreur, pour l'intérêt scientifique qu'elle a porté à ce travail, pour ses précieux conseils tout le long de l'élaboration de ce travail.*

*Je remercie tout particulièrement Dr. Mansoul, Dr. Meddi et Dr. Saouli et Dr. Amiar pour tout ce que j'ai appris d'eux au cours de mes études, et je leur souhaite plus de succès.*

*J'adresse aussi mes sincères remerciements à "Dr. AMARA Abdelkader" et "Dr. MEDDI Fatima" qui ont accepté de faire partie de mon jury de prendre de leur temps pour examiner mon travail.*

*Je remercie tous mes enseignantes et enseignants.*

*Et enfin à tous nos collègues de la promotion 2022-2023 et à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.*

# Liste des tableaux

3.1	L'évolutions du nombre de cas de cancer de poumons de l'hopital Boudiaf de Ouargla ( 2017 - 2022 ). . . . .	50
3.2	Modèles et AIC de la série. . . . .	53
3.3	Estimation des paramètres. . . . .	54
3.4	Prévisions . . . . .	56

# Table des figures

1.1	Schéma additif. . . . .	16
1.2	Schéma multiplicatif. . . . .	17
3.1	Graphique de l'évolutions du nombre de cas de cancer de pouments de l'hopital Boudiaf de Ouargla ( 2017- 2022). . . . .	51
3.2	Graphique après transformer la série. . . . .	52
3.3	Grafique de prévision. . . . .	56



## Notations et abriviations

<b>PP</b>	Test de Phillips Perron.
<b>AIC</b>	Critère d'information d'Akaike.
<b>AR</b>	Autorégressifs(Autoregressive).
<b>MA</b>	Moyennes Mobiles (Moving Average).
<b>ARMA</b>	Autorégressif moyenne mobile.
<b>ARIMA</b>	Autorégressif moyenne mobile intégré.
<b><math>T_t</math></b>	Tendance.
<b>BB</b>	Bruit blanc.
<b>BBN</b>	Bruit blanc normale.
<b>Cov</b>	Covariance.
<b>TS</b>	Trend Stationary.
<b>DS</b>	Difference Stationary.
<b>L</b>	Opérateur retard.
<b><math>\Delta</math></b>	Opérateur de différenciation.

<b>FAC</b>	Fonction d'autocorrélation.
<b>MCO</b>	Moindres carrés ordinaires.
<b>F<sup>n.m</sup></b>	Système de Filtre de Kalman.
<b>P<sub>k k</sub></b>	La matrice de covariance de l'erreur.
<b>K</b>	Le gain de filtre de kalman.
<b>Ξ*</b>	L'estimateur linéaire optimal et récursif.
<b>X̃<sub> Y</sub></b>	La différence entre le processus et son estimateur linéaire optimal et récursif.
<b>P<sub>XY</sub></b>	la matrices de covariances.
<b>P<sub>X̃<sub> Y</sub>X̃<sub> Y</sub></sub></b>	La matrice de covariance de l'erreur d'estimation.
<b>MAE</b>	Erreur absolue moyenne.

# Introduction

Au cours de la marche du vingtième siècle et du début du siècle actuel, le monde a connu un grand développement dans le domaine de la recherche scientifique dans tous les domaines.

Les statistiques jouent le rôle principal dans l'établissement des plans et des programmes. Grâce à l'analyse statistique, nous montrons les aspects négatifs du passé et prédisons l'avenir, la prévision de l'avenir est l'un des principaux enjeux qui permettent aux décideurs de prendre des décisions judicieuses dans les domaines de la santé, du social, des services et autres. Les séries chronologiques qui est une suite d'observations indexées par le temps sont l'une des méthodes systématiques les plus importantes grâce auxquelles il est possible de prédire ce qui se passera dans le futur en fonction de ce qui lui est arrivé dans le passé.

L'aspect santé est d'une grande importance dans l'aspect développement, car il se soucie de la vie humaine et du salut de toutes les maladies, en particulier du cancer, qui est considéré comme l'une des maladies dangereuses et mortelles. Par conséquent, cette thèse s'est concentrée sur l'étude de cette maladie en se basant sur les effectifs mensuels de personnes infectées par cette maladie, hommes et femmes, Ouargla dans la période (Janvier2017-Décembre 2022).

La prédiction du nombre de patients atteints de cancer du poumon sera basée sur la méthode de filtre de Kalman. Nous mentionnons quelques-unes des études précédentes qui concernaient le filtre de Kalman, le chercheur Dahmani, M. étudié le filtre de Kalman linéaire et non linéaire (2012), le Chercheur Belmahdi, F. à fait un étude de l'application de filtre de Kalman pour le débruitage des sigaux (2015), Smaoun, M., Kettab, A. et Boukharouba, K. ont fait un étude de la Modélisation par le filtre de Kalman et Prédiction des Précipitations annuelles de deux stations pluviométriques au Nord-Ouest de l'Algérie, et Boukharouba, K. et Kettab, A. (2017) ont fait un comparaison de prediction de la méthode de Box-Jenkins et la méthode de filtre de Kalman-Cas des débits annuels et mensuels en Algérie.

Ce travail est réparti comme suit :

**Le premier chapitre** est comprend les notions de base sur les séries chrono logiques et tout ce qui y est lié .

**Le deuxième chapitre** présente les principaux modèles : AR, MA, ARIMA.

**Le troisième chapitre** est présente les étapes méthodologiques de filtre de Kalman et consacré à l'application de cette méthode avec le programme R sur nombre des malades dans service de cancer de Bou-Diaf de Ouargla ( Janvier 2017-December 2022).

# Chapitre 1

## Notions de base sur les processus stochastique et les séries chronologiques

Nous introduisons dans ce premier chapitre quelques outils fondamentaux que nous utiliserons pour modéliser certains phénomènes aléatoires évoluant avec le temps. [3], [6], [7], [8], [12], [16], [17], [23], [25].

### 1.1 Processus stochastique

on considérera un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$ , un espace mesurable  $(E, \zeta)$  ou  $\Omega$  est un espace des événements,  $F$  une tribu adapté à  $\Omega$  et  $P$  une mesure de probabilité sur  $F$ . Alors on a les définitions suivantes :

**Définition 1.1 (Variable aléatoire)** *est une fonction de l'ensemble fondamental  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ ,  $X : (\Omega, F) \rightarrow (E, \zeta)$ ,  $E$  l'espace d'état pouvant être continu ou discret.*

On parle de **variable aléatoire réelle** si l'espace d'arrivée est  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ .

**Définition 1.2 (Processus stochastique)** *On appelle processus stochastique toute famille  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$ , indexées par l'espace des temps  $T$  et à valeurs dans un même espace des états  $(E, \zeta)$ .*

Nous rencontrerons le plus souvent des processus aléatoires à temps discret (avec  $T = \mathbb{N}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ ) à valeurs réelles (avec  $E = \mathbb{R}$  et  $\zeta = \beta(\mathbb{R})$ ). Un processus aléatoire  $(X_t)$  défini sur  $\mathbb{Z}$  possède un passé asymptotique ainsi qu'un futur asymptotique, et l'ensemble de ses valeurs est entièrement explicité par

$$X_{-\infty}, \dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{+\infty}.$$

Au contraire, si un processus aléatoire  $(X_t)$  défini sur  $\mathbb{N}$  possède bien un futur asymptotique, il ne possède en revanche pas de passé asymptotique (qui est remplacé par des valeurs initiales). Il est caractérisé par

$$X_0, X_1, \dots, X_{+\infty}.$$

De la même manière, un processus  $(X_t)$  défini sur  $\mathbb{N}^*$  possède un futur asymptotique et une valeur initiale  $X_1$  (et non plus  $X_0$ ).

**Remarque 1.1** *si  $T = \mathbb{N}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ , on dit que  $(X_t)_{t \in T}$  est un processus à temps discret,  $T = \mathbb{R}$ , ou un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on parle de processus à temps continu.*

### 1.1.1 Classification des processus stochastique

Soit  $(X_t)_{t \in T}$  un processus stochastique tel que :

$$X : T \times \Omega \rightarrow E$$

$$(t, \omega) \rightarrow X(\omega)$$

En se basant sur la nature des ensemble  $T$  et  $E$ , on distingue les processus stochastiques suivants :

1. Processus à temps discret et à espace d'état discret.
2. Processus à temps continu et à espace d'état discret.
3. Processus à temps discret et à espace d'état continu.
4. Processus à temps continu et à espace d'état continu.

Le processus dépend de deux paramètres :  $X_t(\omega)$  dépend de  $t$  (on général le temps) et de l'aléatoire  $\omega \in \Omega$  :

- i) Pour  $t \in T$  fixé,  $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$  est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$ .
- ii) Pour  $\omega \in \Omega$  fixé,  $t \in T \rightarrow X_t(\omega)$  est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

### 1.1.2 Stationnarité

**Définition 1.3 (Stationnarité stricte)** *Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit strictement stationnaire ou stationnaire au sens stricte si les lois jointes de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  et de  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$  sont identiques pour tout entier positif  $k$  et pour tous  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  tel que  $t_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n$ .*

Intuitivement, une série chronologique strictement stationnaire doit avoir le même comportement statistique sur des intervalles de temps égaux.

**Remarque 1.2** *Cette notion de stationnarité forte est très difficile à vérifier en pratique. On lui préfère généralement la notion de stationnarité faible qui porte sur les moments d'ordre 1 et 2 du processus*

**Définition 1.4 (Stationnarité faible)** Un processus  $(X_t)$  est stationnaire au second ordre si :

- i) Pour tout  $t$ ,  $E(X_t^2) < +\infty$ .
- ii) Pour tout  $t$ ,  $E(X_t) = \mu$ .
- iii) Pour tout  $t$  et pour tout  $h$ ,  $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$ , indépendante de  $t$ .

### Relation entre stationnarité faible et stricte

Un processus strictement stationnaire du second ordre est faiblement stationnaire. La réciproque n'est pas vraie en général.

**Proof.**

→ **1<sup>er</sup> étape**

Si  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est strictement stationnaire alors, si  $n = 1$ , toutes ses valeurs  $(X_t)$  ont la même loi qui ne dépend pas de  $t$ .

Ainsi,

$$E[X_t] = cte \text{ et } V(X_t) = cte \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

De plus, si  $n = 2$ , tous les couples  $(X_t, X_s)$  ont la même loi que les couples  $(X_{t+k}, X_{s+k})$ , pour tous  $t, s \in \mathbb{Z}$  et tout décalage temporel  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'ensuit que  $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t-s}, X_0)$  et la covariance ne dépend donc que de l'amplitude  $t - s$ . Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est donc stationnaire au second ordre.

