

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT  
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université de Kasdi Merbah Ouargla  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la  
Matière  
Département de Mathématiques et Informatique

N° d'ordre :  
N° de série :

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du Diplôme **Master** en Mathématique  
*Spécialité : Modélisation et Analyse numérique*

THÈME

*Résolution d'une équation elliptique du second ordre posé en  
domaines extérieurs par la méthode des éléments finis inversés*

Présenté par : *Gougui Khaoula*  
Soutenu le : 22 /06/ 2023

DEVANT LE JURY :

- ▶ **Président** : D.r MEZABIA Mohammed El hadi M.C.A Université de KASDI Merbah-Ouargla
- ▶ **Examinateur** : D.r REZZAG Bara Rihana M.C.B Université de KASDI Merbah-Ouargla
- ▶ **Encadreur** : D.r KALICHE Keltoum M.C.B Université de KASDI Merbah-Ouargla

Année universitaire 2022 – 2023

# Dédicaces



....Je dédie ce travail:

À

cette grand femme qui a élevé et  
enseigne,dont les prières ont illuminé  
mon chemin.

À qui Dieu a fait le ciel sous ses pieds  
,*ma chère mère "NOUR EL HODA"*

À

Celui qui a bu la coupe vide pour me  
donner une goutte d'amour.

Pour ceux qui comblent leurs espoirs  
pour nous offrir un moment de  
bonheur.

Pour ceux qui récoltent les épines de  
mon chemin pour paver le chemin de la  
connaissance.

A celui qui a travaillé dur pour  
moi,sans lui, je n'aurais pas atteint  
mon objectif .

A qui j'ai levé la tête haut dans se  
fierté

A toi que je te donne avec mon  
âme,"*mon cher père "FATAH"*.

À

Ma soeur *SAJIDA* et mes frères  
*AHMEDE* et *SAIF*, je demande à  
allah le succès dans leur vie.

À tous les membres de ma famille ,en  
particulier ma grand mère décédée ,à  
mes amis et à tous ceux qui m'ont  
encouragé vers la science  
Je vous remercie tous du fond du cœur.

# Remerciement

قال الله عزوجل  
\* يرفع الله الذين اوتوا العلم درجات \*

Loué *ALLAH* pour ce que tu nous as béni, ô *ALLAH* dans notre poursuite. Merci à toi pour notre succès, et tu es le crédit dans le premier et le dernier.

Je suis heureux et honoré d'exprimer mes remerciements et ma gratitude à mon estimé professeur *KALICHE KALTOUM*, qui m'a honoré de superviser cette mémoire. Je la remercie de m'avoir fourni des informations et des conseils qui ont contribué à enrichir le sujet de l'étude, et pour la précision scientifique qui restera pour moi un modèle. Qu'*ALLAH* le bénisse et le perpétue comme un phare de connaissance à travers la lumière duquel nous sommes éclairés.

Ensuite, je tiens à remercier les membres du jury d'avoir accepté la discussion de cette étude .

Enfin, je tiens à remercier mes proches et tous ceux qui m'ont soutenu et m'ont aidé à accomplir ce travail.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>IV</b>
<b>Notations</b>	<b>V</b>
<b>Notations</b>	<b>V</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 LES ESPACE DE SOBOLEV AVEC POIDS</b>	<b>3</b>
1.1 <i>Notations et définitions</i>	5
1.2 <i>L'espace de Sobolev <math>W^{m,p}(\Omega)</math></i>	6
1.3 <i>L'espace de Sobolev avec poids <math>W_\alpha^{m,p}(\Omega)</math></i>	6
1.3.1 <i>Quelques propriétés fondamentales de l'espace <math>W_\alpha^{m,p}(\Omega)</math></i>	7
1.4 <i>Les espaces de trace</i>	8
1.5 <i>Inégalité de Hardy</i>	10
1.6 <i>Théorème de lax-Milgram</i>	11
1.7 <i>Méthode de Galerkin</i>	12
<b>2 DISCRÉTISATION DU PROBLÈME PAR ÉLÉMENTS FINIS INVERSÉS</b>	<b>13</b>
2.1 <i>Problème variationnelle</i>	15
2.1.1 <i>L'existence et l'unicité</i>	18
2.2 <i>Discrétisation du problème</i>	22
2.2.1 <i>Décomposition du domaine</i>	23
2.2.2 <i>Espace discret</i>	28
2.3 <i>Estimation d'erreur</i>	30
<b>3 QUELQUES TESTS NUMÉRIQUES</b>	<b>33</b>
3.1 <i>Mise en œuvre de la méthode</i>	34
3.1.1 <i>La matrice de rigidité</i>	34
3.2 <i>Testes numériques</i>	39
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

