رقم الترتيب :
رقم التسلسل :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارةالتعليم العالي والبحث العلمي

جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية الرياضيات وعلوم المادة

مذكرة مقدمة لاستكمال متطلبات شهادة ماستر أكاديمي
ميدان : رياضيات واعلام آلي
فرع : رياضيات
تخصص : تحليل دالي

الموضوع:

الفراغ المحدب محليا وأشباه النظم

من اعداد : جهينة بوقطايه   **تحت اشراف : الأستاذ مصطفى عسيلة**

نوقشت يوم 19 جوان 2023 من طرف أعضاء اللجنة

الأستاذ محمد الهادي مزابية	رئيسا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة
الأستاذ محمد قويدري	مناقشا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة
الأستاذ مصطفى عسيلة	مشرفا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة

السنة الجامعية: 2023/2022

المحتويات

المقدمة

الفراغات الشعاعية الطبولوجية (X,τ) ناتجة عن تلائم بنية تبولوجية τ وبنية جبرية على مجموعة غير خالية X وهي فراغات عامة لا تملك كثير من الخصائص الضرورية لحل المسائل الرياضية، وبالتالي جاءت الفراغات المحدبة محليا كفراغات خاصة من هذه الفراغات تملك أساسا محليا B_0 مكون من مجموعات محدبة هذا الأساس أكسبها كثيرا من الخصائص الجديدة بل جعلها تتطابق مع الفراغات شبه النظيمية (X,P)، حيث P مجموعة أشباه النظم على الفراغ الشعاعي X، أي :

$$\mathrm{P}=\{P_k,\ k\in I\}$$

P_k أشباه نظم على X و I مجموعة دلائل كيفية.
بهذه المجموعة من أشباه النظم امتلكت الفراغات المحدبة بنية شبه بنية الفراغات النظيمية وهي بنية تبولوجية تبقى ضعيفة لكنها تملك كثيرا من الخصائص المشابهة في البنية المنتظمة.

المذكرة تناولت هذه الفراغات المحدبة محليا وشبه نظيمية والمقارنة بينها من خلال المقارنة بين التبولوجيا τ والتبولوجيا τ_p المتولدة من مجموعة أشباه النظم P، وأوضحت الخصائص التي يتميز بها الفراغ المحدب محليا عن الفراغ الشعاعي التبولوجي في الحالة العامة.

باب 1

مفاهيم أساسية

1.1 مقدمة

نستذكر في هذا الباب اهم المفاهيم الأساسية من التحليل الدالي والتبولوجيا، بالأخص المفاهيم التي درسناها في السنوات السابقة وستعيننا في الدراسة التي سنتطرق اليها في الأبواب اللاحقة، ومن هذه المفاهيم ما يخص الفراغ التبولوجي والفراغ الشعاعي .

2.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية و $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X.

تعريف 1.2.1. نقول أن τ أسرة المفتوحات، اذا كانت أسرة جزئية من $P(X)$، أي ($\tau \subset P(X)$)، كما نقول أنها تشكل تبولوجيا على X، اذا حققت الشروط التالية :

[T_1] $X \in \tau, \varnothing \in \tau$

[T_2] $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

[T_3] $A_i \in \tau \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \tau$، حيث I مجموعة دلائل كيفية .

الزوج (X, τ) يطلق عليه فراغا تبولوجيا ونرمز له بـ T.
عناصر الأسرة τ تدعى مفتوحات الفراغ التبولوجي.

تعريف 2.2.1. نعرف المجموعة المغلقة في الفراغ (X, τ) بأنها كل مجموعة متممها مفتوح ويرمز لمجموعة كل المجموعات المغلقة في (X, τ) بالرمز $\Im$.

تعريف 3.2.1. من أجل كل x من (X, τ)، يقال أن v جوار لـ x اذا تحقق :

$$\exists G \in \tau / x \in G \subset v$$

تعريف 4.2.1. ليكن (X,τ) فراغا تبولوجيا، ولتكن $A \subseteq X$.
نقول عن نقطة x من X أنها نقطة تلاصق بالمجموعة A اذا تحقق الشرط التالي:

$$v \cap A \neq \varnothing \qquad \forall v \in V(x)$$

أي (كل جوار لـ x يحوي نقطة على الأقل من A)؛ نرمز لمجموعة نقط تلاصق A بالرمز $\bar{A}$.

تعريف 5.2.1. يقال أن x نقطة تراكم للمجموعة M، اذا كان كل جوار للنقطة x، يحتوي على نقطة على الأقل من M تختلف عن x، نرمز لمجموعة نقط تراكم للمجموعة M بالرمز $\acute{M}$.

تعريف 6.2.1. لتكن A مجموعة جزئية من الفراغ (X,τ)، النقطة $x \in A$ تسمى نقطة داخلية للمجموعة A، اذا وفقط اذا وجدت G مجموعة مفتوحة، بحيث أن $x \in G \subset A$، أي أنه اذا كان A جوارا لها.
نرمز لمجموعة النقط الداخلية للمجموعة A بـ $\overset{\circ}{A}$، وتقرأ داخلية A، ونكتب :

$$\{x \in \overset{\circ}{A}\} \Leftrightarrow \{\exists G \in \tau / x \in G \subset A\}$$

تعريف 7.2.1. النقطة x من X، يقال أنها خارجية للمجموعة M، اذا كانت داخلية للمجموعة CM، يرمز لمجموعة النقط الخارجية للمجموعة M بالرمز $Ex(M)$. ونكتب :

$$\{x \in Ex(M)\} \Leftrightarrow \{x \in (\overset{\circ}{\widehat{CM}})\} \Leftrightarrow \{\exists G \in \tau / x \in G \subset CM\}$$

تعريف 8.2.1. لتكن τ تبولوجيا على X و A مجموعة جزئية غير خالية من X .

يعرف أثر التبولوجيا τ على المجموعة A، بالأسرة τ_A المعرفة كالتالي:

$$\tau_A = \{G \subset X / G = G_0 \cap A, G_0 \in \tau\}$$

أي أنه:

$$\forall G \in \tau_A, \exists G_0 \in \tau / G = G_0 \cap A$$

تعريف 9.2.1. يقال أن :

1. المجموعة A كثيفة في المجموعة B، اذا كان $B \subset \bar{A}$.
2. المجموعة A كثيفة في كل مكان أو كثيفة في X، اذا كان $X = \bar{A}$.

تعريف 10.2.1. ليكن $T = (X,\tau)$ فراغا تبولوجيا، B أسرة من τ و B_x أسرة من $V(x)$.

1. يقال إن الأسرة B أساس أسرة المفتوحات، إذا كتب كل مفتوح على شكل اتحاد كيفي لعناصر من B، أي:

$\forall G \in \tau, \exists (B_i \in B, i \in I) / G = \cup_{i \in I} B_i$, ($I$ مجموعة دلائل كيفية).

2. يقال أن الأسرة B_x أساس لمجاورات النقطة x، أو أساس لأسرة جوارات النقطة x، إذا تحقق :

$$\forall v \in V(x), \exists B_x \in B_x / B_x \subset v$$

تعريف 11.2.1. يقال إن الفراغ التبولوجي T قابل للفصل، إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة وعلى الأكثر قابلة للعد ويرمز له بالرمز S، ونكتب T هو $S-$ فراغ.

تعريف 12.2.1. يقال إن الفراغ T :

1. يحقق بديهية الفصل لكولموغروف أو T_0–فراغ، إذا وجد من أجل كل نقطتين مختلفتين من X جوار إحداهما لا يحوي الثانية، أي أن :

$$\{\forall x, y \in X/x \neq y\} \Rightarrow \{(\exists v_x \in V(x)/y \notin v_x) \vee (\exists v_y \in V(y)/x \notin v_y)\}$$

يسمى هذا الفراغ بفراغ كولموغروف.

2. يحقق بديهية الفصل الأولى أو T_1– فراغ، إذا وجد من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من X، جوار للنقطة x لا يحوي y وجوار للنقطة y لا يحوي x، أي أن:

$$\{\forall x, y \in X/x \neq y\} \Rightarrow \{(\exists v_x \in V(x)/y \notin v_x) \wedge (\exists v_y \in V(y)/x \notin v_y)\}$$

يسمى هذا الفراغ بفراغ ريس .

3. يحقق بديهية الفصل الثانية أو T_2–فراغ، إذا وجد من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من X، جوار للنقطة x وآخر للنقطة y تقاطعهما خال، أي أن :

$$\{\forall x, y \in X/x \neq y\} \Rightarrow \{\exists v_x \in V(x), \exists v_y \in V(y)/v_x \cap v_y = \varnothing\}$$

يسمى هذا الفراغ بفراغ هوسدروف أو الفراغ المنفصل.

3.1 الفراغ الشعاعي

لتكن X مجموعة غير خالية و K الحقل الحقيقي $\mathcal{R}$أو الحقل المركب $\mathcal{C}$.

تعريف 1.3.1. ليكن X فراغا شعاعيا على الحقل K و B, A مجموعة جزئية غير خالية من X، المجموعة A يقال أنها :

1. مجموعة محدبة، اذا تحقق الشرط :

$$\forall x', x'' \in A \rightarrow [x', x''] = \{(1-\lambda)x' + \lambda x''/\lambda \in [0,1]\} \subset A$$

2. مجموعة محدبة مطلقا، اذا تحقق الشرط :

$$\forall x', x'' \in A, (\forall \lambda, \mu \in K/|\lambda| + |\mu| \preceq 1) \rightarrow \lambda x' + \mu x'' \in A$$

3. مجموعة متوازنة، اذا تحقق الشرط :

$$(\forall \lambda \in K/|\lambda| \preceq 1) \rightarrow \lambda A \subset A$$

4. مجموعة ماصة، اذا تحقق الشرط :

$$\forall x \in X, \exists \lambda \succ 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \succeq \lambda) \to x \in \mu A$$

5. تمتص المجموعة B، اذا تحقق الشرط :

$$\exists \lambda \succ 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \succeq \lambda) \to B \subset \mu A$$

نتيجة 1.3.1. إذا كانت $C_1, ..., C_n$ مجموعات محدبة (أو محدبة مطلقا) و$\lambda_1, ..., \lambda_n$ عناصر من K، فإن:

$$\lambda_1 C_1 + ... + \lambda_n C_n$$

تكون محدبة (أو محدبة مطلقا).

قضية 1.3.1. اذا كانت C مجموعة جزئية محدبة من X و $0 \in C$ فإن :

(a) اذا كان $0 < s < t$ فإن:

$$sC \subset tC$$

(b) اذا كان $s, t > 0$ فإن:

$$sC + tC = (s+t)C$$

برهان:

(a) اذا كان $x \in C$، فإنه باعتبار $0 < s < t$ يكون:

$$sx = t(\frac{s}{t}x + (1 - \frac{s}{t}).0) \in tC$$

أي أن: $sC \subset tC$.

(b) اذا كان $x \in C$، فإنه باعتبار $t > 0, s > 0$ يكون:

$$(s+t)x = sx + tx \in sC + tC$$

أي أن :

$$(s+t)C \subset sC + tC \qquad (1)$$

اذا كان $x, y \in C$ فإنه يكون :

$$sx + ty = (s+t)(\frac{s}{s+t}x + \frac{t}{s+t}y) \in (s+t)C$$

أي أن :

$$sC + tC \subset (s+t)C \qquad (2)$$

من (1) و (2) يكون:

$$sC + tC = (s+t)C$$

تعريف 2.3.1. يعرف الغلاف المحدب للمجموعة الجزئية غير الخالية A من X، بأنه مجموعة كل التركيبات المحدبة من عناصر المجموعة A، ويرمز له بالرمز $conv(A)$.

تعريف 3.3.1. ليكن X, Y فراغين شعاعيين على نفس الحقل K، وD مجموعة غير خالية من X، (D قد تساوي X).
إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصر معين y من Y، يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y، (أو تطبيقا من Dفي Y) يرمز له بالرمز F ونكتب :

$$y = F(x) \text{ أو } y = Fx$$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y، حيث $y = Fx$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب :

$$E(F) = \{y \in Y / y = Fx, x \in D(F)\}$$

- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:

$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$$

اختصارا نكتب $F : X \longrightarrow Y$.

تعريف 4.3.1. المؤثر F من X في Y، يقال إنه خطي، إذا تحقق ما يلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $F(\alpha x + \beta z) = \alpha F(x) + \beta F(z)$

ذلك من أجل كل α, β من K و x, z من X.
يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$، و إذا كانت $D(F) = X$ بالرمز $L_0(X, Y)$، عندها كل مؤثر من $L_0(X, Y)$ يسمى تطبيقا.
في حالة $X \equiv Y$ اختصارا نكتب $L(X)$، $(L_0(X))$ بدلا من $L(X, Y)$ $(L_0(X, Y))$.

تعريف 5.3.1. يعرف الشكل الخطي، بأنه كل مؤثر من $L(X, Y)$ أو من $L_0(X, Y)$ فراغ وصوله هو الحقل K عندها المجموعة $L(X, K)$، $L_0(X, K)$ تسمى على التوالي مجموعة الأشكال الخطية F على $D(F)$، على X ويرمز لها بالرمز $X^*(D(F))^*$ على التوالي ونكتب f^* أو f بدلا من F.
للمجموعة X^* تسمى الثنوي الجبري للفراغ X.

تعريف 6.3.1. التطبيق P من X في $\mathcal{R}$ يقال إنه :

1. محدب، إذا تحقق من أجل كل x, y من X الشرط :

$$P(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda P(x) + (1-\lambda)P(y), \forall \lambda \in [0,1]$$

2. محدب متجانس، إذا تحقق من أجل كل x, y من X الشرط:

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y)$$
$$P(\lambda x) = \lambda P(x), \quad \forall \lambda \geq 0$$

نتيجة 2.3.1.