→ **2<sup>ème</sup> étape** ( par contre exemple)

Pour montrer que la réciproque est généralement fautive, considérons un contre-exemple. Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  le processus défini par

$$X_t = (-1)^t Z,$$

où  $Z$  est une variable aléatoire non symétrique (la loi de  $Z$  n'est pas



la même que la loi de  $-Z$ ), telle que  $E[Z] = 0$  et  $E[Z^2] = 1$ . Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , on a

$$E[X_t] = (-1)^t E[Z] = 0,$$

et

$$E[X_t^2] = (-1)^{2t} E[Z^2] = 1.$$

De plus, pour tous  $t, s \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = (-1)^t (-1)^s E[Z^2] = (-1)^{t+s} = (-1)^{t-s},$$

car, puisque

$(-1)^{-2s} = 1$ , il est clair que  $(-1)^{t+s} = (-1)^{t+s} (-1)^{-2s} = (-1)^{t-s}$ . Ainsi, l'espérance et la variance de  $X_t$  sont constantes et la covariance entre  $X_t$  et  $X_s$  ne dépend que de  $t - s$ , ce qui fait que le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est stationnaire au second ordre. Cependant, comme  $X_t = -X_{t-1} = \pm Z$ , la loi de  $X_t$  et la loi de  $X_{t-1}$  sont différentes (puisque la loi de  $Z$  n'est pas symétrique). En conclusion  $(X_t)$  n'est pas strictement stationnaire. ■

### 1.1.3 Non stationnarité

La classe des processus non stationnaire est relativement vaste, il existe différents types de non stationnarité, on présente deux classes des processus non stationnaires : les processus **TS** et **DS**.

#### Processus TS

Si le processus non stationnaire  $(X_t)$  s'écrit sous la forme :

$$X_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

on dit que est un processus non stationnaire de type **TS**, où  $f(t)$  est une fonction polynômiale du temps, linèaire ou non linèaire et  $(\varepsilon_t)$  est un processus stationnaire représente l'erreur du modèle à la date  $t$ , avec  $E(\varepsilon_t) = 0$ .

Le prossesus **TS** le plus utilisé porte le nom linèaire puisque est représenté par une fonction polynômiale de degré 1. Le processus **TS** (Trend Stationary) s'écrit

$$X_t = a_0 + a_1t + \varepsilon_t$$

Le processus **TS** est non stationnaire car  $E(X_t) = a_0 + a_1t$  dépend du temps  $t$ .

### Processus DS

Le processus **DS** (Differency Stationary) avec dérive ( $\beta \neq 0$ ) s'exprime comme suit :

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t.$$

Par récurrence, on obtient (dans le cas avec dérive) :

$$X_1 = X_0 + \beta + \varepsilon_1$$

$$X_2 = X_1 + \beta + \varepsilon_2 = X_0 + \beta + \varepsilon_1 + \beta + \varepsilon_2 = X_0 + 2\beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

.

.

.

$$X_t = X_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ (}\varepsilon_i \text{ est identiquement et indépendamment distribuée).}$$

Le processus **DS** avec dérive est non stationnaire car on a  $E(X_t) = X_0 + \beta t$  qui dépend du temps  $t$ .

Le processus **DS** (Differency Stationary) sans dérive ( $\beta = 0$ ) s'écrit :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Par récurrence, on obtient (dans le cas sans dérive) :

$$X_1 = X_0 + \varepsilon_1$$

$$X_2 = X_1 + \varepsilon_2 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

...

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \text{ où } \varepsilon_i \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Le processus **DS** sans dérive est non stationnaire car on a :

$$\begin{aligned} var(X_t) &= var\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^t var(\varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^t \sigma_\varepsilon^2 \\ &= t\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

On constate que la variance du processus **DS** sans dérive dépend du temps  $t$ .

### 1.1.4 Autocorrélations simple et partielle

Les principales caractéristiques temporelles sont données par l'autocorrélation (simple) et l'autocorrélation partielle.

#### La fonction d'autocovariance

La fonction d'autocovariance  $\{\gamma(h)\}_{h \in \mathbb{Z}}$  mesure la covariance entre une variable et cette même variable des dates différentes, pour un délai  $h$ .

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \text{cov}(X_t, X_{t-h}) \\ &= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t) E(X_{t-h}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = E[(X_t - E(X_t))^2] = \sigma_x^2.$$

**Proposition 1.1** *La fonction d'autocovariance vérifie les propriétés suivantes :*

- i)  $\gamma(0) \geq 0$ .
- ii)  $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$  pour tout  $h$ , la fonction autocovariance est donc bornée.
- iii)  $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$  pour tout  $h$ , autrement dit l'autocovariance est une fonction paire.

#### La fonction d'autocorrélation

La notion d'autocorrélation découle de la notion d'autocovariance. Par définition l'autocorrélation (ou le coefficient d'autocorrélation) de la série  $X_t$  est :

$$\begin{aligned}
\varphi_X(h) &= \text{corr}(X_t, X_{t-h}) \\
&= \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t-h})}} \\
&= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)},
\end{aligned}$$

avec  $\varphi(0) = 1$  et  $|\varphi(h)| < 1$ .

**Définition 1.5** On définit la matrice de corrélation (de dimension  $m$ ) de la manière suivante :

$$R(m) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(m-1) \\ \varphi(1) & 1 & \varphi(1) & \dots & \varphi(m-2) \\ & & & & \\ & & & & \\ \varphi(m-1) & \varphi(m-2) & & \varphi(1) & 1 \end{pmatrix}.$$

### La fonction d'autocorrélation partielle

Elle mesure la liaison linéaire entre  $X_t$  et  $X_{t-h}$ , une fois retirés les liens transitant par les variables intermédiaires  $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$ .

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre  $h$ , noté  $r(h)$  est définie par :

$$r(h) = \text{cov}(X_t, X_{t-h}/X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}).$$

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre  $h$  d'un processus stationnaire se calcule de la manière suivante :

$$r(h) = \frac{|R(h)^*|}{|R(h)|},$$

avec

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(1) & \varphi(h-1) \\ \varphi(1) & 1 & \varphi(h-2) \\ \varphi(h-1) & \varphi(h-2) & 1 \end{pmatrix}$$

et  $R(h)^*$  est la matrice  $R(h)$  dans la quelle on a remplacé la colonne  $h$  par

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(h) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$r(1) = R(1), r(2) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)^2}{1 - \varphi(1)^2}, \dots$$

### 1.1.5 Processus bruit blanc

**Définition 1.6 (Bruit blanc)** *Le processus  $\xi_t$  est un bruit blanc faible s'il existe  $\delta^2$  telle que :*

1.  $E(\xi_t) = 0$  pour tout  $t$ ,
2.  $Var(\xi_t) = E(\xi_t^2) = \delta^2$  pour tout  $t$ ,

3.  $cov(\xi_t, \xi_{t-h}) = E(\xi_t \xi_{t-h}) = 0$  pour tout  $t$  et  $h \neq 0$ .

L'hypothèse d'indépendance des variables aux différentes dates permet toute fois de définir un bruit blanc fort.

## 1.2 Séries chronologiques

L'étude des séries temporelles, correspond à l'analyse statistique d'observations régulièrement espacées dans le temps. Elles ont été utilisées en diverses domaines : en astronomie, en météorologie, en théorie du signal...etc

**Définition 1.7 ( Série temporelle ou chronologique)** *Une série temporelle est une suite d'observations indexées par le temps, notée  $X_t$ . Elle représente généralement l'évolution d'un phénomène au cours du temps, telle que :*

$$X_t = \{X_t, t = 1, \dots, t = T\} \quad T \in \mathbb{N}, \mathbb{Z} \text{ ou } \mathbb{R}.$$

*L'indice  $t$  représente une unité de temps (qui peut être le mois, l'année,...etc).*

**Remarque 1.3** *Une série chronologique peut être à temps continu ou temps discret. Dans le cas continu, les observations sont mesurées chaque instant de temps ( $T$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ). Par contre, la série chronologique à temps discret contient des observations mesurées des points discrets de temps (en général  $T \in \mathbb{Z}$ ).*

On désignera dans la suite par une série temporelle à temps discret.

## Objectifs de la modélisation chronologique

Les objectifs de l'analyse d'une série chronologique sont :

### 1. Modélisation

- Identification du type d'évolution du processus.

- Modélisation pertinente du processus et estimation des paramètres associés.

### 2. Prèvision

étant données des observations  $X_1, \dots, X_T$ , la prévision consiste à évaluer une valeur non observée  $X_{T+h}$ . La prévision peut être ponctuelle, ou prendre la forme d'un intervalle de prévision.

## Les composantes d'une série chronologique

Cette décomposition est faite en fonction des quatre éléments suivants :

**Tendance** ( $T_t$ ) : La tendance, notée  $T_t$  est une fonction qui représente le mouvement long terme de la série étudiée. La tendance prend plusieurs formes.

1. Tendance linéaire :  $T_t = a + bt$ .

2. Tendance quadratique :  $T_t = a + bt + ct^2$ .

3. Tendance polynomiale d'ordre  $q$  :  $T_t = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_qt^q$ .

4. Tendance exponentielle :  $T_t = a + \beta \exp(t)$ .

5. Tendance logistique :  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$T_t = \frac{c}{1 + be^{-at}}.$$

**Les variations saisonnières** ( $S_t$ ) : Le facteur saisonnier, noté  $S_t$ , se répète à intervalles de temps égaux avec une forme à peu près constante. Il peut être dû au rythme des saisons ou à des facteurs humains. Elles sont de nature périodique, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $p$ , appelé période, tel que :

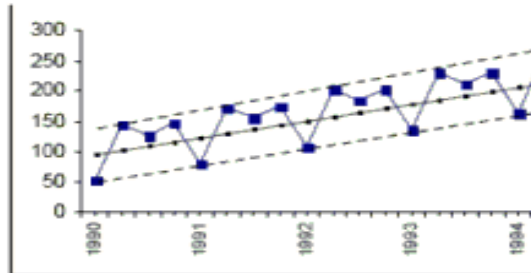


$$S_t = S_{t+p} \text{ pour tout } t \geq 1.$$

**Cycle** ( $C_t$ ) : C'est une succession de mouvement persistant des variations de mouvement ascendant (période de prospérité) et de mouvement descendant (période de dépression). Pour de longues séries, un mouvement cyclique peut se superposer à la tendance.

**Les variations accidentelles ou résiduelles** ( $\zeta_t$ ) : Constitue la partie non expliquée par la tendance, le cycle ou la saisonnalité. Elle résulte de fluctuations irrégulières, en particulier accidentelles, dont le caractère est exceptionnel et imprévisible (catastrophes naturelles, grèves, guerres,...) dues à des facteurs perturbateurs non permanents.