# Table des figures

2.1	le simplexe fini et infini en $2D$	23
2.2	le simplexe fini et infini de référence en $2D$	23
2.3	Décomposition des domaine extérieur $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$ en la réunion d'un domaine borné et de quatre simplexes infinis	25
2.4	décomposition d'un domaine extérieur $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$ en la réunion de quatre simplexes infinis.	25
2.5	transformation des $\Omega_\infty$ par l'inversion polygonal $\phi_i$ .	26
2.6	Le maillage du sous-domaine borné $\Omega_0$	29
2.7	Un illustration de maillage gradué de l'élément de référence quand, $\mu = 0.7$ (gauche), $\mu = 0.2$ (droite).	30

## ★ Notations ★

- ★  $\Omega$  : Domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- ★  $\partial\Omega$  ou  $\Gamma$  : Frontière de  $\Omega$ .
- ★  $\bar{\Omega}$  : la fermeture de  $\Omega$  qui défini par  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .
- ★  $\partial_i u$  : Dérivée partielle de  $u$  par rapport au composant  $x_i$ .
- ★  $\nabla u$  : Gradient de  $u$  défini par  $\nabla u = [\partial_1 u, \dots, \partial_n u]^t$ .
- ★  $\operatorname{div} u$  : Divergence de  $u$  défini par  $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \partial_i u_i$ .
- ★  $\Delta u$  : Laplacien de  $u$  défini comme suite  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = \operatorname{div}(\nabla u)$ .
- ★  $C(\bar{\Omega})$  : L'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ .
- ★  $D(\Omega)$  : L'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$ .
- ★  $D'(\Omega)$  : Espace des distributions dans  $\Omega$ .
- ★  $\operatorname{diam}(E)$  : Diamètre de l'élément  $E$ .
- ★  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : Le produit de dualité.
- ★  $[s]$  : La partie entière de  $s$ .
- ★  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $H^m(\Omega)$  : Espaces de Sobolev
- ★  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  : Espace de Sobolev avec poids.
- ★  $L^p(\Omega)$  : Espace des fonctions de puissance  $p$ -ème intégrables sur  $\Omega$  pour la mesure  $dx$ .
- ★  $L^\infty(\Omega)$  : Les espaces des fonctions essentiellement bornées sur  $\Omega$ .
- ★  $W$  : Espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$
- ★  $W_h$  : Espace approché de  $W$ .

★  $X \hookrightarrow Y$  : L'injection continue.

★  $\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker.

K. Gougui . Univ de KASDI Merbah

# Introduction

Plusieurs modèles en physique et en ingénierie conduisent à des équations aux dérivées partielles bidimensionnelles en des domaines non bornés, ceci est mis en évidence dans l'astrophysique, en électromagnétisme, en mécanique des fluides et en chimie quantique.

Nous comptons généralement pour résoudre de telles équations sur la prise en compte complexe un peu de la résolution. Plusieurs méthodes ont été abordées pour surmonter cette difficulté comme la méthode infinie, les méthodes spectrales et la méthode des équations intégrales.

Dans [8] Boulmezaoud a créé une nouvelle méthode pour résoudre des EDP de type elliptique en domaines non bornés. Cette méthode est appelée méthode des éléments finis inversés. Elle ne nécessite aucune déduction du domaine et elle divise le domaine géométrique en deux parties librement choisies, une partie bornée où on utilise des éléments finis classiques, et une partie non bornée où on utilise des éléments finis inversés. Cette dernière est réduite à un domaine borné par une inversion polygonale comportant une singularité. Dans cette méthode, nous nous appuyons sur des espaces de Sobolev avec poids.

Ces espaces de Sobolev avec poids forment un cadre fonctionnel adéquat pour l'étude des (EDP) dans un domaine non borné comme on peut citer par exemple : l'espace tout entier, domaine extérieur, demi-espace.... Ce sont des extensions des espaces de Sobolev classiques avec des poids qui permettent de décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini. Il peut également restaurer la plupart des propriétés fonctionnelles de l'espace de Sobolev classique par exemple l'inégalité de Poincaré, les formules de Green et les inclusions compactes qui sont en général perdues lorsque le domaine est non borné.