1. كل الأشكال الخطية على X، تكون تطبيقات محدبة ومتجانسة على X.
2. كل تطبيق محدب متجانس على X، يكون محدبا على X.

تعريف 7.3.1. التطبيق P من X في $\mathcal{R}$ يقال أنه شبه نظيم على X، إذا تحقق من أجل كل x, y من X ومن أجل كل λ من K الشرطان :

1. $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$
2. $P(\lambda x) = |\lambda| P(x)$

باب 2

الفراغ الشعاعي التبولوجي

1.2 المفهوم العام للفراغ الشعاعي التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية و K الحقل الحقيقي $\mathcal{R}$ أو المركب $\mathcal{C}$.

تعريف 1.1.2. نعرف الفراغ الشعاعي التبولوجي على X، إذا كان الأخير فراغا شعاعيا على الحقل K و (X,τ) فراغ تبولوجي و البنية الجبرية و التبولوجيا متلائمين، إذا كانت العمليات الجبرية في X مستمرة، أي أن تطبيقي الجمع والجداء مستمرين، كي يكونا مستمرين يجب أن يتحقق : $V_x + V_y \subset V_{x+y}$ و $V_\lambda + V_x \subset V_{\lambda x}$، حيث:

$$V_\lambda = \{\mu \in K / |\mu - \lambda| \prec \sigma, \sigma \in \mathcal{R}_+^*\}$$

نتيجة 1.1.2. من أجل كل $a \in X$، f هوميومورفيزم من X في نفسه، حيث $f(x) = x + a$، إذا كانت $\mathcal{U}$ أسرة جوارات الصفر، فإن $\mathcal{U} + a$ أسرة جوارات a.

نتيجة 2.1.2. إذا كانت $\alpha \in K$, $(\alpha \neq 0)$، التطبيق f هوميومورفيزم من X في نفسه، حيث $f(x) = \alpha x$، إذا كان V جوار، كذلك تكون αV.

نتيجة 3.1.2. الفراغ الشعاعي التبولوجي هو فراغ شعاعي وهو أيضا فراغ تبولوجي .

قضية 1.1.2. إذا كانت $\mathcal{U}$ أساس لأسرة جوارات الصفر، فإنه من أجل كل $U \in \mathcal{U}$ يحقق:

(i) U ماصة .

(ii) يوجد $V \in V(0)$ حيث: $V + V \subseteq U$.

(iii) يوجد W جوار متوازن يحقق: $W \subseteq U$.

برهان:

(i) من أجل كل x_0 من X التطبيق f المعرف كالتالي:

$$f(\lambda) = \lambda x_0$$

يكون مستمرا في النقطة $\lambda = 0$ ومنه مستمر في الصفر، ومنه يوجد جوار للصفر في الحقل K؛ $\{\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon\}$ صورته في U أي أن: $\lambda x_0 \in U$ من أجل $|\lambda| \leq \varepsilon$، إذن $x_0 \in \mu U$ من أجل $|\mu| \geq \varepsilon^{-1}$، هذا يعني أن U ماص .

(ii) التطبيق $g(x,y)=x+y$ مستمر ومنه مستمر في الصفر، ومنه يوجد جوارات V_1,V_2 حيث $x+y\in U$ من أجل كل $x\in V_1$ و $y\in V_2$.
ومنه يوجد $V\in\mathcal{U}$ حيث: $V\subseteq V_1\bigcap V_2$ ؛ ومنه نستنتج أن:

$$V+V\subseteq U$$

(iii) التطبيق $h(\lambda,x)=\lambda x$ مستمر في النقطة صفر ومنه يوجد جوار V و $\varepsilon>0$ حيث : $\lambda x\in U$ من أجل كل λ $(|\lambda|\leq\varepsilon)$ وكل $x\in V$. ومنه نستنتج:

$$\lambda V\subseteq U$$

من أجل كل λ $(|\lambda|\leq\varepsilon)$ وعليه يكون $\varepsilon V\subseteq\mu U$ من أجل كل μ $(|\mu|\geq 1)$ ومنه نستنتج أن:

$$\varepsilon V\subseteq W\equiv\bigcap_{|\mu|\geq 1}\mu U$$

ومنه وباعتبار εV جوار، يكون W أيضا جوار . من أجل كل μ $(|\mu|\geq 1)$ إذا كان $x\in W$ و $0<|\lambda|\leq 1$ فإنه يكون:

$$x\in(\mu/\lambda)U$$

هذا يعني أن $\lambda x\in\mu U$ من أجل λ $(|\lambda|\leq 1)$ وكل μ $(|\mu|\geq 1)$ بما أن $\lambda x\in W$، يكون W متوازنا ومن الواضح أنه محتوى في U.

تعريف 2.1.2. الأساس المحلي لـ (X,τ) ف.ش.ت، هو أساس أسرة جوارات الصفر $V(0)$ ويرمز له بـ B_0.

نتيجة 4.1.2. من أجل كل $x,y\in X$ التطبيقات h_1,h_0 و, h_2 تكون مستمرة ؛ حيث :

$$h_0:(X\times X,\tau_*)\to(X,\tau)\qquad h_1:(X,\tau)\to(X,\tau)\qquad h_2:(X,\tau)\to(X,\tau)$$

$$(x,y)\to h_0(x,y)=x-y\qquad x\to h_1(x)=x+y\qquad y\to h_2(y)=x+y$$

نظرية 1.1.2. اذا كان (X,τ)ف.ش.ت. على حقل K، فإن :

1. من أجل كل $x_0\in X$ و $\lambda_0\in K,(\lambda_0\neq 0)$ التطبيق $x\to\lambda_0x+x_0$ يكون هوميومورفيزما من X في نفسه.
2. من أجل كل مجموعة جزئية A من X ومن أجل كل أساس محلي B_0 يكون :

$$\bar{A}=\bigcap\{A+U/U\in B_0\}$$

3. إذا كانت B,A مجموعتين جزئيتين من X حيث: $A\in\tau$، فإن : $A+B$ من τ.

برهان:

1. واضح أن التطبيق $x\to\lambda_0x+x_0$ تقابل وهو مستمر وتطبيقه العكسي $x\to\lambda_0^{-1}(x-x_0)$ مستمر أيضا، أي أنه هوميومورفيزم.
2. ليكن $B=\bigcap\{A+U/U\in B_0\}$ من خلال النقطة (1)، من أجل كل $x\in X$ تكون المجموعة $\{x-U/U\in B_0\}$ جوار لـ x، بالتالي $x\in B$ نعني أن كل جوار لـ x يتقاطع مع A، هذا يعني أن $B\subset\bar{A}$.

إذا كان $x \in \bar{A}$ فإنه من أجل كل U جوار للصفر يكون $x \in A+U$ ومنه نستنتج أن $\bar{A} \subset B$، وبالتالي يكون$\bar{A} = B$.

3. بما أن $A+B = \bigcup\{A+b/b \in B\}$ وباعتبار A مفتوحة، فإن $A+B$ عبارة عن اتحاد لمجموعات جزئية مفتوحة من X.ومنه تكون A مفتوحة.

نظرية 2.1.2. إذا كان X ف.ش.ت، فإن أسرة جوارات x تكتب كالتالي :

$$V(x) = \{v \in P(X)/v = x+u, u \in V(0)\}$$

برهان:
لتكن $x \in X$ كيفية و v جوار كيفي لها .
باعتبار التطبيق $h_2(y) = x+y$ مستمر من X في نفسه فإن :

$$v \in V(x) \Rightarrow \overleftarrow{h_2}(v) \in V(\overleftarrow{h_2}(x)) = V(0)$$

ذلك لأن $\overleftarrow{h_2}(x) = 0$، أي :

$$\forall v \in V(x), \exists u \in V(0)/\overleftarrow{h_2}(v) = u$$

ومنه نستنتج أن: $v = x+u$.

تعريف 3.1.2. التبولوجيا الشعاعية يقال أنها ثابتة بالنسبة للانسحاب، إذا تحقق من أجل كل x من X الصيغة :

$$V(x) = \{v \in P(X)/v = x+u, u \in V(0)\}$$

نتيجة 5.1.2.

1. إذا كان (X,τ) ف.ش.ت، فإنه :

$$\begin{gathered}
V(0) = \{u \in P(X)/u = v-x, x \in X, v \in V(x)\} \\
B_x = \{B \in P(X)/B = x+A, A \in B_0\} \\
B_0 = \{A \in P(X)/A = B-x, x \in X, B \in B_x\} \\
v \in V(0) \Leftrightarrow \lambda v \in V(0)/(\lambda \neq 0) \in K \\
v \in B_0 \Leftrightarrow \lambda v \in B_0/(\lambda \neq 0) \in K
\end{gathered}$$

2. لكي نعرف تبولوجيا شعاعية على X ف.ش، يكفي أن نعرف أساسها المحلي.

نتيجة 6.1.2. إذا كان (X,τ) ف.ش.ت، فإن :

1. تتكون أسرة جوارات الصفر من مجموعات ماصة .
2. الفراغ (X,τ) له أساس محلي مكون من مجموعات مفتوحة، ماصة ومتوازنة.

نظرية 3.1.2. إذا كانت A مجموعة جزئية من X، فإنه من أجل كل $x \in X$ ومن أجل كل $\lambda \in K$ غير معدومة يكون :

$$A \in \tau \Rightarrow \lambda A \text{ مفتوحة و } x + A \text{ مفتوحة}$$

برهان:
حسب النظرية 2.1.1، نقطة 1 فإن التطبيق $x \to \lambda_0 x + x_0$ هوميومورفيزم، ومنه باعتبار المفتوح خاصية تبولوجية، فإن:

$$A \in \tau \Rightarrow \{x + A \in \tau \wedge \lambda A \in \tau\}, x \in X, (\lambda \neq 0) \in K$$

نظرية 4.1.2. إذا كانت B مجموعة جزئية من X، فإنه من أجل كل $x \in X$ ومن أجل كل $\lambda \in K$ غير معدومة يكون :

$$\forall B \in \Im \Rightarrow \lambda B \text{ مغلوقة و } x + B \text{ مغلوقة .}$$

برهان:
حسب النظرية 2.1.1، نقطة 1 فإن التطبيق $x \to \lambda_0 x + x_0$ هوميومورفيزم، ومنه باعتبار المغلوق خاصية تبولوجية فإن:

$$B \in \Im \Rightarrow \{x + B \in \Im \wedge \lambda B \in \Im\}, x \in X, (\lambda \neq 0) \in K$$

نظرية 5.1.2. في الفراغ الشعاعي التبولوجي X كل جوار لـ x يحوي جوارا مغلقا لها.

برهان:
من أجل كل U جوار للصفر يوجد V جوار للصفر، حيث: $V + V \subset U$، نظرا لأن: $y \in \bar{V}$ فقط إذا كان $(y - V) \bigcap V \neq \varnothing$، فإنه ينتج:

$$\bar{V} \subset V + V \subset U$$

بالتالي $x + U$ يحوي الجوار المغلق $x + \bar{V}$ لـ x.

2.2 الفراغ الجزئي والمجموعات الجزئية الخاصة :

1.2.2 الفراغ الجزئي:

ليكن (X, τ) ف.ش.ت، X_0 فراغا شعاعيا جزئيا من الفراغ الشعاعي X و τ_{X_0} أثر التبولوجيا τ على X_0 .

نظرية 1.2.2. الفراغ التبولوجي الجزئي (X_0, τ_{X_0}) هو فراغ شعاعي تبولوجي .

برهان:
يكفي أن نبرهن استمرار اقتصاري تطبيق المجموع φ والجداء ψ على X_0، وهذا واضح لأن التطبيقان φ و ψ مستمران على X واقتصار تطبيق مستمر يكون مستمرا.

نتيجة 1.2.2. جملة جوارات الصفر في الفراغ (X_0, τ_{X_0})، تكتب كالتالي :

$$V_{X_0}(0) = \{v_0 \subset X_0 / (\exists u_0 \in V(0) / v_0 = u_0 \cap X_0)\}$$

2.2.2 المجموعات الجزئية الخاصة :

ليكن (X,τ) ف.ش.ت. و A,B مجموعتان جزئيتان غير خاليتان من X.

تعريف 1.2.2. نقول عن المجموعة A أنها محدودة في (X,τ)، إذا كانت ممتصة من طرف كل جوار للصفر، أي أن :

$$\forall v \in V(0), \exists \lambda > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda) \to A \in \mu v$$

نتيجة 2.2.2. يقال أن المتتالية (x_n) من ف.ش.ت. محدودة، اذا كانت مجموعة قيمها محدودة.

نظرية 2.2.2. A محدودة في (X,τ)، اذا وفقط اذا كانت ممتصة من طرف كل عناصر الأساس المحلي لـ (X,τ) أي اذا وفقط اذا تحقق :

$$\forall u \in B_0, \exists \lambda > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda) \to A \subset \mu u$$

برهان:
[$\Leftarrow$] هذا واضح لأن $B_0 \subset V(0)$.
[$\Rightarrow$] لدينا :

$$\forall u \in B_0, \exists \lambda > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda) \to A \subset \mu u$$

$$\forall v \in V(0), \exists u_0 \in B_0/u_0 \subset v$$

ومنه نستنتج :

$$\exists \lambda_0 > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda_0) \to A \subset \mu u_0$$

$$\mu u_0 \subset \mu v$$

وبالتالي :

$$\forall v \in V(0), \exists (\lambda = \lambda_0) > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda) \to A \subset \mu v$$

وعليه فإنّ A محدودة.