Le graphique suivant présente l'ensemble des composantes précitées



Les composantes de srie chronologique.

### 1.2.1 Schémas de décomposition d'une série chronologique

La technique de décomposition d'une série chronologique, repose sur un modèle qui l'autorise. Ce modèle porte le nom de schéma de décomposition. Il en existe essentiellement trois grands types

### Schéma additif

Dans un modèle additif, on utilise les 4 composantes : tendance, variations saisonnières, composante cyclique et composante résiduelle sont indépendantes les unes des autres. On considère que la série  $X_t$  s'écrit comme la somme de ces 4 composantes :

$$X_t = f_t + C_t + S_t + \varepsilon_t.$$

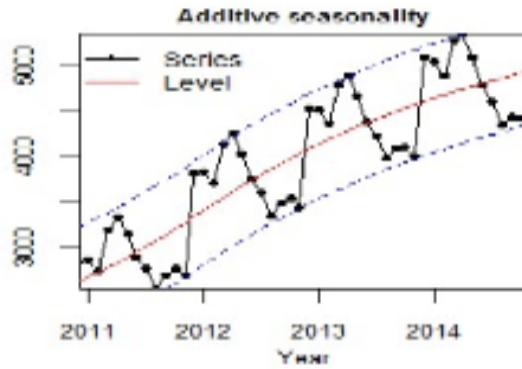


FIG. 1.1 – Schéma additif.

### Schéma multiplicatif

Dans un modèle multiplicatif on utilise aussi les 4 composantes : tendance, variations saisonnières, composante cyclique et composante résiduelle sont indépendantes les unes des autres. On considère que la série  $X_t$  s'écrit comme la produit de ces 4 composantes :

$$X_t = f_t \times C_t \times S_t \times \varepsilon_t.$$

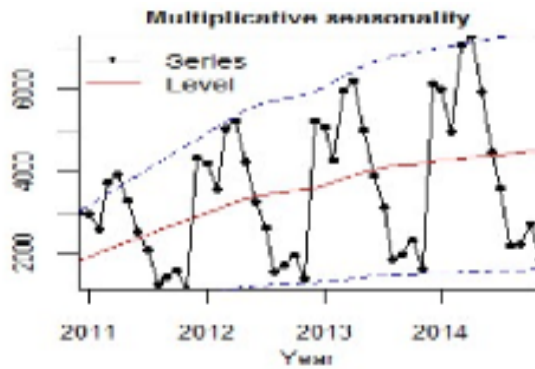


FIG. 1.2 – Schéma multiplicatif.

### Schéma mixte

Dans un modèle mixte on utilise les deux schéma multiplicatif et additif avec les 4 composantes : tendance, variations saisonnières, composante cyclique et composante résiduelle sont indépendantes les unes des autres, on considère que la série  $X_t$  s'écrit comme la produit et la somme de ces 4 composant :

$$\begin{aligned}
X_t &= (f_t + c_t)s_t + \varepsilon_t \\
X_t &= f_t + (c_t \times s_t) + \varepsilon_t \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

## 1.2.2 Deux opérateurs de chronologie

**Définition 1.8 (Opérateur de retard)** *On appelle opérateur retard (et l'on note  $L$ ) l'opérateur qui à une donnée chronologique associe sa valeur précédente dans le temps.*

Il peut s'agir de quantités déterministes. Par exemple, on a

$$Lt = t - 1 \text{ et } Lf(t) = f(t - 1),$$

si  $t$  représente le temps sur l'espace discret  $\mathbb{Z}$ , et  $f$  une fonction déterministe du temps. L'opérateur s'applique aussi sur des quantités aléatoires. En particulier, si  $(X_t)$  est une série chronologique définie sur  $\mathbb{Z}$ , on a

$$L : X_t \rightarrow L(X_t) = LX_t = LX_t = X_{t-1}$$

Avec la convention :  $L^0 = I$  (opérateur identité).

**Remarque 1.4** *L'opérateur  $L$  est linéaire et inversible. Son inverse  $L^{-1} = F$  :*

$$F : X_t \rightarrow F(X_t) = FX_t = X_{t+1}$$

*L'opérateur  $F$  est appelé opérateur avance.*

**Définition 1.9 (Opérateur de différenciation)** *On appelle opérateur différenciation (et l'on note  $\Delta$ ) l'opérateur qui à une donnée chronologique associe la valeur de son dernier incrément dans le temps.*

Reprenant les exemples précédents, on a

$$\Delta t = (1 - L)t = t - (t - 1) = 1 \text{ et } \Delta f(t) = (1 - L)f(t) = f(t) - f(t - 1).$$

De même, pour une série chronologique  $(X_t)$  définie sur  $\mathbb{Z}$ , on a

$$\Delta X_t = (1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$$

On vérifie facilement que l'on a

$$X_t = LX_t + \Delta X_t$$

et donc que l'on a l'équivalence  $\Delta \equiv 1 - L$  en termes d'opérateurs.

### Généralisation

→ Examinons les propriétés de l'opérateur  $L$  :

1.  $La = a$ , l'opérateur d'une constante  $a$  est une constante.
2.  $L^0 X_t = X_t$ .

→ Nous venons de présenter les deux opérateurs à l'ordre 1 : lorsque le retard porte sur la valeur précédente. Cependant, on peut facilement les généraliser à l'ordre  $h$  quelconque. Ainsi, appliqué à la série chronologique  $(X_t)$ , pour tout  $h \geq 1$ , on note

$$L^h X_t = \underbrace{(L \circ L \circ \dots \circ L)}_{h \text{ fois}} X_t = L(L(\dots L X_t \dots)) = X_{t-h}.$$

De même,

$$\Delta^h X_t = (1 - L)^h X_t \text{ et } \Delta^h X_t = (1 - L^h) X_t = X_t - X_{t-h}.$$

Par exemple lorsque  $h = 2$ , on obtient

$$L^2 X_t = X_{t-2}, \text{ et } \Delta^2 X_t = (1 - L^2) X_t = X_t - X_{t-2},$$

et

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_t &= (1 - L)^2 X_t \\ &= (1 - 2L + L^2) X_t \\ &= X_t - 2L X_t + L^2 X_t \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= \Delta(\Delta X_t). \end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Processus autorégressif moyenne mobile intégré

Les processus ARIMA(p,I,q) sont des combinaison de trois types de processus temporels : les processus autorégressifs AR d'ordre p, les processus moyenne mobile MA d'ordre q et les processus intégrés I. Ces différents modèles seront décrits dans ce qui suit. [4], [5], [9], [13], [16], [18], [20], [21], [22], [26].

### 2.1 Les modèles autorégressifs AR(p)

**Définition 2.1** *On dit que la série chronologique  $(X_t)$  définie sur  $\mathbb{Z}$  est un processus autorégressif d'ordre  $p$  si elle est définie, pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  par :*

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Ou

$$\begin{cases} \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc } (\varepsilon_t \sim BB(o, \sigma_\varepsilon^2)), \\ \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, p, \\ \alpha_p \neq 0. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - \dots - \alpha_p X_{t-p} &= \varepsilon_t, \\ (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p) X_t &= \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Si on note par  $\Phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p$  le polynome caractéristique de ce modèle, alors

$$\Phi(L)X_t = \varepsilon_t.$$

### 2.1.1 Stationnarité

Pour qu'un modèle AR(p) soit stationnaire, il faut que toutes les racines du polynome  $\Phi(z)$  sont de module supérieur à 1.

Où

$$\Phi(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p.$$

### 2.1.2 La fonction d'autocovariance

On considère le cas  $\Phi(z)X_t = \varepsilon_t$  avec  $E(X_t) = 0$

$$\gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t, X_{t-h}) \text{ pour } h \geq 1.$$

On a

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$



Si  $h > 0$

$$X_t X_{t-h} = \alpha_1 X_{t-1} X_{t-h} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-h} + \dots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-h} + X_{t-h} \varepsilon_t.$$

Par passage de l'espérance

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= E[\alpha_1 X_{t-1} X_{t-h} + \dots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-h} + X_{t-h} \varepsilon_t] \\ &= \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) + \dots + \alpha_p E(X_{t-p} X_{t-h}) + \underbrace{E(X_{t-h} \varepsilon_t)}_{=0 \text{ car } \varepsilon_t \perp X_{t-h}} \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_X(h-i). \end{aligned}$$

De même façon, on a

$$X_t^2 = \alpha_1 X_t X_{t-1} + \alpha_2 X_t X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_t X_{t-p} + X_t \varepsilon_t.$$

Alors

$$\gamma_X(0) = \alpha_1 \gamma_X(1) + \alpha_2 \gamma_X(2) + \dots + \alpha_p \gamma_X(p) + E(X_t \varepsilon_t).$$

Or

$$\begin{aligned} E(X_t \varepsilon_t) &= \underbrace{E[\alpha_1 \varepsilon_t X_{t-1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_t X_{t-p}]}_{=0 \text{ car } \varepsilon_t \perp (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})} + \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2} \\ &= \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\gamma_X(0) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_X(i) + \sigma_\varepsilon^2.$$

et pour avoir une autre forme de la variance

$$\frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \underbrace{\frac{\gamma_X(i)}{\gamma_X(0)}}_{\varphi_X(i)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)}.$$

Donc

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_X(i)}.$$

### 2.1.3 Fonction d'autocorrélation et système de Yule-walker

D'après les relations précédentes on obtien l'èquation de récurrence :

$$\varphi_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_X(h - i),$$

$$\varphi_X(h) = \alpha_1 \varphi_X(h - 1) + \dots + \alpha_p \varphi_X(h - p).$$

Ces dernières équations sont appelées équations de Yule-walker.

Les équations de Yule-Walker peuvent être écrites :

$$\varphi = R_p \alpha.$$

La forme matricielle est :

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi(p-1) \\ \varphi(1) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi(p-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi(p-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(p-1) & \varphi(p-2) & \varphi(p-3) & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_p \end{pmatrix}.$$

Les solutions de l'équation de récurrence sont complètement déterminées par la donnée de conditions initiales  $\varphi(1), \dots, \varphi(p)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \varphi(1) + \dots + \alpha_p \varphi(p-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(p) = \alpha_1 \varphi(p-1) + \dots + \alpha_{p-1} \varphi(1) + \alpha_p \end{array} \right.$$

## 2.1.4 Fonction d'autocorrélation partielle

On note par  $Q_h = (Q_1, Q_2, \dots, Q_h)$  le vecteur des autocorrélation partielles tel que :

$$Q_h = \frac{\det(R_p^*)}{\det(R_p)}.$$

Où  $R_p^*$  est la matrice  $R_p$  définie précédemment juste en remplaçant la dernière colonne par :  $(\varphi_X(1), \varphi_X(2), \dots, \varphi_X(h))^t$ .

