

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté Des Sciences Appliquées
Département De Génie Mécanique



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT ES SCIENCES
Spécialité : Génie Mécanique
Option : Génie Mécanique
Par : ZIARI Saber

Modélisation du comportement dynamique d'une plaque élastique en interaction avec un écoulement de fluide

Soutenue publiquement le : 20 / 06 /2023

Devant le jury composé de :

Pr. Abderrahim BELLOUFI	Président	Université Kasdi Merbah Ouargla
Dr. Abdelkader HAMMOU	Examineur	Université Amar Telidji Laghouat
Dr. Youcef MOUADJI	Examineur	E. N. Polytechnique Constantine
Pr. Salah KHALFALLAH	Examineur	E. N. Polytechnique Constantine
Pr. Mustapha BOUAKBA	Examineur	Université Kasdi Merbah Ouargla
Dr. Rassim BELAKROUM	Rapporteur	Université Kasdi Merbah Ouargla

Année universitaire : 2022-2023

Le savoir est la seule richesse qui s'accroît lorsqu'on la partage

Dédicace

*À la mémoire de ma mère
À mon père
À ma femme et mes enfants
À mes frères et soeurs
À mes amis et collègues.....je dédie ce modeste travail*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leurs remarques constructives.

Je suis également reconnaissant envers mon directeur de thèse, qui a su me guider avec patience et bienveillance tout au long de ces années, en m'insufflant la passion pour la recherche.

Enfin, je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance envers ma famille, qui m'a toujours soutenu et encouragé dans mes choix. Leur confiance et leur affection ont été pour moi un moteur dans les moments de doute et de découragement.

Je suis conscient que cette thèse n'aurait pas été possible sans l'aide et le soutien de toutes ces personnes. Je leur suis infiniment reconnaissant et je leur adresse mes plus sincères remerciements.

Résumé

Dans le cadre de cette thèse, une approche basée sur la méthode des éléments finis est proposée pour étudier les instabilités aéroélastiques des plaques rectangulaires sous l'effet d'un écoulement supersonique. Le modèle mathématique de la structure est développée en utilisant une combinaison de la méthode des éléments finis et la théorie des coques de Sanders. Les composantes du déplacement membranaire de l'élément plaque sont modélisées par des polynômes bidimensionnels et la composante de déplacement en flexion par la solution exacte de l'équation du mouvement. La charge aérodynamique induite par l'écoulement supersonique est modélisée par la théorie du piston linéarisée de premier ordre, incluant l'influence de la direction de l'écoulement. Les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement sont construites par intégration analytique exacte. Les limites du flottement sont obtenues en résolvant le système d'équations résultant. Au cours de nos investigations numériques, nous avons abordé essentiellement : l'effet de différents types de conditions aux limites, du rapport d'aspect et de l'orientation de l'écoulement d'air. Après avoir constaté les remarquables propriétés numériques de la formulation proposée pour les plaques homogènes, l'extension de celle-ci au cas des plaques à gradient de propriétés fonctionnelles FGM a été envisagée. Cette nouvelle formulation, basée sur le concept du plan neutre, a été évaluée dans les cas de vibrations libres et aéroélastiques. Les résultats obtenus ont ensuite été comparés à ceux d'autres travaux de la littérature scientifique. L'approche développée se distingue par des avantages significatifs en matière de précision et de convergence.

Mots clés : Aéroélasticité, Écoulement supersonique, Théorie du piston, Méthode des éléments finis, Seuil de stabilité, Théorie de Sanders.

Abstract

As part of this thesis, a finite element method-based approach is proposed to study the aeroelastic instabilities of rectangular flat plates under the effect of supersonic flow. The mathematical model of the structure is developed using a combination of the finite element method and Sanders' shell theory. The components of the membrane displacement of the plate element are modeled by two-dimensional polynomials, and the bending displacement component is modeled by the exact solution of the motion equation. The aerodynamic load induced by the supersonic flow is modeled by the first-order linearized piston theory, including the effect of the flow direction. The mass, stiffness, and damping matrices are constructed by exact analytical integration. The limits of flutter are obtained by solving the resulting system of equations. During our numerical investigations, we mainly addressed the effect of different types of boundary conditions, aspect ratio, and air flow orientation. After observing the remarkable numerical properties of the proposed formulation for homogeneous plates, we considered extending it to the case of functionally graded material (FGM) plates. This new formulation, based on the concept of the neutral plane, was evaluated in cases of free and aeroelastic vibrations. The results were then compared to those of other scientific literature. The developed approach distinguishes itself by significant advantages in terms of accuracy and convergence.

Keywords : Aeroelasticity, Supersonic flow, Piston theory, Finite element method, Critical stability point, Sanders theory.

Résumé en arabe

في هذه الرسالة، يتم اقتراح نهج قائم على طريقة العناصر المحدودة لدراسة عدم الاستقرار الديناميكي الهوائي للألواح المستطيلة المستوية تحت تأثير تدفق فوق صوتي. تم تطوير النموذج الرياضي للهيكل باستخدام طريقة العناصر المحدودة ونظرية قشرة سنדרز. تم تمثيل مكونات انحراف الغشاء للعنصر بمتعددات الحدود الثنائية الأبعاد بينما تم تمثيل مكونات انحناء الغشاء باستخدام حل دقيق لمعادلة الحركة. تم تمثيل تأثير تدفق الحمل الهوائي الناجم عن التدفق فوق صوتي باستخدام نظرية المكبس الخطية من الدرجة الأولى. تم إنشاء مصفوفات الكتلة والصلابة والتخميد باستخدام التكامل الرياضي التحليلي الدقيق. تم الحصول على حدود الاهتزاز الذاتي للهيكل من خلال حل نظام المعادلات الناتج. خلال بحوثنا العددية، ركزنا على تأثير شروط الحد المختلفة ونسبة الطول إلى العرض واتجاه التدفق الهوائي. بعد ملاحظة الخصائص الرقمية للتركيبية المقترحة للألواح المتجانسة، قمنا بتوسيعها لتشمل أيضًا ألواح المصنوعة من المواد التدريجية الوظيفية. تم تقييم هذه التركيبية الجديدة التي تعتمد على مفهوم المستوي المحايد في حالات الاهتزاز الحر والديناميكي الهوائي. تمت مقارنة النتائج المتحصل عليها لاحقًا بالدراسات الأخرى في الأدب العلمي. يتمتع النهج المطور بمزايا هامة من حيث الدقة والتقارب.

الكلمات المفتاحية: المرونة الهوائية، تدفق فوق صوتي، نظرية المكبس، طريقة العناصر المنتهية، عتبة الاستقرار، نظرية سنדרز.

Table des matières

Dédicace	I
Remerciements	II
Résumé	III
Abstract	IV
Résumé en arabe	V
Table des matières	VI
Table des figures	VIII
Liste des tableaux	XI
Nomenclature	XII
Introduction générale	1
1 État de l'art et théorie de base	3
1.1 Revue de littérature	3
1.1.1 Introduction	3
1.1.2 Vibrations des plaques	5
1.1.3 Flottement supersonique des plaques	6
1.1.4 Contrôle du flottement	9
1.2 Instabilités aéroélastiques	10
1.3 Problèmes couplés fluide-structure	11
1.4 Théorie des coques élastiques minces	13
1.4.1 Coordonnées curvilignes	14
1.4.2 Relations contrainte-déformation	17
1.4.3 Equations d'équilibre	18
1.4.4 Relations déformation-déplacement	19
1.4.5 Les simplifications de Love	22

1.4.6	Coque cylindrique circulaire	23
1.5	Théorie des coques élastiques minces de Sanders	25
1.6	Théorie du piston	26
1.6.1	La théorie du piston classique	26
1.6.2	La théorie du piston locale	28
1.7	Matériaux à gradient fonctionnel	28
1.7.1	Classification des FGMs	29
1.7.2	Applications des FGMs	33
1.7.3	Lois de gradation des plaques en FGM	35
2	Analyse des instabilités aéroélastiques d'une plaque homogène rec-	
	tangulaire	38
2.1	Introduction	38
2.2	Formulation mathématique	38
2.2.1	Modélisation structurelle	39
2.2.2	Modélisation aérodynamique	43
2.2.3	Analyse de stabilité	45
2.3	Résultats et discussions	46
2.3.1	Validation et comparaison	46
2.3.2	Effet des conditions aux limites régulières sur les limites du flot-	
	tement	50
2.3.3	Effet de la direction de l'écoulement sur les limites du flottement	50
2.3.4	Effet des conditions aux limites irrégulières sur les limites du	
	flottement	53
2.4	Conclusion	57
3	Étude du comportement dynamique d'une plaque en FGM	59
3.1	Introduction	59
3.2	Modélisation de la structure FGM	61
3.3	Résultats et discussions	63
3.3.1	Vibrations libres	63
3.3.2	Analyse de la stabilité aéroélastique	68
3.4	Conclusion	73
	Conclusion générale	74
	Bibliographie	76
	Annexes	85

Table des figures

1.1	Les premiers programmes développés entre 1950 et 1960 pour la conquête de l'espace	4
1.2	Mécanisme de flottement d'une aile d'avion [1]	7
1.3	Triangle aéroélastique des forces [2]	11
1.4	Mécanisme de couplage fluide-structure [3]	12
1.5	Surface de référence	15
1.6	Distance entre deux points de la surface de référence[4]	16
1.7	Champ de contraintes exercé sur un élément différentiel de coque . . .	17
1.8	Champ de forces exercé sur un élément différentiel de coque	18
1.9	Déformation de cisaillement dans le plan de la surface de référence [4] .	21
1.10	Coque cylindrique circulaire	24
1.11	Analogie de la théorie de piston	27
1.12	-a- Evolution en rupture de la micro-structure (CMM) et -b- évolution continue de la micro-structure (FGM)	29
1.13	Structures des FGMs -a- Structure discontinue -b- Structure continue .	30
1.14	Classification des FGMs selon -a-La composition -b- La microstructure -c- La porosité [5]	31
1.15	Les types de revêtements des FGM	31
1.16	Les types d'états physiques pour la fabrication des FGMs [6]	32
1.17	la variation du module d'Young pour une palque S-FGM	36
1.18	La variation du module d'Young pour une palque E-FGM	36
2.1	Géométrie de la plaque	39
2.2	Conditions aux limites	47
2.3	Convergence des premières fréquences propres et de la fréquence critique (-a- Fréquence du Premier mode à vide, -b- Fréquence du deuxième mode à vide, -c- Fréquence critique)	47
2.4	Evolution des fréquences d'une plaque carrée SSSS comparée à celle de song [7]	48
2.5	Evolution des fréquences d'une plaque carrée CSCS comparée à celle de song [7]	48

2.6	Evolution des fréquences d'une plaque carrée FSFS comparée à celle de song [7]	49
2.7	Influence de la pression dynamique sur les modes propres des la plaque	49
2.8	Les limites de flottement pour différentes condtions aux limites	51
2.9	Influence de l'angle d'écoulement sur la pression dynamique critique. (A/h = 100)	53
2.10	Variation des fréquences propres d'une plaque rectangulaire avec un rapport de forme de 0.5 pour différentes directions d'écoulement :-a- $\Lambda = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$; -b- $\Lambda = 0^\circ$	54
2.11	Variation des fréquences propres d'une plaque rectangulaire avec un rapport de forme de 1.25 pour différentes directions d'écoulement :-a- $\Lambda = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; -b- $\Lambda = 90^\circ$	54
2.12	Variation des fréquences propres d'une plaque rectangulaire avec un rapport de forme de 2.0 pour différentes directions d'écoulement :-a- $\Lambda = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; -b- $\Lambda = 90^\circ$	54
2.13	Influence de l'angle d'écoulement sur la pression dynamique critique pour différents rapports de forme	55
2.14	Configurations de la plaque	55
2.15	Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la pression dynamique adimensionnelle	56
3.1	Géométrie d'une plaque FGM	61
3.2	Variation du module d'Young pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique	62
3.3	Configurations pour le cas des vibrations libres	63
3.4	Configurations pour le cas des écoulements supersoniques	64
3.5	Modes d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites	66
3.6	Première fréquence adimensionnelle d'une plaque FGM carrée (Al/ZrO ₂) (A/h = 20) $\Omega^* = \Omega \sqrt{12(1-v^2) \rho_{ZrO_2} A^4 / \pi^4 E_{ZrO_2} h^2}$	66
3.7	Première fréquence adimensionnelle de plaques FGM carrées (Al/ZrO ₂ et Al/Al ₂ O ₃) pour différentes condtions aux limites (A/h = 20) $\Omega^* = \Omega A^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$	67
3.8	Les quatre premières fréquences adimensionnelles d'une plaque FGM carrée (Al/ZrO ₂) totalement simplement supportée (SSSS)(A/h = 20)(p = 1) $\Omega^* = \Omega \sqrt{12(1-v^2) \rho_{ZrO_2} A^4 / \pi^4 E_{ZrO_2} h^2}$	68
3.9	Pressions dynamiques critiques d'une plaque carrée (SSSS) FGM Al/Al ₂ O ₃ , pour différentes valeurs d'indice fraction volumique en comparaison avec celle publiées par Prakash[8]	69

3.10	Pression dynamique critique d'une plaque carrée FGM Al/Al_2O_3 (SSSS) et (CCCC) pour différentes valeurs de fraction volumique.	70
3.11	Fréquences adimensionnelles pression dynamique critique de la plaque carrée pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique	71
3.12	Effet de l'épaisseur sur la pression dynamique critique d'une plaque carrée en FGM (FCFF) Al/A_2O_3 en pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique	72
3.13	Effet de l'épaisseur sur la pression dynamique critique d'une plaque carrée en FGM (SFSS) Al/A_2O_3 en pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique	72
3.14	Pression dynamique critique de la plaque carrée en FGM (SFSS) Al/A_2O_3 en pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique	73

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques du matériau	46
2.2	Comparaison des Limites du flottement pour différentes conditions aux limites	52
2.3	Influence de la direction de l'écoulement pour une plaque carrée	57
2.4	Pression dynamique critique adimensionnelle pour différents rapports d'aspect	57
3.1	Propriétés des matériaux	64
3.2	Convergence et comparaison des fréquences de vibration libre d'une plaque FGM(Al/Al_2O_3) carrée (SSSS) pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique ($A/h = 20$) $\Omega^* = 10^3 \times \Omega h \sqrt{\rho_{Al_2O_3}/E_{Al_2O_3}}$	64
3.3	Comparaison des fréquences de vibration libre d'une plaque FGM(Al/Al_2O_3) avec la solution exacte, pour : différentes valeurs d'indice de fraction volumique, différentes conditions aux limite et différents rapports de forme ($A/h = 100$) $\Omega^* = \Omega \pi^2 (A^2/h) \sqrt{\rho_{Al}/E_{Al}}$	65
3.4	Pression dynamique critique et fréquence critique adimensionnelles d'une plaque isotrope carrée ($A/h = 100$)	69

Nomenclature

Indices

\cdot_{cr}	Valeur critique
\cdot_*	Valeur adimensionnelle
$\{.\}^e$	Vecteur élémentaire
$[.]^e$	Matrice élémentaire
$\dot{()}$	Première dérivée par rapport au temps
$\ddot{()}$	Deuxième dérivée par rapport au temps

Matrices et vecteurs

\bar{r}	Vecteur de position
\bar{R}	Vecteur de position d'un point arbitraire
\bar{n}	Vecteur unitaire normal à la surface neutre
$[k]$	Matrice de rigidité globale
$[m]$	Matrice de masse globale
$[c_a]$	Matrice d'amortissement aérodynamique globale
$[k_a]$	Matrice de rigidité aérodynamique globale
$[P]$	Matrice d'élasticité
$\{\sigma\}$	Vecteur de contraintes
$\{\epsilon\}$	Vecteur de déformations
$\{q\}$	Vecteur de déplacement global
$\{C_i\}$	Vecteur des constantes inconnues
$[N]$	Matrice de fonction de forme du déplacement de l'élément fini

Notations

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Coordonnées curvilignes
x_1, x_2, x_3	Coordonnées cartésiennes
A_1, A_2	Paramètres de Lamé
R, R_1, R_2	Rayons de courbure
U et V	Déplacements de la surface médiane selon X et Y
W	Déplacement transversal de la surface médiane selon Z

A et B	Longueur et largeur de la plaque
x_e et y_e	Longeurs de l'élément plaque suivant X et Y
h	Epaisseur de la plaque
d	Distance entre la surface neutre et la surface moyenne géométrique
K	Rigidité mebranaire
D	Rigidité flexionnelle
ρ_m	Densité de la plaque
E	Module d'élasticité longitudinal
G	Module d'élasticité tarsnsversal
ν	Coefficient de Poisson
ρ	Densité de l'air
P_a	Pression de l'air
M_∞	Nombre de Mach en écoulement libre
$v_{a\infty}$	Vitesse de l'air en écoulement libre
ds	Longueur de l'élément de ligne sur la surface
N_{ij}, M_{ij}, Q_j	Champ de forces exercé sur un élément de coque i,j=1,2
Ω	Valeur propre complexe
Ω_r	Partie réelle de la valeur propre complexe
Ω_i	Partie imaginaire de la valeur propre complexe
ω	Fréquence de vibration de la plaque
λ_a	Paramètre de pression aérodynamique
g_a	Paramètre d'amortissement aérodynamique
λ^*	Pression aérodynamique adimensionnelle
p	Indice de fraction volumique
Λ	Angle d'orientation de l'écoulement

Introduction générale

Les structures qui se déplacent à des vitesses supersoniques, comme les avions de chasse et les fusées de lancement, sont soumises à des instabilités aéroélastiques, telle que le flottement supersonique. Cette dernière, est une réponse vibratoire initiée de l'interaction entre les charges aérodynamiques causées par l'écoulement de l'air autour de la structure et les charges élastiques, d'amortissement et inertielles développées par cette dernière. Le flottement des panneaux d'un certain niveau de gravité, s'il n'a pas un effet dévastateur immédiat, ce qui est souvent le cas, aura un effet très négatif sur la durée de vie en fatigue de la structure du panneau et même sur les performances de vol.

L'analyse du flottement linéaire des panneaux a pour but principal de déterminer la vitesse critique à laquelle le flottement se produit ainsi que les différents facteurs qui peuvent l'influencer tels que l'orientation de l'écoulement, la géométrie de la structure, la distribution de la température, etc. ... Les méthodes analytiques et numériques sont des outils couramment utilisés pour analyser le flottement des panneaux. Les méthodes analytiques peuvent donner des solutions exactes, mais elles sont généralement limitées à des cas de géométrie simple et à des conditions aux limites bien définies, tandis que les méthodes numériques, comme la méthode des éléments finis (FEM) et les méthodes spectrales, sont plus flexibles et peuvent être utilisées pour étudier des cas plus complexes.

Pour améliorer la résistance aux instabilités aéroélastiques, les ingénieurs utilisent souvent des matériaux modernes et des technologies de renforcement structurel. Ces matériaux peuvent inclure des matériaux composites tels que les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), qui présentent un gradient de propriétés mécaniques et physiques, permettant ainsi de retarder ou d'éliminer les effets de ces instabilités en résistant aux chargements générés par le gradient thermique, notamment dans les applications aéronautiques.

Pour l'étude du comportement dynamique des plaques rectangulaires soumises à un écoulement supersonique, nous présentons dans cette thèse un modèle structurel hybride de la théorie linéaire des coques de Sanders et de l'approche classique des éléments finis. La théorie du piston de premier ordre est utilisée pour prédire l'écoulement supersonique. Une autre contribution importante de cette thèse est l'investigation des limites

aéroélastiques pour des conditions aux limites irrégulières. En outre, cette étude aborde les vibrations libres et les instabilités aéroélastiques des plaques rectangulaires à gradient fonctionnel, de plus en plus utilisées dans les applications aérospatiales. Dans l'ensemble, cette recherche apporte une contribution significative à la compréhension et à l'analyse des instabilités aéroélastiques dans des conditions d'écoulement supersonique et de conditions aux limites irrégulières, offrant ainsi des implications importantes pour la conception de structures aéronautiques.

Afin de cerner le problème des instabilités aéroélastiques des plaques rectangulaires la présente thèse est organisée en trois chapitres :

- Le premier chapitre est dédié à l'état de l'art et à la théorie de base liés aux instabilités des plaques induites par l'écoulement de fluide.
- Le deuxième chapitre se focalise sur l'analyse de la stabilité aéroélastique d'une plaque rectangulaire mince homogène pour des conditions aux limites régulières et irrégulières avec une direction d'écoulement arbitraire.
- Le troisième chapitre est consacré aux vibrations libres des plaques rectangulaires fabriquées à partir de matériaux à gradient fonctionnel (FGM). L'élément plaque utilisé dans le chapitre précédent est testé pour différentes conditions aux limites et différentes valeurs de l'indice de fraction volumique. De plus, une évaluation du comportement dynamique des plaques en FGM rectangulaires est réalisée.

Chapitre 1

État de l'art et théorie de base

1.1 Revue de littérature

1.1.1 Introduction

Durant la seconde guerre mondiale, les fusées allemandes V-2 ont été conçues pour frapper ses cibles en survolant le sol avec une vitesse supersonique sans faire de bruit contrairement à ce que faisaient ses prédécesseurs les V-1, échappant ainsi à la vigilance de la Royal Air Force. Ces engins de mort, ont montré une certaine défaillance marquée par le développement de vibrations au niveau des parois pour des vitesses supersoniques, ce qui contribuait à l'apparition du phénomène de flottement. Ce dernier est une forme d'instabilité aérodynamique auto-excitée caractérisée par l'interaction des chargements aérodynamiques dus à l'écoulement de l'air au tour de la structure avec les charges élastiques et inertielles développées par cette dernière. Au cours du développement de plusieurs programmes Figure1.1, conçus pour conquérir l'espace, le phénomène du flottement a été enregistré sur l'opération de vol du X-15 Figure1.1a, **(Un avion fusée hypersonique développé par l'United States Air Force et NASA dans les années 1950 et 1960)**, pendant les essais en soufflerie dans le cadre du programme développement du X-20 Figure1.1b, **(Connue sous le nom de Dyna-Soar, était un projet de véhicule spatial de la NASA développé dans les années 1960)**, sur Titan II Figure1.1c, **(Une fusée de 2 étages à propulsion solide développée par la société Aerojet General pour l'Agence de défense spatiale des États-Unis (USAF). Elle était principalement utilisée pour lancer des satellites et des véhicules spatiaux de défense spatiale des États-Unis)**, sur Titan III Figure1.1d, **(Une fusée de lanceur lourd de 2 étages développée par la société Aerojet General pour l'Agence de défense spatiale des États-Unis)**, et sur le S-IVB Figure1.1e, **(Un étage supérieur de fusée utilisé dans les lanceurs Saturn V et Saturn IB de la NASA pendant la mission Apollo)**[9]. Pour certains véhicules, les panneaux sont conçus pour éviter le flottement,

ce dernier peut être toléré pour des amplitudes et des limites de durées qui ne provoqueront pas : une défaillance structurelle du panneau due à la fatigue, une défaillance fonctionnelle de l'équipement attaché à la structure, ou des niveaux de bruit excessifs dans les compartiments des véhicules spatiaux à proximité du panneau flottant. Ceci dit, Le flottement des panneaux a causé des dommages structurels sur le X-15 et le X-20, qui ont été prévenus en renforçant leur structure. Par contre, aucun renforcement n'a été prévenus sur le Titan et le S-IVB car le flottement n'a pas été considéré comme destructeur. C'est bien dans quelques années plus tard que les premières investigations expérimentales sur ce phénomène ont commencé [10]. La course à la conquête de l'espace qui a mis en lice les Etats Unis d'Amérique et l'ex Union Soviétique durant la guerre froide a contraint la NASA à mener des recherches expérimentales et théoriques approfondies sur le flottement supersonique des panneaux [9].

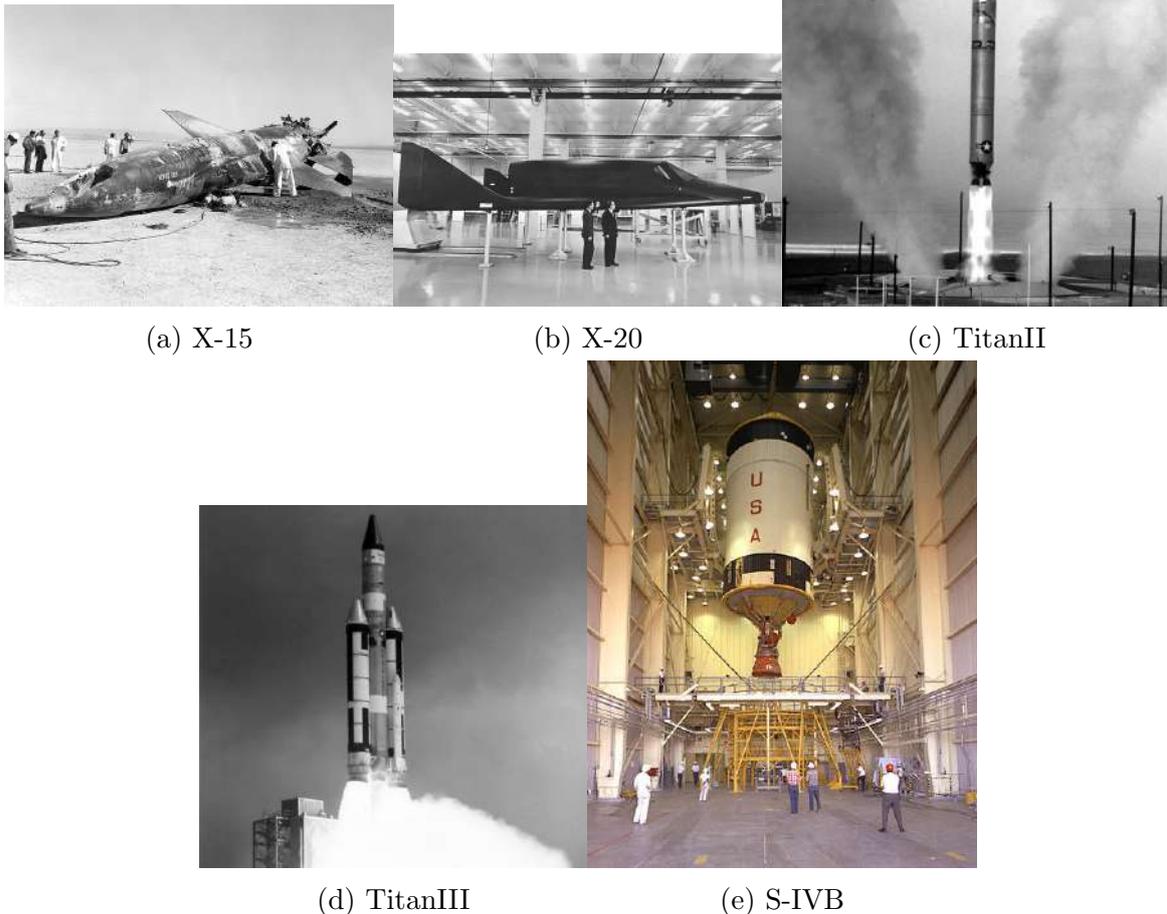


FIGURE 1.1 – Les premiers programmes développés entre 1950 et 1960 pour la conquête de l'espace

Dowell [11] a publié une synthèse de travaux dans le domaine de l'aéroélasticité. Les

phénomènes aéroélastiques dans les plaques et les coques y sont exposés et discutés. Les théories linéaires et non linéaires pour les systèmes mécaniques sont explorées ainsi que des différents modèles de chargement aérodynamique. Des exemples de corrélation entre les modèles théoriques et l'expérience y sont aussi présentés.

Ultérieurement, Bismarck-Nasr [12] a publié une analyse par éléments finis pour étudier les problèmes aéroélastiques des plaques et des coques avec y compris des chargements dans le plan. Pour couvrir les problèmes des instabilités à grande amplitude des panneaux soumis à des écoulements supersonique et hypersonique, Mei et al. [13] ont effectué une investigation paramétrique par une analyse incluant des méthodes numérique et analytique comportant le sens de l'écoulement, la température, les chargements membranaires et l'incorporation d'actionneurs piézoélectriques pour le contrôle actif du flottement.

1.1.2 Vibrations des plaques

Les vibrations des plaques rectangulaires sont un sujet important en mécanique des structures avec des applications dans plusieurs domaines tels que l'aérospatiale, l'ingénierie civile et la construction navale. Pour résoudre ces problèmes, une compréhension approfondie des équations différentielles partielles qui décrivent les vibrations de la plaque est nécessaire. Les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin sont couramment utilisées pour résoudre ces équations. Dawe [14], a étudié les vibrations des plaques et comparé les résultats d'une approche FEM en utilisant un élément quadrilatéral par rapport à celles de Rayleigh-ritz et de Galerkin. Une large précision de cet élément est mise en évidence. Leissa [15], examine les vibrations libres des plaques rectangulaires pour différentes conditions aux limites. Des équations caractéristiques exactes et la méthode de Ritz sont utilisées. On peut citer aussi les travaux de R. S. Srinivasan et Babu [16], qui ont étudié les vibrations libres d'une plaque encastree en utilisant les coordonnées quadrilatérales et l'équation intégrale de poutres. Liew et al [17] ont étudié les vibrations des plaques rectangulaires avec différentes conditions aux limites en utilisant une fonction orthogonale de plaque développée avec la procédure de Rayleigh-Ritz. Pour calculer la solution exacte des vibrations libres d'une plaque rectangulaire mince orthotrope, Xing et al [18] ont présenté une méthode de séparation des variables pour différentes configurations de conditions au limites. Gorman [19] a présenté une revue de la méthode de superposition développée par ce dernier, pour l'évaluation exacte des valeurs propres et des modes propres des plaques et des coques. Une solution analytique basée sur la méthode de superposition symplectique est proposée par Li Rui et al. ([20],[21],[22],[23]) pour décrire les vibrations libres des plaques rectangulaires minces. De même et pour des conditions aux limites complexes, Bing Leng et al. [24]

ont utilisé une approche basée sur la théorie classique des séries de Fourier permettant de résoudre le problème de manière simple et directe, en réduisant considérablement la complexité du problème bien que cette méthode ait des limitations en terme de la nature des fonctions utilisées et les problèmes de convergence.