قضية 1.2.2. إذا كانت A,B محدودتان في (X,τ) و $\lambda \in K$، فإن:

1. $A \cup B, A \cap B$ محدودة .
2. $A + B, \lambda A$ محدودة .
3. $\overset{\circ}{A}, \bar{A}$ محدودة .
4. A محدودة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $\lambda_n x_n \to 0$ هذا من أجل $x_n \in A$ و $\lambda_n \to 0$.

برهان:

1. $A \cup B, A \cap B$ محدودة .

- $A \cap B$ محدودة، لأنها محتواة في مجموعة محدودة.

- لدينا A و B محدودتان أي :

$$\forall v \in V(0), \exists \lambda_1 > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda_1) \to A \in \mu v$$

$$\forall v \in V(0), \exists \lambda_2 > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda_2) \to B \in \mu v$$

ومنه من أجل كل v من $V(0)$ نستنتج أنه :

$$\{\exists \lambda_0 \in K/|\lambda_0| > \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)\}, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda_0) \to A \bigcup B \in \mu v$$

هذا يعني أن $A \bigcup B$ محدودة .

2. $A+B, \lambda A$ محدودة .

- من التعريف واضح أن λA محدودة .
- كما في برهان النقطة 1 بأخذ λ_0 من k، حيث $|\lambda_0| > \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ يكون :

$$(\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda_0) \to A+B \in \mu(v+v)1 \qquad (1)$$

بما أن $v+v$ من $V(0)$ ويمسح $V(0)$ عندما v يمسح $V(0)$، فإنه من الصيغة (1) نستنتج أن المجموعة $A+B$ محدودة .

3. $\overset{\circ}{A}, \bar{A}$ محدودة .

- $\overset{\circ}{A}$ محدودة، لأنها محتواة في مجموعة محدودة .
- $\bar{A}$ محدودة، هذا واضح بالاعتماد على النظرية 2.1.5.

4. A محدودة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $\lambda_n x_n \to 0$ هذا من أجل $x_n \in A$ و $\lambda_n \to 0$.
A محدودة أي :

$$\forall v \in V(0), \exists \lambda > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda) \to A \in \mu v$$

بما أنه يوجد u_0 من B_0 متوازن ويحقق :

$$u_0 \subset v \qquad (2)$$

فإنه :

$$\exists \lambda_0 > 0, (\forall \mu \in K/|\mu| \geq \lambda_0) \to A \in \mu u_0$$

ومنه تكون الصيغة التالية صحيحة :

$$\exists \lambda_0 > 0/A \in \lambda_0 u_0 \qquad (3)$$

بما أنه يوجد $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$، فإن :

$$\exists n_0 \geq 1/\forall n \geq n_0 \to |\lambda_n| < \frac{1}{\lambda_0} \vee \lambda_0 |\lambda_n| < 1$$

بما أن $x_n \in A$ وباعتبار الصيغة (3) يكون $x_n \in \lambda_0 u_0$ أو في الصيغة المكافئة $\frac{x_n}{\lambda_0} \in u_0$، هذا وباعتبار u_0 متوازنا يكون :

$$\forall n \geq n_0 \to \lambda_n \lambda_0 \frac{x_n}{\lambda_0} = \lambda_n x_n \in u_0$$

ومنه وباعتبار الصيغة (2) يكون :

$$\forall v \in V(0), \exists n_0 \geq 1 / \forall n \geq n_0 \to \lambda_n x_n \in v$$

نتيجة 3.2.2.

1. يكون المجموع المنتهي لمجموعات محدودة، مجموعة محدودة .
2. يكون الاتحاد المنتهي لمجموعات محدودة، مجموعة محدودة .
3. تكون كل مجموعة منتهية مجموعة محدودة .

نظرية 3.2.2. كل ف.ش.ت. (X, τ) له أساس محلي متكون من مجموعات مغلقة، ماصة ومتوازنة.

برهان:
حسب النتيجة 2.1.6 رقم 2، يكفي أن نبرهن أنّ $\bar{B_0}$ أساس محلي متكون من مجموعات مغلقة، ماصة ومتوازنة حيث :

$$\bar{B_0} = \{\bar{u_0} / u_0 \in B_0\}$$

لاحظ أن :

$$\forall v \in V(0), \exists u \in B_0 / u \subset v$$

$$u \in B_0 \Rightarrow \exists u_0 \in B_0 / u_0 + u_0 \subset u \tag{4}$$

عناصر B_0 متوازنة وماصة .
من أجل كل $x \in \bar{u_0}$، يكون $(x + u_0) \cap u_0 \neq \varnothing$، أو بإعتبار u_0 متوازنة نكتب $(x - u_0) \cap u_0 \neq \varnothing$، هذا يعني :

$$\exists y_0 \in (x - u_0) \wedge y_0 \in u_0$$

ومنه :

$$y_0 = x - z_0 \wedge y_0 \in u_0$$

اذن :

$$x = y_0 + z_0 / y_0 \in u_0, z_0 \in u_0$$

هذا يعني $x = u_0 + u_0$ وبالتالي $\bar{u_0} \subset u_0 + u_0$
ومنه باعتبار الصيغة (4) نستنتج :

$$\forall v \in V(0) \exists v_0 = u_0 \in B_0 / \bar{u_0} \subset v$$

هذا يعني أن $\bar{B_0}$ أساس محلي . حسب النتيجة 2.1.6 تكون عناصر مغلقة، ماصة ومتوازنة.

نتيجة 4.2.2. كل جوار للصفر يحوي لصاقة جوار للصفر.

نظرية تمهيدية 1.2.2. ليكن X فراغا شعاعيا تبولوجيا، اذا كان $A \subseteq X$، فإن :

(a) $\bar{A} = \bigcap\limits_{v \in V(0)} (A+v) = \bigcap\limits_{u \in B_0} (A+u)$

(b) A متوازنة تستلزم $\bar{A}$ متوازنة .

(c) A متوازنة و $0 \in \overset{\circ}{A}$ تستلزم $\overset{\circ}{A}$ متوازنة .

برهان:

(a) من أجل كل u من B يتحقق :

$$\forall x \in \bar{A} \to (x+u) \bigcap A \neq \varnothing$$

ومنه نستنتج أن :

$$\exists y \in u / x+y \in A$$

ومنه وباعتبار u متوازنة نستنتج أن :

$$x \in -y + A \subset u + A$$

هذا وباعتبار u كيفية من B يكون :

$$x \in \bigcap_{u \in B_0} (A+u)$$

لاحظ أن :

$$\left\{ x \in \bigcap_{u \in B_0} (A+u) \right\} \Leftrightarrow \{x \in A+u, \forall u \in B_0\}$$

اذا كانت $x \notin \bar{A}$، فإن :

$$\exists v_0 \in V(0) / (x+v_0) \bigcap A = \varnothing$$

ومنه اذا كانت B_0 أساسا محليا، فإن :

$$\exists u_0 \in B_0 / (x+u_0) \bigcap A = \varnothing$$

وبالتالي نستنتج أن :

$$\forall y \in u_0 \to x+y \notin A$$

هذا يعني أن :

$$\forall y \in u_0 \to x \notin -y + A$$

أو في الشكل المكافئ نكتب :

$$x \notin \bigcup_{y\in u_0} (-y+A) = u_0 + A$$

وهذا مناف كون $x \in \bigcap_{u\in B_0} (A+u)$ ومنه حتما $x \in \bar{A}$، بالتالي يكون :

$$\bar{A} = \bigcap_{u\in B_0} (A+u)$$

(b) اذا كان $x \in \bar{A}$، حيث $|\lambda| \leq 1$، فإن :

$$\lambda x \in \lambda\bar{A} = \overline{\lambda A} \subseteq \bar{A}$$

ومنه نستنتج أن $\bar{A}$ متوازنة .

(c) حسب خصائص النقط الداخلية: حالة $\lambda = 0$ و $0 \in A$ يتحقق $0\overset{\circ}{A} = 0 \subset \overset{\circ}{A}$.
حالة $\lambda \neq 0$، حسب خصائص النقط الداخلية نستنتج أن:

$$(\forall \lambda \in k/0 < |\lambda| \leq 1) \to \lambda\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\lambda}\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\widehat{\lambda A}} \subset \overset{\circ}{A}$$

هذا يعني أن $\overset{\circ}{A}$ متوازنة .

قضية 2.2.2. إذا كانت A مجموعة جزئية محدبة من X، فإن(ه) :

1. اذا كانت $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$، يتحقق :

$$\forall x \in \overset{\circ}{A}, \forall y \in \bar{A} \to [x,y[\subset \overset{\circ}{A}$$

2. $\overset{\circ}{A}$ و $\bar{A}$ محدبتان .

برهان:

1. من أجل كل x من $\overset{\circ}{A}$ ومن أجل كل y من $\bar{A}$، وباعتبار A محدبة لاحظ أن :

- حالة $y \in A$ وباعتبار $\overset{\circ}{A}$ مفتوح يكون :

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in (1-\lambda)\overset{\circ}{A} + \lambda A \subset A, \lambda \in [0,1[$$

$$(1-\lambda)\overset{\circ}{A} + \lambda A \in \tau$$

ومنه نستنتج أن :

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{A}$$

هذا يعني أن: $[x,y[\subset \overset{\circ}{A}$.

- حالة $y \in \bar{A}$، من أجل كل x' من $]x, y[$ نستنتج :

$$\exists \lambda \in]0,1[/ x' = (1-\lambda)x + \lambda y$$

لاحظ أن التطبيق f المعرف من X في نفسه كالتالي :

$$f(z) = x' + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x' - z)$$

هوميومورفيزم ويحقق: $f(y) = x$.
ومنه وباعتبار $\overset{\circ}{A}$ مفتوح يكون $f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right)$ مفتوحا ويحوي y. ومنه وباعتبار $y \in \bar{A}$، يكون:

$$f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \bigcap A \neq \varnothing$$

أي أن :

$$\exists x_0 \in f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \bigcap A$$

ومنه يكون :

$$f(x_0) \in \overset{\circ}{A} \wedge x_0 \in \overset{\circ}{A}$$

لاحظ أن :

$$f(x_0) = x' + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x' - x_0)$$

أي أن :

$$x' = (1-\lambda) f(x_0) + \lambda x_0 \in]f(x_0), x_0[$$

ومنه حسب الحالة الأولى نستنتج أن $x' \in \overset{\circ}{A}$، هذا وباعتبار:

$$x' = (1-\lambda)x + \lambda y$$

يكون: $]x, y[\subset \overset{\circ}{A}$.

2. $\overset{\circ}{A}$ محدبة حالة خاصة من النقطة 1.
لبرهان $\bar{A}$ محدبة من أجل كل λ من $]0,1[$، نعرف تطبيق f_λ من $X \times X$ في X كالتالي :

$$f_\lambda(x, y) = \lambda x + (1-\lambda)y$$

واضح أن التطبيق f_λ مستمر.
من صيغة التطبيق f_λ لبرهان $\bar{A}$ محدبة يكفي برهان أن $f(\bar{A} \times \bar{A}) \subset \bar{A}$. بما أن f_λ مستمر و $\bar{A}$ مغلقة، فإن $\overleftarrow{f_\lambda}(\bar{A})$ مغلقة، أي أن :

$$\overleftarrow{f}_\lambda(\bar{A}) = \overline{\overleftarrow{f_\lambda}(\bar{A})} \tag{5}$$

من خصائص نقط التلاصق وباعتبار A محدبة و f_λ مستمر يكون : $A \times A \subset \overleftarrow{f_\lambda}(A) \subset \overleftarrow{f_\lambda}(\bar{A})$، ومنه

وباعتبار الصيغة (5) يكون :

$$\bar{A}\times\bar{A}\subset\overline{A\times A}\subset\overline{\overleftarrow{f_\lambda}(\bar{A})}=\overleftarrow{f_\lambda}(\bar{A})$$

وبالتالي يكون:

$$f_\lambda(\bar{A}\times\bar{A})\subset\bar{A}$$

ومنه $\bar{A}$ محدبة.

نظرية 4.2.2. لتكن B مجموعة جزئية متوازنة ومحدبة من X، الخصائص التالية متكافئة:

(i) $\overset{\circ}{B}\neq\varnothing$.

(ii) $0\in\overset{\circ}{B}$.

(iii) $\overset{\circ}{B}=[0,1]B$ و $B\neq\varnothing$.

برهان:

$(iii)\ x\in\overset{\circ}{B}\Leftrightarrow\exists y\in B,\exists\lambda\in[0,1[/x=\lambda y, B\neq 0\Rightarrow 0\in 0.B\subset B\Rightarrow 0\in\overset{\circ}{B}\Rightarrow(ii)$

$(ii)\Rightarrow(i)$ واضحة .

لبرهان $(iii)\Rightarrow(i)$ نفرض $x\in B$، $y\in\overset{\circ}{B}$ و $0\leq\lambda<1$. لدينا $-y\in B$ لأن B متوازنة لذلك فإن :

$$\lambda x=\lambda x+(1-\lambda)(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(-y))\in\lambda x+\frac{(1-\lambda)}{2}(-y)+\frac{(1-\lambda)}{2}\overset{\circ}{B}\subset B$$

و $\frac{1-\lambda}{2}\overset{\circ}{B}$ مفتوح لأن $\frac{1-\lambda}{2}\succ 0$.

قضية 3.2.2. في (X,τ)، اذا كانت A من X محدبة، متوازنة، محدبة مطلقا فإن $\bar{A}$ تكون محدبة، متوازنة، محدبة مطلقا على التوالي.