**Proposition 2.1** *Pour un modèle  $AR(p)$  les autocorrélation partielles sont nulle au-delà de rang  $p$ ,  $Q_h = 0$  si  $h > p$ .*

Cette propriété permet d'estimer l'ordre ou le degré  $p$  du modèle  $AR(p)$ .

## 2.1.5 Estimation des paramètres (Estimateurs de Yule-Walker)

A l'aide des observations  $\{X_1, \dots, X_T\}$  de longueur  $T$  qu'elles soit disponibles, d'un processus stationnaire  $X_T$  supposé suivre un modèle  $AR(p)$  :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

On cherche alors à estimer  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ , des paramètres inconnus. Par la méthode basée sur les équations de Yule-Walker, on trouve les paramètres estimés d'après les auto-corrélation estimées.

Auparavant, nous avons vu que :

$$\varphi_X(h) = \alpha_1 \varphi_X(h-1) + \dots + \alpha_p \varphi_X(h-p).$$

En prenant l'équation de Yule-Walker

$$\varphi = R_p \alpha.$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi(0) + \alpha_2\varphi(1) + \dots + \alpha_p\varphi(p-1)\varphi(1) = \varphi(1) & h = 1 \\ \alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(0) + \dots + \alpha_p\varphi(p-2)\varphi(1) = \varphi(2) & h = 2 \\ \vdots \\ \alpha_1\varphi(p-1) + \alpha_2\varphi(p-2) + \dots + \alpha_p\varphi(0) = \varphi(p) & h = p \end{cases}$$

Donc

$$\hat{\alpha} = \hat{R}_p^{-1}\hat{\varphi}.$$

Avec  $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}(i))_{i=1,\dots,p}$  et

$$\hat{R}_p = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\varphi}(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\varphi}(p-1) \\ \hat{\varphi}(1) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\varphi}(p-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\varphi}(p-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\varphi}(p-1) & \hat{\varphi}(p-2) & \hat{\varphi}(p-3) & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors, les estimateurs des paramètres inconnus

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p \end{pmatrix}$$

## 2.1.6 Propriétés d'un AR(1)

Nous dérivons les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation pour un processus AR(1)  $(X_t)$ , en utilisant deux méthodes alternatives. La première méthode est basée sur l'utilisation de l'équation du modèle :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}.$$

On a

$$E(X_s \varepsilon_t) = 0 \quad s < t.$$

La variance est

$$E[X_t^2] = \alpha^2 E[X_{t-1}^2] + 2\alpha E[X_{t-1} \varepsilon_t] + E[\varepsilon_t^2],$$

i.e

$$\gamma_X(0) = \alpha^2 \gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2.$$

Où  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{var}(\varepsilon_t)$ , donc

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2},$$

pour trouver une équation par régressive de  $\gamma_X(h)$ , on a le processus autorégressif d'ordre 1 qui vérifie :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Par passage à l'espérance et avec multiplier le processus par  $X_{t-h}$ , où  $h \geq 1$

$$E[X_t X_{t-h}] = \alpha E[X_{t-1} X_{t-h}] + \underbrace{E[X_{t-h} \varepsilon_t]}_{=0 \text{ car } \tau \geq 1}$$

$$\gamma_X(h) = \alpha \gamma_X(h-1) \quad h \geq 1,$$

c'est à dire

$$\gamma_X(h-1) = \alpha^h \gamma_X(0) \quad h \geq 1.$$

Alors

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2} \alpha^h \quad h \geq 0$$

Rappelant que  $\varphi_X(h) = \gamma_X(h)/\gamma_X(0)$  on obtient

$$\varphi_X(h) = \alpha^h \quad h \geq 0.$$

Une approche alternative pour trouver les expressions de  $\gamma_X(h)$  est basé sur l'utilisation de l'expression de la moyenne mobile infinie :

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(h) &= E(X_t X_{t-h}) \\
 &= E \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=h}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-h-j} \right] \\
 &= E \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=\tau}^{\infty} \alpha^{j-h} \varepsilon_{t-j} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=h}^{\infty} \alpha^{i+j-h} \Xi [\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}] \\
 &= \sum_{j=h}^{\infty} \alpha^{2j-h} \sigma_{\varepsilon}^2.
 \end{aligned}$$

### 2.1.7 La prévision des modèles autorégressifs AR(p)

On suppose que  $X_t$  est un processus stationnaire qui suit un modèle **AR(p)**, c'est à dire s'écrit comme suit :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

avec  $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ .

Le principe est d'après la connaissance les valeurs de processus jusqu'à l'instant  $T$ , c'est à dire de  $X_1, X_2, \dots, X_T$  on cherche à prédire la valeur prise par le processus aux instants  $T+1, T+2, \dots, T+h$ .

La prévision à l'horizon  $h$  est

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} \setminus X_T, X_{T-1}, \dots, X_1)$$

**La prévision à la date  $T+1$**

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} \setminus X_T, \dots, X_2, X_1),$$

alors

$$\hat{X}_{T+1} = \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \dots + \alpha_p X_{T-p+1}.$$

**La prévision à la date  $T + 2$**

$$\hat{X}_{T+2} = \alpha_1 X_{T+1} + \alpha_2 X_T + \dots + \alpha_p X_{T-p+2}.$$

**En générale**

$$\hat{X}_{T+h} = \alpha_1 \hat{X}_{T+h} + \dots + \alpha_p X_{T-p+h}.$$

## 2.2 Les modèles moyennes mobiles MA(q)

**Définition 2.2** On appelle modèle moyenne mobile (Moving Average) d'ordre  $q$ , noté  $MA(q)$ , un processus  $X_t$  qui vérifié :

$$X_t = \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc } (\varepsilon_t \sim BB(o, \sigma_\varepsilon^2)) \\ \beta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, q \\ \beta_q \neq 0 \end{array} \right. .$$

Donc

$$\begin{aligned} X_t &= \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \\ &= (1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q) \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Si on note par  $\Phi(L) = 1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q$  le polynome caractéristique de ce modèle, alors

$$X_t = \Phi(L) \varepsilon_t.$$

### 2.2.1 Stationnarité

La définition d'un MA(q) est explicite et ne pose donc pas de problème : le processus  $X_t$  est parfaitement défini et est automatiquement stationnaire.

### 2.2.2 Les fonction d'autocovariance et d'autocorrelation

Les autocorrélations des modèles MA(q) est :

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= E(X_t X_{t+h}) \\ &= E[(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_p \varepsilon_{t-p})(\varepsilon_{t+h} + \beta_1 \varepsilon_{t+h-1} + \beta_2 \varepsilon_{t+h-2} + \dots \\ &\quad + \beta_q \varepsilon_{t+h-q})].\end{aligned}$$

On a trois cas selon  $h$ . On définit d'abord la règle

$$\Xi(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}.$$

-Si  $h = 0$

$$\gamma_X(h) = (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2) \sigma_\varepsilon^2.$$

-Si  $h \leq q$

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= E(X_t, X_{t+h}) \\ &= E[(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t+h} + \dots + \beta_h \varepsilon_t + \dots + \beta_q \varepsilon_{t+h-q})] \\ &= (\beta_1 + \beta_1 \beta_{h+1} + \beta_2 \beta_{h+2} + \dots + \beta_q \beta_{h+q}) \sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

-Si  $h > q$

$$\gamma_X(h) = 0.$$

Donc la fonction d'autocorrélation est définie comme suit :

$$\varphi_X(h) = \begin{cases} \frac{\beta_1 + \beta_1 \beta_{h+1} + \beta_2 \beta_{h+2} + \dots + \beta_q \beta_{h+q}}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2} & \text{si } h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases}$$



Les autocorrelation  $\varphi(h)$  d'un MA( $q$ ) soit nulles au delà d'ordre  $q$  :

$$\forall h > q : \varphi_X(h) = 0$$

**Remarque 2.1** *Les formules de la fonction d'autocorrélation partielle  $Q_h$  d'un MA( $q$ ) sont compliquées et  $Q_h$  ne s'annule pas au delà de rang  $q$  ( $h > q$ ).*

### 2.2.3 Moyennes mobiles de premier ordre

Dans le cas particulier du processus MA(1) :

$$X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

La fonction d'autocorrélation est donnée par

$$\varphi_X(1) = \frac{\beta}{1 + \beta^2},$$

$$\varphi_X(h) = 0 \quad h \geq 2.$$

Autre écriture du processus  $X_t$  :

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \beta(X_{t-1} - \beta\varepsilon_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t + \beta X_{t-1} - \beta^2(X_{t-2} - \beta\varepsilon_{t-3}) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= \varepsilon_t - \sum_{k=1}^n (-\beta)^k X_{t-k} - (-\beta)^{n+1} \varepsilon_{t-n-1}. \end{aligned}$$

Ici, nous aimerions prendre la limite comme  $n \rightarrow \infty$  dans un sens approprié pour l'équation précédent, on obtient la représentation autorégressive d'ordre infinie de  $X_t$

$$X_t = - \sum_{k=1}^n (-\beta)^k X_{t-k} + \varepsilon_t.$$

## 2.2.4 La prévision des modèles moyennes mobiles MA(q)

Dans ce paragraphe, on suppose  $X_t$  un moyennes mobiles stationnaire, c'est à dire :

$$X_t = \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t,$$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc.

La prévision à la date  $T + 1$

$$\hat{X}_{T+1} = E(X_{T+h} \setminus X_T, X_{T-1}, \dots, X_1).$$

Alors ,

$$\begin{aligned} \hat{X}_{T+1} &= \underbrace{E(\varepsilon_{t+1})}_{=0} + \beta_1 \varepsilon_T + \beta_2 \varepsilon_{T-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{T+1-q} \\ &= \beta_1 \varepsilon_T + \beta_2 \varepsilon_{T-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{T+1-q}. \end{aligned}$$

La prévision à la date  $T + h$

$$\hat{X}_{T+h} = \beta_h \varepsilon_T + \dots + \beta_q \varepsilon_{T+h-q}.$$

## 2.3 Les modèles autoregressif moyenne mobile ARMA(p,q)

Les modèles autoregressif moyenne mobile ARMA(p,q) sont représentatifs de processus générés par une combinaison des valeurs passées et des erreurs passées.

**Définition 2.3** On appelle modèle autoregressif moyenne mobile noté **ARMA(p,q)** tout modèle écrit sous la forme :

$$\begin{cases} X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2). \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) X_t &= (1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q) \varepsilon_t \\ \Phi(L) X_t &= \Psi(L) \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Où  $\alpha_p \neq 0$  et  $\beta_q \neq 0$

### 2.3.1 Stationnarité

Pour que le modèle ARMA(p,q) soit stationnaire, il faut que toutes les racines du polynôme  $\Phi(z)$  sont de module supérieur à 1.