1.1.3 Flottement supersonique des plaques

Le flottement est défini comme étant une instabilité aéroélastique d'une structure produite par un écoulement de fluide constant sur un objet et est une propriété de la structure elle-même. La présence de flottement dans tout système non récupérateur d'énergie est indésirable, car les oscillations peuvent causer des problèmes allant de tolérables à catastrophiques. Les cas tolérables incluent le léger flottement d'aile observé dans les avions de passagers qui peut leur causer des désagréments pendant le vol. Des cas plus graves peuvent entraîner des fatigues à haut cycle et des micro-fractures dans les matériaux. Dans les cas les plus graves de flottement, l'amplitude des oscillations augmente à un taux exponentiel et entraîne un échec structurel catastrophique. Un exemple de cas catastrophique de flottement est l'effondrement du pont de Tacoma Narrows observé le 7 novembre 1940 [25]. Lorsque le vent souffle à une vitesse suffisante sur le pont, cela peut entraîner une instabilité appelée "flottement". Cette instabilité est causée par le couplage aérodynamique entre le vent et la structure du pont, ce qui transfère de l'énergie du vent vers la structure et provoque des oscillations qui s'amplifient au fil du temps. Si la vitesse du vent s'approche de la la vitesse critique, les oscillations peuvent devenir si intenses qu'elles endommageront la structure du pont, entraînant éventuellement son effondrement. Pour mieux appréhender le phénomène du flottement, on peut évoquer l'exemple type de de la surface portante d'un avion (aile ou empennage) qui, dans certaines conditions de vol, subit un mouvement oscillant de flexion et de torsion [1]. Ce mouvement peut s'amplifier très rapidement, menant dans le pire des cas à la destruction de l'aéronef. Le déclenchement de cette instabilité est associé à une vitesse particulière. Contrairement à une résonance, aucun besoin d'une excitation périodique n'est nécessaire pour déclencher le flottement. Le mécanisme qui conduit à son apparition est une interaction entre l'écoulement d'air et la structure élastique, impliquant deux aspects. La première interaction concerne les fréquences propres d'oscillation de la voilure qui sont modifiées en vol. La deuxième interaction est le phasage entre le battement de l'aile et sa torsion qui conduit à diriger la portance constamment dans la direction du mouvement, accentuant ainsi le battement d'aile jusqu'à obtenir de très grandes déformations. C'est un phénomène dit d'instabilité dynamique par couplage de fréquences. Figure 1.2

Les dernières décennies ont vu la mise en œuvre de certaines approches basées sur la formulation par éléments finis pour mieux évaluer les limites de flottement de la plaque

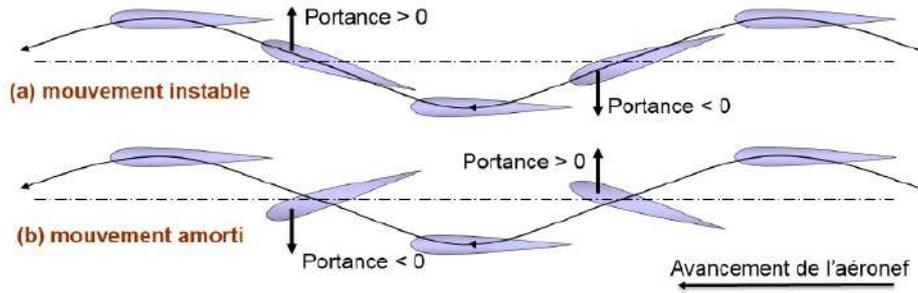


FIGURE 1.2 – Mécanisme de flottement d'une aile d'avion [1]

sous écoulement d'air supersonique. Olson[26] , a proposé une méthode basée sur une matrice de raideur dynamique à éléments finis pour le calcul du flottement des panneaux bidimensionnels. Elle a été testée sur des panneaux simplement supportés et fixés et a permis de prévoir avec précision les limites et les modes de flottement. Cette méthode peut également facilement être étendue à des problèmes de flottement de panneaux plus complexes pour lesquels il n'existe pas de solutions exactes connues. Kariappa et Somashekar[27] ont utilisé une méthode basée sur les éléments finis pour analyser les problèmes de flottement des panneaux en calculant les matrices de coefficients d'influence aérodynamique qui tiennent compte de la raideur et de l'inertie de la structure. Cette méthode peut facilement s'adapter à différentes conditions limites et prendre en compte les découpes ou discontinuités structurelles. Sanders et al.[28] ont utilisé une approche qui permet de représenter les forces aérodynamiques non stationnaires à l'aide d'éléments finis, augmentant ainsi la flexibilité et la généralité des configurations structurelles. Pour évaluer ces forces, en employant la théorie linéaire du piston et se basant sur un élément fini de flexion de plaque purement compatible. Les calculs des fréquences propres complexes sont exécutés en mettant en œuvre un algorithme de bi-itération avec une attention particulière à l'amortissement aérodynamique. Cheng et al.[29] ont utilisé une formulation éléments finis modale qui incluait la théorie de la plaque de von Karman pour la déflexion aérothermique et la théorie aérodynamique du piston quasi-stationnaire pour les fluctuations de pression. Ils ont pris en compte deux effets thermiques : l'expansion uniforme de la plaque due à la température et le moment thermique causé par le gradient de température à travers l'épaisseur. Ils ont montré que l'angle d'écoulement a moins d'impact sur la stabilité par rapport à la température pour les plaques carrées isotropes par rapport aux plaques rectangulaires et aux plaques composites stratifiées et qu'un amortissement faible peut potentiellement entraîner un flottement à une pression dynamique plus faible, quant au, moment thermique, ce dernier renforce la stabilité, tandis que l'expansion thermique de la plaque l'affaiblit. Pour étudier les oscillations des panneaux à grande amplitude et à des vitesses hypersoniques, Gray et al.[30] ont utilisé une méthode d'analyse basée sur les éléments finis

qui prend en compte les effets non-linéaires de la théorie aérodynamique du piston d'ordre trois, des résultats comparatifs sont présentés pour différentes conditions aux limites montrant l'effet déstabilisant de l'aérodynamique non linéaire par rapport aux méthodes classiques. La méthode des modes assumés (AAM) a été employé par Song et al [7], pour explorer les propriétés du flottement supersonique des panneaux en utilisant la théorie classique des plaques minces et étudier les caractéristiques aéroélastiques des panneaux avec différentes conditions aux limites, y compris les propriétés de flottement des panneaux avec des conditions de bord élastiquement restreintes. D'autres approches combinées à la formulation EF pourraient être citées, notamment les travaux de Srinivasan et Babu[31] avec la technique de l'équation intégrale utilisée pour résoudre l'équation différentielle du mouvement. Afin de pouvoir modéliser le comportement aéroélastique des géométries complexes (des plaques d'épaisseur variable), Abbas et al.[32] ont utilisé une formulation (ANCF) qui permet de décrire la position et l'orientation de chaque nœud de l'élément à l'aide de coordonnées absolues. Pour modéliser une plaque composite et détecter le début de son flottement supersonique, Wang, Qin et al. [33] ont employé une approche FEM ainsi que la méthode d'orientation des vecteurs propres. Faroughi et al. [34] ont utilisé la méthode FEM pour étudier les effets de la taille du raidisseur et de la rotation de l'écoulement sur le flottement supersonique d'une aile trapézoïdale. Une analyse des caractéristiques aéroélastiques des panneaux supersoniques avec différentes conditions aux limites a été réalisé par Song et Li [7] combinant la méthode des modes supposés (AMM) et la méthode des éléments finis. La prédiction de la charge aérodynamique est cruciale pour une bonne représentation du flottement du panneau. Durvasula [35] a utilisé une approximation statique bidimensionnelle pour l'évaluation de la charge aérodynamique. Gray et al. [30], ont employé une méthode basée sur des éléments finis pour évaluer l'influence de l'inclusion des non-linéarités associées à l'aérodynamique de la théorie de piston de troisième ordre. Ils ont indiqué que cette dernière a un effet perturbateur, contrairement à la théorie de piston de premier ordre quasi-stationnaire couramment utilisée. Prakash et Ganapathi [8], ont utilisé l'approximation du nombre de Mach élevé du premier ordre à l'écoulement potentiel linéaire et montré qu'une augmentation de la pression dynamique critique est observée par rapport à la géométrie de la plaque. Une théorie de piston locale performante est proposée par Zhang et al. [36] pour prédire les charges de pression instationnaires à des vitesses supersoniques et hypersoniques. Cette théorie utilise une solution de flux moyen stable obtenue grâce à la méthode d'Euler. Ils ont montrés que comparé à la théorie classique, la théorie locale offre une meilleure précision.

Afin de bénéficier des avantages offerts par la théorie de Sanders pour les coques élastiques minces, une nouvelle méthode a été développée. Cette méthode permet une convergence rapide et précise avec un peu de difficultés numériques. Elle se base sur la

théorie de Sanders pour les coques minces linéaires, qui élimine toutes les contraintes pour les mouvements de corps rigides. Des tests menés avec succès sur des coques coniques [37] et cylindriques [38] ont prouvé l'efficacité de cette méthode. Plus tard, Sabri et Lakis [39] ont utilisé une méthode hybride des éléments finis combinée à la théorie de la coque de Sanders, les résultats ont montré une convergence rapide et efficace pour l'évaluation de la stabilité aéroélastique des coques cylindriques sous flux d'air supersonique.

1.1.4 Contrôle du flottement

Le flottement des panneaux, est une instabilité aéroélastique auto-excitée des composants minces de type plaque ou coque en vol supersonique, généralement caractérisé par des vibrations de faible amplitude et de longue durée accentué par des déformations importantes et des non-linéarités aérodynamiques, entraînant des défaillances structurales induites par la fatigue [40]. Afin d'éviter ce type d'instabilité (supprimer le flottement ou réduire les amplitudes de vibration), il est possible d'augmenter la vitesse à laquelle le flottement se produit en augmentant la différence entre les fréquences modales, en rendant la structure plus rigide et en modifiant la distribution de la masse[41], d'où l'intérêt d'intégrer le contrôle passif et actif dans le processus de conception. Des recherches récentes se sont concentrées sur l'exploration de méthodes appropriées pour supprimer le flottement, avec des techniques de suppression classées dans les catégories active ou passive. Dans l'approche passive, la structure est conçue pour maintenir la stabilité aéroélastique par l'utilisation des amortisseurs hydrauliques ou à friction, les supports antivibratoires, les joints flexibles, les éléments d'isolation vibratoire, les masses d'équilibrage...etc. En revanche, les méthodes de suppression active du flottement impliquent principalement l'utilisation de surfaces de contrôle aérodynamiques pour modifier l'écoulement autour de la structure. Les matériaux piézoélectriques réagissent à l'application d'une tension en se déformant dans une direction déterminée par la polarité du champ électrique. La rapidité de la réponse de déformation permet l'utilisation de ces matériaux comme des dispositifs d'activation dans un système sous contrôle actif. En incorporant des segments de ce matériau dans une structure, il est possible de générer des contraintes localisées qui modifient les propriétés de réponse dynamique de la structure. Plusieurs études ont été menées pour évaluer les capacités des actionneurs de plaque piézoélectriques à supprimer le flottement, à travers des investigations numériques, analytiques et expérimentales [42, 43, 44, 45, 46]. Pour un meilleur contrôle du flottement des panneaux, les chercheurs s'intéressent à l'optimisation des emplacements des actionneurs et des capteurs piézoélectriques [47, 48, 49]. Récemment, les dissipateurs d'énergie non linéaires (NES) [50, 51, 52] représentent un moyen efficace pour contrôler passivement le flottement des panneaux. Ils sont constitués d'un objet

(appelé masse) relié à la structure par un ressort non linéaire et un amortisseur. Le ressort non linéaire permet de retenir l'énergie transférée de la structure à la masse, empêchant ainsi qu'elle ne soit renvoyée vers la structure, tandis que l'amortisseur sert à dissiper cette énergie.

1.2 Instabilités aéroélastiques

Le terme d'aéroélasticité est défini comme étant la science qui étudie l'interaction entre les forces aérodynamiques et les forces élastiques, et l'influence de cette dernière sur la conception des avions [2]. Les problèmes aéroélastiques n'existeront pas si les structures d'avions étaient parfaitement rigides. Par ailleurs, elles deviennent plus importantes lorsque les déformations structurelles induisent des forces aérodynamiques additionnelles. Ces interactions peuvent avoir tendance à devenir de plus en plus petites jusqu'à ce qu'une condition d'équilibre stable soit atteinte ou peuvent avoir tendance à diverger et à détruire la structure. La figure 1.3 (triangle des force) schématise la classification des phénomènes aéroélastiques. Selon cette représentation ingénieuse des forces exercées sur la structure, on peut y recenser trois types : les forces aérodynamiques, les forces élastiques et les forces inertielles. La liste des phénomènes recueillis dans ce schéma n'est pas exhaustive. ils sont définis comme suit :

- **Le flottement (Flutter)** : Un phénomène aérodynamique qui peut affecter la stabilité des structures en mouvement dans un fluide. Ainsi, Les forces aérodynamiques exercées sur un objet peuvent interagir avec sa structure de manière à créer une instabilité dynamique connue sous le nom d'auto-excitation [53]. Cette instabilité peut être mesurée par un taux d'amortissement négatif.
- **Le termblement (Buffeting)** : Des vibrations transitoires des composants structurels de l'avion dues aux impulsions aérodynamiques produites par le sillage derrière l'aile, les nacelles, les nacelles de fuselage ou d'autres composants de l'avion. Cette excitation peut être causé par des tourbillons de Von Karman, qui peuvent provoquer des vibrations induites par vortex (VIV). Ce phénomène est particulièrement fréquent pour les corps non profilés, tels que le pont de Tacoma [54].
- **La réponse dynamique** : Une réponse transitoire des composants structurels de l'aéronef produite par des charges rapides appliquées lors des rafales [55], des atterrissages, des mouvements brusques des commandes, des ondes de choc en mouvement, ou d'autres charges dynamiques.
- **Les effets de l'aéroélasticité sur la stabilité** : L'influence de la déformation élastique de la structure sur la stabilité dynamique et statique de l'avion.
- **La répartition de la charge** : Calcul des forces de portance, de traînée et des moments en considérant la déformation stationnaire de l'avion.
- **La divergence** : Une instabilité statique d'une surface portante d'un aéronef en vol,

à une vitesse dite vitesse de divergence, où l'élasticité de la surface portante joue un rôle essentiel dans l'instabilité.

- **Le contrôle de l'efficacité (Control effectiveness)** : l'influence de la déformation élastique de la structure sur la contrôlabilité de l'avion.

- **L'inversion des commandes (Control system reversal)** : Une condition apparaissant en vol, à une vitesse dite vitesse d'inversion des commandes, à laquelle les effets recherchés de déplacement d'un élément donné du système de commande sont complètement annulés par des déformations élastiques de la structure.

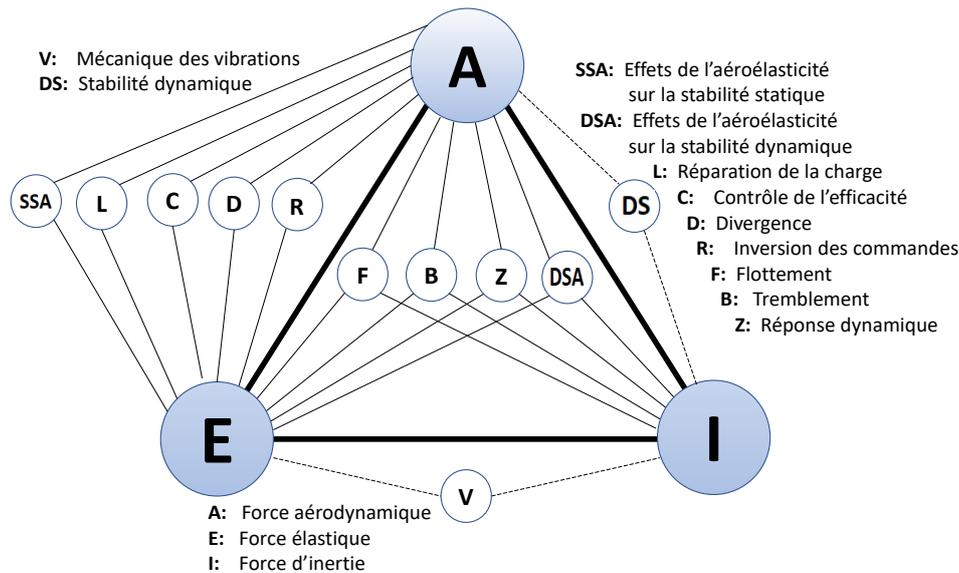


FIGURE 1.3 – Triangle aéroélastique des forces [2]

1.3 Problèmes couplés fluide-structure

Les systèmes mécaniques en contact avec un fluide peuvent présenter des comportements dynamiques complexes en raison de l'interaction entre la structure et le fluide. L'interface fluide-structure est un domaine de recherche qui étudie ces interactions et leur impact sur les performances des systèmes mécaniques. Les exemples courants incluent les avions, les turbines à gaz, les immeubles exposés aux vents et les ponts exposés aux courants. L'interaction entre les deux milieux implique un couplage mécanique bidirectionnel au niveau de leur surface de contact. Les forces exercées par l'écoulement du fluide induisent des déformations dans la structure, ce qui modifie la configuration de l'interface fluide/structure. Cette modification de l'interface affecte à son tour les conditions d'écoulement du fluide, entraînant une modification des forces exercées sur la structure au niveau de l'interface. Ce processus Figure 1.4 boucle ainsi l'interaction entre les deux milieux[3]. Les chercheurs utilisent des outils mathématiques

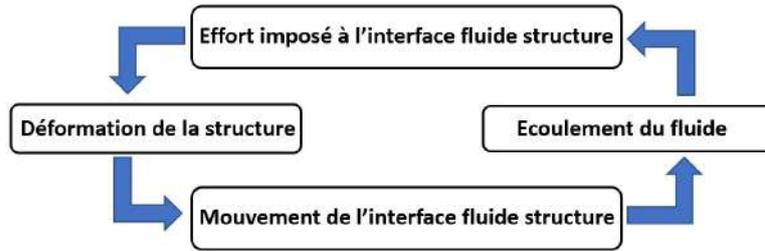


FIGURE 1.4 – Mécanisme de couplage fluide-structure [3]

tels que la théorie des ondes, la mécanique des fluides et la dynamique des structures pour comprendre et prédire le comportement des systèmes fluide-structure. Les méthodes de résolution des problèmes d'interactions fluides-structures peuvent être classées selon trois critères principaux : le sens du couplage unidirectionnel (one way coupling) ou bidirectionnel (two way coupling), le schéma de discrétisation temporelle implicite ou explicite et la stratégie de résolution partitionnée ou monolithique. En ce qui concerne le sens du couplage, les méthodes unidirectionnelles impliquent le calcul de l'effet de la structure sur le fluide ou vice versa, tandis que les méthodes bidirectionnelles impliquent un couplage réciproque entre les deux, ceci dit, on utilise par exemple, la technique de couplage unidirectionnel, lorsque les déformations de la structure sont faibles, il est donc possible de ne prendre en compte que les forces exercées par le fluide sur la structure, sans avoir besoin d'itérations entre le modèle fluide et le modèle structurel, car ces déformations n'ont pas d'incidence sur l'écoulement du fluide, en d'autres termes, le déplacement de la structure n'affecte pas la topologie de l'écoulement. Pour les schémas de discrétisation temporelle, les méthodes implicites nécessitent la résolution d'une équation non linéaire à chaque pas de temps, tandis que les méthodes explicites utilisent des schémas numériques pour résoudre les équations différentielles de manière explicite. Enfin, les méthodes de résolution partitionnées impliquent la résolution indépendante des deux sous-problèmes avant de les coupler, tandis que les méthodes monolithiques cherchent une solution globale pour le problème couplé. Il est important de noter que chacune de ces méthodes a ses propres avantages et inconvénients, et le choix de la méthode appropriée dépendra de la complexité du problème à résoudre et des exigences en termes de précision et de temps de calcul. Les méthodes unidirectionnelles peuvent être plus rapides et moins complexes à mettre en œuvre, mais elles peuvent ne pas capturer correctement les effets réciproques entre le fluide et la structure. Les méthodes bidirectionnelles sont plus précises, mais elles peuvent être plus coûteuses en termes de temps de calcul. Les méthodes implicites peuvent être plus stables, mais elles peuvent être plus difficiles à mettre en œuvre. Les méthodes explicites peuvent être plus simples à mettre en œuvre, mais elles peuvent être moins stables. Enfin, les méthodes partitionnées peuvent être plus rapides et plus

simples à mettre en œuvre, mais elles peuvent ne pas capturer correctement les effets de couplage. Les méthodes monolithiques peuvent être plus précises, mais elles peuvent être plus coûteuses en termes de temps de calcul. Il existe également d'autres méthodes de résolution de problèmes d'interactions fluides-structures qui combinent ces critères de différentes manières, telles que les méthodes de couplage en temps réel, qui utilisent des schémas de discrétisation temporelle implicites pour un couplage bidirectionnel en temps réel. Les méthodes hybrides qui combinent des approches partitionnées et monolithiques pour obtenir un compromis entre la précision et la rapidité de calcul. En outre, certaines méthodes peuvent utiliser des techniques d'optimisation pour résoudre les problèmes d'interactions fluides-structures, telles que les méthodes de contrôle actif ou les méthodes de forme optimale pour améliorer les performances de la structure en modifiant sa géométrie ou sa configuration. Il est également important de mentionner que les avancées en matière de calcul haute performance et d'intelligence artificielle ont permis d'améliorer les méthodes existantes et d'en développer de nouvelles pour résoudre des problèmes de plus en plus complexes. En résumé, il existe de nombreuses méthodes pour résoudre les problèmes d'interactions fluides-structures, chacune avec ses propres avantages et inconvénients, et le choix de la méthode appropriée dépendra des exigences spécifiques de chaque problème.

1.4 Théorie des coques élastiques minces

Les coques minces sont des éléments qui font partie pratiquement de tous les équipements industriels modernes (l'aéronautique, le nucléaire, industries marines et pétrochimiques). La première tentative de formuler une théorie de flexion des coques à partir des équations générales d'élasticité a été faite par ARON en 1874, et a été suivie en 1888 par une théorie approximative réussie connue sous le nom de la première approximation de Love[4]. Depuis lors, la formulation de la théorie linéaire des coques élastiques a été maintes fois réexaminé dans la littérature.

La connaissance des caractéristiques dynamiques des coques élastiques minces est importante dans les applications industrielles des structures en coque, entre autres les fréquences propres des structures de coque qui doivent être connues pour éviter leur résonance avec des équipements oscillants ou rotatifs à proximité. Pour effectuer une telle analyse, de nombreuses procédures numériques ont été adoptées. Parmi celles-ci, on cite l'approche des différences finies et l'approche des éléments finis. Dans cette section nous allons établir les fonctions de déplacements pour l'élément fini sélectionné à partir de la théorie des coques minces

Le principal avantage de la méthode des éléments finis est la simplicité de formulation des caractéristiques des éléments finis des structures complexes, en l'occurrence les problèmes des coques à épaisseur variable.

Les théories linéaires des coques élastiques minces peuvent être divisées en deux catégories :

(a) Théories basées sur la première approximation de Love

Elles sont basées sur les hypothèses suivantes :

- (i) L'épaisseur de la coque est petite par rapport au plus petit rayon de courbure de la surface médiane ;
- (ii) Les déformations et les déplacements sont suffisamment petits pour que les termes de second ordre et plus dans les relations déformation-déplacement peuvent être négligées par rapport aux termes de premier ordre ;
- (iii) La composante de la contrainte normale à la surface médiane est petite par rapport aux autres composantes normales et peut être négligée dans les relations contrainte-déformation,
- (iv) Les normales aux surfaces médianes non déformés reste normale à la surface médiane déformée et ne subissent aucun allongement.

La première hypothèse (i) définit ce que l'entend par « coque mince », quant à la deuxième hypothèse, elle assure la linéarité des équations différentielles résultantes. Outre, Les troisième et quatrième hypothèse, impliquent respectivement, la négligence de la contrainte normale transversale et de la déformation de cisaillement transversal.

(b) Théories basées sur la deuxième approximation de Love

Elles se distinguent de celles de la première catégorie par le fait que les effets du cisaillement transversal et de la déformation normale ne sont pas négligés.

Dans cette étude, on va s'intéresser à la théorie basée sur la première approximation de Love parce qu'elle est plus adéquate avec les coques minces. Cependant, la plupart des formes d'équations basées sur cette approximation contiennent une incohérence ; c'est que, sauf pour le cas particulier du chargement axisymétrique des coques de révolution, toutes les déformations ne disparaissent pas pour les petites rotations de corps rigide de la coque. Ce qui a incité Sanders à proposer une théorie modifiée de la première approximation de Love [56], qui enlève cette incohérence sans compliquer les équations.

1.4.1 Coordonnées curvilignes

On s'intéresse dans la présente section aux coques minces isotropes homogènes et ayant des surfaces neutres dont la contrainte est purement de type membranaire. Les points appartenant à la surface neutre, placés dans un système de coordonnées cartésiennes tridimensionnel $(X1, X2, X3)$, peuvent être aussi exprimés dans un système de coordonnées bidimensionnel curvilignes $(\alpha1, \alpha2)$, avec :

$$x_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.1)$$

$$x_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.2)$$

$$x_3 = f_3(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.3)$$

La localisation du point P de la surface neutre Figure 1.5 est donnée par le vecteur de position :

$$\bar{r}(\alpha_1, \alpha_2) = f_1(\alpha_1, \alpha_2) \bar{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2) \bar{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2) \bar{e}_3 \quad (1.4)$$

Le vecteur $d\bar{r}$ s'écrit :

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \quad (1.5)$$

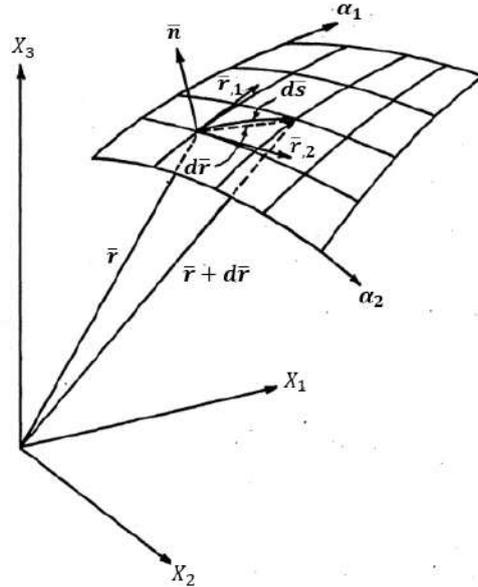


FIGURE 1.5 – Surface de référence

Posons :

$$(ds)^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} \quad (1.6)$$

En remplaçant l'équation (1.5) dans l'équation (1.6), on aura :

$$(ds)^2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} (d\alpha_1)^2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} (d\alpha_2)^2 + 2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.7)$$

On se limite dans notre cas, aux coordonnées curvilignes orthogonales; donc le

dernier terme de l'équation (1.7) s'annule. Posons :

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} = A_1^2 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} = A_2^2 \quad (1.9)$$

En remplaçant les équations (1.8) et (1.9) dans l'équation (1.7), on obtient :

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2 \quad (1.10)$$

Cette dernière équation est dite, équation de forme et les paramètres A_1 et A_2 sont dits les paramètres de forme ou les paramètres de Lamé.