برهان:

نفرض A مجموعة محدبة مطلقا، ولتكن $a,b\in\bar{A}$ و $|\lambda|+|\mu|\leq 1$ ، من أجل كل جوار للصفر U، يوجد جوار للصفر متوازن V بحيث $V+V\subseteq U$: (قضية 2.1.1)، ومنه يوجد نقاط $x\in A\bigcap(a+V)$ و $y\in A\bigcap(b+V)$ من أجلها يكون :

$$\lambda x+\mu y\in(\lambda A+\mu A)\bigcap(\lambda a+\mu b+\lambda V+\mu V)\subset$$

$$\subseteq A\bigcap(\lambda a+\mu b+V+V)$$

$$\subseteq A\bigcap(\lambda a+\mu b+U)$$

ومنه يكون $\lambda a+\mu b\in\bar{A}$، هذا يعني أن $\bar{A}$ محدبة مطلقا .

في حالة A محدبة، متوازنة نبرهن بنفس الطريقة.

3.2 الفصل وبديهيات الفصل:

ليكن (X,τ) فراغا شعاعيا تبولوجيا.

تعريف 1.3.2. نقول عن (X,τ) أنه يحقق بديهية الفصل :

1. لكولموغروف (T_0–فراغ)، إذا تحقق :

$$\{\forall x, y \in X/x \neq y\} \Rightarrow \{(\exists v_x \in V(x)/y \notin v_x) \vee (\exists v_y \in V(y)/y \notin v_x)\}$$

2. الأولى (T_1–فراغ)، إذا تحقق :

$$\{\forall x, y \in X/x \neq y\} \Rightarrow \{(\exists v_x \in V(x)/y \notin v_x) \wedge (\exists v_y \in V(y)/y \notin v_x)\}$$

3. الثانية (T_2–فراغ؛ (يسمى الفراغ المنفصل))، إذا تحقق :

$$\{\forall x, y \in X/x \neq y\} \Rightarrow \{\exists v_x \in V(x), \exists v_y \in V(y)/v_x \cap v_y = \varnothing\}$$

نظرية 1.3.2. يكون (X,τ) منفصلا، أي T_2– فراغ، إذا تحقق التكافؤ التالي :

$$T_2 \Leftrightarrow \{\forall x \in X\backslash\{0\}, \exists v_0 \in V(0)/x \notin v_0\}$$

برهان:
عندنا (X,τ) منفصل أي :

$$(\forall x, y \in X/x \neq y), \exists v_x \in V(x), \exists v_y \in V(y)/v_x \cap v_y = \varnothing \tag{6}$$

[$\Leftarrow$] نبرهن أن:

$$\forall x \in X\backslash\{0\}, \exists v_0 \in V(0)/x \notin v_0$$

باعتبار الصيغة (6) لاحظ أن:

$$x \in X\backslash\{0\} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \exists v_0 \in V(0), \exists v_x \in V(x)/v_0 \cap v_x = \varnothing$$

ومنه نستنتج :

$$\forall x \in X\backslash\{0\}, \exists v_0 \in V(0)/x \notin v_0$$

[$\Rightarrow$] لدينا :

$$\forall x \in X\backslash\{0\}, \exists v_0 \in V(0)/x \notin v_0 \tag{7}$$

لاحظ أنه من أجل كل $x, y \in X$, $(x \neq y)$ يكون $x - y \neq 0$ ومنه باعتبار الصيغة (7) نستنتج :

$$\exists v_0 \in V(0)/x - y \notin v_0 \tag{8}$$

لاحظ :

$$\exists v_0 \in V(0), \exists u_0 \in B_0 / u_0 + u_0 \subset v_0$$

$$x + u_0 \in V(x), y + u_0 \in V(y)$$

نبرهن أن $(x + u_0) \cap (y + u_0) = \varnothing$.
نفرض العكس، أي يوجد z_0 من $(x + u_0) \cap (y + u_0)$ ومنه وباعتبار u_0 متوازنة يكون :

$$x - y = (z_0 - y) - (z_0 - x) \in u_0 - u_0 = u_0 + u_0 \subset v_0$$

وهذا مناف للصيغة (8) ومنه من أجل كل $x, y \in X$ $(x \neq y)$، نستنتج أنه:

$$\exists (v_x = x + u_0) \in V(x), \exists (v_y = y + u_0) \in V(y) / v_x \cap v_y = \varnothing$$

هذا يعني أن (X, τ) منفصل.

نتيجة 1.3.2. يكون (X, τ) منفصلا، إذا وفقط إذا كان تقاطع كل عناصر أساسه المحلي يساوي الصفر، أي :

$$T_2 \Leftrightarrow \bigcap_{U \in B_0} U = \{0\}$$

برهان:
اذا كان $\bigcap_{U \in B_0} U = \{0\}$ فإنه من أجل كل عدد x, y من X $(x \neq y)$، يوجد U جوار للصفر، حيث $x - y \notin U$.
ومنه يوجد جوار للصفر متوازن V، حيث $V + V \subseteq U$، ومنه وباعتبار $x + V$ و $y + V$ جوارات لـ x و y على التوالي، فإنه بفرض $z \in (x + V) \bigcap (y + V)$ يكون :

$$x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V = V + V \subseteq U$$

وهذا مناف كون $x - y \notin U$ وبالتالي يكون:

$$(y + V) \bigcap (x + V) = \varnothing$$

أي X منفصل .

نتيجة 2.3.2. في الفراغ الشعاعي التبولوجي يكون:

$$T_2 \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow T_0$$

4.2 المؤثرات ، (التطبيقات) والأشكال الخطية :

ليكن (X, τ_X) و (Y, τ_Y) فراغين شعاعيين تبولوجيين على نفس الحقل K .

أنظر التعاريف $1.3.3, 1.3.4, 1.3.5$ من الفصل الأول. نرمز لفراغ المؤثرات الخطية بـ $L(X, Y)$ وإذا كانت المؤثرات معرفة على X نرمز لها بالرمز $L_0(X, Y)$ ويسمى فراغ التطبيقات الخطية، حيث :

$$L_0(X, Y) = \{F \in L(X, Y)/D(F) = X\}$$

في حالة $X \equiv K$ الفراغات $L_0(X, K), L(X, K)$ فراغات الأشكال الخطية f^* على $D(f^*)$، X على التوالي، نرمز لها بـ $(D(f^*))^*$، X^* على التوالي .حينها الفراغ X^* يدعى الثنوي الجبري لـ X .
باعتبار الفراغات الشعاعية التبولوجية هي فراغات تبولوجية، والتطبيقات الخطية هي تطبيقات، فإن كل الدراسة الخاصة بالتطبيقات بين الفراغات التبولوجية تبقى صحيحة.

تعريف 1.4.2.

1. التطبيق F من $L_0(X, Y)$ يكون مستمرا، (مستمر في كل نقطة $x \in X$)، إذا تحقق :

$$\forall v \in V_Y(F(x)), \exists u \in V_X(x)/F(u) \subset v$$

2. التطبيق F من $L_0(X, Y)$ يكون مستمرا بانتظام على X، إذا تحقق :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists u \in V_X(0)/(\forall x', x'' \in X/(x' - x'') \in u)$$

$$\to (F(x') - F(x'')) \in v \tag{9}$$

3. التطبيق F من $L_0(X, Y)$ يكون محدودا، اذا كانت صورة كل مجموعة محدودة في الفراغ (X, τ_X)، مجموعة محدودة في الفراغ (Y, τ_Y) .
يرمز لمجموعة التطبيقات F من $L_0(X, Y)$ المستمرة، المحدودة بالرمز $l_0(X, Y)$ $l(X, Y)$ على التوالي وهي فراغات شعاعية جزئية من $L_0(X, Y)$.

نتيجة 1.4.2. باعتبار المؤثر هو تطبيق على مجموعة تعريفه، نستطيع كتابة التعاريف السابقة كالآتي:

1. المؤثر F من $L(X, Y)$ يكون مستمرا، (مستمر في كل نقطة $x \in D(F)$)، إذا تحقق :

$$\forall v \in V_Y(F(x)), \exists u \in V_X(x)/F(u) \subset v$$

2. المؤثر F من $L(X, Y)$ يكون مستمرا بانتظام على $D(F)$، إذا تحقق :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists u \in V_X(0)/(\forall x', x'' \in D(F)/(x' - x'') \in u)$$

$$\to (F(x') - F(x'')) \in u$$

3. المؤثر F من $L(X,Y)$ يكون محدودا، اذا كانت صورة كل مجموعة من $D(F)$ محدودة في (X,τ_X)، تكون مجموعة محدودة في (Y,τ_Y).
يرمز لمجموعة المؤثرات F من $L(X,Y)$ المستمرة، المحدودة بالرمز $l_0(D(F),Y)$ $l(D(F),Y)$ على التوالي وهي فراغات شعاعية جزئية من $L(X,Y)$.

نتيجة 2.4.2. باعتبار الشكل الخطي هو تطبيق خطي على مجموعة تعريفه، نستطيع كتابة التعاريف السابقة بالنسبة للشكل الخطي كالاتي:

1. الشكل الخطي f^* من X^* يكون مستمرا، (مستمر في كل نقطة x من X)، إذا تحقق :

$$\forall v\in V_K(f^*(x)),\exists u\in V_X(x)/f^*(u)\subset v$$

2. الشكل الخطي f^* من X^* يكون مستمرا بانتظام على X، إذا تحقق :

$$\forall v\in V_K(0),\exists u\in V_X(0)/(\forall x',x''\in X/(x'-x'')\in u)$$

$$\to (f^*(x')-f^*(x''))\in u$$

3. الشكل الخطي f^* من X^* يكون محدودا، اذا كانت صورة كل مجموعة محدودة في (X,τ_X)، تكون مجموعة محدودة في K.
يرمز لمجموعة الأشكال الخطية f^* من X^* المحدودة، المستمرة، بالرمز $B(X,K)$ X' على التوالي وهي فراغات شعاعية جزئية من X^*. عندها الفراغ X' يسمى الثنوي التبولوجي لـ X.

4. الشكل الخطي f^* من $L(X,K)$ يكون مستمرا، (مستمر في كل نقطة x من $D(f^*)$)، إذا تحقق :

$$\forall v\in V_K(F(x)),\exists u\in V_X(x)/f^*(u)\subset v$$

5. الشكل الخطي f^* من $L(X,K)$ يكون مستمرا بانتظام على $D(f^*)$، إذا تحقق :

$$\forall v\in V_K(0),\exists u\in V_X(0)/(\forall x',x''\in D(f^*)/(x'-x'')\in u)$$

$$\to (F(x')-F(x''))\in u$$

6. الشكل الخطي f^* من $L(X,K)$ يكون محدودا، اذا كانت صورة كل مجموعة من $D(f^*)$ محدودة في (X,τ_X) تكون مجموعة محدودة في K.
يرمز لمجموعة الأشكال الخطية f^* من $L(X,K)$ المستمرة، المحدودة بالرمز $(D(f^*))'$ $B(D(f^*),K)$ على التوالي وهي فراغات شعاعية جزئية من $L(X,K)$.

تعريف 2.4.2. المجموعة S من $l_0(X,Y)$ أو من $l_0(D(F),Y)$ تكون متساوية الاستمرار، إذا تحقق :

$$\forall v\in V_Y(0),\exists u\in V_X(0)/F(u)\subset v$$

من أجل كل F من S.

نتيجة 3.4.2. المجموعة S من $l_0(X,Y)$ يقال أنها متساوية الاستمرار، إذا وفقط إذا تحقق :

$$\forall v \in V_Y(0) \to \cap_{F\in S} \overleftarrow{F}(v) \in V_X(0)$$

نظرية 1.4.2. لتكن X,Y فضاءات شعاعية تبولوجية على الحقل K، وليكن u تطبيقا خطيا مستمرا من X في Y، اذا كانت B محدودة في X، فإن $u(B)$ محدود في Y.

برهان:
اذا كان v جوارا كيفيا للصفر في Y، فإن $\overleftarrow{u}(v)$ جوار للصفر في X، بالتالي اذا كانت B محدودة، فإن:

$$B \subset \lambda \overleftarrow{u}(v) = \overleftarrow{u}(\lambda v)$$

حيث $\lambda \in K$، مما يعني أن $u(B) \subset \lambda v$ أي $u(B)$ محدود في Y.

نظرية 2.4.2. إذا كان F من $L_0(X,Y)$، فإن الإثباتات التالية متكافئة :

1. F مستمر بانتظام .
2. F مستمر .
3. F مستمر في الصفر .

برهان:
التطبيق F مستمر يعني مستمر في كل نقطة كيفية من X، أي أن:

$$\forall v \in V_Y(F(x)), \exists u \in V_X(x) / F(u) \subset v$$

أو في الصيغة المكافئة :

$$\forall v \in V_Y(F(x)), \exists u \in V_X(x) / \forall z \in u \to F(z) \subset v \tag{10}$$

من الصيغة (9) و (10) وبإعتبار التبولوجيا الشعاعية ثابتة بالنسبة للانسحاب نستنتج $2 \Rightarrow 1$.
واضح أن $3 \Rightarrow 2$.
نبرهن أن $1 \Rightarrow 3$: عندنا F مستمر في 0، أي أن :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists u \in V_X(0) / \forall z \in u \to F(z) \subset v \tag{11}$$

باعتبار F خطي نبرهن :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists u \in V_X(0) / (\forall x^{'}, x^{''} \in X / (x^{'} - x^{''}) \in u) \to$$

$$\to (F(x^{'}) - F(x^{''}) = F(x^{'} - x^{''})) \in u \tag{12}$$

من الصيغة (11) و (12) وباعتبار X فراغ شعاعي نستنتج بأن $1 \Rightarrow 3$.
وبالتالي يكون $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$.