### 2.3.2 Autocorrélation d'un ARMA(p,q)

Dans ce paragraphe, on suppose que  $X_t$  est un processus ARMA(p,q), c'est à dire

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t.$$

La fonction d'autocovariance est

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(h) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t\right) X_{t-h}\right] \\
 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i E(X_{t-i} X_{t-h}) + \sum_{j=1}^q \beta_j E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-h}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) \\
 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_X(h-i) + \sum_{j=1}^q \beta_j \gamma_{X_\varepsilon}(h-i) + \gamma_{X_\varepsilon}(h).
 \end{aligned}$$

Si on note par  $\gamma_{X_\varepsilon}(h) = E(\varepsilon_t X_{t-h})$ , la covariance entre  $\varepsilon_t$  et  $X_{t-h}$

$$\gamma_{X_\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0 & z > 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 & z = 0 \\ \neq 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{X_\varepsilon}(0) &= E(\varepsilon_t X_t) = E\left[\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t\right) \varepsilon_t\right] \\
 &= \underbrace{\alpha_i E\left(\sum_{i=1}^p X_{t-i} \varepsilon_t\right)}_{=0 \text{ car } i>0} + \underbrace{\beta_j E\left(\sum_{j=1}^q \varepsilon_{t-j} \varepsilon_t\right)}_{=0 \text{ car } j>0} + \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} \\
 &= \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

**Exemple 2.1** Dans ce paragraphe, on suppose que  $X_t$  est un processus ARMA(1,1) :

$$X_t = \alpha X_{t-1} - \beta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t,$$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc.

On calcule  $\gamma_X(0)$ ,  $\gamma_X(1)$  et puis  $\varphi_X(1)$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(0) &= \text{cov}(X_t, X_t) \\
 &= E(X_t X_t) - E(X_t)E(X_t) \\
 &= E[(\alpha X_{t-1} - \beta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) X_t] \\
 &= \alpha E(X_{t-1} X_t) - \beta E(\varepsilon_{t-1} X_t) + E(\varepsilon_t X_t) \\
 &= \alpha \gamma_X(1) - \beta \gamma_{X\varepsilon}(-1) + \underbrace{\gamma_{X\varepsilon}(0)}_{=\sigma_\varepsilon^2}.
 \end{aligned}$$

$\gamma_{X\varepsilon}(-1)$  est inconnu :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{X\varepsilon}(-1) &= E(\varepsilon_{t-1} X_t) \\
 &= E((\alpha X_{t-1} - \beta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \varepsilon_{t-1}) \\
 &= \alpha E(X_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \beta E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) \\
 &= \alpha \gamma_{X\varepsilon}(0) - \beta \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= (\alpha - \beta) \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

donc

$$\gamma_X(0) = \alpha \gamma_X(1) - (\beta \alpha - \beta^2 - 1) \sigma_\varepsilon^2.$$

De la même façon pour  $\gamma_X(1)$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(1) &= E[(\alpha X_{t-1} - \beta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-1}] \\
 &= \alpha E(X_{t-1} X_{t-1}) - \beta E(\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) + E(\varepsilon_t X_{t-1}) \\
 &= \alpha \gamma_X(0) - \beta \sigma_\varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= \alpha\gamma_X(1) - (\beta\alpha - \beta^2 - 1)\sigma_\varepsilon^2. \\ \gamma_X(1) &= \alpha\gamma_X(0) - \beta\sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \gamma_X(0) - \alpha\gamma_X(1) = -(\beta\alpha - \beta^2 - 1)\sigma_\varepsilon^2. \\ \gamma_X(1) - \alpha\gamma_X(0) = -\beta\sigma_\varepsilon^2. \end{cases}$$

$$\gamma_X(0) = \frac{(-2\alpha\beta + \beta^2 + 1)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2},$$

et

$$\gamma_X(1) = \frac{(-2\alpha\beta + \beta^2 + 1)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2} - \beta\sigma_\varepsilon^2.$$

On déduit  $\varphi_X(1)$

$$\varphi_X(1) = \frac{(-2\alpha\beta + \beta^2 + 1) - \beta(1 - \alpha^2)}{(-2\alpha\beta + \beta^2 + 1)}.$$

### 2.3.3 Prédiction dans le modèle ARMA(p,q)

Soit  $X_t \sim ARMA(p, q)$  :

$$\Phi(L)X_t = \Psi(L)\varepsilon_t,$$

alors

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

et donc

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t+h-j} + \varepsilon_{t+h}$$

pour  $h = 1$  la prévision d'un processus ARMA(p,q) est

$$\begin{aligned}\hat{X}_{T+1} &= E(X_{T+1}/X_T, X_{T-1}, \dots, X_1) \\ &= \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \dots + \alpha_p X_{T+1-p} + \beta_1 \varepsilon_T + \beta_2 \varepsilon_{T-1} + \dots + E(\varepsilon_{T+1}) \\ &= \alpha_1 X_T + \dots + \alpha_p X_{T+1-p} + \beta_1 \varepsilon_T + \dots + \beta_q \varepsilon_{T+1-q}.\end{aligned}$$

pour  $h = 2$  la prévision d'un processus ARMA(p,q) est

$$\begin{aligned}\hat{X}_{T+2} &= \Xi(X_{T+2}/X_T, X_{T-1}, \dots, X_1) \\ &= \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \alpha_2 X_T + \dots + \alpha_p X_{T+2-p} + \beta_1 E(\varepsilon_{T+1}) + \beta_2 \varepsilon_T + \dots + E(\varepsilon_{T+2}) \\ &= \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \alpha_2 X_T + \dots + \alpha_p X_{T+2-p} + \beta_2 \varepsilon_T + \dots + \beta_q \varepsilon_{T+2-q}.\end{aligned}$$

En générale, si  $h > q$

$$X_{T+h}^{\hat{}} = \alpha_1 \hat{X}_{T+h-1} + \dots + \alpha_p \hat{X}_{T+h-p}.$$

## 2.4 Modèle autorégressif moyenne mobile intégré ARIMA(p,d,q)

**Définition 2.4**  $X_t$  est un modèle autorégressif moyenne mobile intégré stationnaire s'il admet la représentation :

$$\begin{aligned}\Phi(L)(1-L)^d X_t &= \Psi(L)\varepsilon_t, \\ \Phi(L)\Delta^d X_t &= \Psi(L)\varepsilon_t.\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\Phi(L) &= 1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p \\ \Psi(L) &= 1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q\end{aligned}$$

### 2.4.1 Prévisions des processus ARIMA(p,d,q)

On considérons ici  $(X_t)$  satisfaisant une équation de la forme :

$$\Phi(L)(1-L)^d X_t = \Psi(L)\varepsilon_t.$$

Posons alors  $\Psi(L) = \Phi(L)(1-L)^d$  alors :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

et donc

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i X_{t+h-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t+h-j} + \varepsilon_t.$$

La prévision à la date  $T+h$  est

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h}/X_T, X_{T-1}, \dots, X_1).$$

Alors

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i \hat{X}_{T+h-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \hat{\varepsilon}_{T+h-j} + 0.$$

Ou

$$\hat{\varepsilon}_{T+h-j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j < h \\ \varepsilon_{T+h-j} & \text{pour } j \geq h \end{cases}.$$

En particulier, pour  $h \geq q$  on obtient une relation de récurrence de la forme :

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \Psi_i \hat{X}_{T+h-i}.$$



# Chapitre 3

## Prédiction par la méthode de filtre de kalman

Nous décrivons dans cette partie quelques principes de base de la théorie de la prévision d'une variable aléatoire  $X$  par la mesure ou l'observation d'une autre variable aléatoire : l'estimation au sens des moindres carrés qui conduit à la construction de l'estimateur linéaire optimal au sens des moindres carrés et à l'estimateur linéaire optimal récursif au sens des moindres carrés. [1], [2], [10], [11], [14], [19], [24], [27], [28].

### 3.1 Estimation au sens des moindres carrés

Les variables considérées sont vectorielles et nous distinguerons la variable aléatoire (en lettre majuscule) de sa réalisation (en lettre minuscule).

**Définition 3.1** *Soit  $x$  une réalisation de la variable aléatoire réelle*

$X$ , l'estimation  $\hat{x}$  de la réalisation  $x$  au sens des moindres carrés doit satisfaire le critère d'optimalité suivant :

$$E[\|X - \hat{x}\|^2] \leq E[\|X - l\|^2] \text{ pour tout réel } l.$$

Nous allons maintenant posée une question plus compliquer : étant données deux variables aléatoire  $X$  et  $Y$ , le problème sera d'estimer la réalisation  $x$  de la variable  $X$  à partir d'une information  $y$  est une réalisation de la variable aléatoire  $Y$ , et la condition sera que les deux variables sont liées .

### 3.1.1 Problème

Soient deux vecteurs aléatoires  $X$  et  $Y$  liés de dimension  $n$  et  $m$  respectivement et de densité conjointe  $f_{X,Y}$ . Étant donnée une réalisation  $y$  du vecteur aléatoire  $Y$ , on va chercher une estimation  $\hat{x}$  de la réalisation correspondante  $x$  de  $X$  vérifiant :

$$E[\|X - \hat{x}\|^2 | Y = y] \leq E[\|X - l\|^2 | Y = y],$$

pour tout vecteur  $l \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.1** *L'estimation  $\hat{x}$  de la réalisation  $x$  de  $X$  à partir de l'information  $Y = y$  qui vérifie l'inégalité du problème précédent est donnée par l'espérance conditionnelle :*

$$\hat{x} = E(X|Y = y).$$

**Remarque 3.1** *L'estimation  $\hat{x}$  est appelée estimation au sens des moindres carrés de  $x$ .*

Nous définissons maintenant l'estimateur d'un vecteur aléatoire  $X$  à partir de l'observation d'un autre vecteur aléatoire  $Y$ .

**Définition 3.2**  $\hat{X}(Y)$  peut être vu comme un opérateur de prédiction qui prend comme valeur d'entrée une observation de  $Y$  et donne la valeur prédite  $\hat{x}$  de  $X$ . D'après la construction de  $\hat{X}(Y)$  et pour toute fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  on a :

$$E[\| X - \hat{X}(Y) \|^2 | Y = y] \leq E[\| X - g(Y) \|^2 | Y = y].$$

Or on a :

$$E^Y [\| X - g(Y) \|^2 | Y = y] = E[\| X - g(Y) \|^2].$$

Alors

$$E[\| X - \hat{X}(Y) \|^2] \leq E[\| X - g(Y) \|^2].$$

ce qui implique que l'estimateur construit  $\hat{X}(Y)$  satisfait le critère d'optimalité suivant :

$$E^{X,Y} [\| X - \hat{X}(Y) \|^2] \leq E^{X,Y} [\| X - g(Y) \|^2],$$

$\hat{X}(Y)$  est appelé estimateur au sens des moindres carrés, ou bien l'estimateur sans biais de variance minimale, de  $X$  étant donnée une observation de  $Y$ .