Pour décrire l'emplacement d'un point arbitraire dans l'espace occupé par une coque mince, on définit le vecteur position suivant : (Figure 1.6)

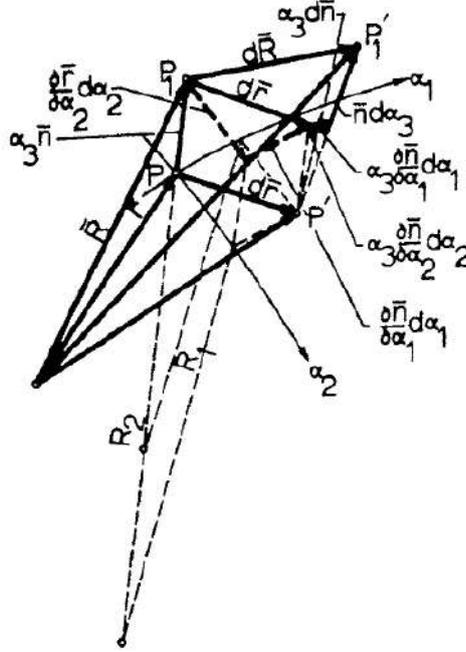


FIGURE 1.6 – Distance entre deux points de la surface de référence[4]

$$\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.11)$$

Où \bar{n} est le vecteur unitaire normal à la surface neutre. La variation différentielle $d\bar{R}$, lorsque l'on se déplace de P_1 à P_2 , est :

$$d\bar{R} = d\bar{r} + \alpha_3 d\bar{n} + \bar{n} d\alpha_3 \quad (1.12)$$

$$d\bar{n} = \frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \quad (1.13)$$

$$(ds)^2 = d\bar{R} \cdot d\bar{R} \quad (1.14)$$

Les équations (1.12),(1.13) et (1.14) permettent d'écrire :

$$(ds)^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} + \alpha_3^2 d\bar{n} \cdot d\bar{n} + (d\alpha_3)^2 + 2\alpha_3 d\bar{r} \cdot \bar{n} \quad (1.15)$$

En développant les termes de l'équation (1.15) on obtient :[4]

$$(ds)^2 = A_1^2 \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right)^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right)^2 (d\alpha_2)^2 + (d\alpha_3)^2 \quad (1.16)$$

1.4.2 Relations contrainte-déformation

En utilisant les coordonnées des lignes de courbure principales qui sont mutuellement perpendiculaires, ainsi que la normale à la surface neutre comme troisième coordonnée, et en appliquant la loi de Hooke, nous pouvons déterminer les relations entre les contraintes et les déformations pour un élément tridimensionnel : (Figure 1.7)

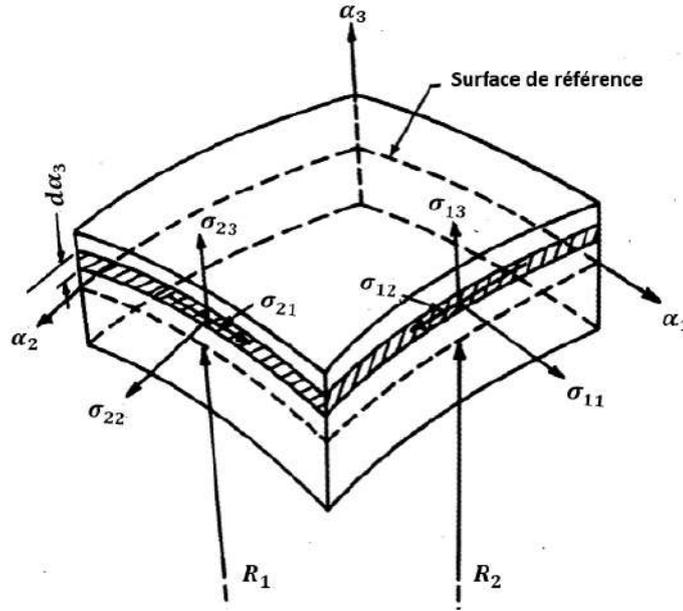


FIGURE 1.7 – Champ de contraintes exercé sur un élément différentiel de coque

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})] \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})] \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} \quad (1.20)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G} \quad (1.22)$$

G est le module d'élasticité transversal ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$).

Les contraintes normales sont représentées par σ_{11} , σ_{22} , et σ_{33} , tandis que les contraintes de cisaillement sont représentées par σ_{12} , σ_{13} , et σ_{23} . A noter que :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (1.23)$$

1.4.3 Equations d'équilibre

Le principe d'Hamilton permet de déterminer les équations du mouvement d'une coque mince et élastique (Figure 1.8), qui sont exprimées par les six équations scalaires [57] suivantes :

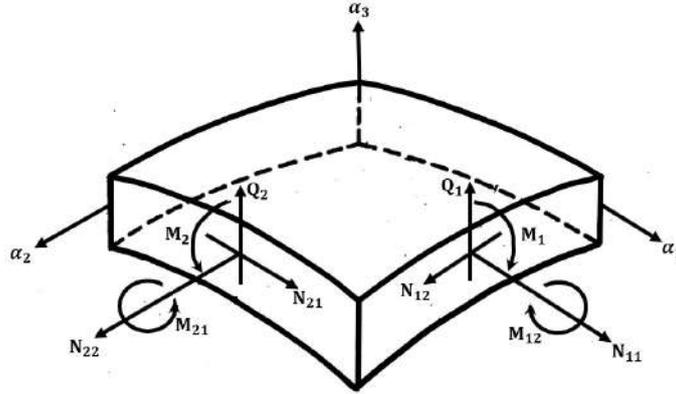


FIGURE 1.8 – Champ de forces exercé sur un élément différentiel de coque

$$\frac{\partial A_2 N_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 N_{21}}{\partial \xi_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} - N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial A_2 N_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 N_{22}}{\partial \xi_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} - N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{A_1 A_2}{R_2} Q_2 = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial A_2 Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial \xi_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} M_{22} - A_1 A_2 Q_1 = 0 \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} M_{11} - A_1 A_2 Q_2 = 0 \quad (1.28)$$

$$N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (1.29)$$

1.4.4 Relations déformation-déplacement

On pose :

$$A_1^2 \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right)^2 = g_{11}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (1.30)$$

$$A_2^2 \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right)^2 = g_{22}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (1.31)$$

$$1 = g_{33}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (1.32)$$

L'équation (1.16) s'écrit alors :

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) (d\alpha_i)^2 \quad (1.33)$$

Si un point P_1 situé à $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ subit une déflexion U_1 dans le sens α_1 , U_2 dans le sens α_2 et U_3 dans le sens α_3 , sa position va devenir $(\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2, \alpha_3 + \xi_3)$. Les déflexions U_i sont reliées aux changements de coordonnées ξ_i par :

$$U_i = \sqrt{g_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \xi_i \quad (1.34)$$

Un point P'_1 situé à $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2, \alpha_3 + d\alpha_3)$, après deflexion sera situé à $(\alpha_1 + d\alpha_1 + \xi_1 + d\xi_1, \alpha_2 + d\alpha_2 + \xi_2 + d\xi_2, \alpha_3 + d\alpha_3 + \xi_3 + d\xi_3)$. La distance entre P_1 et P'_1 après déplacement s'écrira :

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii}(\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2, \alpha_3 + \xi_3) (d\alpha_i + d\xi_i)^2 \quad (1.35)$$

Après développement [4], l'équation (1.35) devient :

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(g_{ii} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \xi_k \right) \delta_{ij} + g_{ii} \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} + g_{jj} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \right] d\alpha_i d\alpha_j \quad (1.36)$$

Posons :

$$G_{ij} = \left(g_{ii} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \xi_k \right) \delta_{ij} + g_{ii} \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} + g_{jj} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \quad (1.37)$$

On aura :

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 G_{ij} d\alpha_i d\alpha_j \quad (1.38)$$

En général, nous notons :

$$(ds)_{ii}^2 = g_{ii} (d\alpha_i)^2 \quad (1.39)$$

$$(ds')_{ii}^2 = G_{ii} (d\alpha_i)^2 \quad (1.40)$$

$$(ds)_{ij}^2 = g_{ii} (d\alpha_i)^2 + g_{jj} (d\alpha_j)^2 \quad (1.41)$$

$$(ds')_{ij}^2 = G_{ii} (d\alpha_i)^2 + G_{jj} (d\alpha_j)^2 - 2G_{ij} d\alpha_i d\alpha_j \quad (1.42)$$

En utilisant les équations (1.39 - 1.42), nous pouvons formuler les relations relatives aux déformations en fonction des déplacements :

Les déformations normales

$$\varepsilon_{ii} = \frac{(ds')_{ii} - (ds)_{ii}}{(ds)_{ii}} = \sqrt{\frac{G_{ii}}{g_{ii}}} - 1 \quad (1.43)$$

Après développement [4], on obtient :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \frac{G_{ii} - g_{ii}}{g_{ii}} \quad (1.44)$$

Les déformations de cisaillement

Pour les déformations de cisaillement (Voir le cas particulier de $i=1$ et $j=2$) (Figure 1.9)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \theta_{ij} \quad (1.45)$$

$$(ds')_{ij}^2 = (ds')_{ii}^2 + (ds')_{jj}^2 - 2(ds')_{ii}(ds')_{jj} \cos \theta_{ij} \quad (1.46)$$

$$\cos \theta_{ij} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}G_{jj}}} \quad (1.47)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{ij} \right) = \sin \varepsilon_{ij} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}G_{jj}}} \quad (1.48)$$

$$\sin \varepsilon_{ij} \cong \varepsilon_{ij} \quad (1.49)$$

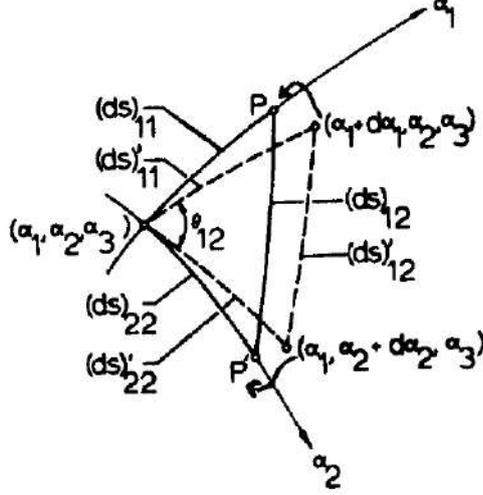


FIGURE 1.9 – Déformation de cisaillement dans le plan de la surface de référence [4]

$$\frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}G_{jj}}} \cong \frac{G_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad (1.50)$$

On aura enfin :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad (1.51)$$

En remplaçant les équations (1.34), (1.37) et (1.30-1.32) dans l'équation (1.44), on aura pour $i = 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \frac{1}{A_1(1 + \alpha_3/R_1)} \left\{ \frac{\partial [A_1(1 + \alpha_3/R_1)]}{\partial \alpha_1} \frac{U_1}{A_1(1 + \alpha_3/R_1)} \right. \\ & \left. + \frac{\partial [A_1(1 + \alpha_3/R_1)]}{\partial \alpha_2} \frac{U_2}{A_2(1 + \alpha_3/R_2)} + \frac{A_1 U_3}{R_1} \right\} + \frac{1}{A_1(1 + \alpha_3/R_1)} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} \\ & - \frac{\partial [A_1(1 + \alpha_3/R_1)]}{\partial \alpha_1} \frac{U_1}{A_1^2(1 + \alpha_3/R_1)^2} \end{aligned} \quad (1.52)$$

En employant les relations de Mainardi-Codazzi [58] :

$$\frac{\partial [A_1(1 + \alpha_3/R_1)]}{\partial \alpha_2} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial [A_2(1 + \alpha_3/R_2)]}{\partial \alpha_1} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \quad (1.54)$$

L'équation (1.52) s'écrit alors :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1(1 + \alpha_3/R_1)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \quad (1.55)$$

De la même manière, nous aurons :

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2 (1 + \alpha_3/R_2)} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + U_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \quad (1.56)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & \frac{A_1 (1 + \alpha_3/R_1)}{A_2 (1 + \alpha_3/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{U_1}{A_1 (1 + \alpha_3/R_1)} \right) \\ & + \frac{A_2 (1 + \alpha_3/R_2)}{A_1 (1 + \alpha_3/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{U_2}{A_2 (1 + \alpha_3/R_2)} \right) \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\varepsilon_{13} = A_1 \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{U_1}{A_1 (1 + \alpha_3/R_1)} \right) + \frac{1}{A_1 (1 + \alpha_3/R_1)} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} \quad (1.59)$$

$$\varepsilon_{23} = A_2 \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{U_2}{A_2 (1 + \alpha_3/R_2)} \right) + \frac{1}{A_2 (1 + \alpha_3/R_2)} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} \quad (1.60)$$

1.4.5 Les simplifications de Love

Pour les coques minces, on peut supposer que les déplacements suivant α_1 et α_2 varient linéairement à travers l'épaisseur, tandis que les déplacements suivant α_3 ne dépendent pas de α_3 , alors :

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \beta_1(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.61)$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \beta_2(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.62)$$

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_3(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.63)$$

β_1 et β_2 représentent les angles.

On suppose que les déformations de cisaillement normales sont négligées, donc :

$$\varepsilon_{13} = 0 \quad (1.64)$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \quad (1.65)$$

Les équations (1.59 et 1.64) et (1.60 et 1.65) donnent, respectivement :

$$\beta_1 = \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \quad (1.66)$$

$$\beta_2 = \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \quad (1.67)$$

Les équations (1.55-1.60) s'écrivent alors :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (u_1 + \alpha_3 \beta_1) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (u_2 + \alpha_3 \beta_2) + \frac{u_3}{R_1} \quad (1.68)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (u_2 + \alpha_3 \beta_2) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (u_1 + \alpha_3 \beta_1) + \frac{u_3}{R_2} \quad (1.69)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (1.70)$$

$$\varepsilon_{13} = 0 \quad (1.71)$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \quad (1.72)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2 + \alpha_3 \beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1 + \alpha_3 \beta_1}{A_1} \right) \quad (1.73)$$

Il est plus commode d'exprimer les relations (1.68-1.73) en séparant les déformations membranaires (indépendantes de α_3) et celles de flexion (proportionnelles à α_3) :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \alpha_3 k_{11} \quad (1.74)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + \alpha_3 k_{22} \quad (1.75)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \alpha_3 k_{12} \quad (1.76)$$

Ce qui nous permet d'écrire les déformations membranaires :

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1} \quad (1.77)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2} \quad (1.78)$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \quad (1.79)$$

et les déformations flexionnelles :

$$k_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1.80)$$

$$k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \quad (1.81)$$

$$k_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right) \quad (1.82)$$

1.4.6 Coque cylindrique circulaire

Examinons une coque cylindrique circulaire représentée sur la figure 1.10. Les lignes de courbure principales (pour chaque point de la surface de la coque, il existe un rayon de courbure maximum et minimum, dont les directions sont à un angle de $\pi/2$) sont, dans ce cas, parallèles à l'axe de révolution, où le rayon de courbure $R_x = \infty$

ou la courbure $1/R_x=0$, et le long des cercles, où le rayon de courbure $R_x=R$ ou la courbure $1/R_x=1/R$. Nous procédons ensuite à l'obtention des paramètres de forme fondamentale à partir de la définition (2.1.7). Les coordonnées curvilignes sont :

$$\alpha_1 = x \quad \alpha_2 = \theta \quad (1.83)$$

$$\bar{r} = x \bar{e}_1 + a \cos \theta \bar{e}_2 + a \sin \theta \bar{e}_3 \quad (1.84)$$

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} \right| = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \right| = A_1 = 1 \quad (1.85)$$

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} \right| = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right| = A_2 = R \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = R \quad (1.86)$$

En considérant l'équation (1.10) on obtient la forme fondamentale :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + R^2(d\theta)^2 \quad (1.87)$$

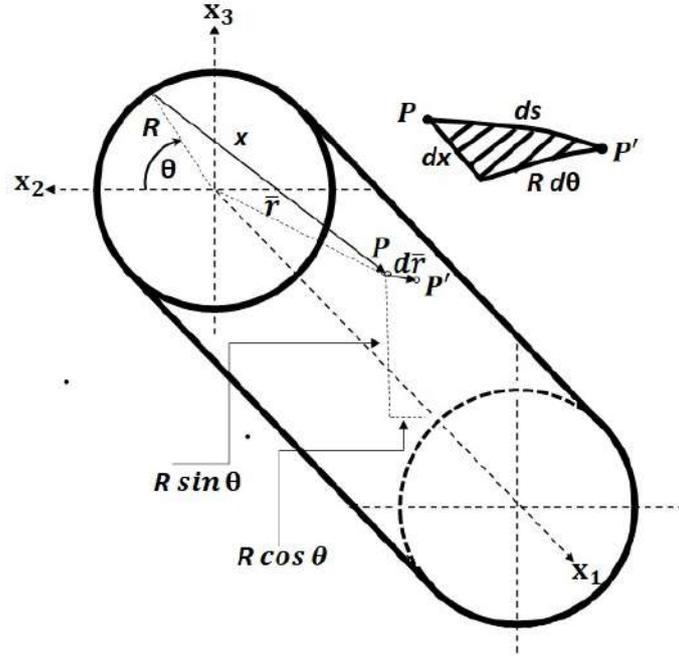


FIGURE 1.10 – Coque cylindrique circulaire

1.5 Théorie des coques élastiques minces de Sanders

Dans la dérivation habituelle des équations basée sur la première approximation de Love, la distinction entre N_{12} et N_{21} et entre M_{12} et M_{21} n'est pas considérée et l'équation (1.29) est supprimée. Cependant, dans la plupart des théories basées sur la première approximation de Love, cette équation est violée, à l'exception des coques sphériques (pour lesquelles $R_1 = R_2$), des plaques (pour lesquelles $1/R_1 = 1/R_2 = 0$) et des coques de révolution symétriquement chargées (pour lesquelles $M_{12} = M_{21} = 0$ et $N_{12} = N_{21} = 0$).[59]

Sanders a proposé une nouvelle théorie pour que de tels problèmes ne se produisent pas. Pour la construction de cette théorie, Sanders a appliqué le principe des travaux virtuels aux équations (1.24) à (1.29) afin de générer une nouvelle expression d'énergie.[60]

Ainsi, les relations déformation-déplacement (1.68-1.73) redeviennent [56] :

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1} \quad (1.88)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2} \quad (1.89)$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \quad (1.90)$$

$$k_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1.91)$$

$$k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \quad (1.92)$$

$$k_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right) + \frac{1}{2A_1 A_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left[\frac{\partial (A_2 u_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial (A_1 u_1)}{\partial \alpha_2} \right] \quad (1.93)$$

Pour une coque cylindrique circulaire de la figure 1.10 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = x & \quad u_1 = U & \quad R_1 = \infty & \quad A_1 = 1 \\ \alpha_2 = \theta & \quad u_2 = V & \quad R_2 = R & \quad A_2 = R \\ & \quad u_3 = W \end{aligned} \quad (1.94)$$

Les relations déformation-déplacement modifiées selon Sanders[60] pour le cas de coques cylindriques circulaires s'écrivent alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1.95)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{R} \quad (1.96)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (1.97)$$

$$k_{xx} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (1.98)$$

$$k_{\theta\theta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (1.99)$$

$$\bar{K}_{x\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{4R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (1.100)$$

Il est démontré [60] que toutes les déformations disparaissent pour les petits mouvements de corps rigide. Autrement dit, les relations de déformation-déplacement modifiées satisfont la condition sur la fonction de déplacement choisie, cette dernière qui doit être telle qu'elle ne permette pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements nodaux sont provoqués par un déplacement de corps rigide.

1.6 Théorie du piston

La théorie du piston est un modèle aérodynamique qui utilise l'analogie d'un piston dans un cylindre pour décrire la pression exercée sur un point d'un corps en mouvement à une vitesse supersonique. Cette théorie relie la pression exercée sur une surface à la déformation de cette surface, c'est-à-dire à la façon dont elle est déformée par la pression. La théorie du piston est souvent utilisée car elle permet de comprendre les phénomènes aérodynamiques de manière simple et peu coûteuse en termes de calculs. Elle est particulièrement utile pour les applications où la précision absolue n'est pas nécessaire, mais où une estimation rapide est suffisante.

1.6.1 La théorie du piston classique

Pour comprendre les relations de pression dans les écoulements supersoniques, Michael J. Lighthill [61] a montré que pour les profils aérodynamiques minces et symétriques, les variations de vitesse dans la direction de l'écoulement non perturbé sont faibles par rapport aux variations perpendiculaires à l'écoulement. Il a étudié comment un fluide se déplace à travers une géométrie solide qui se déplace perpendiculairement à l'écoulement. Il a défini la composante de vitesse perpendiculaire à l'écoulement non perturbé comme W , appelé courant descendant du flux d'air perturbé, qui peut être divisé en composants stables et instables. La composante stable

est causée uniquement par les propriétés géométriques et la composante instable est causée par les mouvements du profil aérodynamique. Le modèle théorique de Lighthill se concentre sur la manière dont la pression est générée par un piston (Figure 1.11)

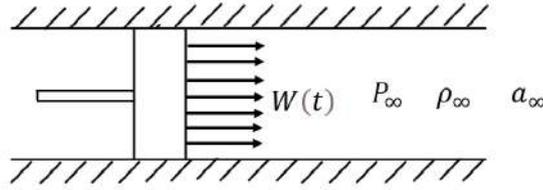


FIGURE 1.11 – Analogie de la théorie de piston

en mouvement à une vitesse donnée w dans un flux d'air. Il suppose que le mouvement descendant de l'air causé par les ailes d'un avion (downwash) reste subsonique, ce qui signifie qu'il ne génère pas d'ondes de choc. Lighthill propose ensuite que la pression exercée par le piston peut être calculée en utilisant une formule d'onde isentropique simple décrite dans l'équation (1.101). Cette équation dépend de différents paramètres tels que la pression locale P sur le piston, la pression du flux libre P_∞ , la vitesse du son ambiante a_∞ et le rapport de capacité thermique spécifique γ du flux libre.

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{w}{a_\infty}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.101)$$

La pression sur la surface du corps est approximée par la pression exercée par un piston se déplaçant dans le flux avec une vitesse équivalente à la superposition de la vitesse due à la modification de la forme du corps et de la vitesse due au mouvement rigide du corps (Equation 1.102).

$$w = \frac{\partial W}{\partial t} + v_{a_\infty} \frac{\partial W}{\partial x} \quad (1.102)$$

Avec : v_{a_∞} est La vitesse en écoulement libre. Lighthill a recommandé l'utilisation de l'expansion binomiale de troisième ordre pour l'équation de l'écoulement (Equation 1.103), en soulignant que cette expansion est suffisamment précise pour les écoulements d'expansion et de compression. Il a noté que l'influence de l'entropie est de troisième ordre dans la déviation de l'écoulement et que cette expansion est bornée par les résultats de l'équation (1.101) et de la théorie des chocs obliques.

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1 + \gamma \left(\frac{w}{a_\infty}\right) + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \left(\frac{w}{a_\infty}\right)^2 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{12} \left(\frac{w}{a_\infty}\right)^3\right] \quad (1.103)$$

Lighthill a développé une théorie appelée "théorie classique du piston" (CPT) qui permet de modéliser la pression d'un piston en fonction de sa vitesse instantanée, en négligeant l'historique de son mouvement. Cette théorie est valide pour des nombres de Mach supérieurs à 4, et prend en compte la forme de l'aile et les déformations de la

surface pour calculer la distribution de pression à l'état stationnaire et instationnaire.

1.6.2 La théorie du piston locale

La théorie du piston à écoulement local a été proposée pour la première fois par Morgan en fin des années 1950. Elle permet d'obtenir l'expression analytique de la force aérodynamique exercée sur des panneaux bidimensionnels (Equation 1.104) en se basant sur la théorie du piston de première ordre.

$$P - P_\infty = -\frac{2q}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{v_{a_\infty}} \frac{\partial W}{\partial t} \right) \quad (1.104)$$

Avec :

$$q = \rho_a v_{a_\infty}^2 / 2 \quad (1.105)$$

est la pression dynamique et ρ_a est la densité de l'air.

La théorie du piston de première ordre permet l'analyse des forces aérodynamiques pour des écoulements à des vitesses supersoniques mais ne peut pas refléter correctement l'effet non-linéaire aérodynamique pour des vitesses hypersoniques.

1.7 Matériaux à gradient fonctionnel

Le concept de "matériau à gradient fonctionnel" (FGM) est inspiré des matériaux naturels tels que les os, les dents et les fibres végétales qui ont des propriétés variant à travers leur épaisseur, et a été inventé par un scientifique japonais en 1984 [62] qui a développé un matériau capable de résister à des températures élevées pour des applications spatiales. Depuis, le concept a été adopté à travers le monde et la valeur de cette nouvelle famille de matériaux a été reconnue. Les FGM sont utilisés dans de nombreuses applications, y compris les structures de construction, les pièces de moteur, les équipements de protection individuelle, les équipements de transport, etc. Ils sont également étudiés pour leur potentiel dans les domaines de la médecine et de l'énergie.

Les FGM sont caractérisés par une variation continue de leurs caractéristiques structurales (composition chimique, microstructure, etc.), ce qui entraîne une variation continue de leurs propriétés fonctionnelles. En revanche, les matériaux composites (CMM) ont une interface "abrupte" entre la matrice et le composite inséré (céramique, etc.), qui peut provoquer l'apparition de fissures et entraîner la rupture de la pièce à long terme (Figure 1.12). Dans les FGM, cette interface est remplacée par une transition "en douceur" entre les deux matériaux, ce qui limite la fragilisation et améliore les performances fonctionnelles des pièces. En outre, les FGM permettent de tirer parti

des meilleures propriétés de chaque matériau en termes de résistance mécanique, de stabilité thermique et de résistance à la corrosion.

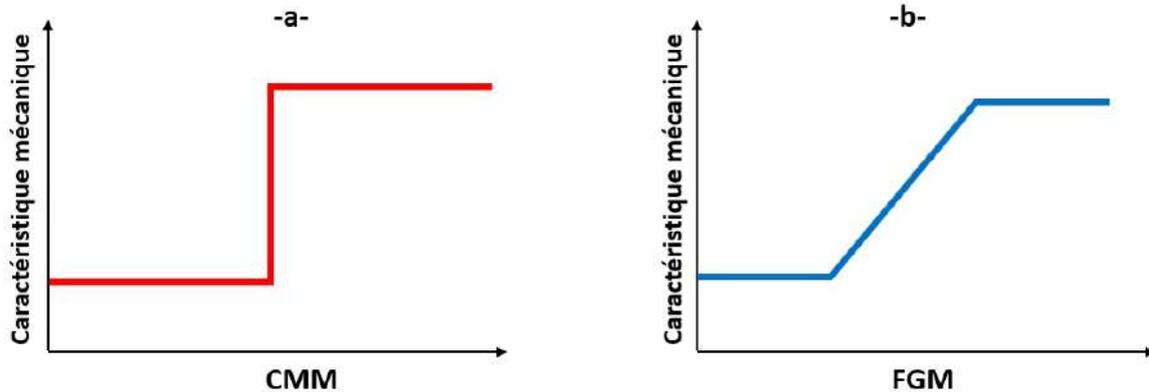


FIGURE 1.12 – -a- Evolution en rupture de la micro-structure (CMM) et -b- évolution continue de la micro-structure (FGM)

La production des FGM se divise en deux parties : la gradation et la consolidation. La gradation consiste à créer une structure spatialement inhomogène par des processus tels que la création de corps gradués à partir de matériaux de base ou de poudres, l'homogénéisation qui transforme la transition soudaine entre deux matériaux en un gradient, et la ségrégation qui commence avec un matériau macroscopiquement homogène et qui devient gradué grâce au transport de matière causé par un champ externe. La consolidation, telle que le séchage, le frittage ou la solidification, vient généralement après la gradation et doit être soigneusement planifiée pour éviter de détruire ou de modifier de manière non contrôlée le gradient créé.

1.7.1 Classification des FGMs

Les FGMs peuvent être classés selon plusieurs aspects :[6]

a) Classification basée sur la structure du FGM

De manière générale, les structures FGM se répartissent en deux catégories principales (Figure 1.13). La première catégorie correspond aux structures de gradients continus, dans lesquelles le facteur de gradient circule en continu à travers le volume du matériau. La seconde catégorie est celle des gradients discontinus, où le facteur de gradient change par paliers. Dans le premier groupe, il n'y a aucune zone nette ou ligne de séparation visible à l'intérieur du matériau pour différencier les propriétés de chaque zone. Autrement dit, il n'y a pas seulement absence d'interface entre deux côtés, mais il n'y a pas non plus de transition entre eux. Les composants du matériau changent de manière graduelle et discontinue dans l'autre groupe, appelé FGM stratifié ou séparé. Dans cette catégorie, chaque couche est visible et se distingue de la suivante grâce à une interface similaire entre elles.

Le choix du type de structure de gradient dépend en grande partie des conditions de travail du matériau. Par exemple, une application de la structure de gradient discontinu est dans la fabrication de dents. La partie externe des dents est fabriquée à partir d'un matériau hautement résistant à l'usure appelé émail, tandis que la partie interne est fabriquée en matériau ductile pour amortir les chocs et améliorer la durée de vie en fatigue des dents. Ainsi, la différence de propriétés dans chaque couche créera une structure de gradient discontinu. En revanche, un exemple d'application de matériaux à gradient continu est l'interface entre deux couches qui est essentielle. Dans les matériaux absorbants le son, l'interface entre les ondes et la couche absorbante de son est si importante que les ondes sont réfléchies si l'impédance sonore entre les deux couches est élevée. Dans de tels cas, une couche acoustique multicouche avec différents coefficients de diffusion peut être bénéfique, mais l'interface entre les deux couches ne doit pas être trop différente, d'où l'utilisation d'un matériau à gradient continu sans interface.

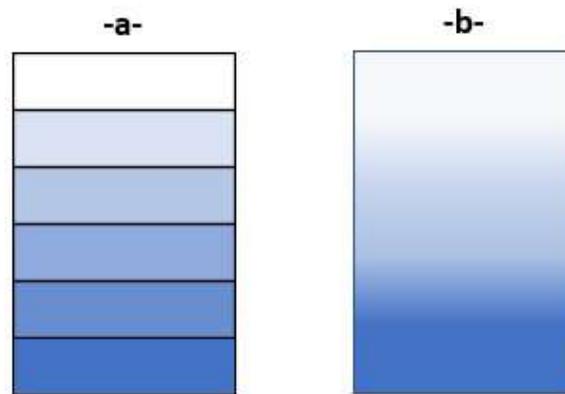


FIGURE 1.13 – Structures des FGMs -a- Structure discontinue -b- Structure continue

b) Classification basée sur le type de gradient du FGM

Il est possible de classer les FGMs en trois groupes distincts pour différencier les types de gradients : la composition du gradient, la microstructure graduée et la porosité graduée (Figure 1.14). Le premier groupe est caractérisé par une variation progressive de la composition chimique qui conduit à des phases distinctes avec des structures chimiques différentes. En fonction de la composition du matériau, ce groupe peut être constitué d'un matériau à une seule phase ou multi-phase. Le deuxième groupe est constitué de FGMs ayant une microstructure différente entre la surface et le noyau du matériau, qui est principalement produite lors du processus de refroidissement. Le traitement thermique joue un rôle important dans ces matériaux, qui sont utilisés dans des applications où la surface doit avoir certaines capacités, telles que la résistance à l'usure et à la corrosion, tandis que le noyau a une autre propriété. Enfin, le troisième groupe de classification est basé sur la porosité graduée, qui varie en fonction de l'emplacement dans le matériau. Dans ce cas, la taille et la forme des pores sont très importantes en

fonction de l'application. Les matériaux ayant une porosité graduée sont très utilisés dans l'industrie médicale.