Ce mémoire vise à utiliser la méthode des éléments finis inversés pour résoudre une équation elliptique du second ordre de type

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) + b(x)\nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$



---

## Introduction

Posé en domaine extérieurs  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$ , avec  $\omega \in \mathbb{R}^2$ , où  $a, b$  et  $c$  des coefficients variables et  $f$  une fonction donnée.

Ce mémoire est répartie en trois chapitre :

1<sup>er</sup> chapitre :

Nous présentons quelques notations, définitions et certaines propriétés fondamentales des l'espaces de Sobolev avec poids.

2<sup>ème</sup> chapitre :

Ce chapitre est consacré la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés. Premièrement, nous donnons une formulation variationnelle. Deuxièmement, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème étudié. Troisièmement, nous présentons la discrétisation du problème. Enfin, on donne une estimation de l'erreur.

3<sup>ème</sup> chapitre :

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques résultats numériques.

# Chapitre 1

## LES ESPACE DE SOBOLEV AVEC POIDS

1.1	<i>Notations et définitions</i>	5
1.2	<i>L'espace de Sobolev <math>W^{m,p}(\Omega)</math></i>	6
1.3	<i>L'espace de Sobolev avec poids <math>W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)</math></i>	6
1.3.1	<i>Quelques propriétés fondamentales de l'espace <math>W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)</math></i>	7
1.4	<i>Les espaces de trace</i>	8
1.5	<i>Inégalité de Hardy</i>	10
1.6	<i>Théorème de lax-Milgram</i>	11
1.7	<i>Méthode de Galerkin</i>	12
2	<b>DISCRÉTISATION DU PROBLÈME PAR ÉLÉMENTS FINIS INVERSÉS</b>	13

Dans ce premier chapitre, nous présentons un rappel sur les espaces de Sobolev avec poids en mentionnant des définition ainsi ses propriétés essentielles avec quelques théories, que nous utiliserons dans ce mémoire.

*K. Gougui · Univ de KASDI Merbah*

## 1.1 Notations et définitions

Dans toute la suite  $n$  sera un entier non nul. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , ( $n \geq 2$ ) pas nécessairement borné ayant une frontière régulière.

Pour tout point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et tout multi-indice  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  on note

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \quad |\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n, \quad D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n}}$$

On note  $D(\Omega)$  l'espace des fonction indéfiniment différentiable à support compact dans  $\Omega$  et  $D'(\Omega)$  l'espace des distribution (son dual).

Soit un exposant réel  $p$  tels que  $1 \leq p < +\infty$ . L'exposant conjugué de  $p$  est  $p'$  l'unique nombre réel  $p$  satisfaisant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}^k$  est l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ .

**Définition 1.** (l'espace  $L^p(\Omega)$ )

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , pour  $1 \leq p < +\infty$  on définit l'espace

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty\}$$

Pour  $u \in L^p(\Omega)$  on note

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Définition 2.** (Espace  $L^\infty(\Omega)$ )

Pour  $p = +\infty$  on définit l'espace des fonctions mesurables

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; \text{mesurable et } \exists c > 0 \text{ tels que } |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On le muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0; \text{ tels que } |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

## 1.2 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

**Définition 3.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  pour tout entier  $m$  et  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  désignera l'espace de Sobolev défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) \mid \forall \mu \in N^n : 0 \leq |\mu| \leq m, D^\mu u \in L^p(\Omega)\}$$

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\mu|=0}^m \|D^\mu u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{|\mu| \leq m} \left( \|D^\mu u\|_{L^p(\Omega)} \right), & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

## 1.3 L'espace de Sobolev avec poids $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Nous définissons les fonction poids de base

$$\rho = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \lg \rho(x) = \ln(2 + |x|^2)$$

**Définition 4.** (L'espace de Sobolev avec poids) [4]

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $p > 1$ .

les espace de Sobolev avec poids définit comme suit

Si  $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega), \forall \mu \in \mathbb{N}^n, k+1 \leq |\mu| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\mu|} \partial^\mu u \in L^p(\Omega)\}$$

Sinon,

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega), \forall \mu \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\mu| \leq k, \rho^{\alpha-m+|\mu|} (\lg \rho)^{-1} \partial^\mu u \in L^p(\Omega)\}$$

Cet espace est préparé de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\mu| \leq m} \left\| \frac{\rho^{\alpha-m+|\mu|}}{\lg \rho} \partial^\mu u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \in \{1, \dots, m\} \\ \left( \sum_{|\mu| \leq m} \left\| \rho^{\alpha-m+|\mu|} \partial^\mu u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Et de la semi norme