**Remarque 3.2** L'estimation  $\hat{x} = E(X|Y = y)$  est en fait une réalisation du vecteur aléatoire  $\hat{X}(Y) = E(X|Y)$ , c'est à dire un estimateur de  $X$  à partir de l'observation  $Y$  est un vecteur aléatoire noté  $\hat{X}(Y)$ . Pour chaque observation  $y$  de  $Y$ ,  $\hat{x} = \hat{X}(y)$  est appelée une estimation de  $X$ .

Puisque l'estimateur  $\hat{X}(y)$  est donnée par l'espérance conditionnelle, alors il est :

1. sans biais, c'est-à-dire

$$E(\hat{X}(y)) = E(X).$$

2. linéaire, c'est-à-dire pour toute matrice  $B \in M_m(\mathbb{R})$  et tout vecteur  $c \in \mathbb{R}^m$  on a :

$$E(BX + c/Y) = BE(X/Y) + c.$$

## 3.2 Estimateur linéaire optimal

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de trouver une solution au même problème de la section précédent en imposant la linéarité de l'estimateur. Plus précisément si  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs aléatoires liés, on va construire l'estimateur linéaire optimal  $E^*$  de  $X$  en fonction de  $Y$  :

$$E^*(X/Y) = B_0X + C_0,$$

minimisant la variance de l'erreur d'estimation

$$E(\| X - B_0X + C_0 \|^2),$$

avec  $B_0$  et  $C_0$  sont des matrices réelles (déterministes) de tailles convenables.

**Définition 3.3** *la matrices de covariances de  $X$  et  $Y$  qui sont deux vecteurs aléatoires est définie par :*

$$\begin{aligned} E \left[ (X - m_X)(X - m_X)^T \right] &= P_{XX} \\ E \left[ (X - m_X)(X - m_Y)^T \right] &= P_{XY} \\ E \left[ (X - m_Y)(X - m_Y)^T \right] &= P_{YY} \end{aligned}$$

Où  $E(X) = u_X$  et  $E(Y) = u_Y$ .

**Proposition 3.1** *Si nous supposons de plus que  $P_{YY}$  est inversible, alors l'estimateur linéaire optimal de  $X$  en fonction de  $Y$  est*

$$E^*(X/Y) = m_X + P_{XY}P_{YY}^{-1}(Y - m_Y),$$

et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est

$$E[(X - E^*(X/Y))(X - E^*(X/Y))^T] = P_{XX} - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{XY}^T.$$

**Lemme 3.1** *L'estimateur  $E^*(X/Y)$  possède les propriétés suivantes :*

1. *sans biais , c'est-à-dire*

$$E(E^*(X/Y)) = E(X).$$

2. *l'estimeur optimal linéaire est linéaire c'est-à-dire vérifie pour toute matrice déterministe  $M$  de  $M_n(\mathbb{R})$  et tout vecteur déterministe  $b$*

$$E^*(MX + b \setminus Y) = ME^*(X/Y) + b.$$

3. *possède un erreur  $(X - E^*(X \setminus Y))$  décorrélée avec l'observation  $Y$*

$$E(X - E^*(X \setminus Y))Y^T = 0.$$

### 3.3 Estimateur linéaire optimal et récursif

Dans cette section on va définir l'estimateur linéaire optimale d'une variable aléatoire  $X$  à partir d'une suite de variable aléatoire  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  de façon récursive.

### 3.3.1 Vecteurs aléatoires décorrelés

**Définition 3.4** *l'estimateur linéaire optimal et récursif de  $X$  un variable aléatoire à partir de deux variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  qui sont décorrelés est :*

$$E^*\{X/Y, Z\} = E^*\{X/Y\} + E^*\{X_{|Y}^{\sim}/Z\}$$

Où

$$X_{|Y}^{\sim} = X - E^*\{X/Y\}$$

**Définition 3.5** *La matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $X_{|Y,Z}^{\sim} = X - E^*\{X/Y, Z\}$  est donnée par*

$$\begin{aligned} P_{X_{|Y,Z}^{\sim}, X_{|Y,Z}^{\sim}} &= E(X_{|Y,Z}^{\sim}, X_{|Y,Z}^{\sim}) \\ &= P_{XX} - P_{XY}P_{YY}^{-1}P_{XY}^T - P_{XZ}P_{ZZ}^{-1}P_{XZ}^T. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Vecteurs aléatoires corrélés

**Proposition 3.2** *Soient  $X, Y$  et  $Z$  des vecteurs aléatoires tels que  $Y$  et  $Z$  sont possiblement corrélés. Alors*

$$E^*\{X/Y, Z\} = E^*\{X/Y, Z_{|Y}^{\sim}\}$$

Avec  $Z_{|Y}^{\sim} = Z - E^*\{Z/Y\}$ .

**Définition 3.6** *Soient  $X, Y$  et  $Z$  des vecteurs aléatoires tels que  $Y$  et  $Z$  sont corrélés. L'estimateur linéaire optimal de  $X$  à partir de  $Y$  et  $Z$  est*

$$E^*\{X/Y, Z\} = E^*\{X/Y\} + E^*\{X_{|Y}^{\sim}/Z_{|Y}^{\sim}\}$$

Avec  $X_{|Y}^{\sim} = X - E^*\{X/Y\}$  et  $Z_{|Y}^{\sim} = Z - E^*\{X/Z\}$ .

**Définition 3.7** la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $X_{|Y,Z}^{\sim}$  est donnée par

$$\begin{aligned} P_{X_{|Y,Z}^{\sim} X_{|Y,Z}^{\sim}} &= E(X_{|Y,Z}^{\sim}, X_{|Y,Z}^{\sim}) \\ &= P_{X_{|Y}^{\sim} X_{|Y,Z}^{\sim}} - P_{X_{|Y}^{\sim} Z_{|Y}^{\sim}} P_{Z_{|Y}^{\sim} Z_{|Y}^{\sim}}^{-1} P_{Z_{|Y}^{\sim} X_{|Y}^{\sim}}^T \end{aligned}$$

**Proposition 3.3** Soient  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_{k+1}$  des vecteurs aléatoires, alors l'estimateur linéaire optimal de  $X$  à partir de la suite des vecteurs aléatoires  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_{k+1}$  est donné par :

$$\hat{X}_{|k+1} = \hat{X}_{|k} + E^*\{X_{|k}^{\sim}/Y_{k+1|k}^{\sim}\},$$

avec

$$\begin{aligned} X_{|k}^{\sim} &= X - \hat{X}_{|k} = X - E^*\{X/Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}, \\ Y_{k+1|k}^{\sim} &= Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} = Y_{k+1} - E^*\{Y_{k+1}/Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}. \end{aligned}$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $X_{|k+1}^{\sim}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{X_{|k+1}^{\sim} X_{|k+1}^{\sim}} &= \Xi(X_{|k+1}^{\sim}, X_{|k+1}^{\sim}) \\ &= P_{X_{|k}^{\sim} X_{|k}^{\sim}} - P_{X_{|k}^{\sim} Y_{k+1|k}^{\sim}} P_{Y_{k+1|k}^{\sim} Y_{k+1|k}^{\sim}}^{-1} P_{Y_{k+1|k}^{\sim} X_{|k}^{\sim}}^T. \end{aligned}$$

## 3.4 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. L'objectif sera de déterminer une estimation optimale et récursive des états  $X_k$  à partir des mesures  $Y_k$ . En effet, pour ces problèmes, nous disposons à l'instant  $k$  d'une suite  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k$  d'observations. Chaque observation  $Y_k$  est reliée à l'état inconnu  $X_k$ , un modèle d'état est constitué de deux équations :

- L'équation récursive de modélisation du processus aléatoire  $X_t$  (vecteur d'état) discret, dite équation d'état ou équation de transition.
- L'équation d'observation (ou équation de mesure) du processus  $Y_t$  (vecteur de mesure).

### 3.4.1 Position du problème

Les équations de base du filtre de Kalman sont alors les suivantes :

$$(F^{n,m}) \begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k & (\text{équation d'état}), \\ Y_k = H_k X_k + V_k & (\text{équation d'observation}). \end{cases}$$

où

- $X_k$  est le vecteur d'état du processus, de taille  $n \times 1$ , tel que l'état initial  $X_0$  du processus est d'espérance et de variance connues.
- $A_k, B_k$  et  $H_k$  sont des matrices réelles aux dimensions appropriées.
- $Y_k$  est le vecteur d'observation à l'instant  $k$ , de taille  $m \times 1$ .
- $U_k$  est le vecteur des entrées déterministes et connues, de taille  $n \times 1$ .
- $W_k$  est un bruit blanc qui modélise l'erreur du processus, de taille  $n \times 1$ , de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q_t$ .
- $V_k$  est un bruit blanc qui modélise l'erreur d'observation, de taille  $m \times 1$ , de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R_t$ .

Dans la suite en posant :

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Nous noterons :

- $E(W_k W_i^T) = Q_t \delta_{ik}$
- $E(V_k V_i^T) = R_t \delta_{ik}$
- $E(W_k V_i^T) = 0 \quad \forall k, i \in \mathbb{N}$   $W_t$  et non corrélée avec  $V_i$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$



### 3.4.2 Equations du filtre

**Initialisation** : L'application des formules récurrentes du filtre de Kalman nécessite le bon choix des valeurs initiales du vecteur d'état  $\hat{X}_0$  et sa matrice de covariance  $P_0$ . On peut l'estimer  $X_0$  par son espérance. Nous avons alors :

$$\hat{X}_0 = E(X_0),$$

et la matrice de covariance de l'erreur est :

$$P_0 = E \left[ (X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0) \right].$$

Notez que si nous connaissons parfaitement l'état de départ du système nous prenons  $\hat{X}_0 = X_0$  et dans ce cas  $P_0$  est nulle.