ملاحظة 1.4.2. النظرية 2.4.2 صحيحة أيضا في حالة F من $L(X,Y)$.

نظرية 3.4.2. كل تطبيق F من $l_0(X,Y)$ يكون من $l(X,Y)$، أي :

$$l_0(X,Y) \subset l(X,Y)$$

برهان:
[$\Leftarrow$] لتكن A مجموعة محدودة في (X,τ_X)، أي :

$$\forall u \in V_X(0), \exists \lambda_1 \succ 0 / (\forall \mu \in K/|\mu| \succeq \lambda_1) \rightarrow A \subset \mu u \quad (13)$$

نثبت أن المجموعة $F(A)$ محدودة في (Y,τ_Y)، أي نثبت بأن :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists \lambda_2 \succ 0 / (\forall \mu \in K/|\mu| \succeq \lambda_2) \rightarrow F(A) \subset \mu v \quad (14)$$

بما أن $F \in l_0(X,Y)$، فإن :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists u \in V_X(0) / F(u) \subset v \quad (15)$$

وعليه باعتبار الصيغة (13) نستنتج :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists \lambda_1 \succ 0 / (\forall \mu \in K/|\mu| \succeq \lambda_1) \rightarrow A \subset \mu u$$

ومنه باعتبار الصيغة (15) والتطبيق F خطي نستنتج :

$$\forall v \in V_Y(0), \exists (\lambda_2 = \lambda_1) \succ 0 / (\forall \mu \in K/|\mu| \succeq \lambda_1) \rightarrow$$

$$F(A) \subset \mu F(u) \subset \mu v$$

ومنه تتحقق الصيغة (14)، ذلك يعني أن F تطبيق محدود.

ملاحظة 2.4.2. النظرية 2.4.3 صحيحة في حالة F من $L(X,Y)$.

باب 3

أشباه النظم

1.3 أشباه النظم في الفراغ الشعاعي

ليكن X فراغا شعاعيا على الحقل K.

تعريف 1.1.3. التطبيق p معرف على X في $\mathcal{R}$، يدعى شبه نظيم اذا تحقق :

S_1: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

S_2: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

من أجل كل $x, y \in X$ وكل $\lambda \in K$.

نتيجة 1.1.3. إذا كان p شبه نظيم على X، من أجل كل $x, y \in X$ فإن :

1. $p(0) = 0$.
2. $p(x) = p(-x)$.
3. $p(x) \succeq 0$.
4. $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.

برهان:

1. واضحة من خلال S_1 وذلك بوضع $\lambda = 0$.
2. واضحة من خلال S_1 وذلك بوضع $\lambda = -1$.
3. باستخدام 1 و 2 مع S_2 نحصل على :

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$$

ومنه تتحقق :

$$p(x) \geq 0$$

.4

$$p(y) \leq p(x) + p(y-x),\ \ p(x) \leq p(y) + p(x-y)$$

نتيجة 2.1.3. إذا كان P شبه نظيم على X، فإن من أجل كل $x_k \in X$، $\lambda_K \in K$، $K = 1, 2, ..., n$ يكون :

$$P(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leq (\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| P(x_k))$$

نتيجة 3.1.3. كل أشباه النظم على X، تكون تطبيقات محدبة ومتجانسة على X.

نظرية تمهيدية 1.1.3. اذا كان p و q أشباه نظم على X، حيث : $p(x) < 1 \Rightarrow q(x) \leq 1$، فإنه :

$$\forall x \in X \rightarrow q(x) \leq p(x)$$

برهان:

بفرض العكس أي :

$$\exists x \in X, \exists \alpha > 0/ \quad 0 \leq p(x) < \alpha < q(x)$$

من الصيغة الأخيرة نستنتج أن : $p(\frac{x}{\alpha}) < 1$ و $q(\frac{x}{\alpha}) > 1$ هذا مناف للفرض .

تعريف 2.1.3. نفرض X فراغ شعاعي على الحقل K، دالة مينكاوسكي هي دالة $p : X \rightarrow \mathcal{R}$ تحقق الشرطين :

$$p(tx) = tp(x)\ ;\ \forall x \in X, \forall t \geq 0\ \ (i)$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ ;\ \forall x, y \in X\ \ (ii)$$

نتيجة 4.1.3.

1. دالة مينكاوسكي تكون شبه نظيم اذا كانت غير سالبة وتحقق: $p(cx) = |c| p(x)$.
2. دالة مينكاوسكي يمكن أن تكون سالبة .

تعريف 3.1.3. تعرف دالة مينكاوسكي للمجموعة A من X بأنه التطبيق P_A المعرف من X في $\mathcal{R}$ كالتالي :

$$P_A(x) = \inf\{\mu > 0/\ x \in \mu A\}$$

(قد تكون هذه القيمة غير منتهية).

تعريف 4.1.3. إذا كان P شبه نظيم على X، فإنه من أجل كل $x \in X$ ومن أجل كل $r \in \mathcal{R}_+^*$، تعرف شبه الكرة :

- المفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r_0 مرفقة بـ P، بأنها $O_P(x_0, r_0)$، حيث :

$$O_P(x_0, r_0) = \{x \in X / P(x_0 - x) \prec r_0\}$$

- المغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r_0 مرفقة بـ P، بأنها $F_P(x_0, r_0)$، حيث :

$$F_P(x_0, r_0) = \{x \in X / P(x_0 - x) \leq r_0\}$$

سطح الكرة $F_P(x_0,r_0)$ يعرف بـ $S_P(x_0,r_0)$، حيث :

$$S_P(x_0,r_0)=\{x\in X/P(x_0-x)=r_0\}$$

في حالة

- $x_0=0$ نضع $F_P(r_0),O_P(r_0)$ عوضا عن $F_P(x_0,r_0),O_P(x_0,r_0)$.
- $x_0=0,r_0=1$ تسمى $F_P(1),O_P(1)$ شبه كرة الوحدة المفتوحة، المغلقة على التوالي.

نتيجة 5.1.3. كل من الكرتين $F_P(1),O_P(1)$ مجموعة محدبة، متوازنة وماصة.

نتيجة 6.1.3. إذا كان P شبه نظيم على X، فإنه من أجل كل $x\in X$ ومن أجل كل $r\in\mathcal{R}_+^*$، يكون :

1. $O_P(x,r)=x+O_P(r)$.
2. $O_P(r)=rO_P(1)$.
3. $\forall\varepsilon\succ 0\rightarrow \varepsilon O_P(x,r)=O_P(x,\varepsilon r)=O_{\frac{P}{\varepsilon}}(x,r)$

قضية 1.1.3. اذا كانت A مجموعة جزئية من X، فإن(ه) :

1. P_A يحقق الشرط :

$$\forall x\in X,\forall\lambda>0\rightarrow P_A(\lambda x)=\lambda P_A(x)$$

اذا كان $0\in A$، فإن $P_A(0)=0$، عندها يكون :

$$\forall x\in X,\forall\lambda\geq 0\rightarrow P_A(\lambda x)=\lambda P_A(x)$$

2. اذا كانت A مجموعة متوازنة، فإن P_A يحقق الشرط :

$$P_A(\lambda x)=|\lambda|P_A(x),\ \ \lambda\in C,\ \ x\in X$$

3. اذا كانت A مجموعة محدبة، فإن P_A يحقق الشرط :

$$\forall x,y\in X\rightarrow P_A(x+y)\leq P_A(x)+P_A(y)$$

$$\forall x\in X,\forall\lambda>0\rightarrow P_A(\lambda x)=\lambda P_A(x)$$

اذا كان $0\in A$، فإن P_A يكون شكلا محدبا متجانسا ويكون عندها :

$$\{x/P_A(x)<1\}\subset A\subset\{x/P_A(x)\leq 1\}$$

4. اذا كانت A مجموعة ماصة، فإن P_A يكون شكلا منتهيا، أي:

$$\forall x\in X\rightarrow P_A(x)\in\mathcal{R}$$

5. اذا كانت A مجموعة محدبة مطلقا وماصة، فإن P_A يكون شبه نظيم.

برهان:

1. من أجل كل x من X ومن أجل كل λ من $\mathcal{R}_+^*$ لاحظ أن :

$$P_A(\lambda x) = \inf\{\mu > 0 / \lambda x \in \mu A\} = \lambda \inf\{\lambda^{-1}\mu > 0 / x \in \lambda^{-1}\mu A\}$$

ومنه بوضع $\gamma = \lambda^{-1}\mu$ يكون :

$$P_A(\lambda x) = \lambda \inf\{\lambda^{-1}\mu > 0 / x \in \lambda^{-1}\mu A\} = \lambda \inf\{\gamma > 0 / x \in \gamma A\}$$

ومنه نستنتج أن $P_A(\lambda x) = \lambda P_A(x)$. اذا كان $0 \in A$، فإن $0 \in \mu A$ عندما $0 \xrightarrow{>} \mu$، ومنه نستنتج أن :

$$P_A(0) = \inf\{\mu > 0 / 0 \in \mu A\} = 0$$

2. حالة $\lambda = 0$: بما أن A مجموعة متوازنة، فإنه وباعتبار النقطة 1 يكون $P_A(0) = 0$ ومنه :

$$P_A(0x) = P_A(0) = 0 = 0P_A(x)$$

حالة $\lambda \neq 0$ لاحظ أن :

$$P_A(\lambda x) = \inf\{\mu > 0 / \lambda x \in \mu A\} =$$

$$= \inf\left\{\mu > 0 / x \in \frac{\mu}{|\lambda|}\frac{|\lambda|}{\lambda}A\right\} \qquad (1)$$

بما أن A مجموعة متوازنة و $\frac{|\lambda|}{\lambda} = 1$، فإنه يكون $\frac{|\lambda|}{\lambda}A = A$ ومنه بوضع $\xi = \frac{\mu}{|\lambda|}$ الصيغة (1) تكتب كالتالي:

$$P_A(\lambda x) = |\lambda| \inf\{\xi > 0 / \ x \in \xi A\} = |\lambda| P_A(x)$$

3. نبرهن أن:

$$\forall x, y \in X \rightarrow P_A(x + y) \leq P_A(x) + P_A(y)$$

من أجل كل x, y من X نضع $\alpha = P_A(x), \beta = P_A(y)$. لاحظ أنه :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0 / \ \alpha \leq \alpha_\varepsilon \leq \alpha + \varepsilon, & x \in \alpha_\varepsilon A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \beta\varepsilon > 0 / \ \beta \leq \beta_\varepsilon \leq \beta + \varepsilon, & x \in \beta_\varepsilon A \end{cases} \qquad (2)$$

بما أن المجموعة A محدبة، فإن:

$$\frac{x + y}{\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon} = \left(\frac{\alpha_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon}\right)\frac{x}{\alpha_\varepsilon} + \left(\frac{\beta_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon}\right)\frac{y}{\beta_\varepsilon} \in A$$

أي أن:

$$x+y\in(\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon)A$$

ومنه حسب تعريف الدالة P_A يكون:

$$P_A(x+y)\le\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon,\qquad\forall\varepsilon>0$$

ومنه وباعتبار الصيغة (2) نستنتج أن:

$$P_A(x+y)\le\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\alpha+\beta=P_A(x)+P_A(y)$$

ومنه وباعتبار $0\in A$ والنقطة 1 يكون P_A شكلا محدبا متجانسا.
من ناحية ثانية حسب الفرض وتعريف الدالة P_A : بأخذ x كيفية من $\{x/\ P_A(x)<1\}$ لاحظ أن:

$$P_A(x)<1\Rightarrow\exists\mu\in]0,1[/\mu^{-1}x\in A$$

$$P_A(x)<1\Rightarrow\exists\mu\in]0,1[/x\in\mu A\subset A\qquad(3)$$

وبأخذ x كيفية من A لاحظ أن :

$$\{x\in A=1A\}\Rightarrow P_A(x)\le1\qquad(4)$$

من الصيغة $(3),(4)$ نستنتج أن:

$$\{x/P_A(x)<1\}\subset A\subset\{x/P_A(x)\le1\}$$

4. المجموعة A ماصة، أي:

$$\forall x\in X,\exists\lambda\ge0,(\forall\mu\in k/|\mu|\ge\lambda)\to x\in\mu A$$

ومنه نستنتج أنه:

$$\forall x\in X,\exists\lambda\ge0,(\forall\mu\in\mathcal{R}_+^*/|\mu|\ge\lambda)\to x\in\mu A\qquad(5)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$P_A(x)=\inf\{\mu>0/\ x\in\mu A\}\qquad(6)$$

من الصيغة $(5),(6)$ نستنتج أن:

$$\forall x\in X\to P(x)=\lambda\in\mathcal{R}$$

وبالتالي P_A يكون شكلا منتهيا.

5. من النقطة 2، 3 و 4 نستنتج أن P_A شبه نظيم.

2.3 أشباه النظم في الفراغ الشعاعي التبولوجي

ليكن X فراغا شعاعيا تبولوجيا .

نظرية 1.2.3. يقال أن شبه النظيم p مستمر في X، إذا وفقط إذا كانت :

$$O_P(1) \in V(0)$$

برهان:

[$\Leftarrow$] لدينا :

$$O_P(1) = \overleftarrow{P}(]-1,1[)$$

ومنه باعتبار p مستمرا و $]-1,1[\in V(0)$ يكون $O_P(1) \in V(0)$.