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\mu|=m} \|\rho^\alpha \partial^\mu u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Exemple**

1. pour  $m = 2$  et  $\alpha = 1$  on a

$$W_1^{2,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega), \rho \partial_{ij}^2 u \in L^p(\Omega), \quad i, j = 1, \dots, n\}$$

qui muni par la norme

$$\|u\|_{W_1^{2,p}(\Omega)} = \left( \|\rho^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|\rho \partial_{ij}^2 u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

et la semi norme

$$|u|_{W_0^{2,p}(\Omega)} = \left( \|\rho \partial_{ij}^2 u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

2. pour  $m = 1$  et  $\alpha = 0$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left( \|\rho^{-1}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

et la semi norme

$$|u|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Dans l'étude précédente, nous avons abordé la définition de l'espace  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ , maintenant nous trouvons ses propriétés [7].

**1.3.1 Quelques propriétés fondamentales de l'espace  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$**

★ Les inclusion suivantes sont valables avec injection continues

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$$

★ L'application suivante

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \varphi u \in W^{m,p}(\Omega) \text{ pour } \varphi \in D(\Omega)$$

est linéaire continue

★ Pour tout nombre entier  $k \in \mathbb{Z}$

$$P_k \subset W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

où  $k < m - \alpha - n/p$ .

★ Soit  $\alpha, \beta$  deux réels et  $m \in \mathbb{Z}$ , l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \rho^\beta u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est isomorphisme.

★ Pour  $\lambda \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\lambda| \leq m$

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto D^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est une application linéaire continue.

★  $D(\bar{\Omega})$  est dense dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ .

## 1.4 Les espaces de trace

**Définition 5.** [9] Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \sigma < 1$  et  $p > 1$ . On définit l'espace  $W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)$

$$W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^n); w^{\alpha-\sigma} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\rho^\alpha u(x) - \rho^\alpha u(y)|^p}{\|x-y\|^{n+\sigma p}} dx dy < \infty \right\}$$

Avec

$$w = \begin{cases} \rho & \text{si } n/p + \alpha \neq \sigma \\ \rho(\lg \rho)^{1/(\sigma-\alpha)} & \text{si } n/p + \alpha = \sigma \end{cases}$$

Dans le domaine extérieur ( $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$ ) les trace des fonction de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  sur  $\partial\Omega$  se comportent comme celles de  $W^{m,p}(\Omega)$

Nous présentons l'espace  $W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , pour  $s \in \mathbb{R}^+$ .

**Définition 6.** Soient  $p > 1, \alpha \in \mathbb{R}$  et  $s \in \mathbb{R}_+$  et

$$k = \begin{cases} s - n/p - \alpha & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \in \{\sigma, \dots, \sigma + [s]\} \text{ avec } \sigma = s - [s] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

L'espace  $W_\alpha^{s,p}(\Omega)$  définit par

$$W_\alpha^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^n); 0 \leq |\mu| \leq k, \rho^{\alpha-s+|\mu|}(\lg \rho)^{-1} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n); k+1 \leq |\mu| \leq [s]-1, \right. \\ \left. \rho^{\alpha-s+|\mu|} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n); |\mu| = [s], \partial^\mu u \in W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) \right\} \quad (1.2)$$

Cet espace est un de Banach réflexif muni de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{s,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\mu| \leq k} \|\rho^{\alpha-s+|\mu|}(\lg \rho)^{-1} \partial^{|\mu|} u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{k+1 \leq |\mu| \leq [s]-1} \|\rho^{\alpha-s+|\mu|} \partial^{|\mu|} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ + \sum_{|\mu|=[s]} \|\partial^\mu u\|_{W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.3)$$

Dans le cas d'un demi espace, nous introduisons d'abord la définition de l'espace  $W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  pour  $s$  réel.

**Théorème 1.** [7]

Soit  $\omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  avec un bord  $\Gamma$  de classe  $C^{K,1}$  et  $k \geq 0$ , soient  $s, p \in \mathbb{R}$  avec  $s \geq 0$  et  $p \geq 1$  tels que  $s \leq k+1$ ,  $s - 1/p = m + \sigma$  où  $m \in \mathbb{N}$  avec  $m \geq 0$ , et  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

Alors l'application  $u \mapsto \gamma_0 u = u|_{\partial\omega}$  définit sur  $D(\bar{\omega})$  a un unique extension linéaire continue de  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  dans  $W^{s-1/p,p}(\Gamma)$ .