**Étape de prédiction** : à l'instant  $k$  nous disposons d'une estimation initiale fondée sur la connaissance du processus et des observations  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{k-1}$ . Nous chercherons un estimateur  $\hat{X}_{k|k-1}$  de  $X_t$  en utilisant uniquement l'équation d'état dans le système  $(F^{n,m})$ . Nous obtenons :

$$\hat{X}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{X}_{k-1|k-1} + B_{k-1}U_{k-1},$$

ainsi que la matrice de covariance de l'erreur :

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= E(\tilde{X}_{k|k-1}\tilde{X}_{k|k-1}) \\ &= E[(X_k - \hat{X}_{k|k-1})(X_k - \hat{X}_{k|k-1})] \\ &= A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1}. \end{aligned}$$

**Étape de correction** : Nous allons maintenant utiliser l'observation  $Y_k$  pour améliorer l'estimation  $\hat{X}_{k|k-1}$  et obtenir un nouvel estimateur  $\hat{X}_{k|k}$  de  $X_k$ , d'après la dernière proposition que nous avons vu

dans la section précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k\setminus k} &= \hat{X}_{k\setminus k-1} + E(X_{k|k-1}^{\sim}/Y_{k|k-1}^{\sim}) \\ &= \hat{X}_{k\setminus k-1} + P_{X_{k|k-1}^{\sim}|Y_{k|k-1}^{\sim}} P_{Y_{k|k-1}^{\sim}|Y_{k|k-1}^{\sim}}^{-1} (Y_k - \hat{Y}_{k|k-1})\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}P_{X_{k|k-1}^{\sim}|Y_{k|k-1}^{\sim}} &= E(X_{k|k-1}^{\sim} Y_{k|k-1}^{\sim}) \\ &= E[(H_k X_{k|k-1}^{\sim} + V_k) X_{k|k-1}^{\sim}] \\ &= P_{k|k-1} H_k^T,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}P_{Y_{k|k-1}^{\sim}|Y_{k|k-1}^{\sim}}^{-1} &= E[Y_{k|k-1}^{\sim} Y_{k|k-1}^{\sim}]^{-1} \\ &= E[(H_k X_{k|k-1}^{\sim} + V_k)(H_k X_{k|k-1}^{\sim} + V_k)]^{-1} \\ &= (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1},\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\hat{X}_{k\setminus k} = \hat{X}_{k\setminus k-1} + K_k (Y_k - \hat{Y}_{k|k-1})$$

où  $K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$  est appelé le gain du filtre de Kalman.

ainsi que la matrice de covariance de l'erreur :

$$P_{k|k} = E \left[ (X_k - \hat{X}_{k\setminus k})(X_k - \hat{X}_{k\setminus k}) \right],$$

où

$$\begin{aligned}X_k - \hat{X}_{k\setminus k} &= X_k - \hat{X}_{k\setminus k-1} - K_k (Y_k - \hat{Y}_{k|k-1}) \\ &= X_{k|k-1}^{\sim} - K_k (Y_{k|k-1}^{\sim}).\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
P_{k|k} &= P_{k|k-1} - E(\tilde{X}_{k|k-1} \tilde{Y}_{k|k-1}^T) K_k^T - K_k E(\tilde{Y}_{k|k-1} \tilde{X}_{k|k-1}^T) \\
&\quad + K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k) K_k^T \\
&= P_{k|k-1} - K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} K_k^T \\
&= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} P_{k|k-1} H_k \\
&= [I_n - K_k H_k] P_{k|k-1}.
\end{aligned}$$

### 3.4.3 Algorithme

En résumé l'algorithme proposé est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\hat{X}_0 = E(X_0) \\
P_{0|0} = P_0 \\
\text{Pour } k = 1, 2, 3... \text{ faire} \\
\hat{X}_{k|k-1} = A_{k-1} \hat{X}_{k-1|k-1} + B_{k-1} U_{k-1} \\
P_{k|k-1} = A_{k-1} P_{k-1|k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \\
P_{k|k} = [I_n - K_k H_k] P_{k|k-1} \\
\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + K_k (Y_k - \hat{Y}_{k|k-1})
\end{array} \right. .$$

## 3.5 Application de la méthode de filtre de kalman sur données réelles

Nous intéressons à appliquer la méthode de filtre de kalman sur des données réelles notées "cancerpouments" telles sont le nombre de cas de cancer des pouments de l'hopital Boudiaf de Ouargla, les données considérées sont mensuelles et la période retenue pour l'étude est de janvier 2017 à décembre 2022. Les données sont dans le tableau :

Mois/Années	2017	2018	2019	2020	2021	2022
<b>Jan</b>	127	130	111	162	169	142
<b>Fév</b>	123	133	136	115	177	182
<b>Mars</b>	145	134	140	122	171	160
<b>Avr</b>	126	143	104	243	153	168
<b>Mai</b>	132	133	83	131	155	161
<b>Jui</b>	161	144	82	127	136	147
<b>Juil</b>	161	117	75	132	164	148
<b>Aou</b>	168	120	74	101	112	127
<b>Sep</b>	125	138	70	109	107	137
<b>Oct</b>	147	127	113	125	144	180
<b>Nov</b>	163	143	124	136	149	169
<b>Dec</b>	118	131	130	134	156	164

TAB. 3.1 – L'évolutions du nombre de cas de cancer de poumons de l'hopital Boudiaf de Ouargla ( 2017 - 2022 ).

**sous R**

```
>cancerpouments<-read.table(file.choose(),header=TRUE)
>x<-ts(cancerpouments$X,frequency=12,start=c(2017,1),end=c(2022,12))
```

### 3.5.1 Etude de la stationnarité

Le graphe de la série de cancer de poumons montre que la série est non stationnaire :

```
>plot(x)
```

Null Hypothesis: PALUDISME has a unit root				
Exogenous: None				
Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)				
			t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>				
Test critical values:			-0.757272	0.3741
1% level			-2.659769	
5% level			-1.951409	
10% level			-1.606610	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 18				
<b>Augmented Dickey-Fuller Test Equation</b>				
Dependent Variable: D(PALUDISME)				
Method: Least Squares				
Date: 05/28/22 Time: 21:25				
Sample (adjusted): 2004 2021				
Included observations: 18 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PALUDISME(-1)	-0.085310	0.112654	-0.757272	0.4614
D(PALUDISME(-1))	-0.475095	0.179195	-2.651259	0.0190
D(PALUDISME(-2))	0.064474	0.172956	0.372774	0.7149
D(PALUDISME(-3))	0.651440	0.172117	3.784876	0.0020
R-squared	0.655247	Mean dependent var		0.656667
Adjusted R-squared	0.581371	S.D. dependent var		7.798944
S.E. of regression	5.046034	Akaike info criterion		6.288212
Sum squared resid	356.4745	Schwarz criterion		6.466073
Log likelihood	-52.41391	Hannan-Quinn criter.		6.295495
Durbin-Watson stat	1.751349			

FIG. 3.1 – Graphique de l'évolutions du nombre de cas de cancer de poumons de l'hopital Boudiaf de Ouargla ( 2017- 2022).

On utilise aussi le test de racine unitaire (test PP) sous R pour confirmer la non stationnarité :

```
>pp.test(cancerpomont$X,alternative="stationnary")
```

Le résultat de p-value=0.01609 et d'après Phillips Perron 0,01609>0,01 la série n'est pas stationnaire.

### 3.5.2 Stationnarisation

Pour rendre la série stationnaire nous utilisons l'instruction de différence sur R

```
>x<-ts(cancerpomont$X,frequency=12,start=c(2017,1),end=c(2022,12))
>x1<-diff(x)
>pp.test(x1,alternative="stationnary")
```

La p-value=0.01et d'après Phillips Perron la série est stationnaire.

Null Hypothesis: DPALUDISME has a unit root  
Exogenous: Constant  
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)

	t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>	<b>-2.299028</b>	<b>0.1826</b>
Test critical values:		
1% level	-3.857386	
5% level	-3.040391	
10% level	-2.660551	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.  
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations  
and may not be accurate for a sample size of 18

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
Dependent Variable: D(DPALUDISME)  
Method: Least Squares  
Date: 05/29/22 Time: 22:06  
Sample (adjusted): 2004 2021  
Included observations: 18 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DPALUDISME(-1)	-0.842574	0.366492	-2.299028	0.0374
D(DPALUDISME(-1))	-0.685297	0.281521	-2.434266	0.0289
DD(DPALUDISME(-2))	-0.533530	0.170775	-3.710325	0.0023
C	0.786219	1.199203	0.655618	0.5227

R-squared	0.891771	Mean dependent var	0.500000
Adjusted R-squared	0.866579	S.D. dependent var	13.99844
S.E. of regression	5.071055	Akaike info criterion	6.278117
Sum squared resid	350.0226	Schwarz criterion	6.475977
Log likelihood	-52.50305	Hannan-Quinn criter.	6.305399
F-statistic	38.45192	Durbin-Watson stat	1.855955
Prob(F-statistic)	0.000001		

FIG. 3.2 – Graphique après transformer la série.

### 3.5.3 Le modèle de notre série chronologique

```
>auto.arima(x1,ic="aic",trace=TRUE)
```

Les résultats sont

Modèles	AIC
ARIMA(2,1,2)	622,1031
ARIMA(0,1,0)	626,9511
ARIMA(1,1,0)	625,565
ARIMA(0,1,1)	622,589
ARIMA(0,1,0)	624,9725
ARIMA(1,1,2)	621,4254
ARIMA(0,1,2)	619,4261
ARIMA(0,1,3)	621,426
ARIMA(1,1,1)	619,5321
ARIMA(1,1,3)	623,1506
ARIMA(0,1,2)	617,5619
ARIMA(0,1,1)	620,644
ARIMA(1,1,2)	619,56
ARIMA(0,1,3)	619,5616
ARIMA(1,1,1)	617,7637
ARIMA(1,1,3)	621,2691

TAB. 3.2 – Modèles et AIC de la série.

Le modèle ARIMA(0,1,2) a la plus basse AIC, alors

$$(1 - L)^1 \text{cancerpomont}_t = \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t.$$

### 3.5.4 Estimation des paramètres du modèle ARIMA(0,1,2)

Les paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont inconnus jusqu'à cette partie, pour retrouver ses valeurs :

```
>auto.arima(x1)
```

Finalement, le modèle est défini selon l'équation :

$$(1 - L)^1 \text{cancerpomont}_t = -0.3185\varepsilon_{t-1} + -0.3644\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t.$$

	<b>ma1</b>	<b>ma2</b>
<b>paramètres</b>	-0.3185	-0.3644
<b>s.e</b>	0.1238	0.1347

TAB. 3.3 – Estimation des paramètres.