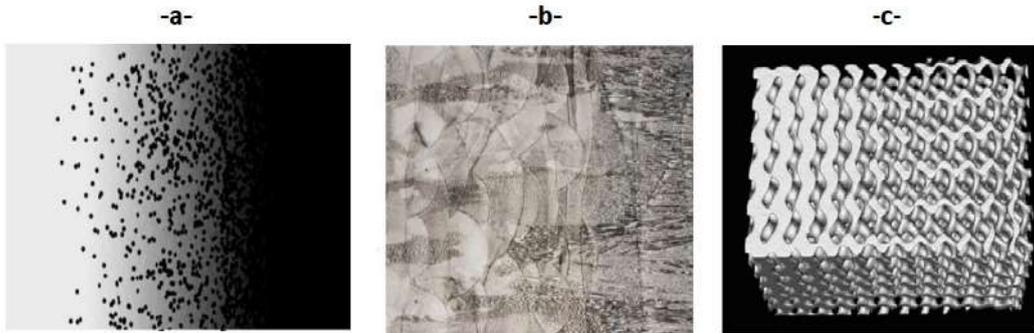


FIGURE 1.14 – Classification des FGMs selon -a- La composition -b- La microstructure -c- La porosité [5]

c) Classification basée sur la taille du FGM

Cette classification se fait selon deux types de revêtements FGM : les revêtements fins (appelés FGM coating) et les revêtements massifs (appelés FGM bulk). Les revêtements fins sont créés par des processus tels que le PVD, le CVD, le cold spray ou la projection plasma et n'affectent que la surface de la pièce, alors que les revêtements massifs concernent la totalité de la pièce (ou une grande partie) et sont réalisés par des processus tels que la métallurgie des poudres, la fabrication additive (laser cladding, ...) et la fonderie. (Figure 1.15).

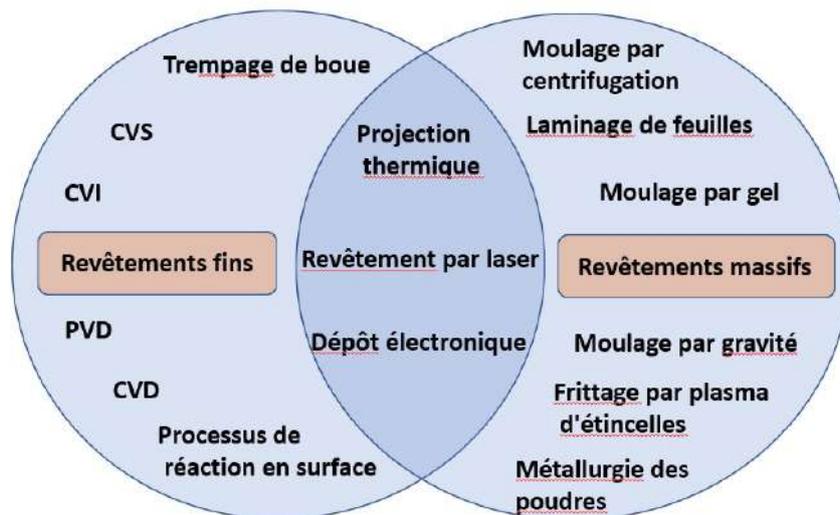


FIGURE 1.15 – Les types de revêtements des FGM

d) Classification basée sur l'état physique du FGM

Pour obtenir des FGM, diverses approches d'état physique sont disponibles, telles que les méthodes basées sur les gaz, les liquides et les solides, qui peuvent être utilisées pour obtenir des propriétés personnalisées via des modifications physiques ou chimiques. La Figure 1.16 présente les trois types d'états physiques distincts utilisés pour produire des FGM. Les méthodes basées sur les gaz comprennent le dépôt et l'infiltration chimique de vapeur (CVD/CVI) et le dépôt physique de vapeur (PVD), la pulvérisation thermique (TSP) et la réaction en surface (SRP). Les méthodes basées sur les solides impliquent la métallurgie des poudres (PM) et le frittage par plasma à étincelles (SPS). Les méthodes basées sur les liquides incluent des procédés tels que la coulée centrifuge (CCP), la combustion, le moulage par bande (TCP), le moulage par coulée (SCP), le coulage en gel (GCP), le dépôt électrophorétique (EPP), le dépôt de solutions chimiques (CSD), la solidification directionnelle (DSP), la gradation électrochimique (EGP).[6]

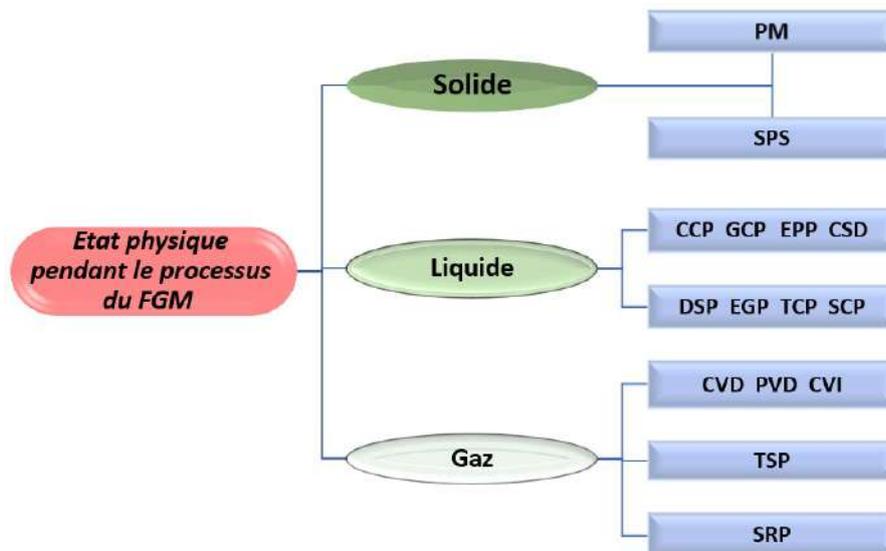


FIGURE 1.16 – Les types d'états physiques pour la fabrication des FGMs [6]

f) Classification basée sur le type de processus de dépôt

D'un point de vue pratique, il est possible de classier les FGM en fonction de leur processus de fabrication. Cette classification se divise en deux catégories distinctes. La première est appelée traitement constructif et consiste en une fabrication couche par couche, débutant par une répartition adéquate permettant la création de gradients spatiaux. La seconde catégorie correspond aux processus basés sur le transport, dans lesquels les gradients de microstructure et de composition locale sont créés par des phénomènes de transport tels que l'écoulement de fluide, la diffusion des espèces atomiques et la conduction de chaleur.

1.7.2 Applications des FGMs

Les FGM sont largement reconnus comme étant les matériaux les plus performants et de meilleure qualité dans la plupart des domaines d'application humains. Il est crucial de sélectionner avec précision les matériaux pour éviter des coûts élevés et des dommages irréparables. En plus de leur rôle critique dans la promotion du développement durable, les FGM sont également utilisés dans diverses applications, regroupées en six catégories : aérospatiale, militaire, énergie, fabrication, médecine et autres industries.

Aérospatiale

Dans le passé, les FGM étaient principalement utilisés pour les corps de navettes spatiales au Japon. De nos jours, en raison de leur haute qualité et de leurs performances, la plupart des équipements et structures aérospatiales sont fabriqués à partir de ces matériaux. Ces équipements incluent les composants des moteurs de fusées, les radômes, les structures de treillis spatiaux, les panneaux d'échange thermique, les réflecteurs, les panneaux solaires, les boîtiers de caméra, les roues de turbine, les bouchons de nez, les bords d'attaque des missiles et des navettes spatiales.

Energie

Au cours des dernières années, les fabricants d'énergie ont exploré l'utilisation de matériaux composites à gradient fonctionnel (FGM) pour améliorer les performances de leurs dispositifs énergétiques. Les FGM ont été largement utilisés dans plusieurs domaines de l'énergie, notamment les panneaux solaires, les cellules solaires, les piles à combustible, les revêtements de pales de turbine, les transducteurs ultrasonores piézoélectriques et l'électrode gradée pour la production de piles à combustible à oxyde solide. Des recherches ont été menées pour étudier la croissance de cellules solaires hybrides III-V/SiGe sur des substrats en Si à l'aide de tampons inverses gradés [63], qui ont montré des résultats prometteurs malgré la présence de problèmes préjudiciables tels que l'apparition de fissures. En outre, d'autres études ont été menées pour fabriquer et caractériser des transducteurs ultrasonores à haute sensibilité utilisant des FGMs [64].

Médecine

Les FGM, qui sont des matériaux composites dotés d'un gradient fonctionnel, sont de plus en plus utilisés pour remplacer les os et les dents endommagés ou vieillissants. Les biomatériaux doivent répondre à plusieurs exigences telles que la non-toxicité, la résistance à la corrosion, la biocompatibilité et l'esthétique. Afin d'améliorer ces propriétés, des études ont été menées sur l'utilisation des FGM. Des échafaudages FGM ont été conçus avec différentes structures pour soutenir les charges orthopédiques et tous

ont présenté des propriétés mécaniques similaires à celles de l'os humain. Les PFGS, qui sont des échafaudages poreux avec un gradient fonctionnel, ont été développés pour augmenter le taux de prolifération cellulaire dans les structures uniformes.

Militaire

Les FGMs sont couramment utilisés dans des applications militaires telles que les réservoirs, les armes à feu, les armures, les roquettes et autres armes. Pour améliorer les performances et la résistance de ces matériaux, différentes combinaisons de composites, de matériaux de structure de couche sandwich et de matériaux multicouches ont été étudiées [65]. Des études ont également été menées pour évaluer l'impact du verre-céramique sur les propriétés des armures en alumine. Les résultats ont montré que ces matériaux présentent des performances balistiques et une absorption d'énergie améliorées par rapport aux matériaux de référence.

Industrie

Les FGMs ont diverses applications dans différentes industries, notamment dans les outils de coupe et les revêtements résistants à la chaleur et à la corrosion. Récemment, une étude [66] a examiné les propriétés thermiques et mécaniques d'un matériau d'outil en céramique gradient fonctionnel $\text{Si}_3\text{N}_4/(\text{W},\text{Ti})\text{C}$. Ce matériau est renforcé avec des particules de Si_3N_4 à l'échelle nanométrique et $(\text{W},\text{Ti})\text{C}$ à l'échelle microscopique, et a une structure symétrique à cinq couches. Les résultats ont démontré que le matériau gradé possède une meilleure résistance à la fatigue thermique et une contrainte de choc thermique plus faible par rapport au matériau homogène. Aussi, Les contraintes de compression résiduelles générées par une structure gradée peuvent améliorer la résistance aux chocs thermiques et mécaniques. Une étude [67] a évalué l'efficacité d'un revêtement gradé en cuivre pour la protection contre la corrosion et l'usure. Les résultats ont démontré que le revêtement gradé en $\text{Cu}/\text{Cu-SiC}$ offre une meilleure résistance à la corrosion et convient mieux aux applications à forte charge, tandis que le revêtement gradé en cuivre est plus adapté pour les applications à faible charge.

Autres applications

Les FGM (Matériaux composites à gradient de fonctionnalité) sont utilisés dans une variété d'équipements sportifs, automobiles, électriques et électroniques. Une étude a été menée [68] pour évaluer les propriétés des FGM en aluminium renforcées par des éléments tels que le carbure de silicium et l'oxyde de magnésium. Les poudres ont été préparées en utilisant la méthode de broyage à billes et ont été ensuite compactées dans une machine d'essai de compression. Les résultats ont révélé que les matériaux de renforcement étaient correctement positionnés et que la liaison la plus forte entre

les molécules se trouvait à la surface extérieure de la pièce, ce qui a permis de retarder la rupture des échantillons. Les particules hautement denses de SiC à la périphérie extérieure ont conféré une forte résistance à l'usure, tandis que les particules de faible densité de MgO₂ ont produit une faible résistance à l'usure.

1.7.3 Lois de gradation des plaques en FGM

L'utilisation du matériau à gradient fonctionnel (FGM) implique une variation continue des constituants de matériaux multi-phasés selon un profil prédéterminé, permettant ainsi d'obtenir des macro-propriétés graduelles continues. Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur les plaques en FGM rectangulaires élastiques dont les propriétés du matériau, telles que le module d'Young et le coefficient de Poisson, varient de manière continue dans la direction de l'épaisseur. Ces propriétés sont prédéfinies sur les surfaces supérieure et inférieure en fonction des exigences de performance. Bien que le coefficient de Poisson soit considéré comme constant en raison de son faible impact sur la déformation, le module d'Young peut varier selon des fonctions puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM) ou sigmoïdes (S-FGM) [69].

La loi sigmoïde (S-FGM)

Afin d'assurer une répartition homogène des contraintes sur toutes les interfaces, deux fonctions de loi de puissance sont utilisées pour l'expression de la fraction volumique d'un matériau composite. Elles sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \\ g_2(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (1.106)$$

Avec p c'est la l'indice de la fraction volumique.

Le module d'Young du S-FGM peut être calculé en appliquant la règle de mélange suivante :

$$\begin{aligned} E(z) &= g_1(z)E_1 + [1 - g_1(z)] E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \\ E(z) &= g_2(z)E_1 + [1 - g_2(z)] E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (1.107)$$

La loi exponentielle (E-FGM)

La propriété du matériau en FGM est donnée par la fonction exponentielle suivante : (Figure 1.18)

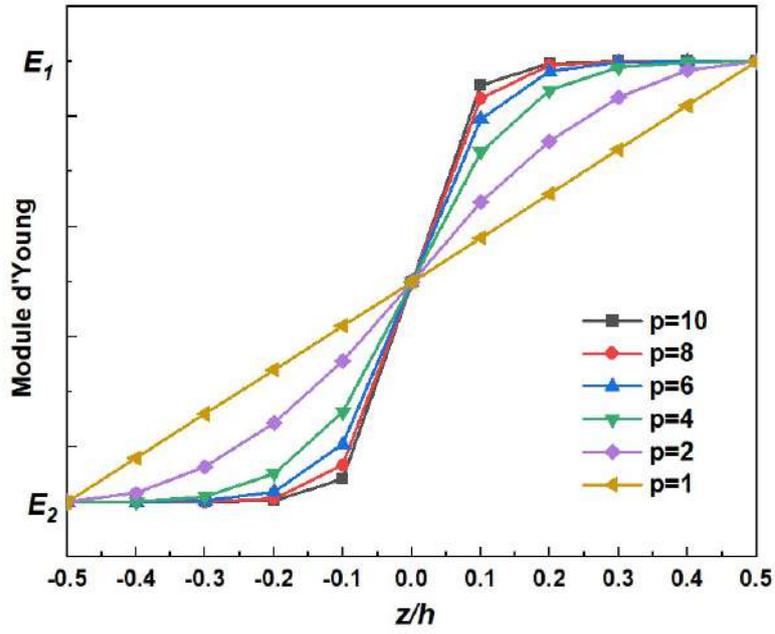


FIGURE 1.17 – la variation du moule d'Young pour une palque S-FGM

$$E(z) = E_2 e^{\frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)(z+h/2)} \tag{1.108}$$

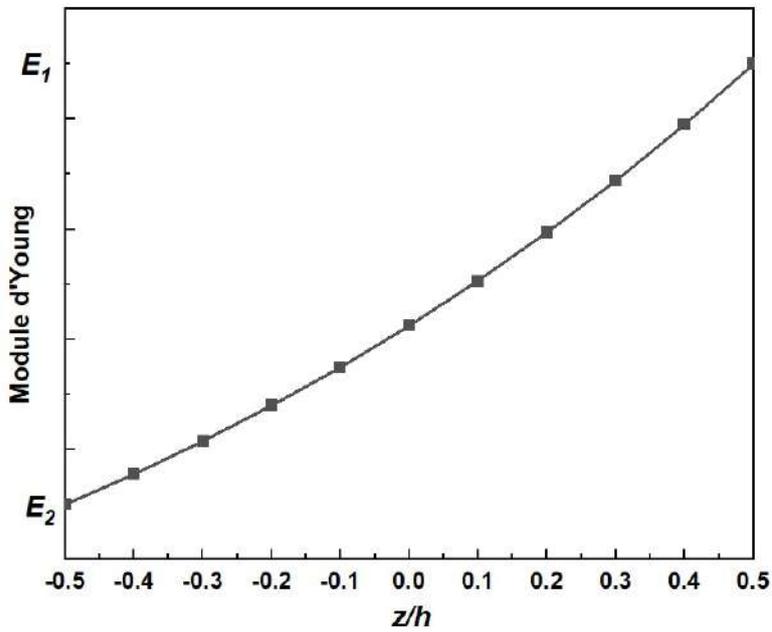


FIGURE 1.18 – La variation du module d'Young pour une palque E-FGM

La loi de puissance (P-FGM)

La dernière partie de cette thèse portera sur l'analyse des vibrations libres et des instabilités aéroélastiques des plaques P-FGM, donc la formulation de ce type de FGM sera abordée ultérieurement.

Chapitre 2

Analyse des instabilités aéroélastiques d'une plaque homogène rectangulaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente une approche par éléments finis pour analyser le flottement supersonique de plaques planes rectangulaires avec une direction d'écoulement arbitraire. L'objectif principal de ce travail est d'étendre un modèle hybride de la méthode classique des éléments finis et la théorie des coques de Sanders pour étudier les instabilités aéroélastiques dans un système de coordonnées cartésiennes. Le flux d'air supersonique est décrit par la théorie du piston du premier ordre. Par ailleurs, on s'intéresse dans cette partie à l'étude des limites aéroélastiques dans le cas des conditions aux limites irrégulières. La présente formulation développée est validée par d'autres publications et travaux de recherche. Une étude paramétrique a été réalisée pour mettre en évidence l'effet des rapports de forme, de la direction d'écoulement et de différentes conditions aux limites sur le comportement aéroélastique des plaques rectangulaires.

2.2 Formulation mathématique

Une plaque rectangulaire soumise à un écoulement d'air supersonique parallèle et faisant un angle Λ avec l'axe X est considérée Figure 2.1. La longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque sont A , B et h , respectivement. L'élément fini utilisé dans cette étude est un élément rectangulaire à quatre nœuds. La procédure de résolution doit d'abord faire intervenir un modèle structural décrivant le comportement du solide et un modèle aérodynamique décrivant celui du fluide, puis leur couplage.

A partir des équations d'équilibre de Sanders pour les coques linéaires cylindriques minces [70] (Voir annexe A5) et en posant le rayon $R = \infty$, $\theta = y$ et $rd\theta = dy$, le comportement d'une plaque en termes des champs de déplacements de sa surface moyenne est décrit comme suit :

$$P_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + P_{21} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + P_{33} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$P_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + P_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + P_{33} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$P_{44} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} (P_{45} + P_{54} + 2P_{66}) + P_{55} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (2.3)$$

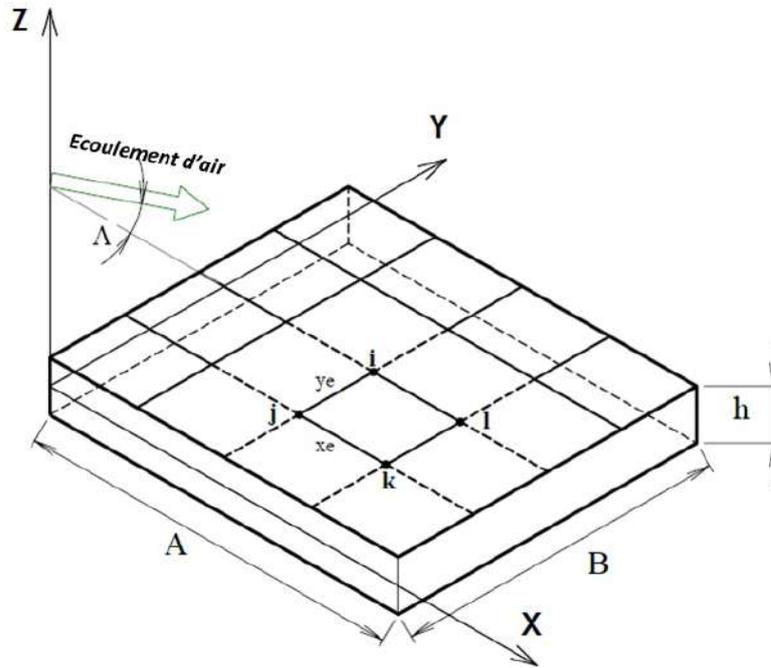


FIGURE 2.1 – Géométrie de la plaque

2.2.1 Modélisation structurelle

La plaque est supposée mince, homogène et isotrope. Pour modéliser la structure, nous avons utilisé la combinaison hybride de la méthode des éléments finis et la théorie des coques de Sanders proposées par Kerboua et Lakis [71]. Les composantes du déplacement membranaire sont présentés en terme de polynômes bidimensionnels et la composante de déplacement en flexion par la forme générale de la solution exacte de l'équation du mouvement (2.3) [72]. D'où le champ déplacement qui peut être défini comme suit :

$$U(x, y) = C_1 + C_2 \frac{x}{A} + C_3 \frac{y}{B} + C_4 \frac{xy}{AB} \quad (2.4)$$

$$V(x, y) = C_5 + C_6 \frac{x}{A} + C_7 \frac{y}{B} + C_8 \frac{xy}{AB} \quad (2.5)$$

La solution exacte de l'équation d'équilibre (2.3) de flexion est de la forme générale suivante :

$$W(x, y, t) = \sum_{i=9}^{24} C_j e^{i\pi(\frac{x}{A} + \frac{y}{B})} e^{\omega t} \quad (2.6)$$

Le développement de l'équation (2.6) en série de Taylor[72] donne :

$$\begin{aligned} W(x, y) = & C_9 + C_{10} \frac{x}{A} + C_{11} \frac{y}{B} + C_{12} \frac{x^2}{2A^2} + C_{13} \frac{xy}{AB} \\ & + C_{14} \frac{y^2}{2B^2} + C_{15} \frac{x^3}{6A^3} + C_{16} \frac{x^2 y}{2A^2 B} + C_{17} \frac{xy^2}{2AB^2} \\ & + C_{18} \frac{y^3}{6B^3} + C_{19} \frac{x^3 y}{6A^3 B} + C_{20} \frac{x^2 y^2}{4A^2 B^2} + C_{21} \frac{xy^3}{6AB^3} \\ & + C_{22} \frac{x^3 y^2}{12A^3 B^2} + C_{23} \frac{x^2 y^3}{12A^2 B^3} + C_{24} \frac{x^3 y^3}{36A^3 B^3} \end{aligned} \quad (2.7)$$

U et V représentent les composantes du champ de déplacement dans le plan de la surface médiane dans les directions X et Y . W est la composante transversale du champ de déplacement de la surface médiane. A et B sont les dimensions de la plaque et C_i sont des constantes inconnues. En utilisant une forme matricielle, les équations (2.4), (2.5) et (2.7) peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R] \{C\} \quad (2.8)$$

Où $[R]$ (Voir annexe A1) est une matrice d'ordre 3×24 et C est le vecteur des constantes inconnues d'ordre 24. L'élément utilisé a quatre nœuds et 6 degrés de liberté à chaque nœud. Le vecteur de déplacement nodal est donné par :

$$\{\delta\} = \left\{ \{\delta_i\}^T \quad \{\delta_j\}^T \quad \{\delta_k\}^T \quad \{\delta_l\}^T \right\}^T \quad (2.9)$$

Avec

$$\{\delta_i\} = \left\{ U_i \quad V_i \quad W_i \quad \frac{\partial W_i}{\partial x} \quad \frac{\partial W_i}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (2.10)$$

Les équations (2.4), (2.5), (2.7), (2.9) et (2.10) nous permettent de représenter les déplacements nodaux en fonction du vecteur des constantes inconnues :

$$\{\delta\} = [A]\{C\} \quad (2.11)$$

Donc, nous aurons : (Voir annexe A3)

$$\{C\} = [A]^{-1}\{\delta\} \quad (2.12)$$

En substituant l'équation (2.12) dans l'équation (2.8), on peut écrire l'expression du champ de déplacement comme suit :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R][A]^{-1}\{\delta\} = \begin{bmatrix} [N^{(1)}] \\ [N^{(2)}] \\ [N^{(3)}] \end{bmatrix} \{\delta\} = [N]\{\delta\} \quad (2.13)$$

$[N]$ est une matrice d'ordre 3×24 représentant la fonction de forme du déplacement de l'élément fini.

En considérant les relations (1.95 - 1.100) pour le cas de coques cylindriques circulaires de Sanders[60], le vecteur déformation pour une plaque rectangulaire s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} & -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

En remplaçant les composantes du champ de déplacement de l'équation (2.13) dans l'équation (2.14), on peut écrire :

$$\{\varepsilon\} = [Q][A]^{-1}\{\delta\} = [B]\{\delta\} \quad (2.15)$$

Où $[Q]$ (Voir annexe A2) est une matrice d'ordre 6×24 .

Le vecteur des chargements par unité de longueur s'écrit :

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Pour une plaque anisotrope, le champ de contraintes est lié au champ de déformation par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [P]\{\varepsilon\} \quad (2.17)$$

Pour une plaque isotrope (pas de couplage entre l'effet membranaire et l'effet de flexionnel), nous avons :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & \nu K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Avec

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.19)$$

Et

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (2.20)$$

Par la substitution de l'Equation (2.15) dans l'équation (2.18), on obtient :

$$\{t\} = [P][B]\{\delta\} \quad (2.21)$$

En utilisant le principe d'Hamilton[73], la matrices de masse élémentaire et la matrice de rigidité élémentaire sont respectivement écrites comme suit :

$$[m]^e = \rho_m h \int_{A^e} [N]^T [N] dA \quad (2.22)$$

$$[k]^e = \int_{A^e} [B]^T [P][B] dA \quad (2.23)$$

Où ρ_m est la masse volumique du matériau. Les équations (2.13) , (2.22) et (2.15) ,

(2.23) nous donnent respectivement :

$$[m]^e = \rho_m h [[A]^{-1}]^T \left(\int_0^{y_e} \int_0^{x_e} [R]^T [R] dx dy \right) [A]^{-1} \quad (2.24)$$

$$[k]^e = [[A]^{-1}]^T \left(\int_0^{y_e} \int_0^{x_e} [Q]^T [P] [Q] dx dy \right) [A]^{-1} \quad (2.25)$$

2.2.2 Modélisation aérodynamique

Pour l'analyse linéaire du flottement à nombre de Mach élevé, la pression aérodynamique exercée par le flux d'air appliqué à la surface externe de la plaque est modélisée généralement par la théorie du piston de premier ordre[13], son expression est donnée par : (Voir section 1.6.2)

$$p_a = \frac{-\rho v_{a\infty}^2}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} \cos \Lambda + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \Lambda \right) + \frac{1}{v_{a\infty}} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial W}{\partial t} \right) \quad (2.26)$$

Avec :

ρ , $v_{a\infty}$ et M_∞ , sont respectivement, la densité de l'air, la vitesse du flux de l'air et le nombre de Mach en écoulement libre. (Avec : $M_\infty = \frac{v_{a\infty}}{a_\infty}$) (a_∞ est la vitesse du son dans l'air en écoulement libre). D'après l'équation (2.13), on peut écrire la flèche W en fonction des déplacements nodaux comme suit :

$$W = [N_1^{(3)} N_2^{(3)} N_3^{(3)} \dots N_{24}^{(3)}] \{\delta\} = [N^{(3)}] \{\delta\} \quad (2.27)$$

La pression aérodynamique s'écrit donc :

$$p_a = -\lambda_a \left(\left[\frac{\partial N^{(3)}}{\partial x} \right] \cos \Lambda + \left[\frac{\partial N^{(3)}}{\partial y} \right] \sin \Lambda \right) \{\delta\} - g_a [N^{(3)}] \{\dot{\delta}\} \quad (2.28)$$

Avec :

λ_a est le paramètre de pression aérodynamique et g_a est le paramètre d'amortissement aérodynamique et sont exprimés comme suit :

$$\lambda_a = \frac{2q}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} \quad (2.29)$$

$$g_a = \frac{2q (M_\infty^2 - 2)}{v_{a\infty} (M_\infty^2 - 1)^{3/2}} \quad (2.30)$$

Avec q la pression aérodynamique :

$$q = \frac{\rho v_{a\infty}^2}{2} \quad (2.31)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, nous avons :

$$\int_{A^e} P_a W \, dA = \int_{A^e} \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & P_a \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \right\} dA = \int_{A^e} \{P_a\}^T \left\{ \begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \right\} dA \quad (2.32)$$

Le vecteur des forces nodales équivalentes dues à la pression aérodynamique est donné par :

$$\{F^P\}^e = \int_{A^e} [N]^T \{P_a\} dA \quad (2.33)$$

En remplaçant l'équation (2.28) dans l'équation (2.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \{F^P\}^e = & -\lambda_a \left(\int_{A^e} [N]^T \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \left[\frac{\partial N^{(3)}}{\partial x}\right] \end{bmatrix} dA \cos \Lambda + \int_{A^e} [N]^T \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \left[\frac{\partial N^{(3)}}{\partial y}\right] \end{bmatrix} dA \sin \Lambda \right) \{\delta\} \\ & - g_a \left(\int_{A^e} [N]^T \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [N^{(3)}] \end{bmatrix} dA \right) \{\dot{\delta}\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Posons :

$$[k_a]^e = -\lambda_a \left(\int_{A^e} [N]^T \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \left[\frac{\partial N^{(3)}}{\partial x}\right] \end{bmatrix} dA \cos \Lambda + \int_{A^e} [N]^T \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \left[\frac{\partial N^{(3)}}{\partial y}\right] \end{bmatrix} dA \sin \Lambda \right) \quad (2.35)$$

Et

$$[c_a]^e = -g_a \left(\int_{A^e} [N]^T \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [N^{(3)}] \end{bmatrix} dA \right) \quad (2.36)$$

Les équations élémentaires de mouvement s'écrivent donc :

$$[m]^e \{\ddot{\delta}\}^e - [c_a]^e \{\dot{\delta}\}^e + ([k]^e - [k_a]^e) \{\delta\}^e = \{0\} \quad (2.37)$$

2.2.3 Analyse de stabilité

D'après l'équation (2.37) et en utilisant la technique d'assemblage avec l'application des conditions aux limites nécessaires, nous obtenons intuitivement l'expression des équations de mouvement dans le système globale :

$$[m]\{\ddot{\delta}\} - [c_a]\{\dot{\delta}\} + ([k] - [k_a])\{\delta\} = \{0\} \quad (2.38)$$

Avec :

$\{\delta\}$, $[m]$, $[k]$, $[c_a]$ et $[k_a]$ sont respectivement le vecteur de déplacement global, la matrice de masse globale, la matrice de rigidité globale, la matrice d'amortissement aérodynamique globale et la matrice de rigidité aérodynamique globale. L'expression (2.38) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & -[c_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] - [k_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.39)$$

La solution générale de l'équation (2.38) peut être exprimée comme suit :

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} e^{\Omega t} \quad (2.40)$$

Avec :

Ω et $\{\delta_0\}$ sont respectivement la valeur propre et le vecteur propre. La substitution de l'équation (2.35) dans l'équation (2.34) conduit à un problème aux valeurs propres avec des solutions complexes qui peuvent être exprimées par la forme suivante :

$$\Omega = \Omega_r + i\Omega_i \quad (2.41)$$

Avec :

Ω_r et Ω_i sont respectivement la partie réelle de la et la partie imaginaire de la valeur propre. La partie imaginaire représente la fréquence naturelle de la plaque et la partie réelle son amortissement. Pour plus de commodité, nous définissons le paramètre de la pression dynamique adimensionnel λ^* , la fréquence adimensionnelle Ω_i^* et l'amortissement adimensionnel Ω_r^* comme suit :

$$\lambda^* = \frac{2qA^3}{K\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (2.42)$$

$$\Omega_i^* = \Omega_i A^2 \sqrt{\frac{\rho_m h}{K}} \quad (2.43)$$

$$\Omega_r^* = \Omega_r A^2 \sqrt{\frac{\rho_m h}{K}} \quad (2.44)$$

Il est important de se prévenir des défaillances structurelles dues à la divergence ou au flottement [74]. Théoriquement, la divergence se produit lorsque la réponse linéaire du système croît de façon exponentielle avec le temps [75]. Ce type d'instabilité s'observe lorsque la fréquence diminue et tend vers 0 [76]. L'occurrence du flottement est généralement liée par le premier point de fusion de deux fréquences naturelles consécutives de la plaque et la pression aérodynamique correspondante est appelée pression aérodynamique critique de flottement [77, 78].