Et, dans  $W^{1,p}(\Omega)$  on a

$$\ker \gamma_0 = W_0^{1,p}(\omega)$$

avec  $\gamma_0 u$  noté la restriction à  $\Gamma$  des valeurs de  $u$  et

$$W^{s,p}(\omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\omega); \forall |\mu| = m, \int_\omega \int_\omega \frac{|\partial^\mu u(x) - \partial^\mu u(y)|^p}{\|x - y\|^{n+\sigma p}} dx dy < \infty \right\}$$

Alors on définit l'espace

$$\dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega); \gamma_0 u = \gamma_1 u = \dots = \gamma_{m-1} u = 0\}.$$



## 1.5 Inégalité de Hardy

L'inégalité de Hardy joue un rôle important dans le démonstration de certaines équivalences de norme dans la  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ .

**Lemme 1.** (Inégalité de Hardy)[2]

Soit  $p \in ]1, +\infty[$  et

★ si  $\epsilon < p - 1$

$$F(t) := \int_0^t f(x) dx$$

★ si  $\epsilon > p - 1$

$$F(x) := \int_t^\infty f(x) dx.$$

où  $f \in D(]0, \infty[)$ . Alors nous avons

$$\int_0^\infty F^p(t) t^{\epsilon-p} dt \leq C \int_0^\infty f^p(t) t^\epsilon dt.$$

avec

$$C = \left( \frac{p}{|\epsilon - p + 1|} \right)^p.$$

L'inégalité de Hardy donne un résultat important qui est le théorème suivant

**Théorème 2.** [7] Soit  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  où  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$  avec  $\omega \subset \mathbb{R}^2$ . Soient  $m \in \mathbb{N}$  avec  $m \geq 1$  et  $\alpha, p \in ]1, \infty[$  deux réels tels que  $\alpha + \frac{n}{p} \in \{1, \dots, m\}$ . On pose  $q' = \min(m - 1, [m - \alpha - (n/p)])$ . Alors

1. La semi-norme  $|\cdot|_{W_\alpha^{m,p}}$  définit une norme sur l'espace  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)/\mathbb{P}_{q'}$  équivalente à la norme quotient.

2. La semi-norme  $|\cdot|_{W_\alpha^{m,p}}$  est une norme sur espace  $\dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}$

il existe un constante  $C > 0$  telle que

$$\forall u \in \dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C |u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}.$$

**Définition 7.** (formule de Green)[1]

Soit  $\Omega$  un ouvert, pour toute  $u \in W_{\log}^1(\Omega)$ ,  $v \in W_{\log}^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad i = 1, \dots, n$$

**Définition 8.** (La formule de divergence)

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert bornée de classe  $C^1$  et  $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  deux champs des vecteurs de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $\bar{\Omega}$ , on a

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} u \, dx = - \int_{\Omega} u \nabla f \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot v \cdot \eta_i \, ds.$$

Où  $\eta_i$  est la  $i$ -ième composante de la normale extérieure unité de  $\partial\Omega$ .

**Théorème 3.** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)[6]

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace préhilbertien réel, pour tout  $(x, y) \in E^2$  on a l'inégalité suivante

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

où  $\|\cdot\|$  noté la norme induite par le produit scalaire.

## 1.6 Théorème de lax-Milgram

Nous considérons le problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H & \text{tels que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) & \forall v \in H \end{cases} \quad (1.4)$$

**Théorème 4.** Soient  $H$  un espace de Hilbert réel muni de produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)$ , on suppose que

—  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire qui est

\* continue sur  $H \times H$

$$\exists c > 0, \forall (u, v) \in H \times H, |a(u, v)| \leq c \|u\|_H \|v\|_H$$

\* coercive sur  $H$  ( $H$ -elliptique)

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$$

et soit

—  $\mathcal{L}$  une forme linéaire continue sur  $H$

$$\exists \beta > 0, \forall v \in H \mid \mathcal{L}(v) \mid \leq \beta \|v\|_H$$

Alors, il existe une unique solution  $u$  dans  $H$ , de plus le problème (1.4) satisfait l'estimation a priori suivant :

$$\|u\| \leq \frac{\|\mathcal{L}\|}{\alpha}$$

## 1.7 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est un méthode très générale et qui fonctionne pour transformé un problème continu en un problème discret. Selon la méthode suivante. Commencer à partir d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on faire d'abord à une approximation dans un sous-espace de dimension finie. Ensuite on résout le problème d'approché. Et enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ (voir [5]).