[$\Rightarrow$] لدينا $O_P(1) \in V(0)$. لبرهان أن P مستمر يكفينا أن نبرهن :

$$\forall v \in V(P(x)) \rightarrow \overleftarrow{P}(v) \in V(x)$$

أو في الشكل المكافئ نبرهن :

$$\forall \epsilon > 0, \exists u \in V(x)/P(u) \subset]P(x)-\epsilon, P(x)+\epsilon[$$

لاحظ أن :

$$O_P(1) \in V(0) \Rightarrow (x+\epsilon O_P(1)) \in V(x)$$

$$P(x+\epsilon O_P(1)) \subset]P(x)-\epsilon, P(x)+\epsilon[$$

ومنه لبرهان المطلوب يكفي أخذ $u = x+\epsilon O_P(1)$.

نتيجة 1.2.3. شبه النظيم p يكون مستمرا في X، إذا وفقط إذا كانت :

$$F_P(1) \in V(0)$$

نظرية 2.2.3. الإثباتات التالية متكافئة في X :

1. P مستمر.
2. P مستمر في الصفر .
3. P مستمر بانتظام، أي أنه :

$$\forall v \in V_{\mathcal{R}}(0), \exists u \in V_X(0)/(\forall x^{'}, x^{''} \in X/(x^{'} - x^{''}) \in u) \rightarrow$$

$$\rightarrow (P(x^{'}) - P(x^{''})) \in v \qquad (7)$$

4. $\forall r \in \mathcal{R}_+^* \rightarrow O_P(r) \in \tau$.
5. $\forall r \in \mathcal{R}_+^* \rightarrow F_P(r) \in V(0)$.

برهان:
$[1 \Leftarrow 2]$ واضح .
$[2 \Leftarrow 3]$ P مستمر في الصفر أي :

$$\forall v \in V_{\mathcal{R}}(0), \exists u \in V_X(0)/P(u) \subset v \qquad (8)$$

من أجل كل $x', x'' \in X$ لدينا :

$$|P(x^{'}) - P(x^{''})| \leq P(x^{'} - x^{''}) \qquad (9)$$

من الصيغة (8) و (9) نستلزم الصيغة (7).
$[3 \Leftarrow 4]$ P مستمر بانتظام ومنه مستمر وبالتالي :

$$\forall G \in \tau_e \rightarrow \overleftarrow{P}(G) \in \tau \qquad (10)$$

لاحظ أن :

$$\forall r \in \mathcal{R}_+^* \rightarrow O_P(r) = \overleftarrow{P}(]-\infty, r[) \qquad (11)$$

من الصيغة (10) و (11) وباعتبار $]-\infty, r[\in \tau_e$ نستنتج :

$$\forall r \in \mathcal{R}_+^* \rightarrow O_P(r) \in \tau$$

$[4 \Leftarrow 5]$ لدينا :

$$\forall r \in \mathcal{R}_+^* \rightarrow O_P(r) \in \tau$$

لاحظ أنه :

$$\forall r \in \mathcal{R}_+^* \rightarrow 0 \in O_P(r) \subset F_P(r)$$

ومنه حسب تعريف الجوار :

$$\forall r \in \mathcal{R}_{+}^{*} \rightarrow F_P(r) \in V(0)$$

[$5 \Leftarrow 1$] البرهان واضح حسب النتيجة 3.2.1.

نظرية 3.2.3. الخصائص التالية متكافئة في X :

(a) p مستمر عند $0 \in X$.

(b) p مستمر بانتظام على X.

(c) $M_0 = \{x/p(x) < 1\}$ مفتوح في X.

برهان:

[$(a) \Rightarrow (b)$] من (a) وباعتبار تعريف الاستمرار في الصفر يكون :

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)\ ,\ \forall x, y \in X$$

ومنه نستنتج أن الاستمرار منتظم على X.

[$(b) \Rightarrow (c)$] من (b) واضح أن p مستمر هذا وباعتبار $M_0 = \overleftarrow{p}(]-\infty, 1[)$ و $]-\infty, 1[$ مفتوح فإن M_0 أيضا مفتوح.

[$(c) \Rightarrow (a)$] واضح ذلك لأنه من أجل كل ε $(\varepsilon > 0)$ تكون : $\varepsilon M_0 = \{x/\ p(x) < \varepsilon\}$.

قضية 1.2.3. اذا كان $p : X \rightarrow \mathcal{R}$ دالة مينكاوسكي، فإن الخصائص التالية متكافئة :

(i) p مستمر.

(ii) p مستمر عند الصفر .

(iii) الصفر نقطة داخلية لـ $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$.

برهان:

[$(i) \Rightarrow (ii)$] واضح .

[$(ii) \Rightarrow (iii)$] واضحة كذلك لأن الصفر عدد حقيقي داخلي لـ $]-\infty, 1]$.

[$(iii) \Rightarrow (i)$] ليكن $x, x_0 \in X$ كيفيتين :

$$p(x) = p(x - x_0 + x_0) \leq p(x - x_0) + p(x_0)$$

$$p(x_0) = p(x_0 - x + x) \leq p(x_0 - x) + p(x)$$

اذن :

$$-p(x_0 - x) \leq p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0)$$

$V = int\{y \in X : p(y) \leq 1\}$ اذا كان $x \in x_0 + \varepsilon(V \bigcap (-V))$، أي:

$$x - x_0 \in \varepsilon(V \bigcap (-V))$$

حيث $x - x_0 \in \varepsilon V$ هذا يعني:

$$x - x_0 = \varepsilon y$$

حيث $y \in V$، اذن:

$$p(x-x_0) = p(\varepsilon y) = \varepsilon p(y) \leq \varepsilon$$

بينما $x - x_0 \in \varepsilon(-V)$ هذا يعني أن:

$$x_0 - x \in \varepsilon V$$

أي:

$$x_0 - x = \varepsilon z$$

حيث $z \in V$ اذن:

$$p(x_0 - x) = p(\varepsilon z) = \varepsilon p(z) \leq \varepsilon$$

هذا يعني من أجل $x \in x_0 + \varepsilon(V \bigcap (-V))$ يكون:

$$-\varepsilon \leq -p(x_0 - x) \leq p(x) - p(x_0) \leq p(x_0 - x) \leq \varepsilon$$

أو $|p(x) - p(x_0)| \leq \varepsilon$ بما أن $\varepsilon(V \bigcap (-V))$ جوار للصفر .

نظرية 4.2.3. اذا كان p شبه نظيم على X ف.ش.ت، $V(0)$ جوار للصفر فإن الخصائص التالية متكافئة :

1. p مستمر بانتظام .
2. $\bar{B}_p$ جوار للصفر .
3. p مستمر عند الصفر .
4. يوجد q شبه نظيم مستمر حيث $p \leq q$.

برهان:

$[1 \Rightarrow 2]$ واضحة .

نلاحظ أن $[3 \Rightarrow 2]$، نفرض أن $\bar{B}_p \in V(0)$، بما أنه من أجل كل x غير معدوم التطبيق $x \to ax$ هوميومورفيزم من X في نفسه، فإنه حيث $\varepsilon \bar{B}_p$ جوار للصفر من أجل كل $(\varepsilon > 0)$، وبالتالي نستنتج أنه اذا كان $x_n \to 0$ في X و $(x_n)_{n\geq} \subset \varepsilon B_p$ يكون $p(x_n) \leq \varepsilon$ هذا يعني أن: $p(x_n) \to 0$ أي أن p مستمر في الصفر.

$[3 \Rightarrow 1]$ استمرار p عند الصفر يعني أن لأجل $\varepsilon > 0$ يوجد $v \in V(0)$، حيث $p(v) \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$ (وباعتبار p غير سالب نكتب $p(v) \subset [0, \varepsilon[$) ومنه يوجد U جوار للصفر متوازن، حيث $U - U \subset V$ ومنه من أجل كل $x, y \in U$ حيث $x - y \in V$ يكون $p(x-y) < \varepsilon$ وباعتبار المتراجحة الثلاثية لشبه النظيم يكون p مستمرا بانتظام .

لبرهان $[4 \Leftrightarrow 3]$، واضح أن $[3 \Rightarrow 4]$

$[4 \Rightarrow 3]$ معلوم أنه اذا كان $p \leq q$ يكون $\bar{B}_q \subset \bar{B}_p$.

اذا فرضنا q مستمر تكون $\bar{B}_q$ جوارا للصفر ومنه تكون $\bar{B}_p$ جوارا للصفر أي أن p مستمر.

نتيجة 2.2.3. اذا كان X ف.ش.ت. و p شبه نظيم، فإن:

1. $\{\forall r \in \mathcal{R}_+^* \to O_P(r) \in \tau\} \Leftrightarrow \{\exists r_0 \in \mathcal{R}_+^* \to O_P(r_0) \in \tau\}$.
2. $\{\forall r \in \mathcal{R}_+^* \to F_P(r) \in V(0)\} \Leftrightarrow \{\exists r_0 \in \mathcal{R}_+^* \to F_P(r_0) \in V(0)\}$.

3.3 الفراغ شبه النظيمي

لتكن X مجموعة غير خالية و K الحقل الحقيقي $\mathcal{R}$ أو الحقل المركب C.

تعريف 1.3.3. يعرف الفراغ شبه النظيمي بأنه الزوج (X,P) حيث X فراغ شعاعي و P مجموعة من أشباه النظم على X .

نتيجة 1.3.3. باعتبار الحقل K مزود بالتبولوجيا العادية τ_e، فإن التبولوجيا على X المتولدة بواسطة مجموعة أشباه النظم P هي التبولوجيا التي تحت أساسها الأسرة S_{P} حيث :

$$S_{\mathrm{P}}=\{\overleftarrow{\mathrm{P}}_k(G),k\in I,G\in\tau_e\}$$

نتيجة 2.3.3. من تعريف التبولوجيا العادية τ_e وتعريف شبه الكرة المفتوحة المرفقة بشبه النظيم نستنتج أن S_P هو أسرة كل شبه الكور المفتوحة المرفقة بأشباه النظم $k\in I,P_K$، أي :

$$S_P=\{O_{P_K}(x,r),k\in I,x\in X,r\in\mathcal{R}_+^*\}$$

تعريف 2.3.3. من أجل كل $x\in X$ و $r\in\mathcal{R}_+^*$ تعرف شبه الكرة المفتوحة المرفقة بمجموعة أشباه النظم P ونرمز لها بالرمز $O_{P,I^*}(x,r)$، كالتالي :

$$O_{P,I^*}(x,r)=\bigcap_{k\in I^*}O_{P_k}(x,r)$$

حيث I^* مجموعة دلائل منتهية الكيفية من مجموعة الدلائل الكيفية I.

نتيجة 3.3.3. من تعريف أساس التبولوجيا نستنتج أن أساس التبولوجيا على X المتولدة من مجموعة أشباه النظم هو أسرة كل الكور المفتوحة المرفقة بالمجموعة P، أي هو الأسرة B_P حيث :

$$B_P=\{O_{P,I^*}(x,r),x\in X,r\in\mathcal{R}_+^*,I^*\subset I\}$$

يرمز لهذه التبولوجيا بالرمز τ_P .

نتيجة 4.3.3. الأساس المحلي لـ (X,τ_P) هو الأسرة $B_{P,0}$ تعرف كالآتي:

$$B_{P,0}=\{O_{P,I^*}(r),r\in\mathcal{R}_+^*,I^*\subset I\}$$

حيث $O_{P,I^*}(r)=\bigcap_{k\in I^*}O_{P_K}(r)$.

نتيجة 5.3.3. من أجل كل $r\in\mathcal{R}_+^*$ ومن أجل كل $I^*\subset I$ تكون كل من الكرتين $O_{P,I^*}(r)$ و $O_{P_K}(r)$، حيث $k\in I^*$ مجموعة محدبة ومتوازنة.

نظرية 1.3.3. الفراغ التبولوجي (X,τ_P) هو فراغ شعاعي تبولوجي على الحقل K، أي أن التبولوجيا τ_P متلائمة مع البنية الجبرية للفراغ الشعاعي X.

برهان:
نبرهن أن التطبيقين :

$$\varphi : (X\times X,\tau_*) \longrightarrow (X,\tau) \qquad \psi : (K\times X,\tau_\circ) \longrightarrow (X,\tau)$$

$$(x,y) \longrightarrow \varphi(x,y) = x+y \qquad (\lambda,x) \longrightarrow \psi(\lambda,x) = \lambda x$$

مستمران .(أنظر الفقرة 2.1).
لهذا من تعريف الاستمرار وتعريف تبولوجيا الجداء، يكفي برهان أنه من أجل كل $x \in X$ ومن أجل كل $\varepsilon \in \mathcal{R}_+^*$ ومن أجل كل $I^* \subset I$، يتحقق :

$$O_{P,I^*}(x,\frac{\varepsilon}{2}) + O_{P,I^*}(y,\frac{\varepsilon}{2}) \subset O_{P,I^*}(x+y,\varepsilon) \tag{12}$$

$$\exists\delta \succ 0/O(\lambda,\delta)O_{P,I^*}(x,\delta) \subset O_{P,I^*}(\lambda x,\varepsilon) \tag{13}$$

حيث :

$$O(\tau,\delta) = \{\mu \in K/|\lambda-\mu| \prec \delta\}$$

من التعريف 3.3.2 والنتيجة 3.3.2 نستنتج تحقق الصيغة (12) و (13).
عندها يكون (X,τ_P) فراغا شعاعيا تبولوجيا ويسمى ف.ش.ت. متولد من مجموعة أشباه النظم P.