2.3 Résultats et discussions

Dans cette section, nous présentons les résultats des investigations numériques obtenus à l'aide d'un code de calcul en fortran que nous avons développé. Des plaques isotropes constituées d'aluminium Tableau 2.1 sont considérées.

La figure 2.2 schématise les différentes plaques étudiées pour différentes conditions aux limites (SSSS, SCSS, CCCC, PSSSS). Avec les notations : S pour simplement supporté, C pour encasté, F pour libre et P pour simplement supporté au coin.

Matériau	Module d'Young (E)	Coefficient de Poisson(ν)	Masse volumique (ρ_m)
Aluminium	70 <i>GPa</i>	0.3	2700 <i>kg/m</i> ³

TABLEAU 2.1 – Caractéristiques du matériau

2.3.1 Validation et comparaison

Dans un premier temps, la présente formulation est validée en considérant l'analyse de flottement d'une plaque carrée isotrope entièrement simplement supportée étudiée par Song et al [7]. Il est bien connu que la précision de la méthode des éléments finis dépend du nombre d'éléments utilisés. Par conséquent, un ensemble de calculs ont été effectués pour déterminer le nombre minimum d'éléments requis pour la discrétisation des plaques. Comme le montre la figure 2.3, pour une plaque entièrement simplement supportée soumise à un flux d'air supersonique, l'indépendance du maillage a été étudié en analysant des cas avec différentes tailles de maillage jusqu'à ce que des valeurs cohérentes soient atteintes. Il est observé que des résultats satisfaisants sont obtenus pour 6×6 éléments. Pour des tailles de maillage plus importantes, il n'y a pas de variations observées pour les valeurs de la fréquence critique ainsi que celles des fréquences propres de la plaque à vide. Le flottement est une instabilité aéroélastique induite par l'interactions des forces aérodynamiques, inertielles et élastiques, il se pro-

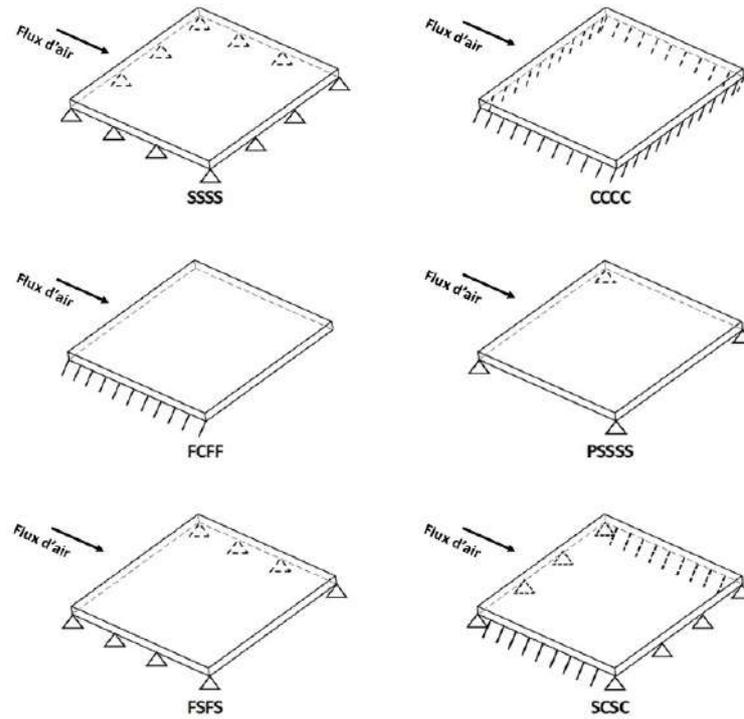


FIGURE 2.2 – Conditions aux limites

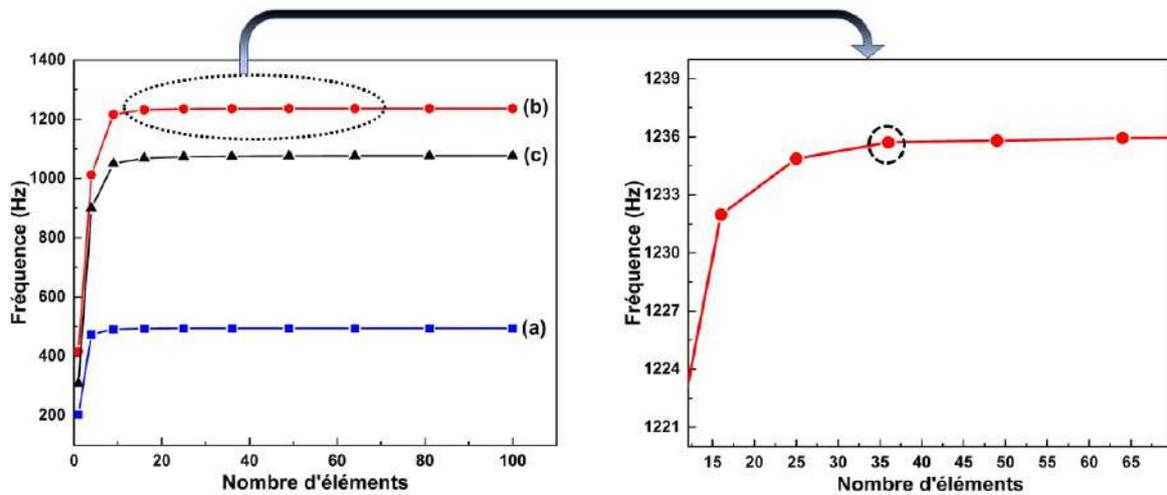


FIGURE 2.3 – Convergence des premières fréquences propres et de la fréquence critique (-a- Fréquence du Premier mode à vide, -b- Fréquence du deuxième mode à vide, -c- Fréquence critique)

duit lorsque deux modes coïncident à la même pression aérodynamique appelée pression aérodynamique critique [76]. La variation des fréquences pour des valeurs croissantes du paramètre de la pression dynamique adimensionnelle pour une plaque (SSSS) est illustré à la figure 2.4. Il est observé que les fréquences des deux premiers modes de la plaque fusionnent pour une valeur critique $\lambda_{cr}^* = 511.37$, de même que cette variation est conforme à celle publiée par Song et al[7], avec seulement 36 éléments, alors que ces

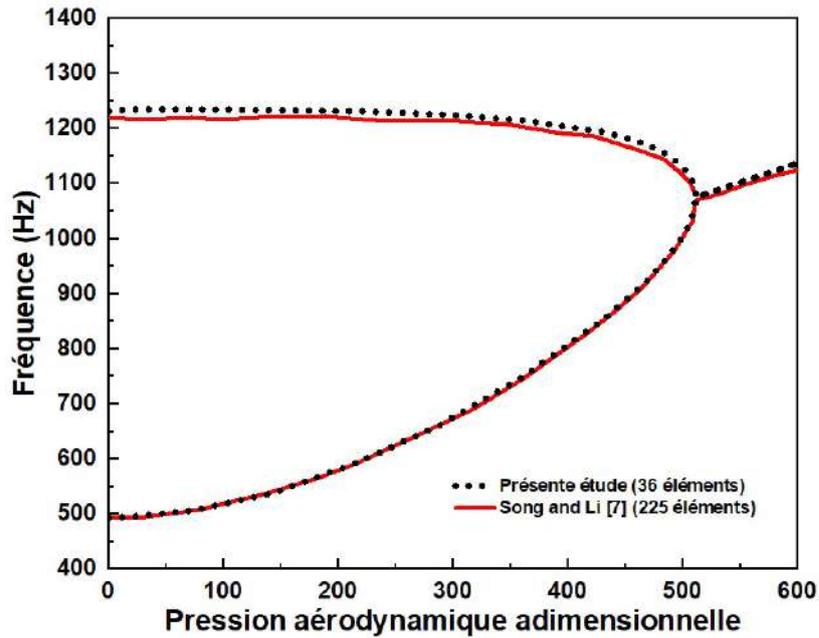


FIGURE 2.4 – Evolution des fréquences d’une plaque carrée SSSS comparée à celle de song [7]

derniers utilisaient 225 éléments pour le même cas. Des résultats similaires pour des plaques CSCS et FSFS sont obtenus (Figures 2.5 et 2.6). L’approche proposée révèle un meilleur comportement de convergence par rapport à celui de Song et al [7].

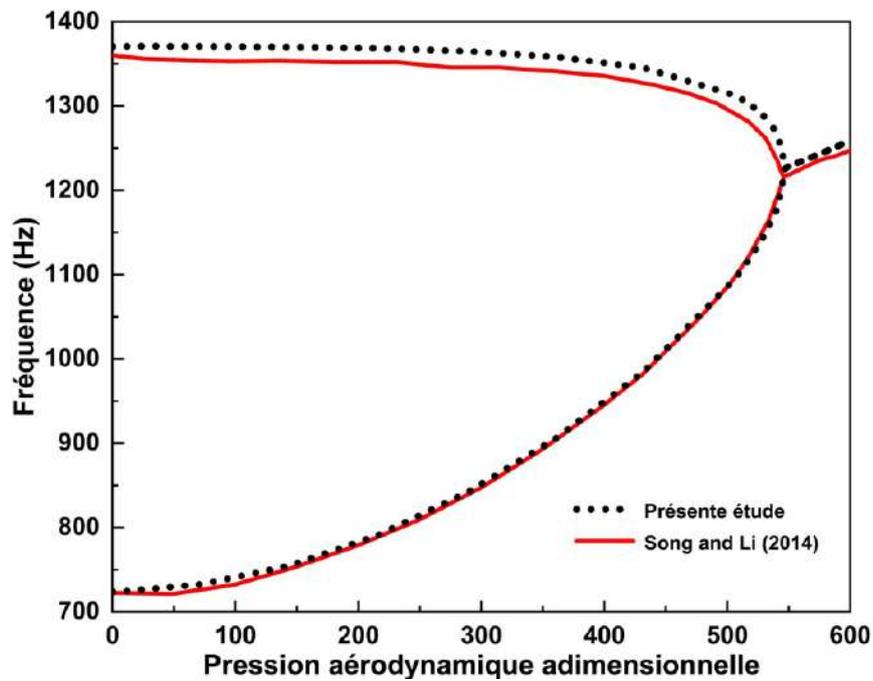


FIGURE 2.5 – Evolution des fréquences d’une plaque carrée CSCS comparée à celle de song [7]

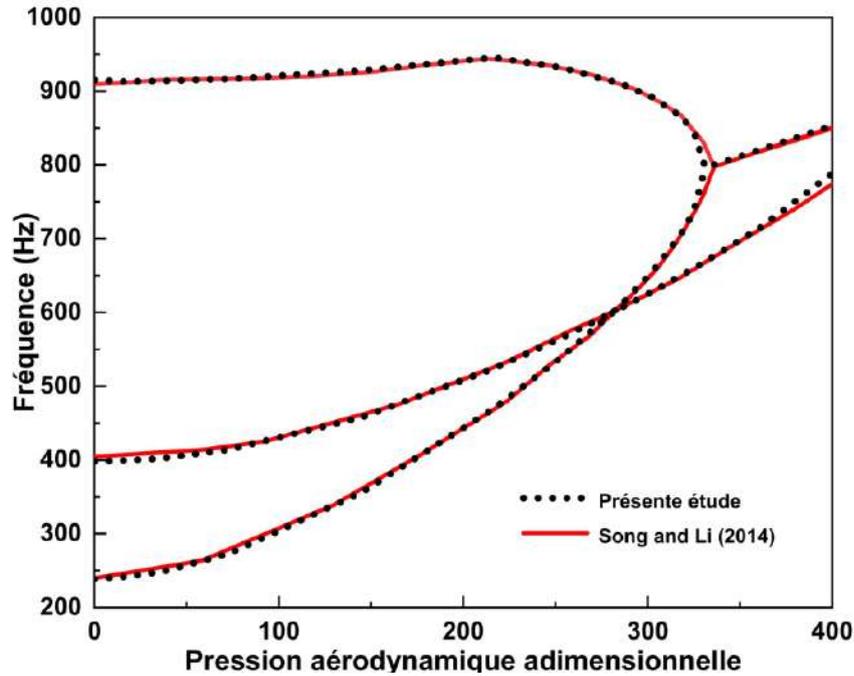


FIGURE 2.6 – Evolution des fréquences d’une plaque carrée FSFS comparée à celle de song [7]

La figure 2.7 présente l’évolution du premier mode et du second mode pour une augmentation de la pression dynamique (0, 511.37). Il est intéressant de noter que le premier et le second mode correspondants à la pression dynamique critique sont similaires.

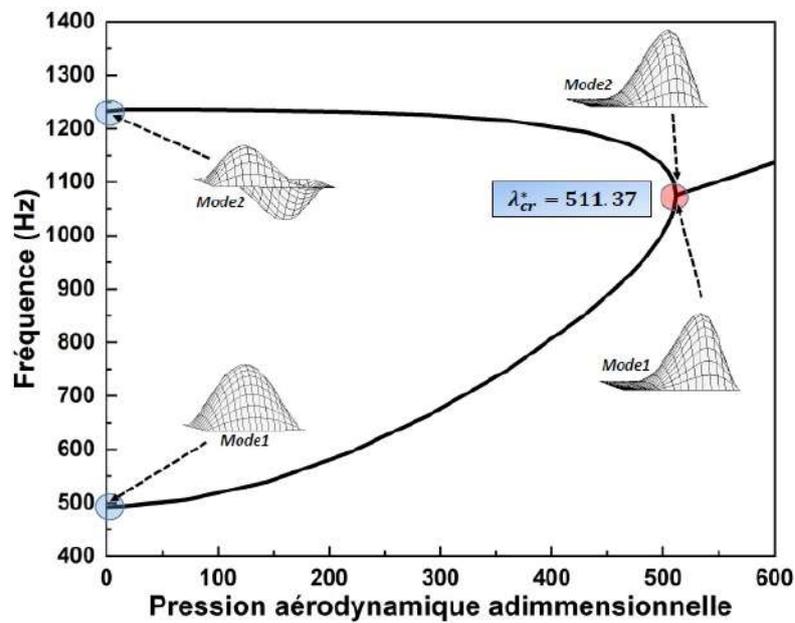


FIGURE 2.7 – Influence de la pression dynamique sur les modes propres des la plaque

2.3.2 Effet des conditions aux limites régulières sur les limites du flottement

Pour étudier l'effet des conditions aux limites régulières sur la limite du flottement, nous allons considérer deux types de plaques (SSSS et CCCC), comme illustré à la figure 2.8.a. Pour une plaque carrée SSSS, la fréquence du premier mode augmente, tandis que la fréquence du deuxième mode diminue lorsque le paramètre de pression dynamique λ^* augmente. Pour des valeurs supérieures de λ^* , ces fréquences fusionnent en un seul mode. De la même sorte, le mode 3 et le mode 4 fusionnent pour une plus grande valeur de pression dynamique. Un amortissement positif signifie explicitement un état d'instabilité. La figure 2.8.b montre qu' Les figures 2.8.c et 2.8.d présentent les limites du flottement pour une plaque CCCC. Un comportement similaire au cas illustré prédominamment est observé. L'effet des conditions aux limites sur l'apparition du flottement est illustré dans les Figures 2.8.e et 2.8.f, on y présente une comparaison de l'évolution des deux premières valeurs propres entre des plaques simplement appuyées aux quatre bords et des plaques totalement encastées. On observe que pour le premier cas (SSSS), le début du flottement se produit pour $\lambda_{cr}^* = 511.37$ tandis que la pression dynamique critique pour une plaque (CCCC) est $\lambda_{cr}^* = 850.58$. En effet, ceci est dû au fait que les plaques (CCCC) sont plus rigides que les plaques (SSSS). Dans le tableau 2.2, nous avons regroupé les résultats obtenus par la présente approche comparés à ceux des études publiées antérieurement, et ce pour différentes conditions aux limites. On peut observer que les valeurs des fréquences propres ainsi que la pression dynamique critique sont obtenus avec une précision acceptable.

2.3.3 Effet de la direction de l'écoulement sur les limites du flottement

L'orientation du flux d'air est un facteur clé dans la prédiction des limites d'instabilité dynamique des panneaux. Dans cette section, l'influence de ce paramètre crucial est étudiée pour des plaques rectangulaires à différents rapports de forme (A/B). Pour une plaque carrée entièrement simplement appuyée (SSSS), l'effet de l'angle d'écoulement sur la pression dynamique critique est présenté dans la figure 2.9. Les résultats évalués par l'approche proposée s'avèrent être en bon accord avec les résultats disponibles publiés par Sanders, Bon [10]. Une variation symétrique de la pression dynamique critique est observée, avec une valeur maximale qui correspond à $\Lambda = 45^\circ$. Les valeurs de pression dynamique sont les mêmes pour $\Lambda = 30^\circ$ et $\Lambda = 60^\circ$ et aussi pour $\Lambda = 0^\circ$ et $\Lambda = 90^\circ$. On peut clairement constater que le cas le plus critique est obtenu lorsque le flux d'air est perpendiculaire à l'un des bords de la plaque.

Afin de comprendre l'effet de l'orientation de l'écoulement sur l'instabilité aéroélastique

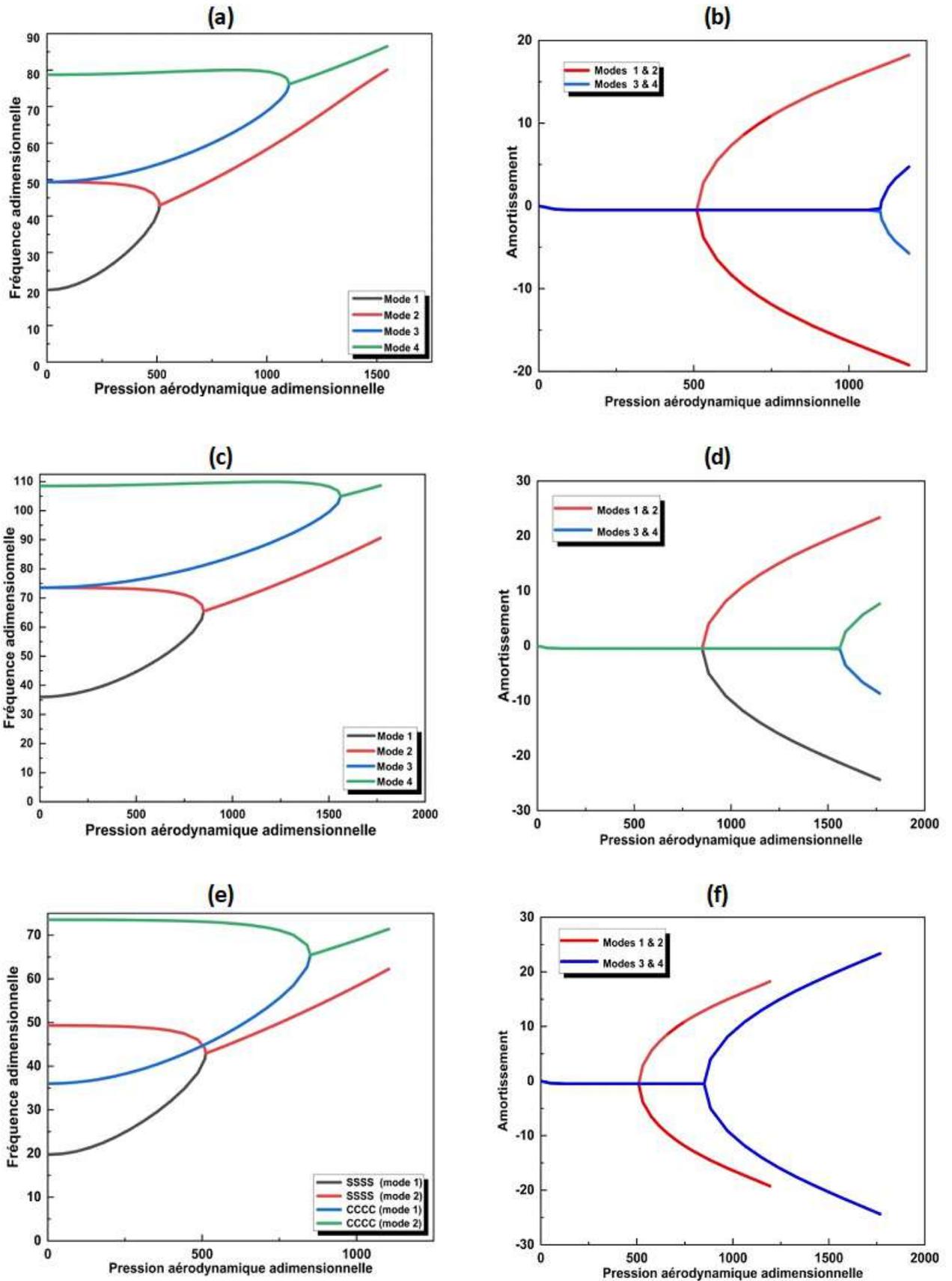


FIGURE 2.8 – Les limites de flottement pour différentes conditions aux limites

Conditionts aux limites	Références	Dans le vide		Fusion	
		Ω_1	Ω_2	λ_{cr}^*	Ω_{cr}^*
SSSS	Présente approche	19.74	49.33	511.37	42.93
	Sanders, Bon [28] (Exact)	19.61	49.35	512.60	42.99
	Sanders, Bon [28] (FEM)	19.74	49.38	511.80	42.93
	Srinivasan and Babu [31]	19.31	48.44	521.30	42.86
	Abbas, Rui [32]	21.89	54.96	536.90	43.96
	Dhital, Han [79]	–	–	512.50	42.97
	Dhital and Han [80]	19.69	49.29	515.29	43.04
	Grover, Maiti [81]	–	–	512.00	43.04
CCCC	Présente approche	36.00	73.52	850.58	65.44
	Sanders, Bon [28](Exact)	35.99	73.89	877.00	63.85
	Sanders, Bon [28](FEM)	36.00	73.53	850.00	65.44
	Srinivasan and Babu [31]	35.99	73.80	877.00	65.44
	Abbas, Rui [32]	40.35	83.04	913.17	68.45
	Durvasula [35]	35.99	73.42	837.73	–
	Dhital, Han [79]	35.97	73.38	856.04	65.49
PSSSS	Présente approche	7.11	15.77	47.97	11.52
	Srinivasan and Babu [31]	6.99	15.65	45.75	11.37
	Dowell [82]	7.50	17.30	57.50	11.00
	Srinivasan and Munaswamy [83]	7.14	15.79	–	–
	Abbas, Rui [32]	7.79	16.40	48.36	11.85
FCFF	Présente approche	3.47	8.51	58.13	6.46
	Rossettos and Tong [84]	3.43	8.23	61.15	6.23
	Srinivasan and Babu [31]	3.40	8.48	58.35	6.43
	Abbas, Rui [32]	3.79	8.77	47.83	6.68

TABLEAU 2.2 – Comparaison des Limites du flottement pour différentes conditions aux limites

d'une plaque rectangulaire, on va présenter plus loin la variation des fréquences propres par rapport à la pression dynamique adimensionnelle et ce pour différents angles d'orientation et différents rapports de forme ($A/B = 0.5, 1.25, 2$). Le premier couplage correspondant à la pression dynamique critique se produit entre le mode 3 et le

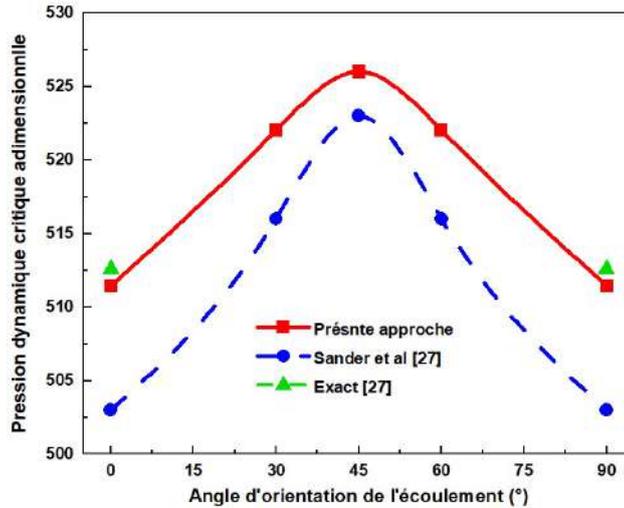


FIGURE 2.9 – Influence de l’angle d’écoulement sur la pression dynamique critique. ($A/h = 100$)

mode 2, comme indiqué dans la figure 2.10. Dans les Figures 2.11 et 2.12 , pour des plaques de rapport de forme de 1,25 et 2, on observe que l’augmentation de l’angle d’orientation de l’écoulement fait porter la pression dynamique critique vers des valeurs plus élevées. Il est important de noter que pour des rapports supérieurs à 1 ($A/B = 1,25$ et 2), et pour un angle d’écoulement $= 90^\circ$, le mode critique se produit par le couplage du deuxième et du troisième mode. Dans la Figure 2.13, le paramètre de pression dynamique critique est tracé en fonction de l’angle d’écoulement pour différents rapports de forme. On peut clairement constater que la pression dynamique critique est sensible à la variations de l’angle d’écoulement et le rapport de forme. Pour un rapport $A/B = 0,5$, la pression dynamique critique diminue à mesure que l’angle d’écoulement augmente. Pour des rapports de forme supérieurs à 1 (c’est-à-dire, $A/B = 1,25$ et 2), le cas le plus dangereux est observé lorsque l’angle d’écoulement est égal à 0° , c’est-à-dire que le flux d’air est aligné le long du côté le plus long.

2.3.4 Effet des conditions aux limites irrégulières sur les limites du flottement

L’objectif principal de ces simulations numériques est d’étudier une variété de scénarios potentiellement catastrophiques et évaluer leur impact sur les caractéristiques aéroélastiques. Pour cela, une série de calculs ont été effectués pour différentes conditions aux limites d’une plaque rectangulaire illustrées sur la figure 2.14.