### Lemme 2. (Lemme de Céa [3])

Soit  $V$  un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire et  $l$  une forme linéaire vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Soit  $W_h(\Omega)$  un sous-espace fermé de  $W$ . Alors il existe un unique  $u_h \in W_h(\Omega)$  tel que

$$\forall v_h \in W_h \quad a(u_h, v_h) = l(v_h).$$

Et nous avons

$$\|u - u_h\|_W \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_W = \frac{M}{\alpha} d(u, v_h).$$

où  $M$  est constante de continuité de  $a$  et  $\alpha$  la constante de  $W$ -ellipticité

## Chapitre 2

---

# DISCRÉTISATION DU PROBLÈME PAR ÉLÉMENTS FINIS INVERSÉS

---

2.1	<i>Problème variationnelle</i>	15
2.1.1	<i>L'existence et l'unicité</i>	18
2.2	<i>Discrétisation du problème</i>	22
2.2.1	<i>Décomposition du domaine</i>	23
2.2.2	<i>Espace discret</i>	28
2.3	<i>Estimation d'erreur</i>	30
3	<i>QUELQUES TESTS NUMÉRIQUES</i>	33

Dans ce chapitre, nous discutons la discrétisation du problème elliptique de type suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + b\nabla u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

En utilisant la méthode des élément finis inversés, avec  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$  est un domaine extérieur et  $\omega \in \mathbb{R}^2$  un ensemble borné .

On trouve d'abord la formulation variationnelle associé à ce problème dans le cadre fonctionnel ( l'espace Sobolev avec poids  $W_{\log}^1$ ). Ensuite, nous prouvons l'existence et unicité de la solution du problème en utilisant le théorème de Lax-Milgram. Après, on donne la discrétisation du problème par la méthode des élément finis inversés. Finalement, on donne une estimation d'erreur.

2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

2.1 Problème variationnelle

Considérant le problème étudié comme suit

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( a(x) \nabla u(x) \right) + b(x) \nabla u(x) + c(x) u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  sont des coefficients variables et  $f(x)$  est une fonction donnée.

Nous cherchons la solution du problème (2.1), dans l'espace de Sobolev avec poids  $W_{\log}^1(\Omega)$  qui satisfait

$$\int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx < +\infty \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx < +\infty$$

il est muni de la norme

$$\|v\|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{|v|^2}{(|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2} dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

et aussi on pose

$$\mathring{W}_{\log}^1(\Omega) = \{v \in W_{\log}^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes

(A<sub>1</sub>)  $a \in L^{\infty}(\Omega)$  et il existe une constante  $\alpha > 0$  tels que  $a(x) \geq \alpha > 0$  in  $\Omega$

(A<sub>2</sub>)  $\mathbf{b} \in L^{\infty}(\Omega)^2$  et  $[x \in \Omega \mapsto (|x| \log |x|) \mathbf{b}(\mathbf{x})] \in L^{\infty}(\Omega)^2$

(A<sub>3</sub>)  $c \in L^{\infty}(\Omega)$  et  $[x \in \mathbb{R}^2 \mapsto (|x| \log |x|)^2 \mathbf{c}(\mathbf{x})] \in L^{\infty}(\Omega)$ .

(A<sub>4</sub>)  $f \in W_{\log}^{-1}(\Omega)$  c'est à dire vérifie

$$\int_{\Omega} (|x|^2 + 1)(\log(|x|^2 + 2))^2 |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

(A<sub>5</sub>)  $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^{\infty}(\Omega)$ ,  $[x \in \Omega \mapsto |x|^2 (\log |x|)^2 \operatorname{div} \mathbf{b}(x)] \in L^{\infty}(\Omega)$

**Proposition 1.** Supposons que les hypothèses (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>), (A<sub>4</sub>) et (A<sub>5</sub>) sont vérifiées, une fonction  $u \in \mathring{W}_{\log}^1(\Omega)$  est solution de (2.1) si et seulement si  $u$  est solution du problème suivant

2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \text{ tels que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

★  $\mathcal{A}$  est forme bilinéaire définit par

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \quad \forall v \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$$

et

★  $\mathcal{L}$  forme linéaire définit par

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$$

**preuve :**  $[\Rightarrow]$

Soit  $u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$  est solution de (2.1).