### 3.5.5 Les entrées de l'équations de base du Filtre de Kalman sous R

$$(F^{n,m}) \begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k & (\text{équation d'état}) \\ Y_k = H_k X_k + V_k & (\text{équation d'observation}) \end{cases}$$

```

n<-100
ar1 <- 0
ar2 <- 0
ma1 <- -0.3561
ma2<-0.3444
sigma <- sqrt(320.1)
a <- arima.sim(model = list(ar = c(ar1, ar2), ma = c(ma1,ma2)),
n = n,
  innov = rnorm(n) * sigma)
arma2lss <- fonction(ar1, ar2, ma1, sigma) {
  At <- matrix(c(ar1, ar2, 1, 0), ncol = 2)
  Ht <- matrix(c(1, 0), ncol = 2)
  ct <- matrix(0)
  BU <- matrix(0, nrow = 2)
  QQt <- matrix(0)
  R <- matrix(c(1, ma1), nrow = 2) * sigma
  RRt <- R %*% t(R)
  a0 <- c(0, 0)
  P0 <- matrix(1e6, nrow = 2, ncol = 2)

```



```

return(list(a0 = a0, P0 = P0, ct = ct, dt = dt, Ht = Ht, At = At,
QQt = QQt,
RRt = RRt))
}

```

## 3.6 La prévision

### Les étapes

- Installer package TSpred .
- Diviser data (cancerpomont) en deux parties : (cencar.cont) qui contient les valeurs des 7 premiers mois de chaque année .et (cencar) qui contient les valeurs des derniers mois de chaque année.
- Faire la prévision avec utiliser l'instruction fittestPolyRKF.
- Tracer le graphique.

### Algorithme

```

cencar.cont<-read.table(file.choose(),header=TRUE)
cencar<-read.table(file.choose(),header=TRUE)
fPolyRKF <- fittestPolyRKF(cencar[,1],cencar.cont[,1])
pred <- fPolyRKF$pred
fs <- KFAS : :KFS(fPolyRKF$model,filtering=c("state","mean"),
smoothing=c("state","mean"))
f <- fitted(fs, filtered = TRUE)
s <- fitted(fs)
plot(c(cencar[,1],cencar.cont[,1]),type='o',lwd=2,xlim=c(1,12),ylim=c(0,300),
xlab="Time",ylab="PRKF")
lines(s,col='green',lty=2,lwd=2)
lines(ts(pred$mean,start=6),lwd=2,col='blue')
lines(ts(pred$upper,start=6),lwd=2,col='light blue')
lines(ts(pred$lower,start=6),lwd=2,col='light blue')

```

Nous obtenons les intervalles de prévision suivants avec les observations disponible .

	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai
<b>Prévision 2023</b>	[115,180]	[101,194]	[91,204]	[82,213]	[74,221]

Tab. 3.4 – Prévisions

Null Hypothesis: DPALUDISME has a unit root				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)				
			t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>			<b>-0.446291</b>	<b>0.9762</b>
Test critical values:				
	1% level		-4.571559	
	5% level		-3.690814	
	10% level		-3.285909	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 18				
<b>Augmented Dickey-Fuller Test Equation</b>				
Dependent Variable: D(DPALUDISME)				
Method: Least Squares				
Date: 05/28/22 Time: 22:14				
Sample (adjusted): 2004 2021				
Included observations: 18 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DPALUDISME(-1)	-0.257153	0.598529	-0.446291	0.6527
D(DPALUDISME(-1))	-1.120673	0.455459	-2.460536	0.0286
D(DPALUDISME(-2))	-0.861225	0.252904	-3.405345	0.0047
C	5.664909	5.021469	1.327283	0.2073
@TREND("2000")	-0.452094	0.383578	-1.204450	0.2499
R-squared	0.902637	Mean dependent var		0.500000
Adjusted R-squared	0.872679	S.D. dependent var		13.98944
S.E. of regression	4.991374	Akaike info criterion		6.283433
Sum squared resid	323.8796	Schwarz criterion		6.530758
Log likelihood	-51.55089	Hannan-Quinn criter.		6.317536
F-statistic	30.13007	Durbin-Watson stat		2.170227
Prob(F-statistic)	0.000002			

FIG. 3.3 – Grafique de prévision.

# Conclusion

Le filtre de Kalman est une méthode récursive visant à estimer des paramètres d'un système évoluant dans le temps.

La force de ce filtre est sa capacité de prédiction des paramètres et de rectification des erreurs, non seulement des mesures, mais aussi du modèle lui-même.

En conclusion, pour appliquer un filtre de Kalman, il faut modéliser de manière linéaire le système pour lequel on veut estimer les paramètres. Dans une méthode d'estimation classique (par exemple, la méthode des moindres carrés), une simple erreur dans la modélisation du système entraîne forcément une erreur au niveau de l'estimation.

# Bibliographie

- [1] Alazard, D. (2006). Introduction au filtre de Kalman. Notes de cours Exercices corrigées Sessions Matlab2006-version2.
- [2] Belmahdi, F. (2015). Application du filtre de Kalman pour le débruitage des signaux Doctoral dissertation, Université Mouloud Mammeri..
- [3] Bigot, J. (2017). Séries chronologiques. Licence, 3, 2016-2017.
- [4] Boukharouba, K., & Kettab, A. (2016). Comparison of prediction performances between Box–Jenkins and Kalman filter models–Case of annual and monthly streamflows in Algeria. *Desalination and Water Treatment*, 57(36), 17095-17103
- [5] Boukhris, M. (2020). Prévisions par l'utilisation des modèles SARIMA (Nombre des naissances à l'hôpital de Sidi Abdelkader de Ouargla). Thèse de mastère, univesité kasdi merbah ouargla.
- [6] Cryer, J. D., & Kellet, N. (1991). Time series analysis. Royal Victorian Institute for the Blind. Tertiary Resource Service.
- [7] Desbois, D. (2005). Une introduction à la méthodologie de Box et Jenkins : l'utilisation de modèles ARIMA avec SPSS. *La revue MODULAD*, (33).
- [8] Delignières, D. (2000). Séries temporelles–Modèles ARIMA. Séminaire EA" Sport–Performance–Santé.

- [9] Dauxois, J. Y. (2017). Introduction à l'étude des Séries Temporelles. INSA Toulouse [https://perso.math.univ-toulouse.fr/jydauxoi/files/2017/04/poly\\_eleves.pdf](https://perso.math.univ-toulouse.fr/jydauxoi/files/2017/04/poly_eleves.pdf).
- [10] Diday, E. (1971). Une nouvelle méthode en classification automatique et reconnaissance des formes la méthode des nuées dynamiques. *Revue de statistique appliquée*, 19(2), 19-33.
- [11] Dahmani, M. (2012). Application du filtre de Kalman linéaire et non linéaire et ses dérivées à la poursuite d'une cible manoeuvrante, doctoral dissertation, usto.
- [12] Enders, W. (2015). *Applied econometric time series fourth edition*. New York (US) : University of Alabama.
- [13] Eilstein, D., Le Tertre, A., Zeghnoun, A., Cassadou, S., Filleul, L., Pascal, L., & Quénel, P. (2003). *Séries temporelles et modèles de régression*. Rapport technique, Institut de veille sanitaire. Département santé environnement.
- [14] Ferahtia, A. (2021). SURFACE WATER QUALITY ASSESSMENT IN SEMI-ARID REGION (EL HODNA WATERSHED, ALGERIA) BASED ON WATER QUALITY INDEX (WQI). <https://www.researchgate.net/publication/350567414>
- [15] Hamisultane, H. (2002). *Econométrie*. Licence. France. <https://shs.hal.science/cel-01261163>.
- [16] Habila, S. (2021). *Les Modèles Auto-Régressifs a Seuil*, Doctoral dissertation, université jijel.
- [17] Kuma, J. K. (2018). *Prévision par l'approche méthodologique de Box et Jenkins : Cas d'une Série Non Saisonnière et Non Stationnaire du type TS (Pratique sur EViews et Stata)*.
- [18] Kesraoui, M., & Nzisabira, C. (2017). *Etude et modélisation d'une évolution d'une pathologie*, Doctoral dissertation, UMMTO.
- [19] Leeuw, J. D. (2009). *Computational Statistics*, *Journal of statistical software*. 1(1), 128-129.

- [20] Mecheri, K.( 2016). Application de la Méthodologie de Box-Jenkins sur la série du nombre des séances d'hémodialyse. Thèse de mastère, univesité kasdi merbah ouargla.
- [21] Oren, Y. (2008). Capacitive deionization (CDI) for desalination and water treatment past, present and future (a review). *Desalination*, 228(1-3), 10-29.
- [22] Plaud, A., Nguifo, E. M., & Charreyron, J. (2019). Classification des séries temporelles multivariées par l'usage de Mgrams. In *CAP 2019*.
- [23] Prenat, M., Keribin, C., & Rossignol, R. (2010). *Séries chronologiques*. Université Paris-Sud.
- [24] Rubenthaler, S. (2019). *Séries chronologiques (avec R)(Cours et exercices)*.
- [25] Raoult, J. P. (2011). Note de lecture :«Séries temporelles avec R-Méthodes et cas». *Statistique et Enseignement*, 2(1), 89-90.
- [26] Saunders, T., & Tulip, P. (2019). Cost-benefit Analysis of Leaning against the Wind. Available at SSRN 3435992.
- [27] Saidani, B. (2013). Filtre de Kalman discret pour l'estimation des moyennes inconnues de bruits blancs. Library and Archives Canada, Bibliothèque et Archives Canada, Ottawa.
- [28] Shen, H., Lee, H., & Seo, D. J. (2022). Adaptive conditional bias-penalized Kalman filter for improved estimation of extremes and its approximation for reduced computation. *Hydrology*, 9(2), 35.

## Résumé

Ce mémoire est essentiellement consacré à la méthode de filtre de Kalman. Cette méthode en trois étapes vise à faire des prévisions des valeurs futures. Nous appliquons cette méthode afin de déterminer le modèle le plus approprié pour prédire une série de données réelles, en utilisant le logiciel R.

**Mots clés:** séries temporelles, processus ARIMA , la méthode de filtre de kalman , prévision.

## Abstract

This thesis is essentially devoted to the Kalman filter method. This method consists of three steps aims to make predictions of future values. We apply this method to determine the most appropriate model to predict a series of real data, using R software.

**Keywords:** time series, ARIMA process, kalman filter method, forecast.

## ملخص

هذه الأطروحة مكرسة بشكل أساسي لطريقة مرشح كالمان. تهدف هذه الطريقة المكونة من ثلاث خطوات بالقيام بالتنبؤ بالقيم المستقبلية. نطبق هذه الطريقة لتحديد النموذج الأنسب للتنبؤ بسلسلة من البيانات الحقيقية باستخدام برنامج R.

**الكلمات المفتاحية:** السلاسل الزمنية، ARIMA، طريقة مرشح كالمان، التنبؤ.