Les conditions aux limites jouent un rôle majeur dans la stabilité dynamique d’une structure. Lors de l’examen des résultats de la Figure 2.15, pour $\Lambda = 0^\circ$, il est démontré que l’absence d’un support aux bords parallèles à la direction d’écoulement ou dans la

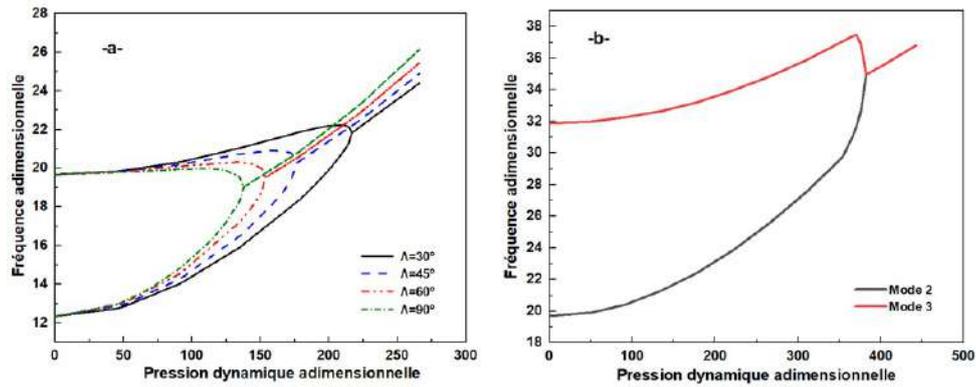


FIGURE 2.10 – Variation des fréquences propres d’une plaque rectangulaire avec un rapport de forme de 0.5 pour différentes directions d’écoulement :-a- $\Lambda = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$; -b- $\Lambda = 0^\circ$

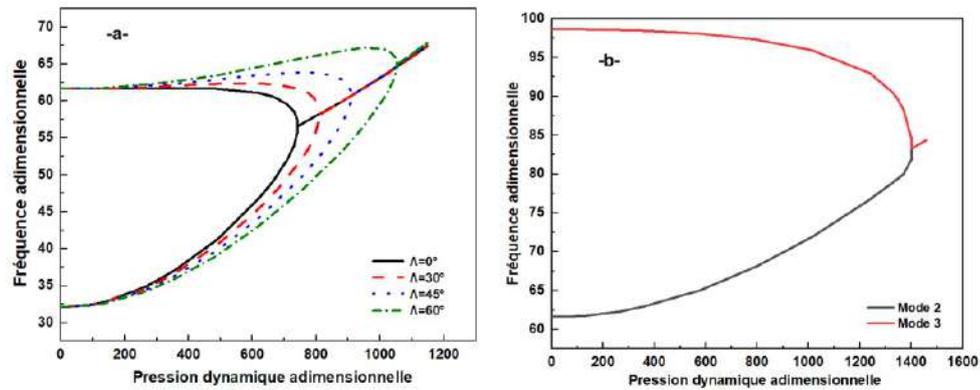


FIGURE 2.11 – Variation des fréquences propres d’une plaque rectangulaire avec un rapport de forme de 1.25 pour différentes directions d’écoulement :-a- $\Lambda = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; -b- $\Lambda = 90^\circ$

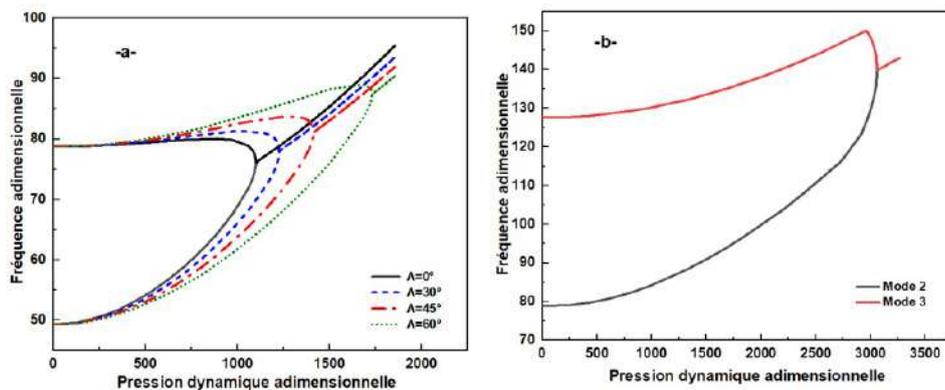


FIGURE 2.12 – Variation des fréquences propres d’une plaque rectangulaire avec un rapport de forme de 2.0 pour différentes directions d’écoulement :-a- $\Lambda = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; -b- $\Lambda = 90^\circ$

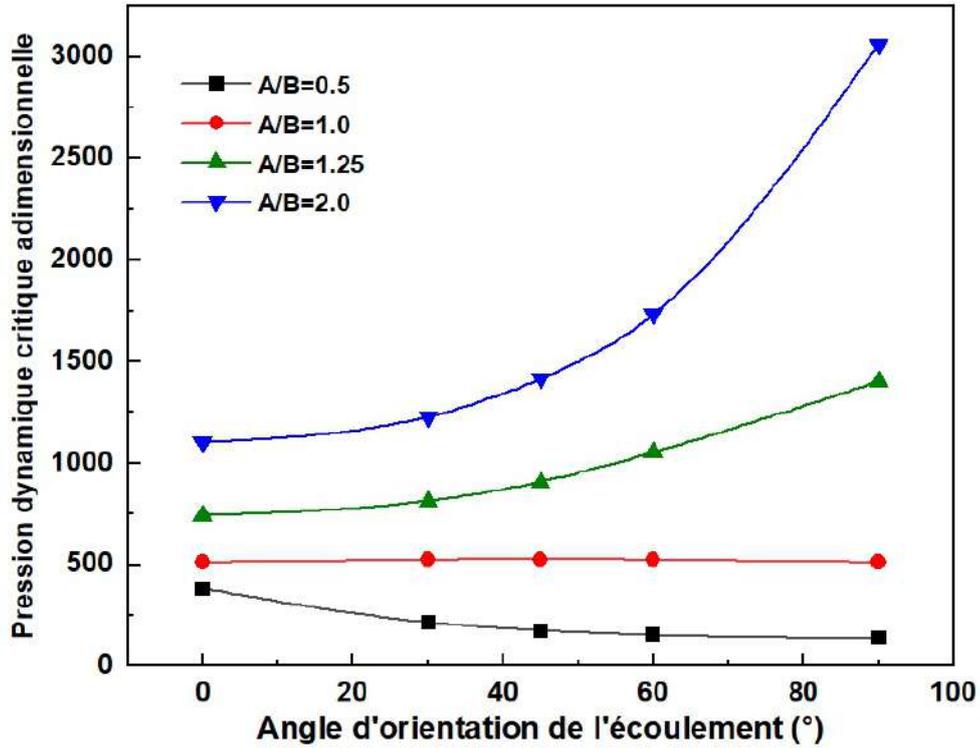


FIGURE 2.13 – Influence de l'angle d'écoulement sur la pression dynamique critique pour différents rapports de forme

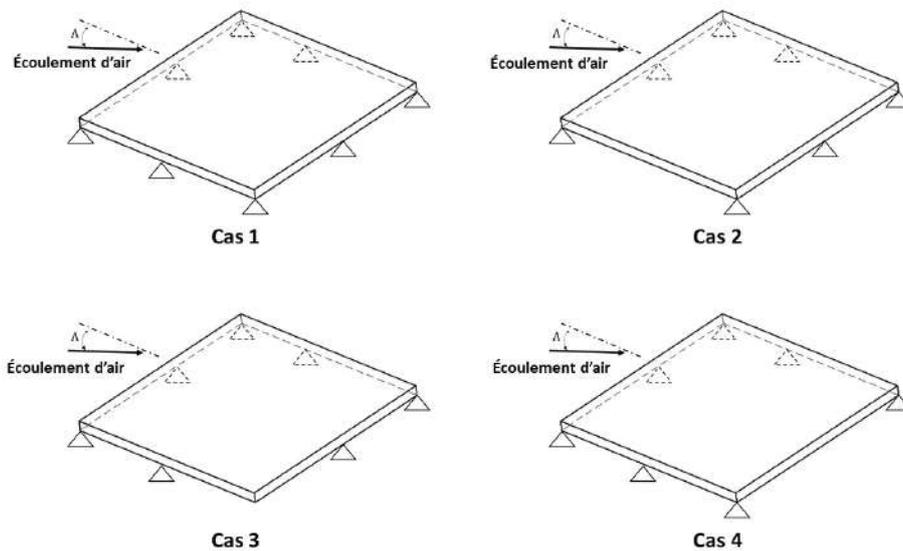


FIGURE 2.14 – Configurations de la plaque

direction perpendiculaire au flux d'air entraîne des modifications importantes sur la stabilité aéroélastique de la structure. En effet, les plaques dans les cas 1 et 2 présentent une instabilité par flottement aux pressions dynamiques critiques de $\lambda_{cr}=275.71$ et $\lambda_{cr}=256.11$, respectivement. Cependant, pour les cas 3 et 4, une instabilité par diver-

gence se produit à une pression dynamique beaucoup plus faible $\lambda_{cr} \approx 172$. En observant ces résultats, il est clair que la suppression d'un support sur les bords le long ou perpendiculairement à la direction d'écoulement a des effets différents sur la stabilité dynamique de la structure. L'absence d'un support au bord perpendiculaire au flux d'air, réduit considérablement les limites de stabilité, ce qui rend la divergence, le mode d'instabilité le plus dominant. Les pressions dynamiques critiques prévues sont présentées dans le tableau 2.3 pour différentes directions d'écoulement. Les résultats montrent que pour le cas 1, l'instabilité est gouvernée par le phénomène de flottement. On observe également que les pressions dynamiques critiques les plus basses sont dues à des instabilités de type divergence. Les configurations les plus critiques sont celles des cas 3 et 4 pour $\Lambda = 0^\circ$. Donc, on peut noter que le retrait du support situé sur le bord perpendiculaire au flux d'air expose la structure à l'instabilité par divergence. Comme on peut le constater dans le tableau 2.4, pour $1 \leq A/B \leq 1.75$, les configurations explorées présentent des instabilités de type flottement. Cependant, pour $0.5 \leq A/B \leq 1$, les cas 1 et 2 sont toujours gouvernés par l'instabilité de type flottement, tandis que les cas 3 et 4 perdent leur stabilité par divergence.

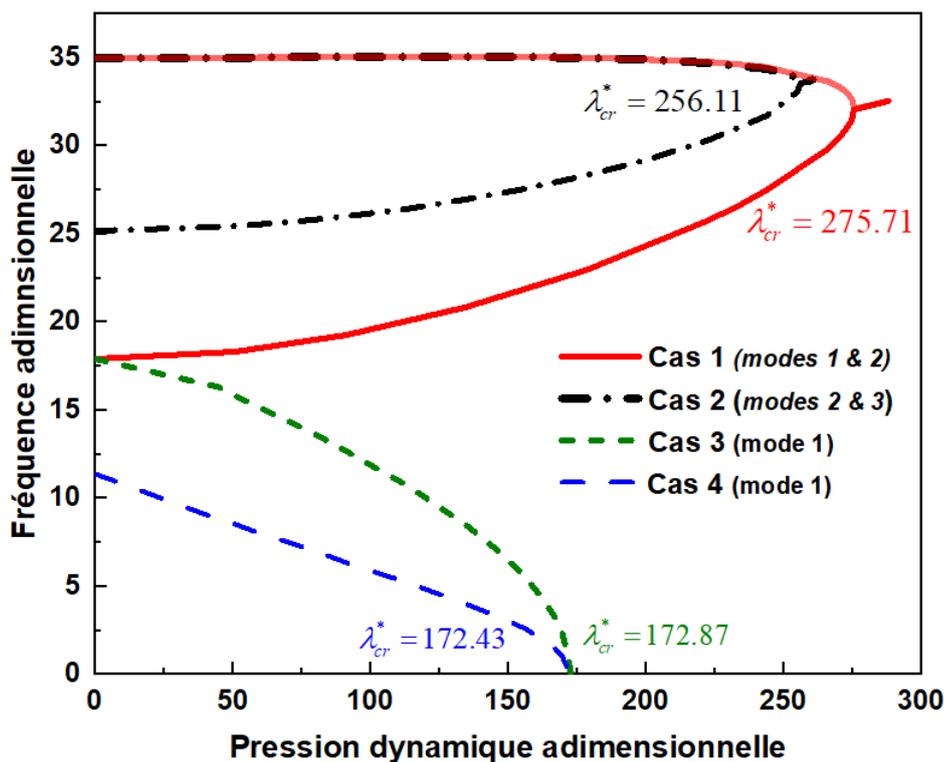


FIGURE 2.15 – Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la pression dynamique adimensionnelle

$\Lambda(^{\circ})$	Pression dynamique critique			
	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
0	275.71	256.11	172.87*	172.43*
45	251.49	234.12	260.08	273.94
90	275.71	202.03	193.04	256.11
135	251.49	234.12	219.39	234.12
180	275.71	256.11	193.04	202.03
225	251.49	273.94	260.08	234.12
270	275.71	172.43*	172.87*	256.11
315	251.49	273.94	115.98*	273.94

TABLEAU 2.3 – Influence de la direction de l'écoulement pour une plaque carrée

A/B	Pression dynamique critique			
	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
0.5	69.68	60.26	32.02*	11.29*
0.75	181.85	122.04	86.17*	45.83*
1	275.71	256.11	172.87*	172.43*
1.25	175.28	178.56	12.81	297.73
1.5	205.77	330.12	33.91	254.57
1.75	126.65	329.46	78.80	273.06

TABLEAU 2.4 – Pression dynamique critique adimensionnelle pour différents rapports d'aspect

2.4 Conclusion

Une analyse par éléments finis pour prédire les caractéristiques de flottement et de divergence d'une plaque rectangulaire dans un écoulement supersonique, avec des conditions aux limites et des directions d'écoulement différentes a été réalisé. Nous avons utilisé une approche hybride combinant la méthode des éléments finis et la théorie des coques de Sanders pour modéliser la partie structure. La charge aérodynamique est modélisée à l'aide de la théorie du piston de premier ordre. Des études de convergence et de comparaison ont confirmé la validité et la fiabilité de notre modèle.

Par ailleurs, nous avons observé que les limites d'instabilités dépendent fortement des variations de la direction de l'écoulement. Pour les plaques carrées, la pression

dynamique critique maximale se produit lorsque l'angle d'écoulement est de 45° , tandis que la pression minimale est observée pour des angles de 0° et 90° . En ce qui concerne les plaques rectangulaires, la pression dynamique la plus faible est observée lorsque l'écoulement est parallèle au côté le plus long. Nous avons également démontré que l'absence d'un support aux bords de la plaque entraîne des modifications significatives dans les limites de stabilité. Dans ce cas, les plaques présentant des conditions aux limites irrégulières peuvent subir une instabilité de type flottement ou divergence, en fonction du rapport d'aspect et de l'orientation de l'écoulement.

Chapitre 3

Étude du comportement dynamique d'une plaque en FGM

3.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) résultent de la combinaison d'au moins deux constituants distincts. La spécificité de cette classe de composites est une variation continue des propriétés du matériau selon des directions privilégiées. C'est en 1984 que des chercheurs japonais ont inventé ce nouveau type de matériaux composites appelés matériaux à gradient fonctionnel [[85], [86]]. Ces matériaux gradués ont d'abord été conçus pour réduire les contraintes thermiques dues à la température élevée des interfaces métal-céramique dans le cadre du projet de navette spatiale japonaise [87]. On peut citer notamment l'exemple d'utilisation des FGM pour les véhicules de rentrée dans l'espace, lorsque la navette spatiale rentre dans l'atmosphère terrestre, un gradient thermique est générée par la friction de l'air à une vitesse élevée. Si les structures de la navette spatiale sont fabriquées à partir de FGMs, l'effet de ce gradient est limité seulement à la surface extérieure en céramique et se transmet légèrement à la surface inférieure. Par conséquent, la température à la surface inférieure est considérablement réduite, ce qui évite ou réduit les dommages structurels dus aux contraintes et aux déformations thermique. Les FGM conventionnels présentent une variation des propriétés des matériaux dans une seule direction. Pour répondre à la demande croissante de l'industrie pour des matériaux de haute performance, les propriétés des FGM doivent être graduées dans deux ou plus de deux directions [88]. Ce concept révolutionnaire de matériaux est très populaire dans diverses applications d'ingénierie, notamment dans les secteurs aérospatial, automobile, électronique et biomédical [89]. L'introduction des FGM a attiré une attention considérable et suscité un grand intérêt scientifique. Pour modéliser le comportement de ces matériaux, les chercheurs ont utilisé dans leurs travaux trois classes de méthodes : les approches analytiques, semi-analytiques et

numériques. Swaminathan et al. [90] ont présenté une revue complète des différentes méthodes employées pour étudier le comportement statique, dynamique et de stabilité des plaques en FGM. Les approches analytiques des structures à gradient fonctionnel sont déjà bien connues dans la littérature [91]. Par exemple, le comportement mécanique des plaques de matériaux à gradient fonctionnel sous une charge transversale a été étudié par Chi et Chung [69] sur la base de la théorie classique des plaques et de l'expansion des séries de Fourier. Dong [92] a étudié le comportement des vibrations libres tridimensionnelles de plaques annulaires FG sous différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de Chebyshev - Ritz. Chakraverty et Pradhan [93] ont utilisé la méthode Reyleigh-Ritz pour étudier la vibration libre de plaques rectangulaires exponentielles à gradient fonctionnel dans un environnement thermique avec des conditions aux limites générales. Une approche semi-analytique est proposée par Singh et Harsha [94] pour l'analyse thermomécanique d'une plaque sandwich poreuse S-FGM pour différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de Vlasov de Galerkin. Les méthodes analytiques sont limitées aux problèmes dont la géométrie et les conditions aux limites sont relativement simples. Par conséquent, les méthodes numériques sont largement utilisées pour les problèmes d'ingénierie complexes [90]. La méthode sans maillage est d'une excellence évidente dans la simulation numérique de la dynamique élastique des FGM [95]. La principale difficulté des méthodes sans maillage est l'imposition de conditions aux limites essentielles. Le temps de calcul est également élevé dans les méthodes sans maillage par rapport à la méthode des éléments finis [96]. En ce qui concerne la méthode des éléments finis pour les plaques FGM, nous pouvons citer les travaux publiés de Prakash et Ganapathi [8] qui ont étudié les caractéristiques de flottement supersonique de panneaux plats à gradient fonctionnel, y compris les effets thermiques, en utilisant une procédure d'éléments finis. Sohn et Kim [97] ont étudié les stabilités statique et dynamique de panneaux à gradient fonctionnel soumis à des charges thermiques et aérodynamiques combinées. Prakash, et al. [98] ont exploré l'influence de la position de la surface neutre sur le comportement de stabilité non linéaire des plaques à gradient fonctionnel. Prakash, et al. [99] ont publié une étude par éléments finis sur les caractéristiques de vibration de flexion de grande amplitude des plaques FGM sous une charge aérodynamique. Récemment, Katili, et al. [100] ont développé un élément Q4s efficace pour l'analyse des structures de plaques FGM basée sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre. La méthode de projection discrète du cisaillement (DSPM) est utilisée pour éviter le phénomène de blocage du cisaillement. Maknun et al [101] ont appliqué un élément quadrilatère de cisaillement discret pour l'analyse statique de la flexion, des vibrations libres et du flambage des FGM. Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude du comportement aéroélastique d'une plaque rectangulaire FGM mince en utilisant une nouvelle formulation éléments finis.

3.2 Modélisation de la structure FGM

Considérons une plaque rectangulaire élastique (Figure 3.1). Le module d'Young et la masse volumique de la plaque varient d'une façon continue dans la direction de l'épaisseur (l'axe Z dont l'origine se situe à la surface médiane de la plaque) (Equations (3.1) et (3.2)), cette variation est illustrée dans la figure 3.2 avec des fractions volumique qui sont fonctions de puissance (Equation (3.1)), on parle alors de plaques (P-FGM)[69].

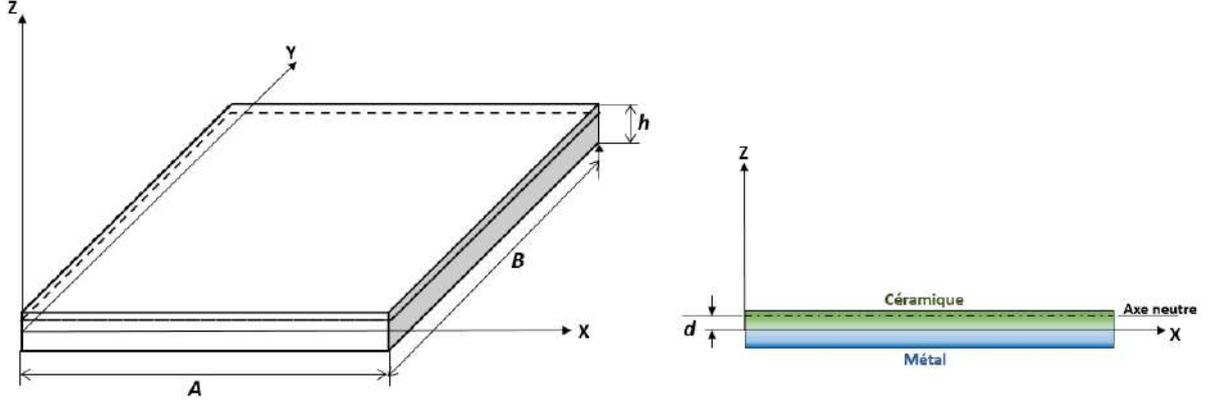


FIGURE 3.1 – Géométrie d'une plaque FGM

$$E(z) = g(z)E_c + [1 - g(z)]E_m \quad (3.1)$$

$$\rho(z) = g(z)\rho_c + [1 - g(z)]\rho_m \quad (3.2)$$

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (3.3)$$

Le concept de plan neutre est largement utilisé dans la modélisation et la conception des structures en FGM [98, 102, 103, 104]. Dans ce cas, la surface neutre et la surface moyenne géométrique ne coïncident pas. La distance de la surface neutre par rapport à la surface moyenne géométrique (Figure 3.1) peut être calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$d = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} zE(z)dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z)dz} \quad (3.4)$$

Pour une plaque en FGM, on reprend l'expression (2.18), avec : (Voir annexe A4)

$$D = \int_{-\frac{h}{2}+d}^{\frac{h}{2}+d} \frac{E(Z)}{(1 - \nu^2)} dz \quad (3.5)$$

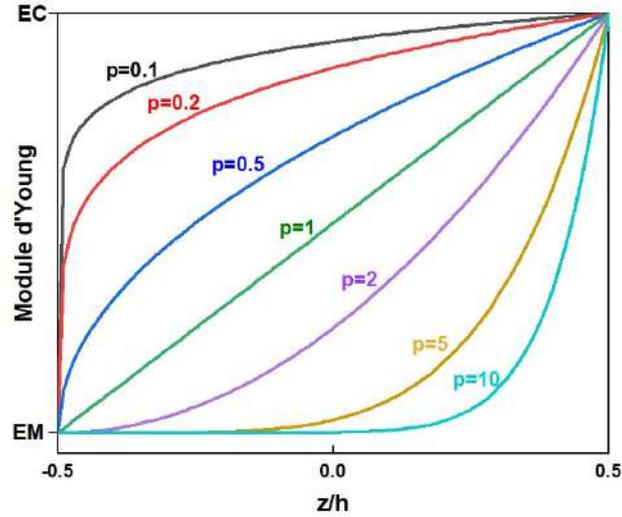


FIGURE 3.2 – Variation du module d'Young pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique

et

$$K = \int_{-\frac{h}{2}+d}^{\frac{h}{2}+d} \frac{E(z)z^2}{(1-v^2)} dz \quad (3.6)$$

La matrice de masse élémentaire et la matrice de rigidité élémentaire s'écrivent respectivement :

$$[m]^e = [[A]^{-1}]^T \left(\int_{V_e} \rho(z)[R]^T[R]dV \right) [A]^{-1} \quad (3.7)$$

$$[k]^e = [[A]^{-1}]^T \left(\int_0^{y_e} \int_0^{x_e} [Q]^T[P][Q]dx dy \right) [A]^{-1} \quad (3.8)$$

Le chargement induit par l'écoulement de l'air est modélisé par théorie du piston de premier ordre :[105]

$$p_a = \frac{-\rho U_\infty^2}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{U_\infty} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial W}{\partial t} \right) \quad (3.9)$$

Pour l'analyse des vibrations libres, on doit résoudre le système matriciel global suivant :

$$[m]\{\ddot{\delta}\} + [k]\{\delta\} = \{0\} \quad (3.10)$$

En assumant une solution de la forme :

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} e^{i\omega t} \quad (3.11)$$

Où $\{\delta\}$ est le vecteur de déplacement global et ω est la fréquence naturelle du système

(rad/sec). En introduisant (3.11) dans l'équation (3.10), on obtient le problème de valeurs propres suivant :

$$\text{Det} [[k] - \omega^2 [m]] = 0 \quad (3.12)$$

La solution de ce système nous permet d'avoir les fréquences et les modes de vibrations libres de la plaque. Pour résoudre le problème couplé, on se réfère à la section (2.2.3).

3.3 Résultats et discussions

Afin d'évaluer les performances de la formulation proposée, deux cas d'études sont considérés : le cas des vibrations libres et celui des vibrations induites par les écoulements d'air supersoniques, avec les configurations représentées sur la figure 3.3 et la figure 3.4, respectivement. Les deux différentes combinaisons de FGM considérées dans cette étude ainsi que leurs propriétés mécaniques sont dressées dans le tableau 3.1.

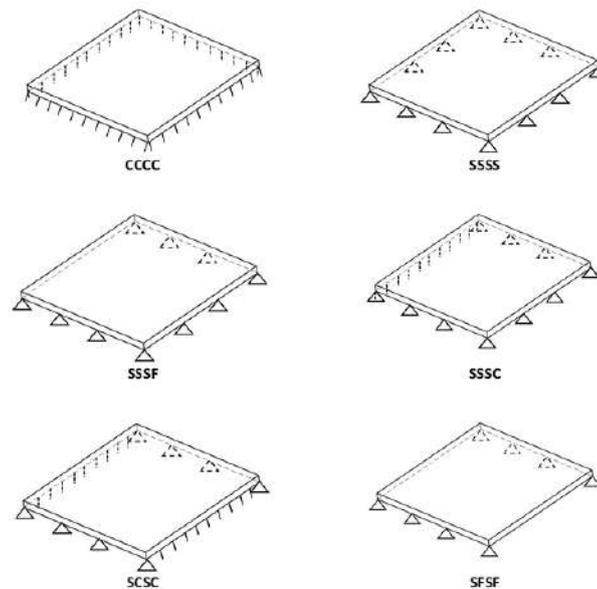


FIGURE 3.3 – Configurations pour le cas des vibrations libres

3.3.1 Vibrations libres

Pour le cas d'une plaque carrée en FGM (Al/Al_2O_3) simplement supportée, les résultats des travaux de Katili, et al. [100], Hosseini-Hashemi, et al. [106], Zhao, et al. [107] sont utilisés pour comparaison. D'après le tableau 3.2, il est clair que des résultats satisfaisants sont obtenus pour 6×6 éléments. Pour des maillages plus raffinés, on n'observe pas d'amélioration significative des valeurs des fréquences propres. Il est clair que l'indépendance des résultats obtenus par la présente formulation du nombre des

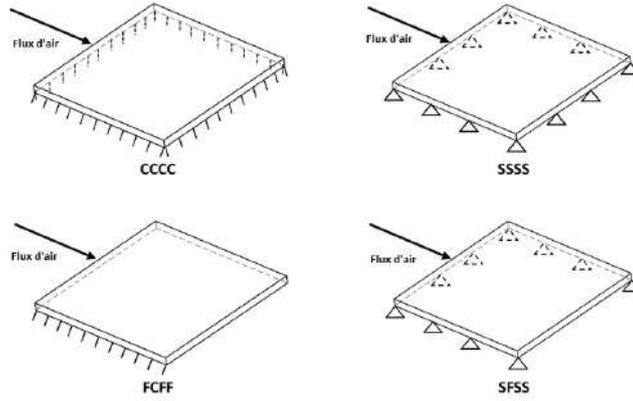


FIGURE 3.4 – Configurations pour le cas des écoulements supersoniques

Propriété	Céramique		Métal
	Alumine (Al_2O_3)	Zircone (ZrO_2)	Aluminium (Al)
Module d'Young (GPa)	380	151	70
Masse volumique (kg/m^3)	3800	3000	2707
Coefficient de Poisson	0.3	0.3	0.3

TABLEAU 3.1 – Propriétés des matériaux

éléments du maillage est atteinte à un nombre d'éléments inférieurs à celui nécessaire pour les éléments $Q4\gamma_s$ et $DKMQ$.