D'abord, on multiplie le problème (2.1) par une fonction test  $v \in D(\Omega)$  et on intègre sur  $\Omega$  on obtient

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( a(x) \nabla u(x) \right) v(x) dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Par suite on applique la formule de Green on trouve

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} a(x) u(x) \partial_n v(x) ds + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Comme  $D(\Omega)$  est dense dans  $\dot{W}_{\log}^1(\Omega)$  Alors on trouve

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad v \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$$

Donc l'écriture variationnelle du problème (2.1) prend toujours une forme de type

2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \dot{W}_{log}^1(\Omega) \text{ tels que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \dot{W}_{log}^1(\Omega) \end{cases}$$

avec

⊙  $\mathcal{A}$  est forme bilinéaire définit par

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \quad \forall v \in \dot{W}_{log}^1(\Omega)$$

et

⊙  $\mathcal{L}$  forme linéaire définit par

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \quad \forall v \in \dot{W}_{log}^1(\Omega)$$

Maintenant, en montre la réciproque [ $\Leftarrow$ ]

Soit,  $u \in \dot{W}_{log}^1(\Omega)$  est solution de problème (2.2) on a donc

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

On choisit ensuite une fonction test  $v$  de  $D(\Omega)$  et on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v dx &= \langle a \nabla u, \nabla v \rangle, \quad \int_{\Omega} (b \nabla u) v dx = \langle (b \cdot \nabla u), v \rangle, \\ \int_{\Omega} (cu) v dx &= \langle cu, v \rangle \text{ et } \int_{\Omega} f v d\Omega = \langle f, v \rangle \end{aligned}$$

et par définition de la dérivation au sens des distribution

$$\langle a \nabla u, \nabla v \rangle = \langle -div(a \nabla u), v \rangle$$

On a alors

$$\langle -div(a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu - f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in D(\Omega).$$

On déduit que

$$-div(a \nabla u) + b \cdot \nabla u = f \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Comme  $f$  est  $u$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , on trouve que  $-div(a \nabla u) \in L^2(\Omega)$ .



2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

On a donc

$$-div(a\nabla u) + b\nabla u + c = f \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et donc presque partout dans  $\Omega$ . On conclusion,  $u$  solution de (2.2) est également de

$$\begin{cases} -div\left(a(x)\nabla u(x)\right) + b(x)\nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{p.p sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

□

2.1.1 L'existence et l'unicité

Dans cette paragraphe, nous référons à l'existence et l'unicité de la solution de problème (2.1) en utilisant quelques lemme.

Pour montrer l'existence et l'unicité, on na besoin l'inégalité de Hardy suivante

**Lemme 3.** *Il existe un constant  $\eta_0$  telle que*

$$\forall u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega) \quad , \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \eta_0 \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{(|x|^2 + 1)(\log 2 + |x|^2)^2} dx.$$

On modifie l' hypothèse  $(\mathcal{A}_5)$  comme suit

$(\mathcal{A}_5)$   $div \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $[x \in \Omega \mapsto |x|^2(\log |x|)^2 divb(x)] \in L^\infty(\Omega)$ , *il existe un constante réel  $\eta \prec \eta_0\alpha$  tels que*

$$c - \frac{1}{2}divb \geq -\frac{\eta}{|x|^2 \log(|x|^2 + 2)^2}$$

**Proposition 2.** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{A}_1)$ ,  $(\mathcal{A}_2)$ ,  $(\mathcal{A}_3)$ ,  $(\mathcal{A}_4)$  et  $(\mathcal{A}_5)$  sont vérifiant. Alors le problème (2.1) admet une solution unique  $u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$  et l'estimation suivante*

$$\|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}$$

**Preuve :** Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1). Nous précédons comme suite :

On pose

$$\langle x \rangle = (|x|^2 + 1) (\log(|x|^2 + 2))^2$$

2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

► Nous montrons la continuité de la forme bilinéaire  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \right| \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx \right| &\leq \|a(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(x) \nabla v(x)| dx \\ &\leq \|a(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_1 \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Avec  $c_1 = \|a(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)}$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} b(x) \nabla u(x) v(x) dx \right| &= \left| - \int_{\Omega} \operatorname{div} b(x) u(x) v(x) dx - \int_{\Omega} b(x) u(x) \nabla v(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} b(x) \langle x \rangle^2 \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx + \int_{\Omega} b(x) \langle x \rangle \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \nabla v(x) dx \right| \\ &\leq \|\langle x \rangle^2 \operatorname{div} b(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|b(x) \langle x \rangle\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} c(x) \langle x \rangle^2 \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \right| \\ &\leq \|c(x) \langle x \rangle^2\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