نتيجة 6.3.3. بالنسبة لـ (X,τ_P)، حيث $\mathrm{P} = \{P_K, K \in I\}$ يتحقق :

1. $\forall x \in X, \forall r \in \mathcal{R}_+^*, \forall I^* \subset I, \forall P \in \mathrm{P} \rightarrow \begin{cases} O_{P,I^*}(x,r) \in \tau_P \\ O_P(x,r) \in \tau_P \end{cases}$
2. $\forall x \in X, \forall r \in \mathcal{R}_+^*, \forall I^* \subset I, \forall P \in \mathrm{P} \rightarrow \begin{cases} O_{P,I^*}(x,r) \in V(x) \\ O_P(x,r) \in V(x) \end{cases}$
3. كل أشباه النظم $k \in I, P_K$ مستمرة بالنسبة لـ τ_P.
4. τ_P أضعف تبولوجيا على X من أجلها تكون $K \in I, P_K$ مستمرة.

تعريف 3.3.3. ليكن X فراغا شبه نظيمي نقول عنه منفصل اذا كان :

$$\forall x \in X, \forall p \in \mathrm{P}\ p(x) = 0 \Rightarrow x = 0_X.$$

نتيجة 7.3.3. الفراغ (X,τ_P) يكون منفصلا إذا وفقط إذا كانت :

$$\forall x \in X/\{0\}, \exists P_x \in \mathrm{P}/P_x(x) \neq 0$$

عندها تسمى مجموعة أشباه النظم P بالمجموعة الفاصلة.

تعريف 4.3.3. ليكن X فراغا شبه نظيمي منفصل و $U \subset X$ نقول أن U محدودة، اذا كان :

$$\forall p \in \mathrm{P}, \sup_{x\in U} p(x) < \infty$$

باب 4

الفراغ المحدب محليا

ليكن (X,τ) فراغا شعاعيا تبولوجيا .

تعريف 1.0.4. الفراغ الشعاعي التبولوجي (X,τ) يكون محدبا محليا، اذا كان لكل عنصر x من X، جملة أساسية لمجاوراتها B_x مكونة من مجموعات محدبة.

ويعرف أيضا بالشكل المكافئ كالتالي:

تعريف 2.0.4. X فراغ شعاعي تبولوجي يسمى ف.ش.ت. محدب محليا واختصارا الفراغ المحدب محليا اذا كان الصفر ينتمي الى كل المجموعات المفتوحة، المحدبة، المتوازنة والماصة.

نتيجة 1.0.4. يكون (X,τ) فراغا محدبا محليا، اذا وفقط اذا كان له أساسا محليا متكونا من مجموعات محدبة ومتوازنة.

قضية 1.0.4. حسب التعريف اذا كان (X,τ) يملك أساسا محليا مكونا من مجموعات محدبة مطلقا فإنه يكون محدبا محليا.

برهان:

[$\Leftarrow$] عندنا (X,τ) محدب محليا، أي أن أساسه المحلي مكون من مجموعات محدبة، أي أن:

$$\forall v \in V(0), \exists u_0 \in B_0 / u_0 \subset v$$

ومنه وباعتبار $B_0 \subset V(0)$ نستنتج:

$$\exists v_0 \in B_0/\ v_0 \subset u_0 \subset v \tag{1}$$

حيث v_0 جوار متوازن للصفر.

معلوم أن الغلاف المحدب $conv(v_0)$ لـ v_0 هو مجموعة محدبة ومتوازنة، ومنه وباعتبار الصيغة (1) وكون u_0 محدب نستنتج أن :

$$v_0 \subset conv(v_0) \subset u_0 \subset v$$

وبالتالي تكون الأسرة B'_0، التي كل عنصر من عناصرها عبارة عن الغلاف المحدب لعنصر من العناصر المتوازنة من B_0 أساسا محليا للفراغ. هذا وباعتبار المحدب مطلقا هو كل محدب ومتوازن، فإن الأسرة B'_0 هي أساس محلي محدب مطلقا.

[$\Rightarrow$] واضح أنه اذا كان الأساس المحلي محدبا مطلقا، فإنه يكون محدب.

نتيجة 2.0.4. في الفراغ المحدب محليا يوجد أساس محلي :

1. مكون من مجموعات محدبة مطلقا، ماصة ومفتوحة .
2. مكون من مجموعات محدبة مطلقا، ماصة ومغلقة .

نتيجة 3.0.4. (X,τ) فراغ محدب محليا يملك أساسا محليا B_0 يحقق الخصائص التالية:

1. اذا كان $u \in B_0, v \in B_0$، فإنه يوجد $w \in B_0$، حيث $w \subseteq u \cap v$.
2. اذا كان $u \in B_0$ و $\alpha \neq 0$، فإن $\alpha u \in B_0$.
3. كل $u \in B_0$ محدبة مطلقا وماصة.

نتيجة 4.0.4. اذا كانت V مجموعة كيفية من المجموعات الجزئية المحدبة مطلقا والماصة على الفراغ الشعاعي X فإنه على X توجد أضعف تبولوجيا متلائمة مع البنية الجبرية من أجلها تكون Vجوار للصفر. هذه التبولوجيا تكون محدبة محليا، أساس مجاوراتها هو كل المجموعات من الشكل:

$$\varepsilon \bigcap_{1\leq i\leq n} V_i \qquad (\varepsilon > 0, V_i \in V)$$

نظرية 1.0.4. (X,τ) يقال أنه فراغ محدب محليا، اذا وفقط اذا كان X فراغا شعاعيا ومزود بتبولوجيا ثابتة بالنسبة للانسحاب ولها B_0 أساس محلي يحقق :

1. يتكون الاساس المحلي من مجموعات محدبة مطلقا وماصة .
2. $\forall u \in B_0, \exists u_0 \in B_0 / u_0 \subset \frac{1}{2}u$

برهان:

[$\Rightarrow$] لدينا X ف.ش، نعرف عليه تبولوجيا ثابتة بالنسبة للانسحاب أساسها المحلي يحقق الشرطين 1 و 2 . لدينا :

$$\forall u \in B_0, \exists u_0 \in B_0 / u_0 \subset \frac{1}{2}u \tag{2}$$

بما أن u محدبة، فإن $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \subset u$ ومنه باعتبار الصيغة (2) نستنتج أن :

$$\forall u \in B_0, \exists u_0 \in B_0 / u_0 + u_0 \subset \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \subset u$$

وبالتالي يكون X ف.ش.ت، هذا وباعتبار عناصر B_0 محدبة، يكون X فراغا محدبا محليا .

[$\Leftarrow$] X فراغ محدب محليا ومنه X فراغ شعاعي تبولوجي، يكون X ف.ش. مرفق بتبولوجيا ثابتة بالنسبة للانسحاب ولها اساس محلي يحقق :

- يتكون الأساس المحلي من مجموعات ماصة ومتوازنة .
- $\forall u \in B_0, \exists u_0 \in B_0 / u_0 + u_0 \subset u$

لاحظ باعتبار الفراغ المحدب المحلي، فإن عناصر الأساس المحلي تكون محدبة ومنه تكون محدبة مطلقا وماصة، أي الشرط الأول محقق . من ناحية أخرى لدينا :

$$\forall u \in B_0, \exists u_0 \in B_0 / u_0 + u_0 \subset u$$

ومنه يصبح :

$$\forall u \in B_0, \exists u_0 \in B_0 / \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_0 \subset \frac{1}{2}u$$

فنستنتج :

$$\forall u \in B_0, \exists \left(v_0 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_0 \right) \in B_0 / v_0 \subset \frac{1}{2}u$$

وبالتالي يتحقق الشرط الثاني .

قضية 2.0.4. اذا كان (X,τ) فراغا محدبا محليا، (X_0,τ_{X_0}) فراغا جزئيا منه و v جوار محدب للصفر في الفراغ (X_0,τ_{X_0})، فإنه:

1. يوجد جوار محدب u_* للصفر في الفراغ (X,τ)، بحيث يكون:

$$u_* \bigcap X_0 = v$$

2. اذا كان X_0 مغلقا في الفراغ (X,τ) و x_0 نقطة من $X \backslash X_0$، فإنه يوجد جوار محدب u_2 للصفر في الفراغ (X,τ)، بحيث يكون:

$$u_2 \bigcap X_0 = v \wedge x_0 \notin u_2$$

برهان:

1. v جوار محدب للصفر في الفراغ (X_0,τ_{X_0})، يعني:

$$\exists u_0 \in V(0) / v = u_0 \bigcap X_0$$

ومنه وباعتبار الفراغ (X,τ) محدبا محليا نستنتج وجود جوار محدب للصفر u_1 بحيث يكون $u_1 \subset u_0$. نبرهن أن:

$$v = E \bigcap X_0 \ / \ E = conv(v \bigcup u_1)$$

واضح أن E جوار محدب للصفر في الفراغ (X,τ). بما أن $E = conv(v \bigcup u_1)$، فإن :

$$v \subset E \bigcap X_0 \qquad (3)$$

من جهة أخرى من أجل كل x من $E \bigcap X_0$ وباعتبار $E = conv(v \bigcup u_1)$ نستنتج أن :

$$x \in X_0$$

$$\exists x_1 \in v, \exists x_2 \in u_1, (\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}_+ \wedge \lambda_1 + \lambda_2 = 1) / x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

لاحظ أن:

- في حالة $\lambda_2 = 0$ ومنه $\lambda_1 = 1$ يكون $x = x_1$، أي أن $x \in v$.
- في حالة $\lambda_2 \neq 0$ يكون:

$$x_2 = \frac{x - \lambda_1 x_1}{\lambda_2} \ / \ x \in X_0, x_1 \in u_1 \subset X_0$$

ومنه يكون $x_2 \in X_0$، وبالتالي تكون $x_2 \in u_1 \bigcap X_0$. ومنه وباعتبار $u_1 \subset u_0$ و $v = u_0 \bigcap X_0$ نستنتج أن :

$$x_2 \in u_1 \bigcap X_0 \subset u_0 \bigcap X_0 = v$$

ومنه وباعتبار $x_1 \subset v$ و v محدب يكون $x \in v$، وبالتالي يكون :

$$E \bigcap X_0 \subset v \qquad (4)$$

من الصيغة (3) و (4) يكون $v = E \bigcap X_0$. وبالتالي يكفي أخذ $u_* = conv(v \bigcup u_1)$.

2. بما أن X_0 مغلق، فإن المجموعة $x_0 + X_0$ أيضا مغلقة. واضح أن:

$$x_0 \notin X_0 \Rightarrow 0 \notin x_0 + X_0$$

ومنه وباعتبار $x_0 + X_0$ مغلقة في الفراغ المحدب محليا (X, τ)، نستنتج أن:

$$\exists v_0 \in V(0)/ \ v_0 \bigcap (x_0 + X_0) = \varnothing$$

حيث v_0 محدب. من الصيغة الأخيرة واضح أن:

$$(v_0 + X_0) \bigcap (x_0 + X_0) = \varnothing$$

لاحظ أن المجموعة $(v_0 + X_0) \bigcap v$ محدبة وتحقق:

$$(v_0 + X_0) \bigcap v \in V(0) \wedge x_0 \notin (v_0 + X_0) \bigcap v$$

ومنه نستنتج:

$$\exists (u_2 = (v_0 + X_0) \bigcap v) \in V(0)/ u_2 \bigcap X_0 = v \wedge x_0 \notin u_2$$

1.4 اشباه النظم في الفراغ المحدب محليا

نظرية 1.1.4. (X,τ) فراغ محدب محليا اذا وفقط اذا كان فراغ شبه نظيمي، ونكتب $\tau = \tau_P$.

برهان:
[$\Leftarrow$] لدينا (X,τ) محدب محليا ، أي أن B_0 مكون من مجموعات محدبة مطلقا وماصة ومنه حسب النقطة 5 من القضية 3.1.1 يكون شكل مينكوفسكي P_B لكل B من B_0، شبه نظيم .
لتكن P مجموعة أشباه نظم معرفة كالآتي :

$$\mathrm{P} = \{P_B / B \in B_0\}$$

لبرهان المطلوب يكفي برهنة $\tau = \tau_P$، أي نبرهن أن التطبيقين الحياديين I_1, I_2 مستمرين، حيث :

$$I_1 : (X,\tau) \to (X,\tau_P)$$

$$I_2 : (X,\tau_P) \to (X,\tau)$$

حسب النقطة 3 من القضية 3.1.1، من أجل كل B من B_0 يكون :

$$\{x \in X / P_B(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X / P_B(x) \leq 1\}$$

أو في الشكل المكافئ نكتب :

$$O_{P_B}(1) \subset B \subset F_{P_B}(1)$$

ومنه باعتبار $F_{P_B}(1) \subset O_{P_B}(2)$ من أجل كل B من B_0 نستنتج :

$$O_{P_B}(1) \subset B \tag{5}$$

$$B \subset O_{P_B}(2) \tag{6}$$

من الصيغتين (5)،(6) نستنتج أن التطبيقان I_2, I_1 مستمران على التوالي، هذا يعني أن $\tau \subset \tau_P$، $\tau_P \subset \tau$ على التوالي، وبالتالي $\tau = \tau_P$.

نظرية 2.1.4. اذا كان T شبه نظيم على X، فإنه في الفراغ المحدب محليا (X,τ_P)، حيث $\mathrm{P} = \{P_k, k \in I\}$ فإن الاثباتات التالية متكافئة :

1. T مستمر .
2. T محدود على جوار ما للصفر .
3. $\exists c_0 \in \mathcal{R}_+^*, \exists I_0 \subset I / \forall x \in X \to T(x) \leq c_0 \max\limits_{k \in I_0} P_k(x)$

حيث I_0 مجموعة دلائل منتهية من مجموعة الدلائل الكيفية I .