Approche	Maillage	p=0		p=0.5		p=1		p=4		p=10	
		Ω_1^*	Er(%)								
FEM	(2x2)	14.311	-	12.118	-	10.919	-	9.488	-	9.115	-
FEM	(4x4)	14.912	4.2	12.627	4.2	11.378	4.204	9.887	4.205	9.498	4.202
FEM	(6x6)	14.931	0.127	12.643	0.127	11.392	0.123	9.899	0.121	9.509	0.116
FEM	(8x8)	14.933	0.013	12.644	0.008	11.394	0.018	9.9	0.01	9.511	0.021
$kp - Ritz$ [106]	Exacte	14.80	-	12.5	-	11.30	-	9.80	-	9.40	-
$FSDT$ [107]	(17x17)	14.64	-	12.41	-	11.18	-	9.70	-	9.31	-
$Q4\gamma_s$ [100]	(16x16)	14.792	-	12.534	-	11.296	-	9.804	-	9.408	-
$DKMQ$ [100]	(16x16)	14.791	-	12.534	-	11.296	-	9.804	-	9.407	-

TABLEAU 3.2 – Convergence et comparaison des fréquences de vibration libre d'une plaque FGM(Al/Al_2O_3) carrée (SSSS) pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique ($A/h = 20$) $\Omega^* = 10^3 \times \Omega h \sqrt{\rho_{Al_2O_3}/E_{Al_2O_3}}$

On peut voir aussi que l'indice de fraction volumique p a une influence sur les valeurs de la fréquence naturelle adimensionnelle. Cela peut être attribué au fait que l'augmentation de l'indice de loi de puissance fait que la fraction volumique métallique soit dominante ce qui confère à la structure plus de flexibilité. Afin d'évaluer la précision de l'approche proposée pour l'analyse des fréquences propres des plaques rectangulaires, nous avons étudiés les mêmes cas résolus analytiquement par Baferani, et al. [108]. D'après les résultats résumés dans le tableau 3.3, nous observons une très bonne concordance des fréquences propres calculées comparés à celles déjà publiés pour le cas des plaques rectangulaires pour différents conditions aux limites et différentes compositions [108]. Les erreurs relatives observées sont inférieures à 10^{-3} , ce qui reflète une excellente précision de la formulation proposée pour ces cas tests. Il est aussi clair que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance et par conséquent de la fraction volumique métallique fait diminuer les valeurs des fréquences naturelles pour les différentes conditions aux limites étudiées.

p	A/B	SSSS		SCSC		SFSF		SSSC		SSSF	
		FEM	Exacte	FEM	Exacte	FEM	Exacte	FEM	Exacte	FEM	Exacte
0	1	115.91	115.87	170.00	170.02	56.57	56.48	138.85	138.77	68.62	68.51
	0.5	72.42	72.39	80.26	80.35	57.13	57.06	75.80	75.69	60.42	60.36
0.5	1	98.15	98.01	143.95	143.82	47.90	47.75	117.57	117.42	58.11	58.03
	0.5	61.32	61.33	67.96	67.93	48.37	48.33	64.19	64.24	51.16	51.04
1	1	88.44	88.31	129.71	129.65	43.16	43.09	105.94	105.78	52.36	52.21
	0.5	55.25	55.12	61.24	61.14	43.59	43.48	57.84	57.84	46.10	46.00
2	1	80.41	80.35	117.93	117.81	39.24	39.17	96.32	96.27	47.60	47.55
	0.5	50.24	50.07	55.68	55.70	39.63	39.59	52.58	52.60	41.92	41.92

TABLEAU 3.3 – Comparaison des fréquences de vibration libre d'une plaque FGM(Al/Al_2O_3) avec la solution exacte, pour : différentes valeurs d'indice de fraction volumique, différentes conditions aux limite et différents rapports de forme ($A/h = 100$) $\Omega^* = \Omega \pi^2 (A^2/h) \sqrt{\rho_{Al}/E_{Al}}$

Les quatre premières formes modales de plaques carrées FGM (Al/ZrO_2) sous trois différentes conditions aux limites sont illustrées sur la figure 3.5. Nous observons des formes modales totalement symétriques pour les deux premiers cas étudiés présentant des conditions aux limites symétriques (a : simplement supportée et b : entièrement encastree), tandis que la symétrie des formes modales n'est pas vérifiée pour le cas de plaque en porte-à-faux.

La figure 3.6 illustre la variation de la première fréquence naturelle de plaques

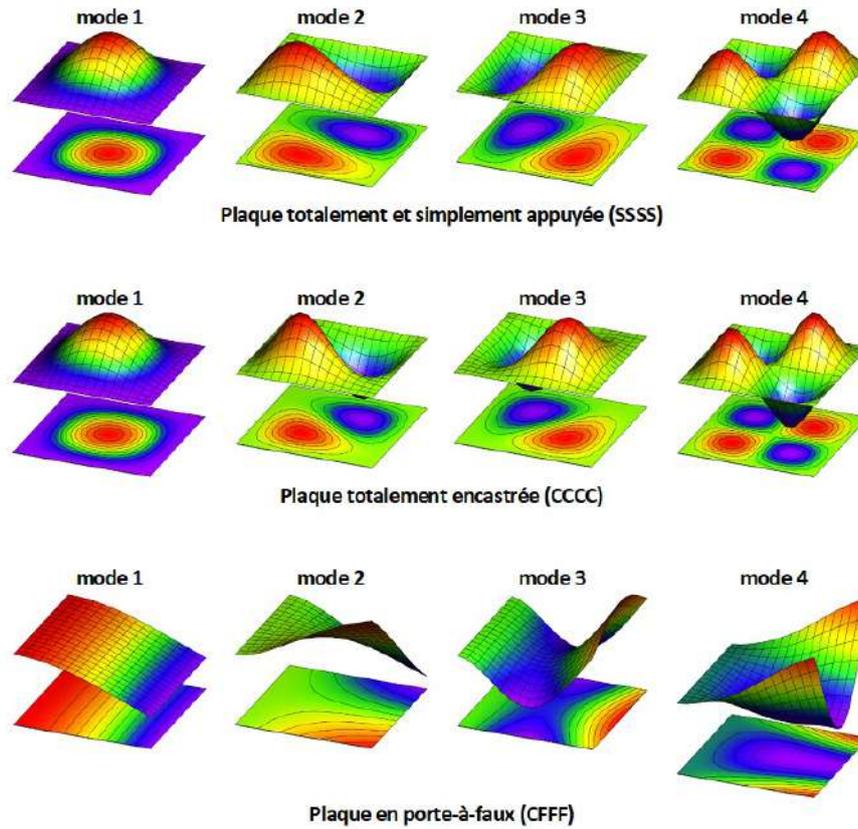


FIGURE 3.5 – Modes d’une plaque FGM pour différentes conditions aux limites

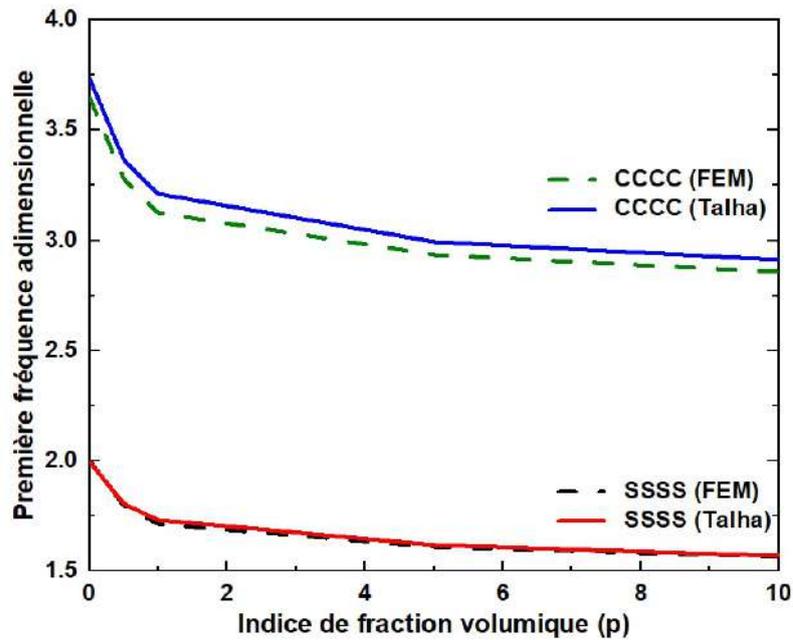


FIGURE 3.6 – Première fréquence adimensionnelle d’une plaque FGM carrée (Al/ZrO_2) ($A/h = 20$) $\Omega^* = \Omega \sqrt{12(1 - \nu^2)} \rho_{ZrO_2} A^4 / \pi^4 E_{ZrO_2} h^2$

FGM (Al/ZrO_2) sous deux types de conditions aux limites en fonction de l'indice de la fraction volumique. Il est clair que les résultats obtenus par la formulation proposée concordent très bien avec ceux publiés par Talha and Singh [109] en utilisant un élément fini Lagrangien isoparamétrique. Comme mentionné précédemment, il est évident que pour les deux types de conditions aux limites, l'augmentation de l'indice de la loi de puissance diminue la valeur de la première fréquence naturelle. La variation de la fréquence naturelle en fonction de l'indice de la fraction volumique de deux types de matériaux FGM (Al/ZrO_2 et Al/Al_2O_3) pour deux types de conditions aux limites est représentée sur la figure 3.7. Pour les deux cas explorés (a et b), l'augmentation de l'indice de fraction volumique produit une diminution de la fréquence naturelle. Cependant, il est clair que la diminution est plus prononcée pour une plaque en Al/ZrO_2 que celle en Al/Al_2O_3 . Cela est dû au fait que les deux matériaux ont des rigidités différentes et par conséquent, pour un même indice de fraction volumique les plaques en Al/ZrO_2 présentent des fréquences naturelles nettement inférieures par rapport à celles en Al/Al_2O_3 .

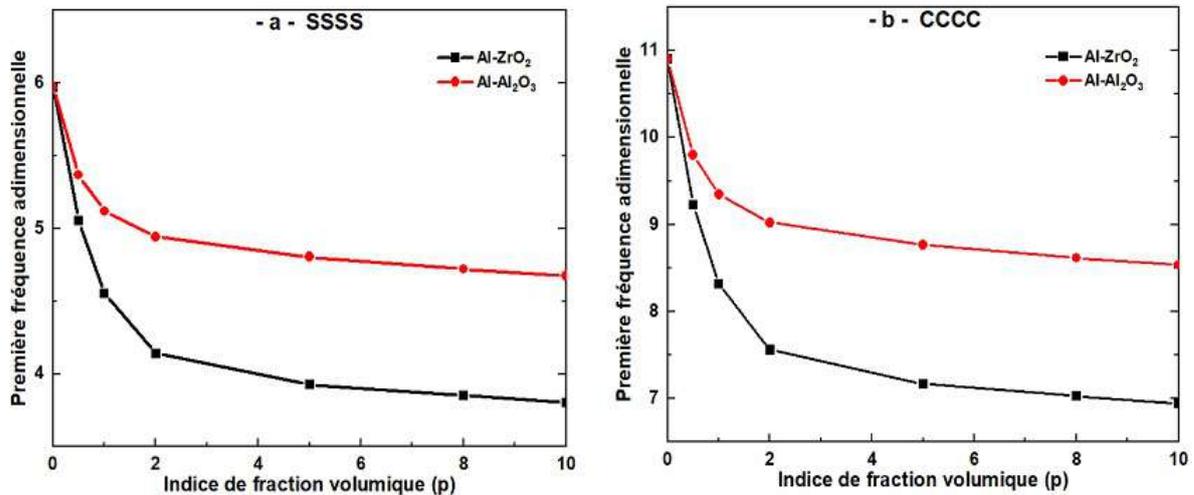


FIGURE 3.7 – Première fréquence adimensionnelle de plaques FGM carrées (Al/ZrO_2 et Al/Al_2O_3) pour différentes conditions aux limites ($A/h = 20$) $\Omega^* = \Omega A^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$

Sur la figure 3.8(a,b,c et d), nous observons la variation des quatre premières fréquences naturelles de plaques FGM carrées en fonction du rapport de forme pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique. Comme le montre la figure, L'augmentation du rapport de forme se traduit par une augmentation de l'ensemble des quatre premières fréquences naturelles. Cela est dû au fait que l'augmentation du rapport de forme produit un accroissement plus important des masses modales comparé à la diminution de la rigidité flexionnelle de la plaque. Il reste à signaler que pour un même rapport de forme, l'augmentation de l'indice de fraction volumique induit une

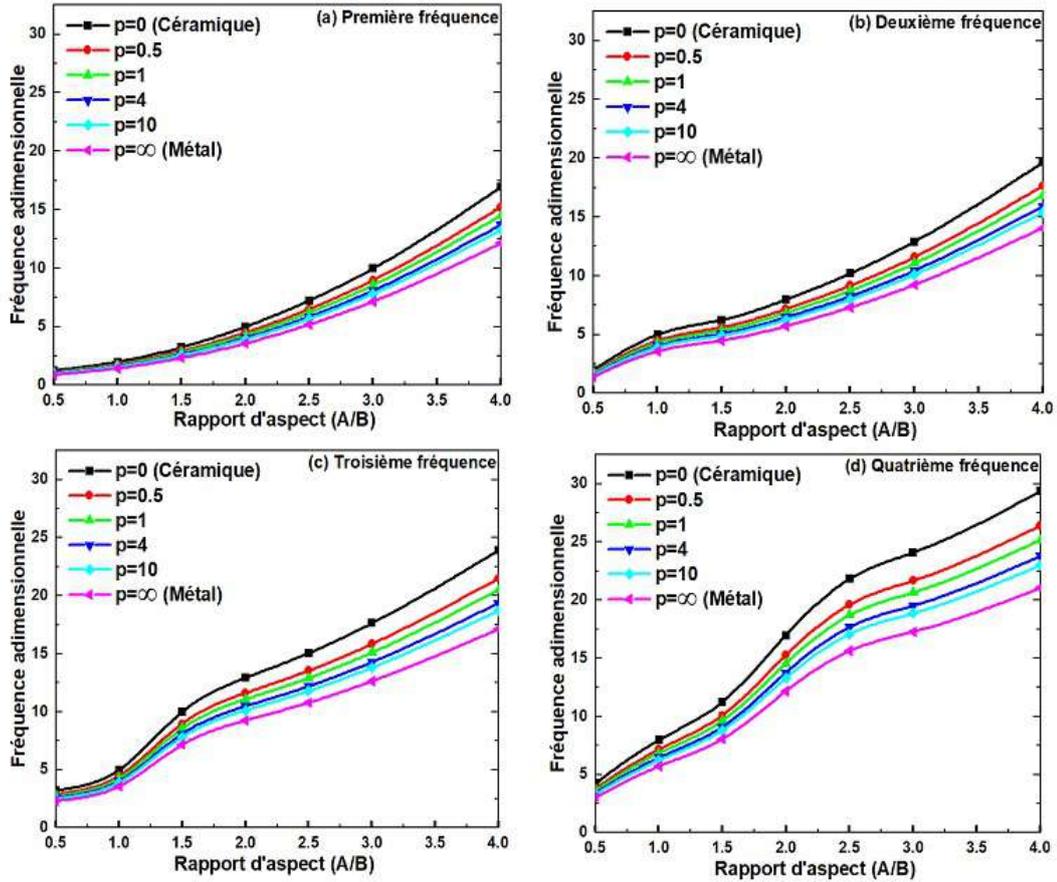


FIGURE 3.8 – Les quatre premières fréquences adimensionnelles d’une plaque FGM carrée (Al/ZrO_2) totalement simplement supportée ($SSSS$) ($A/h = 20$) ($p = 1$) $\Omega^* = \Omega \sqrt{12(1 - \nu^2)} \rho_{ZrO_2} A^4 / \pi^4 E_{ZrO_2} h^2$

diminution non seulement de la première fréquence naturelle mais aussi des deuxième, troisième et quatrième fréquences fondamentales.

3.3.2 Analyse de la stabilité aéroélastique

Dans cette partie, la formulation proposée est utilisée afin de résoudre le problème de vibration des plaques planes couplées à un écoulement supersonique. Pour le cas d’une plaque homogène et isotrope sous l’effet d’un écoulement supersonique et d’après le tableau 3.4, les résultats obtenus sont en très bon accord avec d’autres déjà publiés [[8], [110], [111]]. L’estimation des limites de la stabilité aéroélastique pour les deux types de conditions aux limites $SSSS$ et $CCCC$ est précise. Les valeurs calculées de la pression dynamique critique et de la fréquence critique sont très proches de celles obtenues par Prakash and Ganapathi [8], Valizadeh, et al. [110], [111].

Par la suite, les caractéristiques aéroélastiques d’une plaque carrée FGM (Al/Al_2O_3) ont été investiguées. Nous pouvons déduire de la figure 3.9, que les valeurs de la pression dynamique critique obtenues par la présente approche sont très proches de celles obte-

Références	SSSS		CCCC	
	λ_{cr}^*	Ω_{cr}^{*2}	λ_{cr}^*	Ω_{cr}^{*2}
FEM	511.37	1842.98	850.58	4282.39
Prakash. T et al.[8]	511.11	1840.29	852.34	4274.32
Han AD et al.[111]	512.33	1846.55	852.73	4294.07
Navid. V et al.[110]	511.92	1844.80	854.88	4305.30

TABLEAU 3.4 – Pression dynamique critique et fréquence critique adimensionnelles d'une plaque isotrope carrée ($A/h = 100$)

nues par Prakash et Ganapathi [8].

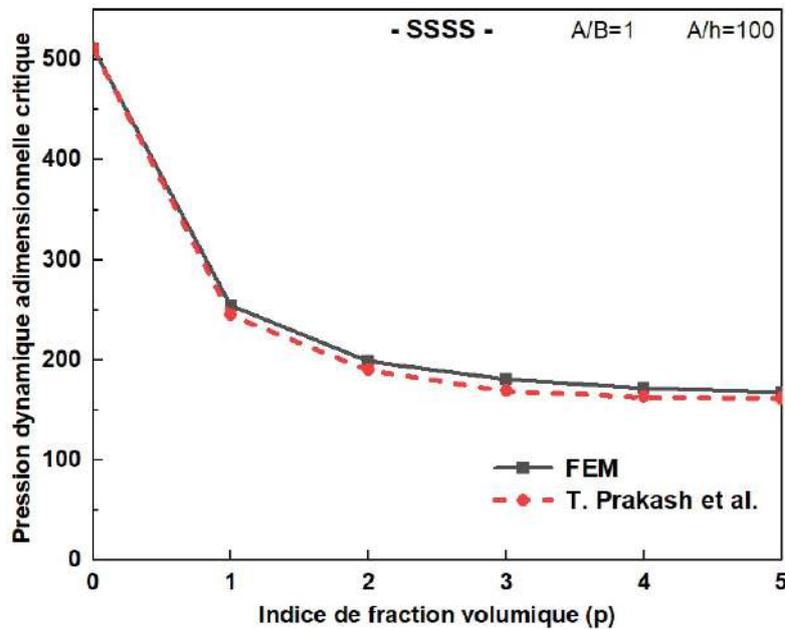


FIGURE 3.9 – Pressions dynamiques critiques d'une plaque carrée (SSSS) FGM Al/Al_2O_3 , pour différentes valeurs d'indice fraction volumique en comparaison avec celle publiées par Prakash[8]

Il est observé sur la même figure que la pression dynamique critique diminue avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique. Cependant, le taux de décroissement des valeurs critiques est plus important pour les valeurs de l'indice de fraction volumique de 0 à 1.

La figure 3.10 illustre l'évolution de la pression dynamique critique d'une plaque carrée sous deux types de conditions aux limites (SSSS) et (CCCC). Pour les deux cas de figure, il est observé une diminution de la pression dynamique critique lors l'augmenation de l'indice de fraction volumique. En outre, les valeurs calculées de

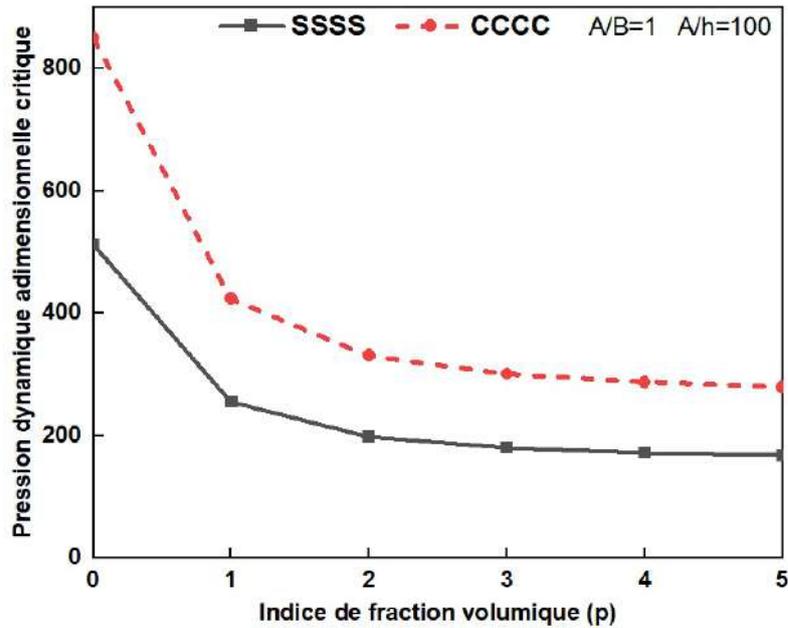


FIGURE 3.10 – Pression dynamique critique d’une plaque carrée FGM Al/Al_2O_3 (SSSS) et (CCCC) pour différentes valeurs de fraction volumique.

la pression dynamique critique sont plus grandes dans le cas complètement encastré (CCCC) que celles dans le cas simplement supporté (SSSS). Ce comportement est évident et il est dû au fait que la rigidité à la flexion de la plaque complètement encastrée est plus grande que celle de la plaque simplement supportée.

Le flottement est une instabilité aérodynamique qui se produit lorsque deux modes coïncident à la même pression dynamique. Pour le cas d’une plaque carrée en porte-à-faux (FCFF), la variation des fréquences naturelles pour des valeurs croissantes de la pression dynamique est illustrée sur la Figure 3.11. On observe que les première et deuxième fréquences modales de la plaque fusionnent en un seul mode pour certaines valeurs de pression dynamique dites pressions dynamiques critiques. Il est aussi observé que la diminution de l’indice de la fraction volumique fait déplacer le point de fusion vers de plus grandes valeurs de pression dynamique.

L’effet du rapport A/h sur la pression dynamique critique des plaques FGM est examiné pour trois valeurs ($a/h=50, 75$ et 100) et est mis en évidence sur la Figure 3.12. On peut remarquer sur cette figure, que l’augmentation de l’épaisseur entraîne l’augmentation de la pression adimensionnelle critique et par conséquent de la vitesse d’écoulement d’air critique.

Si on note par $\lambda_{cr}(\frac{A}{h}, p)$ la pression dynamique critique d’une plaque carrée d’un rapport $\frac{A}{h}$ et un indice de fraction volumique p . On peut vérifier à partir des résultats numériques notés sur la figure 3.12, que pour deux valeurs différentes de l’indice de la fraction volumique $p_1 \neq p_2$, l’égalité suivante $\frac{\lambda_{cr}(50, p_1)}{\lambda_{cr}(50, p_2)} = \frac{\lambda_{cr}(75, p_1)}{\lambda_{cr}(75, p_2)} = \frac{\lambda_{cr}(100, p_1)}{\lambda_{cr}(100, p_2)}$ est toujours

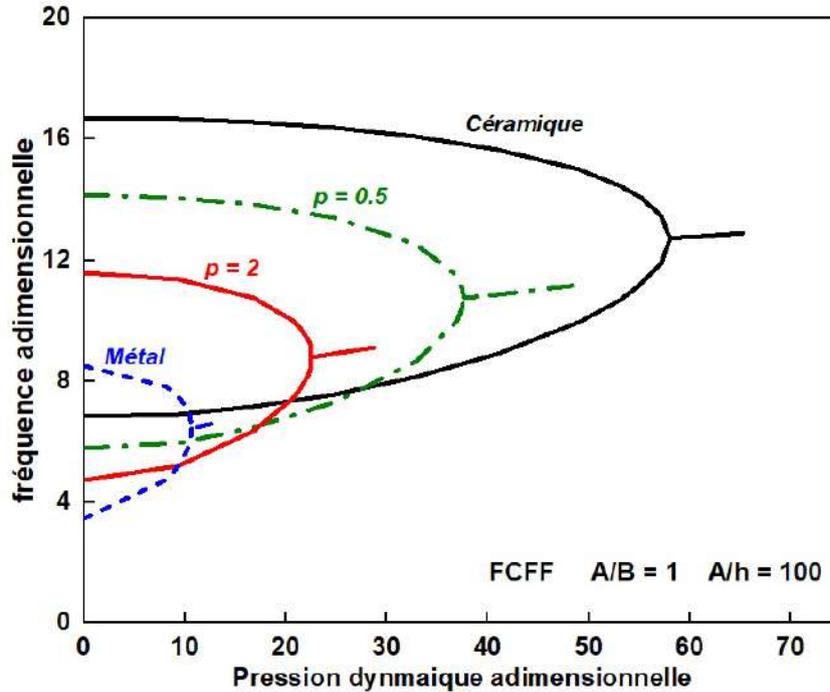


FIGURE 3.11 – Fréquences adimensionnelles – pression dynamique critique de la plaque carrée pour différentes valeurs d’indice de fraction volumique

vérifiée. Cela implique que pour différents rapports, le taux de variation de la pression dynamique adimensionnelle critique en fonction de l’indice de la fraction volumique reste le même. Nous avons aussi abordé la stabilité aéroélastique d’une plaque FGM carrée avec des conditions aux limites SFSS. Dans ce cas, la divergence est le mode dominant d’instabilité. La divergence se produit lorsque la réponse du système croît de façon exponentielle avec le temps. Ce type d’instabilité s’observe lorsque la fréquence propre diminue et tend vers 0. D’après la figure 3.13, la plaque présente des instabilités de type divergence à de plus faibles pressions dynamiques. Pour cette configuration, il est aussi clair que l’augmentation de l’indice de la fraction volumique induit une diminution de la pression dynamique critique.

La figure 3.14 illustre l’effet de l’épaisseur de la plaque FGM sur la pression dynamique critique. Nous observons les mêmes tendances observées dans le cas d’une plaque en porte-à-faux. Pour la même valeur d’indice de fraction volumique les pressions dynamiques critiques augmentent avec l’augmentation du rapport. Par une analyse judicieuse des données numériques de la figure 3.13, il s’avère que même dans ce cas, le taux de variation de la pression dynamique adimensionnelle critique en fonction de l’indice de la fraction volumique reste le même pour différents rapports $\frac{A}{h}$.

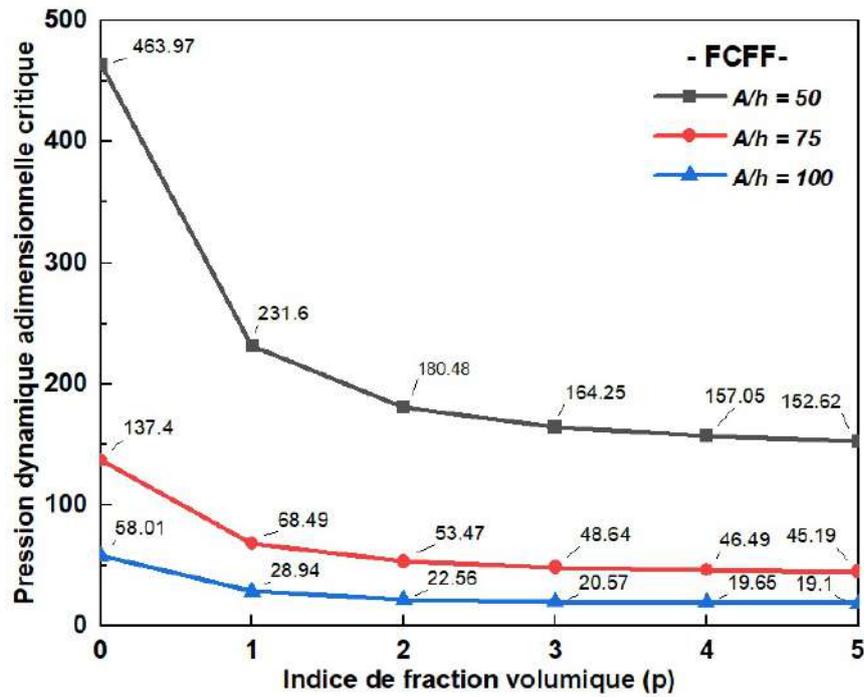


FIGURE 3.12 – Effet de l'épaisseur sur la pression dynamique critique d'une plaque carrée en FGM (FCFF) Al/A_2O_3 en pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique

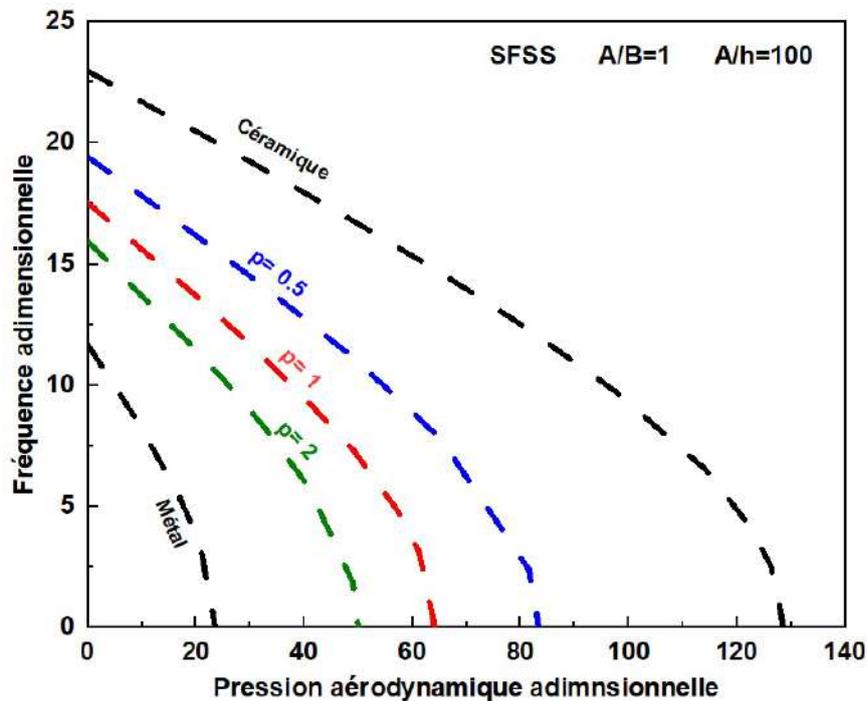


FIGURE 3.13 – Effet de l'épaisseur sur la pression dynamique critique d'une plaque carrée en FGM (SFSS) Al/A_2O_3 en pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique

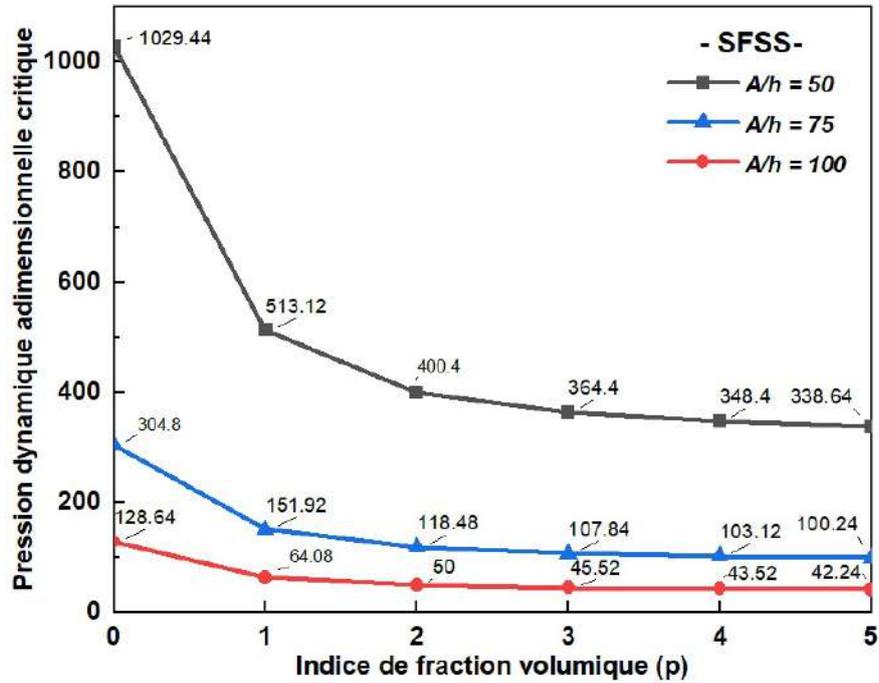


FIGURE 3.14 – Pression dynamique critique de la plaque carrée en FGM (SFSS) Al/A_2O_3 en pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique

3.4 Conclusion

Une nouvelle formulation éléments finis pour l'analyse des vibrations libres et du comportement aéroélastique des structures de plaques rectangulaires en FGM a été développée sur la base d'une combinaison de la méthode des éléments finis classique et de la théorie des coques de Sanders. Pour la prise en compte de l'effet de l'écoulement supersonique, nous avons utilisé la théorie du piston du premier ordre. Les performances de la formulation proposée pour l'analyse des vibrations libres et ceux induites par des écoulements supersoniques des plaques planes rectangulaires en FGM avec différentes valeurs de l'indice de fraction volumique ont été abordées. L'influence de divers paramètres tels que les conditions aux limites, l'épaisseur de la plaque FGM sur le comportement dynamique a été systématiquement étudiée. D'après les tests numériques réalisés, il peut être conclu que la présente approche est efficace pour la modélisation des plaques rectangulaires en FGM surtout pour la prédiction des limites de stabilité aéroélastique.

Conclusion générale

Dans la première partie de cette thèse, un modèle numérique a été mis au point pour traiter le comportement aéroélastique des plaques planes rectangulaires minces homogènes. La modélisation mathématique du sous-domaine solide est développée en utilisant une combinaison de la méthode des éléments finis et de la théorie des coques minces de Sanders. Les composantes de déplacement membranaire de l'élément plaque sont modélisées par des polynômes bidimensionnels, tandis que la déflexion latérale est basée sur la solution exacte de l'équation de mouvement. La charge aéroélastique induite par l'écoulement supersonique est modélisée par la théorie du piston linéarisée de premier ordre. Les résultats de la simulation sont comparés à ceux issus de la littérature et de nouveaux résultats intéressants sont produits. Les résultats de l'analyse des limites de stabilité de la plaque soumise à un écoulement de fluide supersonique parallèle à sa surface externe, ont montré que l'approche mise en œuvre est très efficace pour l'évaluation des pressions dynamiques critiques. Aussi une bonne concordance avec les résultats analytiques et numériques disponibles dans la littérature est largement approuvée. Cette approche a permis d'obtenir un élément très précis qui conduit à une convergence rapide et à moins de difficultés numériques. Une étude de l'effet des conditions aux limites sur la stabilité des plaques rectangulaires soumises à un écoulement de fluide supersonique, a été menée en testant et validant plusieurs configurations. Encore une fois, les résultats ont montré l'efficacité de cette approche. Afin d'examiner l'effet combiné de l'orientation de l'écoulement et de la géométrie de la plaque sur son comportement aéroélastique, une analyse paramétrique a été réalisée. Les résultats de cette analyse ont montré qu'une plus grande stabilité est associée à des rapports d'aspect inférieurs à 1. En outre, le cas le plus dangereux est celui où le flux d'air est aligné avec le bord le plus long de la plaque. Parmi les contributions majeures apportées par la présente étude est l'analyse des résultats de simulations numériques portant sur une variété de scénarios potentiellement catastrophiques représentés par des conditions aux limites irrégulières et leur effet sur les caractéristiques aéroélastiques des plaques. Ainsi, il a été remarqué que l'absence d'un support aux bords parallèles à la direction d'écoulement ou dans la direction perpendiculaire au flux d'air entraîne des modifications importantes sur la stabilité aéroélastique de la structure. Par ailleurs, l'absence d'un support au bord perpendiculaire au flux d'air, réduit considérablement les limites

de stabilité, ce qui rend la divergence, le mode d'instabilité le plus dominant. Les résultats de l'analyse paramétrique susmentionnée peuvent servir de base de données pour une future étude d'optimisation multi-objectifs de la conception aéroélastique pour prévenir l'instabilité des plaques planes. Des méthodes d'optimisation appropriées devraient être appliquées pour déterminer les valeurs optimales du rapport d'aspect, de la direction d'écoulement, de l'épaisseur et de la configuration des supports en vue d'obtenir une conception optimisée. Cela pourrait considérablement augmenter la pression aérodynamique critique et améliorer significativement la stabilité de la structure. Dans la deuxième partie, nous avons développé une nouvelle formulation pour modéliser le comportement aéroélastique des plaques rectangulaires en FGM dont les propriétés des sont graduées dans la direction de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance (P-FGM) en termes de fractions volumiques des constituants. Nous avons testé notre nouvel élément plaque dans le cas des vibrations libres. La méthode proposée peut fournir des résultats efficaces et fiables en moins de temps de calcul par rapport à d'autres méthodes analytiques et numériques. Dans le cas dynamique, des instabilités par flottement ou par divergence sont mis en évidence pour ce genre de matériaux. En conclusion, cette thèse a approfondi nos connaissances des instabilités aéroélastiques. Les résultats obtenus ont des implications significatives pour le domaine aéronautique et offrent des perspectives pour de futures recherches. Des pistes prometteuses pour des travaux futurs entre autres l'instabilité aéroélastique des panneaux sous l'effet d'un écoulement supersonique dans un environnement thermique et la modélisation de coques peu profondes. Les résultats de cette thèse sont un premier pas important vers l'étude des instabilités aéro-thermoélastiques des coques de révolution. Enfin, j'espère que cette thèse va inspirer de futurs chercheurs et susciter de nouvelles idées pour améliorer notre compréhension de ce domaine.

Bibliographie

- [1] Bertrand Kirsch and Olivier Montagnier. Maîtriser la conception des drones solaires à voilure souple : vers l'avènement des pseudo-satellites à hautes altitudes (haps). *Technologie et innovation*, 3(3), 2018.
- [2] Raymond L Bisplinghoff, Holt Ashley, and Robert L Halfman. *Aeroelasticity*. Courier Corporation, 2013.
- [3] Jean-François Sigrist. *Interaction fluide-structure : Analyse vibratoire par éléments finis*. Ellipses, 2011.
- [4] Werner Soedel. *Vibrations of shells and plates*. CRC Press, 2004.
- [5] Dalia Mahmoud and Mohamed A Elbestawi. Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants : a review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2) :13, 2017.
- [6] Majid Mohammadi, Masoud Rajabi, and Majid Ghadiri. Functionally graded materials (fgms) : A review of classifications, fabrication methods and their applications. *Processing and Application of Ceramics*, 15(4) :319–343, 2021.
- [7] Zhi-Guang Song and Feng-Ming Li. Investigations on the flutter properties of supersonic panels with different boundary conditions. *International Journal of Dynamics and Control*, 2(3) :346–353, 2014.
- [8] T Prakash and M Ganapathi. Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects. *Composite structures*, 72(1) :10–18, 2006.
- [9] Earl H Dowell. Panel flutter. Technical report, 1972.
- [10] Jordan P F. The physical nature of panel flutter. *AERO DIGEST*, 72(1) :34–38, 1956.
- [11] Earl H Dowell. *Aeroelasticity of plates and shells*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1974.
- [12] Maher N Bismarck-Nasr. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 45(12), 1992.
- [13] Chuh Mei, K Abdel-Motagaly, and R Chen. Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds. 1999.

- [14] DJ Dawe. A finite element approach to plate vibration problems. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 7(1) :28–32, 1965.
- [15] Arthur W Leissa. The free vibration of rectangular plates. *Journal of sound and vibration*, 31(3) :257–293, 1973.
- [16] RS Srinivasan and BJC Babu. Free vibration of cantilever quadrilateral plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 73(3) :851–855, 1983.
- [17] KM Liew, KY Lam, and ST Chow. Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function. *Computers & Structures*, 34(1) :79–85, 1990.
- [18] YF Xing and B Liu. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates. *Composite structures*, 89(4) :567–574, 2009.
- [19] DJ Gorman and SD Yu. A review of the superposition method for computing free vibration eigenvalues of elastic structures. *Computers & Structures*, 104 :27–37, 2012.
- [20] Rui Li, Pengcheng Wang, Yu Tian, Bo Wang, and Gang Li. A unified analytic solution approach to static bending and free vibration problems of rectangular thin plates. *Scientific Reports*, 5(1) :1–12, 2015.
- [21] Rui Li, Bo Wang, and Gang Li. Analytic solutions for the free vibration of rectangular thin plates with two adjacent corners point-supported. *Archive of Applied Mechanics*, 85 :1815–1824, 2015.
- [22] Rui Li, Bo Wang, Gang Li, and Bin Tian. Hamiltonian system-based analytic modeling of the free rectangular thin plates’ free vibration. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2) :984–992, 2016.
- [23] Zhaoyang Hu, Yushi Yang, Chao Zhou, Xinran Zheng, and Rui Li. On the symplectic superposition method for new analytic free vibration solutions of side-cracked rectangular thin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 489 :115695, 2020.
- [24] Bing Leng, Salamat Ullah, Tianlai Yu, and Kexin Li. New analytical free vibration solutions of thin plates using the fourier series method. *Applied Sciences*, 12(17) :8631, 2022.
- [25] Sergey D Algazin and Igor A Kijko. *Aeroelastic vibrations and stability of plates and shells*. De Gruyter, 2015.
- [26] Mervyn D Olson. Finite elements applied to panel flutter. *AIAA Journal*, 5(12) :2267–2270, 1967.
- [27] Kariappa and BR Somashekar. Application of matrix displacement methods in the study of panel flutter. *AIAA Journal*, 7(1) :50–53, 1969.

- [28] G Sander, C Bon, and M Geradin. Finite element analysis of supersonic panel flutter. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7(3) :379–394, 1973.
- [29] Guangfeng Cheng, Chuh Mei, and YY Lee. Flow angle, temperature and aerodynamic damping on supersonic panel flutter stability boundary. In *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, page 1285, 2002.
- [30] Carl E Gray, Chuh Mei, and CP Shore. Finite element method for large-amplitude two-dimensional panel flutter at hypersonic speeds. *AIAA journal*, 29(2) :290–298, 1991.
- [31] RS Srinivasan and BJC Babu. Flutter analysis of cantilevered quadrilateral plates. *Journal of Sound and Vibration*, 98(1) :45–53, 1985.
- [32] Laith K Abbas, Xiaoting Rui, and Pier Marzocca. Panel flutter analysis of plate element based on the absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*, 27(2) :135–152, 2012.
- [33] Zhanxi Wang, Xiansheng Qin, Jing Li, and Xuefeng Zhang. Flutter detection of composite plate using finite element and eigenvector orientation method. In *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 1428–1432. IEEE, 2011.
- [34] Shirko Faroughi, Kramet Malekzadeh, and Ieraje Mirzaee. Finite element supersonic flutter analysis of low aspect ratio stiffened wing. *Journal of Vibration and Control*, 19(14) :2187–2198, 2013.
- [35] S DURVASULA. Flutter of simply-supported parallelogrammic flat panels in supersonic flow(flutter of simply supported thin isotropic parallelogrammic flat panels in supersonic flow). 1966.
- [36] Wei-Wei Zhang, Zheng-Yin Ye, Chen-An Zhang, and Feng Liu. Supersonic flutter analysis based on a local piston theory. *AIAA Journal*, 47(10) :2321–2328, 2009.
- [37] AA Lakis, P Van Dyke, and H Ouriche. Dynamic analysis of anisotropic fluid-filled conical shells. *Journal of fluids and structures*, 6(2) :135–162, 1992.
- [38] Aouni A Lakis and MP Paidoussis. Dynamic analysis of axially non-uniform thin cylindrical shells. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 14(1) :49–71, 1972.
- [39] Farhad Sabri and Aouni A Lakis. Hybrid finite element method applied to supersonic flutter of an empty or partially liquid-filled truncated conical shell. *Journal of Sound and Vibration*, 329(3) :302–316, 2010.
- [40] Earl H Dowell. Nonlinear oscillations of a fluttering plate. *AIAA journal*, 4(7) :1267–1275, 1966.

- [41] Saullo GP Castro, Thiago AM Guimarães, Domingos A Rade, and Maurício V Donadon. Flutter of stiffened composite panels considering the stiffener's base as a structural element. *Composite Structures*, 140 :36–43, 2016.
- [42] P Hajela and R Glowasky. Application of piezoelectric elements in supersonic panel flutter suppression. In *Aircraft Design and Operations Meeting*, page 3191, 2013.
- [43] Jennifer Heeg. *Analytical and experimental investigation of flutter suppression by piezoelectric actuation*, volume 3241. National Aeronautics and Space Administration, Office of Management . . . , 1993.
- [44] Feng-Ming Li. Active aeroelastic flutter suppression of a supersonic plate with piezoelectric material. *International Journal of Engineering Science*, 51 :190–203, 2012.
- [45] Oluseyi O Onawola and SC Sinha. A feedback linearization approach for panel flutter suppression with piezoelectric actuation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6(3), 2011.
- [46] S Raja, AA Pashilkar, R Sreedeeep, and JV Kamesh. Flutter control of a composite plate with piezoelectric multilayered actuators. *Aerospace Science and Technology*, 10(5) :435–441, 2006.
- [47] M Nezami and B Gholami. Optimal locations of piezoelectric patches for supersonic flutter control of honeycomb sandwich panels, using the nsga-ii method. *Smart Materials and Structures*, 25(3) :035043, 2016.
- [48] Mohamed MYB Elshabasy and Sallam A Kouritem. Thickening of optimally selected locations on panels subjected to unyawed flow for substantial delay of the panel flutter. *Alexandria Engineering Journal*, 59(6) :5031–5044, 2020.
- [49] TIAN Wei, ZHAO Tian, GU Yingsong, and YANG Zhichun. Supersonic flutter control and optimization of metamaterial plate, 2021.
- [50] Douglas RQ Pacheco, Flávio D Marques, and António JM Ferreira. Panel flutter suppression with nonlinear energy sinks : Numerical modeling and analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 106 :108–114, 2018.
- [51] Ye-Wei Zhang, Hao Zhang, Shuai Hou, Ke-Fan Xu, and Li-Qun Chen. Vibration suppression of composite laminated plate with nonlinear energy sink. *Acta Astronautica*, 123 :109–115, 2016.
- [52] ZHOU Jian, XU Minglong, YANG Zhichun, and GU Yingsong. Suppressing nonlinear aeroelastic response of laminated composite panels in supersonic airflows using a nonlinear energy sink. *Chinese Journal of Aeronautics*, 34(2) :376–385, 2021.

- [53] Earl H Dowell. A modern course in aeroelasticity. *MECCANICA-MILANO*-, 34 :140–140, 1999.
- [54] Tomomichi Nakamura, Shigehiko Kaneko, Fumio Inada, Minoru Kato, Kuni-hiko Ishihara, Takashi Nishihara, Njuki W Mureithi, and Mikael A Langthjem. *Flow-induced vibrations : classifications and lessons from practical experiences*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [55] Denis B Kholodar and Earl H Dowell. The influence of a nonzero angle of attack and gust loads on the nonlinear response of a typical airfoil section with a control surface freeplay. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1(3) :153–166, 2000.
- [56] J Lyell Sanders Jr. An improved first-approximation theory for thin shells. *NASA Rep.*, 1959.
- [57] Eric Reissner. A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells. *American Journal of Mathematics*, 63(1) :177–184, 1941.
- [58] Junuthula Narasimha Reddy. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press, 2006.
- [59] Aouni A Lakis. Cylindrical finite elements for analysis of cylindrical structures. 1969.
- [60] J Lyell Sanders. *An improved first-approximation theory for thin shells*, volume 24. US Government Printing Office, 1960.
- [61] Mo J Lighthill. Oscillating airfoils at high mach number. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20(6) :402–406, 1953.
- [62] M Koizumi. The concept of fgm. *Ceramic transactions*, 34 :3–10, 1993.
- [63] Pablo Cano, Manuel Hinojosa, Huy Nguyen, Aled Morgan, David Fuertes Marrón, Ivan Garcia, Andrew Johnson, and Ignacio Rey-Stolle. Hybrid iii-v/sige solar cells grown on si substrates through reverse graded buffers. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 205 :110246, 2020.
- [64] Chunlong Fei, Pengfei Lin, Di Li, Yan Wu, Runcong Wu, Jun Chen, and Yintang Yang. Fabrication and characterization of high-sensitivity ultrasonic transducers with functionally graded design. *IEEE Sensors Journal*, 19(16) :6650–6654, 2019.
- [65] Douglas W Templeton, Tara J Gorsich, and Timothy J Holmquist. Computational study of a functionally graded ceramic-metallic armor. Technical report, TACOM RESEARCH DEVELOPMENT AND ENGINEERING CENTER WARREN MI, 2006.
- [66] Xianhua Tian, Jun Zhao, Zhongbin Wang, and Xinhua Liu. Design and fabrication of si₃n₄/(w, ti) c graded nano-composite ceramic tool materials. *Ceramics International*, 42(12) :13497–13506, 2016.

- [67] Swastika Banthia, Srijan Sengupta, Siddhartha Das, and Karabi Das. Cu, cu-sic functionally graded coating for protection against corrosion and wear. *Surface and Coatings Technology*, 374 :833–844, 2019.
- [68] PNS Srinivas, P Ravindra Babu, and B Balakrishna. Effect of silicon carbide, magnesium oxide as reinforcing elements and zinc sterate as binding agent in the characterization of al functionally graded materials for automotive applications. *Materials Today : Proceedings*, 27 :460–466, 2020.
- [69] Shyang-Ho Chi and Yen-Ling Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—part i : Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13) :3657–3674, 2006.
- [70] Redouane Ramzi. *Comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques anisotropiques non uniformes soumises à un écoulement supersonique*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2012.
- [71] Y Kerboua, Aouni A Lakis, Marc Thomas, and L Marcouiller. Hybrid method for vibration analysis of rectangular plates. *Nuclear engineering and design*, 237(8) :791–801, 2007.
- [72] E Charbonneau and Aouni A Lakis. Semi-analytical shape functions in the finite element analysis of rectangular plates. *Journal of sound and vibration*, 242(3) :427–443, 2001.
- [73] Gui-Rong Liu and Siu Sin Quek. *The finite element method : a practical course*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [74] S Chad Gibbs IV, Ivan Wang, and Earl H Dowell. Stability of rectangular plates in subsonic flow with various boundary conditions. *Journal of Aircraft*, 52(2) :439–451, 2015.
- [75] Thorsteinn Gislason Jr. Experimental investigation of panel divergence at subsonic speeds. *AIAA journal*, 9(11) :2252–2258, 1971.
- [76] Hossein Bahrami-Torabi, Youcef Kerboua, and Aouni A Lakis. Finite element model to investigate the dynamic instability of rectangular plates subjected to supersonic airflow. *Journal of Fluids and Structures*, 103 :103267, 2021.
- [77] Kai Zhou, Xiuchang Huang, Zhenguo Zhang, and Hongxing Hua. Aero-thermo-elastic flutter analysis of coupled plate structures in supersonic flow with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 430 :36–58, 2018.
- [78] Kai Zhou, Jinpeng Su, and Hongxing Hua. Aero-thermo-elastic flutter analysis of supersonic moderately thick orthotropic plates with general boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 141 :46–57, 2018.
- [79] Kailash Dhital, Jae-Hung Han, and Yoon-Kyu Lee. Approximation of distributed aerodynamic force to a few concentrated forces for studying supersonic panel

- flutter. *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, 26(5) :518–527, 2016.
- [80] Kailash Dhital and Jae-Hung Han. Panel flutter emulation using a few concentrated forces. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 19(1) :80–88, 2018.
- [81] Neeraj Grover, DK Maiti, and BN Singh. Flutter characteristics of laminated composite plates subjected to yawed supersonic flow using inverse hyperbolic shear deformation theory. *Journal of Aerospace Engineering*, 29(2) :04015038, 2016.
- [82] EH Dowell. Theoretical vibration and flutter studies of point supported panels. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 10(6) :389–395, 1973.
- [83] RS Srinivasan and K Munaswamy. Frequency analysis of skew orthotropic point supported plates. *Journal of Sound and Vibration*, 39(2) :207–216, 1975.
- [84] JN Rossettos and P Tong. Finite-element analysis of vibration and flutter of cantilever anisotropic plates. 1974.
- [85] SJ Shahidzadeh Tabatabaei and AM Fattahi. A finite element method for modal analysis of fgm plates. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(4) :1111–1122, 2022.
- [86] E Jaberzadeh, M Azhari, and B Boroomand. Thermal buckling of functionally graded skew and trapezoidal plates with different boundary conditions using the element-free galerkin method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42 :18–26, 2013.
- [87] Bassiouny Saleh, Jinghua Jiang, Reham Fathi, Tareq Al-hababi, Qiong Xu, Lisha Wang, Dan Song, and Aibin Ma. 30 years of functionally graded materials : An overview of manufacturing methods, applications and future challenges. *Composites Part B : Engineering*, 201 :108376, 2020.
- [88] Pankaj S Ghatage, Vishesh R Kar, and P Edwin Sudhagar. On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures : A review. *Composite Structures*, 236 :111837, 2020.
- [89] Kouider Bendine, Benallel Farouk Boukhoulida, Mohammed Nouari, and Zouaoui Satla. Structural modeling and active vibration control of smart fgm plate through ansys. *International Journal of Computational Methods*, 14(04) :1750042, 2017.
- [90] K Swaminathan, DT Naveenkumar, AM Zenkour, and E Carrera. Stress, vibration and buckling analyses of fgm plates—a state-of-the-art review. *Composite Structures*, 120 :10–31, 2015.

- [91] H Nguyen-Xuan, Loc V Tran, Chien H Thai, and T Nguyen-Thoi. Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing. *Thin-Walled Structures*, 54 :1–18, 2012.
- [92] CY Dong. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the chebyshev–ritz method. *Materials & Design*, 29(8) :1518–1525, 2008.
- [93] S Chakraverty and KK Pradhan. Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerospace Science and Technology*, 36 :132–156, 2014.
- [94] SJ Singh, , and SP Harsha. Thermo-mechanical analysis of porous sandwich sfgm plate for different boundary conditions using galerkin vlasov’s method : a semi-analytical approach. *Thin-Walled Structures*, 150 :106668, 2020.
- [95] Shaopeng Qin, Gaofeng Wei, Zheng Liu, and Guosheng Su. The elastic dynamics analysis of fgm using a meshless rrkpm. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 129 :125–136, 2021.
- [96] HR Mollarazi, M Foroutan, and R Moradi-Dastjerdi. Analysis of free vibration of functionally graded material (fgm) cylinders by a meshless method. *Journal of Composite Materials*, 46(5) :507–515, 2012.
- [97] K-J Sohn and J-H Kim. Structural stability of functionally graded panels subjected to aero-thermal loads. *Composite Structures*, 82(3) :317–325, 2008.
- [98] T Prakash, MK Singha, and M Ganapathi. Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates. *Computational mechanics*, 43 :341–350, 2009.
- [99] T Prakash, MK Singha, and M Ganapathi. A finite element study on the large amplitude flexural vibration characteristics of fgm plates under aerodynamic load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(5) :439–447, 2012.
- [100] Irwan Katili, Jean-Louis Batoz, Imam Jauhari Maknun, and Andi Makarim Katili. On static and free vibration analysis of fgm plates using an efficient quadrilateral finite element based on dspm. *Composite Structures*, 261 :113514, 2021.
- [101] Imam Jauhari Maknun, Sundararajan Natarajan, and Irwan Katili. Application of discrete shear quadrilateral element for static bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded material plate. *Composite Structures*, 284 :115130, 2022.
- [102] I Ramu and SC Mohanty. Modal analysis of functionally graded material plates using finite element method. *Procedia Materials Science*, 6 :460–467, 2014.
- [103] I Ramu and SC Mohanty. Buckling analysis of rectangular functionally graded material plates under uniaxial and biaxial compression load. *Procedia Engineering*, 86 :748–757, 2014.

- [104] Rajesh Kumar, Subhajit Mondal, Shyamal Guchhait, and Rimen Jamatia. Analytical approach for dynamic instability analysis of functionally graded skew plate under periodic axial compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 130 :41–51, 2017.
- [105] Holt Ashley and Garabed Zartarian. Piston theory-a new aerodynamic tool for the aeroelastician. *Journal of the aeronautical sciences*, 23(12) :1109–1118, 1956.
- [106] Sh Hosseini-Hashemi, MOHAMMAD Fadaee, and Seyed Rasoul Atashipour. A new exact analytical approach for free vibration of reissner–mindlin functionally graded rectangular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(1) :11–22, 2011.
- [107] Xin Zhao, YY Lee, and Kim Meow Liew. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-ritz method. *Journal of sound and Vibration*, 319(3-5) :918–939, 2009.
- [108] A Hasani Baferani, AR Saidi, and E Jomehzadeh. An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 225(3) :526–536, 2011.
- [109] Mohammad Talha and BN26596511201 Singh. Static response and free vibration analysis of fgm plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12) :3991–4011, 2010.
- [110] Navid Valizadeh, Sundararajan Natarajan, Octavio A Gonzalez-Estrada, Timon Rabczuk, Tinh Quoc Bui, and Stéphane PA Bordas. Nurbs-based finite element analysis of functionally graded plates : static bending, vibration, buckling and flutter. *Composite Structures*, 99 :309–326, 2013.
- [111] AD Han and TY Yang. Nonlinear panel flutter using high-order triangular finite elements. *AIAA journal*, 21(10) :1453–1461, 1983.

Annexes

A4.

P_{ij} pour une plaque FGM

$$P_{11} = P_{22} = \left(\frac{E_1 - E_2}{p+1} + E_2 \right) h (1 - \nu^2)^{-1}$$

$$P_{12} = P_{21} = P_{11} \nu$$

$$P_{33} = \left(\frac{E_1 - E_2}{p+1} + E_2 \right) h (2 + 2\nu)^{-1}$$

$$P_{44} = \frac{(E_2^2 p^4 + 4 E_1 E_2 p^3 + 4 E_2^2 p^3 + 16 E_1 E_2 p^2 + 7 E_2^2 p^2 + 28 E_1 E_2 p + 12 E_1^2) h^3}{12(p+3)(E_2 p + E_1)(p+2)^2(1-\nu^2)}$$

$$P_{45} = P_{54} = P_{44} \nu$$

$$P_{55} = P_{44}$$

$$P_{66} = \frac{(E_2^2 p^4 + 4 E_1 E_2 p^3 + 4 E_2^2 p^3 + 16 E_1 E_2 p^2 + 7 E_2^2 p^2 + 28 E_1 E_2 p + 12 E_1^2) h^3 (1-\nu)}{12(p+3)(E_2 p + E_1)(p+2)^2(2-2\nu^2)}$$

$$\rho = ((\rho_1 - \rho_2)/(p+1) + \rho_2) h$$

A5. Les équations d'équilibre d'une coque cylindrique selon la théorie de Sanders

$$\begin{aligned}
L_1(U, V, W, P_{ij}) &= P_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{P_{12}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - P_{14} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \\
&\quad + \frac{P_{15}}{R^2} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \right) + \left(\frac{P_{33}}{R} - \frac{P_{63}}{2R^2} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{P_{36}}{R^2} - \frac{P_{66}}{2R^3} \right) \left(-2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\
L_2(U, V, W, P_{ij}) &= \left(\frac{P_{21}}{R} - \frac{P_{51}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{P_{22}}{R} + \frac{P_{52}}{R^2} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \\
&\quad - \left(\frac{P_{24}}{R} + \frac{P_{54}}{R^2} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{P_{25}}{R} + \frac{P_{55}}{R^2} \right) \left(-\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad + \left(P_{33} + \frac{3P_{63}}{2R} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{R \partial x \partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \left(P_{36} + \frac{3P_{66}}{2R} \right) \\
&\quad \left(-2 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} \right) = 0 \\
L_3(U, V, W, P_{ij}) &= P_{41} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{P_{42}}{R} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - P_{44} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \\
&\quad + \frac{P_{45}}{R^2} \left(-\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + \frac{2P_{63}}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \\
&\quad + \frac{2P_{66}}{R^2} \left(-2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial \theta^2} \right) + \frac{P_{51}}{R^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial \theta^2} \\
&\quad + \frac{P_{52}}{R^3} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + \frac{P_{55}}{R^4} \left(-\frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3} \right) \\
&\quad - \frac{P_{21}}{R} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{P_{54}}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{P_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + W \right) + \frac{P_{24}}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \\
&\quad - \frac{P_{25}}{R^3} \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0
\end{aligned}$$