برهان:
[$1 \Leftarrow 2$] T مستمر، (مستمر في الصفر)، $T(0)=0$ أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in V(0) / \forall x \in v \to |T(x)| < \varepsilon$$

ومنه من أجل $\varepsilon = 1$ وباعتبار T شبه نظيم نستنتج :

$$\exists v_1 \in V(0) / \forall x \in v_1 \to T(x) < 1 \tag{7}$$

لاحظ أن :

$$\exists \left(O_{P,I_1} = \bigcap_{k \in I_1} O_{P_k}(r_k) \right) / O_{P,I_1} \subset v$$

حيث I_1 مجموعة دلائل منتهية من مجموعة الدلائل الكيفية I . ومنه باعتبار الصيغة (7) يكون :

$$\forall x \in O_{P,I_1} \to T(x) < 1$$

ومنه باعتبار $O_{P,I_1} \in V(0)$ نستنتج أن T محدود على جوار ما للصفر .
[$2 \Leftarrow 3$] T محدود على جوار ما للصفر، أي :

$$\exists v_0 \in V(0), \exists c \in \mathcal{R}_+^* / \forall x \in v_0 \to T(x) < c \tag{8}$$

لاحظ أن :

$$\exists \left(O_{P,I_0} = \bigcap_{k \in I_0} O_{P_k}(r_k) \right) / O_{P,I_0} \subset v$$

حيث I_0 مجموعة دلائل منتهية من مجموعة الدلائل الكيفية I . ومنه باعتبار الصيغة (8) يكون :

$$\exists c \in \mathcal{R}_+^* / \forall x \in O_{P,I_0} \to T(x) < c \tag{9}$$

لاحظ من أجل كل λ، حيث :

$$0 < \lambda < \inf_{k \in I_0} \frac{r_k}{P_k(x)}, \ x \in X \tag{10}$$

يتحقق :

$$\forall k \in I_0, \forall x \in X \to P_k(\lambda x) = \lambda P_k(x) < r_k$$

ومنه تكون $\lambda x \in O_{P,I_0}$، هذا وباعتبار الصيغة (9) يكون :

$$\exists c \in \mathcal{R}_+^*, \forall x \in X \to \lambda T(x) = T(\lambda x) < c$$

أو في الشكل المكافئ نكتب :

$$\exists c \in \mathcal{R}_+^*, \forall x \in X \to T(x) < \frac{c}{\lambda}$$

ومنه باعتبار الصيغة (10) نستنتج أن :

$$\exists c \in \mathcal{R}_+^*, \forall x \in X \to T(x) < c \sup_{k \in I_0} \frac{1}{r_k} P_k(x)$$

وبالتالي نستنتج أن :

$$\exists \left(c_0 = \max_{k \in I_0} \frac{c}{r_k} \right) \in \mathcal{R}_+^*, \exists I_0 \subset I / \forall x \in X \to T(x) \leq c_0 \max_{k \in I_0} P_k(x)$$

$[3 \Leftarrow 1]$ لدينا :

$$\exists c_0 \in \mathcal{R}_+^*, \exists I_0 \subset I / \forall x \in X \to T(x) \leq c_0 \max_{k \in I_0} P_k(x)$$

ومنه من أجل كل x و y من X يكون :

$$|T(x) - T(y)| \leq T(x-y) \leq c_0 \max_{k \in I_0} P_k(x-y)$$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل ε من $\mathcal{R}_+^*$ ومن أجل كل y من $O_{P,I_0}\left(x, \frac{\varepsilon}{c_0}\right)$ يعني :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in I_0 \to P_k(x-y) < \varepsilon$$

ومنه :

$$|T(x) - T(y)| < \varepsilon$$

وبالتالي نستنتج استمرار T .

نظرية 3.1.4. اذا كانت Q مجموعة أشباه نظم معرفة على ف.ش. X، فإن على X توجد أضعف تبولوجيا متلائمة مع البنية الجبرية من أجلها تكون أشباه النظم من Q مستمرة.
هذه التبولوجيا تكون محدبة محليا و أساس مجاورتها المغلقة هو كل المجموعات من الشكل:

$$\{x : \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon\} (\varepsilon > 0, p_i \in Q, 1 \leq i \leq n)$$

برهان:
يتم البرهان عنه من خلال النتيجة 4.0.4. لأنه اذا كان p_i دالة مينكاوسكي للجوار المحدب مطلقا v_i، فإن $\varepsilon^{-1} \sup_{1 \leq i \leq n} p_i$ هي دالة مينكاوسكي لـ $\varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} v_i$.

قضية 1.1.4. الفراغ التبولوجي (X, τ_Q) الموجود حسب النظرية 4.1.3 يكون منفصلا اذا وفقط اذا وجد من أجل كل $x \in X$ غير معدوم شبه نظيم $p \in Q$ يحقق $p(x) > 0$.

برهان:
$[\Leftarrow]$ واضح حسب النتيجة 2.3.1.
$[\Rightarrow]$ بفرض (X, τ_Q) فراغ غير منفصل، يوجد نقاط $x \neq 0$ حيث $p(x) = 0$ من أجل كل p شبه نظيم مستمر، مجموعة كل هذه النقاط x هو فراغ جزئي مغلق N من X. لاحظ أن $N = \bigcap_{U \in B} U$، حيث B أساس

الجوارات المحدبة مطلقا (ذلك لأن $x \in N$ اذا وفقط اذا كان x ينتمي الى كل جوار U للصفر، أي اذا وفقط اذا كان الصفر ينتمي الى كل جوار $x+U$ لـ x) .

2.4 التطبيقات و الأشكال الخطية

نظرية 1.2.4. التطبيق الخطي F من فراغ محدب محليا (X, τ_P) في الفراغ المحدب محليا (Y, τ_T)، حيث $\mathrm{P} = \{P_k, k \in I\}$ و $T = \{T_j, j \in J\}$ يكون مستمرا، اذا وفقط اذا كانت أشباه النظم $T_j \circ F$، $j \in J$ مستمرة، حيث J مجموعة دلائل كيفية .

برهان:

[$\Leftarrow$] لدينا F مستمر ومنه باعتبار $j \in J, T_j$ مستمرا بالنسبة لـ τ_T، فإن $j \in J, T_j \circ F$ يكون مستمرا بالنسبة لـ τ_P .

[$\Rightarrow$] لدينا $j \in J, T_j \circ F$ مستمر بالنسبة لـ τ_P .

لبرهان أن F مستمر يكفي برهان أن الصورة العكسية لكل عنصر من أساس (Y, τ_T) تكون مفتوحة في (X, τ_P) يعني :

$$\forall G \in B_T \rightarrow \overleftarrow{F}(G) \in \tau_P$$

حيث :

$$B_T = \{O_{T,J^*}(y,r), y \in Y, r \in \mathcal{R}_+^*, J^* \subset J\}$$

$$O_{T,J^*}(y,r) = \bigcap_{j \in J^*} O_{T_j}(y,r) \qquad (11)$$

J^* مجموعة دلائل منتهية الكيفية من مجموعة الدلائل الكيفية J . من تعريف التبولوجيا τ_T نستنتج :

$$\forall j \in J^*, \exists G_j \in \tau_e / \overleftarrow{T}_j(G_j) = O_{T_j}(y,r)$$

ومنه باعتبار الصيغة (11) يكون $O_{T,J^*}(y,r) = \bigcap_{j \in J^*} \overleftarrow{T}_j(G_j)$، ومنه يكون :

$$\overleftarrow{F}\left(O_{T,J^*}(y,r)\right) = \bigcap_{j \in J^*} \overleftarrow{F}\left(\overleftarrow{T}_j(G_j)\right)$$

ومنه وباعتبار $G_j \in \tau_e$ و $T_j \circ F$, $j \in J$ و J^* مجموعة دلائل منتهية، فإن :

$$\overleftarrow{F}\left(O_{T,J^*}(y,r)\right) = \bigcap_{j \in J^*} \overleftarrow{F}\left(\overleftarrow{T}_j(G_j)\right) \in \tau_P$$

ومنه التطبيق F مستمر .

نتيجة 1.2.4. التطبيق الخطي F من الفراغ المحدب محليا (X,τ_P) في الفراغ المحدب محليا (Y,τ_T) ، حيث $\mathrm{P}=\{P_k,k\in I\}$ و $T=\{T_j,j\in J\}$ يكون مستمرا، اذا وفقط اذا تحققت من أجل كل j من J الصيغة التالية :

$$\exists c_j\in\mathcal{R}_+^*,\exists I_j\subset I/T_j(F(x))\leq c_j\max_{k\in I_j}P_k(x)$$

حيث I_j مجموعة دلائل منتهية من مجموعة الدلائل الكيفية I .

نتيجة 2.2.4. ليكن X فراغا شعاعيا و M فراغا جزئيا منه، ليكن p شبه نظيم على X، اذا كان f شكلا خطيا من M، حيث $|f(x)|\leq p(x)$ من أجل كل $x\in M$، فإنه يوجد f_1 شكل خطي تمديدا لـ f، بحيث $|f_1(x)|\leq p(x)$ من أجل كل $x\in X$.

نظرية 2.2.4. الشكل الخطي f^* على X^* يكون مستمرا في الفراغ المحدب محليا (X,τ_P)، حيث $\mathrm{P}=\{P_k,k\in I\}$ اذا وفقط اذا تحقق :

$$\exists c\in\mathcal{R}_+^*,\exists I_0\subset I/\leq|f^*(x)|\leq c\max_{k\in I_0}P_k(x)$$

حيث I_0 مجموعة دلائل منتهية من مجموعة الدلائل الكيفية I .

برهان:

نعرف على X التطبيق T كالتالي :

$$T(x)=|f^*(x)|,\ \ x\in X \tag{12}$$

نعرف أن T شبه نظيم على X .
من الصيغة (12) واضح أن T مستمر، اذا وفقط اذا كان الشكل الخطي f^* مستمرا، ومنه من خلال النظرية 4.1.2 الشكل الخطي f^* يكون مستمرا، اذا وفقط اذا تحققت الصيغة :

$$\exists c\in\mathcal{R}_+^*,\exists I_0\subset I/|f^*(x)|\leq c\max_{k\in I_0}P_k(x)$$

نظرية 3.2.4. اذا كان X فراغا محدبا محليا و M فراغا جزئيا منه، فإنه كل شكل f من M' يملك تمديدا f^* من X'.

برهان:

بما أن f مستمر على M، فإن المجموعة $V=\{x:|f(x)|\leq 1\}$ هي جوار الصفر في M. ومنه يوجد جوار محدب للصفر U في X بحيث يكون $U\bigcap M\subset V$، دالة مينكاوسكي p لـ U هي شبه نظيم مستمر على X يحقق $|f(x)|\leq p(x)$ على M، ذلك لأن $U\bigcap M\subset V$، من خلال النتيجة 4.0.4 يوجد تمديد f_1 لـ f على X يحقق $|f_1(x)|\leq p(x)$ على X، الشكل f_1 مستمر، ذلك لأنه من أجل كل $\varepsilon(0<\varepsilon)$ اذا كان $x-y\in\varepsilon U$ يكون $|f_1(x)-f_1(y)|\leq\varepsilon$.

المصادر

[1] خ.حامد الأحمد ،مبادئ الطبولوجيا العامة،منشورات جامعة دمشق 1983/1982.

[2] م.خير أحمد و ب. ضغيم ، التبولوجيا (2) منشورات جامعة حلب 2009.

[3] م.عسيلة، سلسلة الجامع في التحليل الدالي الكتاب الأول، سامي للطباعة والنشر والتوزيع 2022 .

[4] م.عسيلة، سلسلة الجامع في التحليل الدالي الكتاب الثاني، سامي للطباعة والنشر والتوزيع 2022 .

[5] A.P.Robertson, W.Robertson; Topological Vector Spaces, Cambridge at The University Press 1973 .

[6] C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof; Locally Convex Spaces Over Non-Archimedean Valued Fields ,Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York,First published 2010 .

[7] E. A. Nigsch; Locally Convex Spaces, Summer Term 2017 .

[8] G. Kothe; Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. New York .1983

[9] H.Schaefer; Topological Vector Spaces,Springer 1999 .

[10] J. Simon; Banach, Fréchet, Hilbert and Neumann Spaces, wiley .in Britain 2017

[11] J. Voigt; A Course on Topological Vector Spaces, Birkhäuser in Germany 2010 .

[12] K. Yosida; Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1978 .

[13] L. Narici, E. Beckenstein; Topological Vector Spaces Second Edition ,2005 CRC Press .

[14] M.Scott Osborne; Locally Convex Spaces, Springer International Publishing Switzerland .2014

[15] N.Bourbaki; Espaces Vectoriels Topologiques, Masson 1981 .

الملخص

يهدف هذا العمل الى توضيح مفهوم الفراغ المحدب محليا (X,τ) والفراغ شبه النظيمي (X,P) والمقارنة بينهما من خلال تشكيل التبولوجيا τ_p المتولدة من مجموعة أشباه النظم P على الفراغ الشعاعي X، ومن ثم إبراز أهم الخصائص التي يتميز بها الفراغ المحدب محليا على الفراغ الشعاعي التبولوجي في الحالة العامة.

الكلمات المفتاحية : الفراغ الشعاعي، التبولوجيا الشعاعية، التحدب المحلي، أشباه النظم.

Summary

This work aims to clarify the concept of locally convex spaces (X,τ) and semi-normed spaces (X,P) and to compare between them by forming the topology τ_p induced by semi-normed P defined on the vector space X. Then, we specify the properties that distinguish locally convex spaces from topological vector spaces in the general case.

Key words : Vector Space, Vector Topology, Local Convexity, Semi-norms.