Donc

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|\langle x \rangle^2 \operatorname{div} b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ + \|b(x)\langle x \rangle\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|c(x)\langle x \rangle^2\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{u(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x)}{\langle x \rangle} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après les hypothèses  $(\mathbf{A}_2)$ ,  $(\mathbf{A}_3)$  et  $(\mathbf{A}_5)$  on a

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + (\|\langle x \rangle^2 \operatorname{div} b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\langle x \rangle^2 c\|_{L^2(\Omega)}) \\ \times \|\langle x \rangle^{-1} u\|_{L^2(\Omega)} \|\langle x \rangle^{-1} v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|\langle x \rangle b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\langle x \rangle^2 u(x)\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C_1 |u|_{\dot{W}_{\log}^1(\Omega)} |v|_{\dot{W}_{\log}^1(\Omega)}$$

$$C_1 = \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\langle x \rangle^2 \operatorname{div} b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\langle x \rangle^2 c(x)\|_{L^\infty} + \|\langle x \rangle b(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Alors  $\mathcal{A}(u, v)$  est continue sur  $\dot{W}_{\log}^1(\Omega) \times \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$ .

► Nous montrons la coercivité de  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$

$$\mathcal{A}(v, v) = \int_{\Omega} a(x) |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} b(x) \nabla v(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) v(x)^2 dx \\ = \int_{\Omega} a(x) |\nabla v(x)|_{L^2(\Omega)}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b(x) \nabla v^2(x) dx + \int_{\Omega} c(x) v(x)^2 dx$$

on applique la formule de divergence

$$\mathcal{A}(v, v) = \int_{\Omega} a(x) |\nabla v(x)|_{L^2(\Omega)}^2 dx + \int_{\Omega} \left( c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} b(x) \right) v(x)^2 dx$$

d'après l'inégalité de Hardy et les deux hypothèses  $(\mathbf{A}_1)$  et  $(\mathbf{A}_5)$

$$\mathcal{A}(v, v) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \eta_0 \int_{\Omega} \frac{v(x)^2}{\langle x \rangle^2} dx \\ \geq \left( \alpha - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \int_{\Omega} |\nabla v(x)|_{L^2(\Omega)}^2 dx \\ \geq C_2 |v(x)|_{\dot{W}_{\log}^1(\Omega)}^2 dx$$

avec  $C_2 = \left( \alpha - \frac{\eta}{\eta_0} \right)$

2.1. PROBLÈME VARIATIONNELLE

Alors  $\mathbf{A}(\cdot)$  est coercive sur  $\dot{W}_{\log}^1(\Omega) \times \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$

► Nous montrons la continuité de la forme linéaire  $\mathcal{L}(\cdot)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} f(x)\langle x \rangle \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \right| \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse  $(\mathbf{A}_4)$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|\mathcal{L}(v)| \leq \|f\|_{W_{\log}^{-1}} \|\langle x \rangle^{-1}v\|_{L^2(\Omega)}$$

L'inégalité de Hardy donne :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(v)| &\leq \frac{1}{\eta_0} \|f\|_{W_{\log}^{-1}} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{\eta_0} \|f\|_{W_{\log}^{-1}} |\nabla v|_{L^2} \\ &\leq C_3 |v|_{\dot{W}_{\log}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Avec  $C_3 = \frac{1}{\eta_0} \|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}$

Donc  $\mathcal{L}(\cdot)$  est continu sur  $\dot{W}_{\log}^1(\Omega)$

D'après le théorème de Lax-Milgram le problème (2.1) est admet un solution unique  $u \in \dot{W}_{\log}^1(\Omega)$

Maintenant, on montre l'estimation

$$\|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}$$

Dans le problème (2.2) on prend  $v = u$ , puisque  $\mathbf{A}(u, u)$  est coercive et  $|\mathcal{L}(v)|(u)$  continue alors

$$C_2 \|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)}^2 \leq \mathbf{A}(u, u) = \mathcal{L}(u) \leq \frac{1}{\eta_0} \|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)} \|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)}$$

Alors

$$C_2 \|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\eta_0} \|f\|_{W_{\log}^{-1}}$$

Donc

$$\|u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_{\log}^{-1}(\Omega)}$$

Avec  $C = \frac{1}{C^2 \cdot \eta_0}$

## 2.2 Discrétisation du problème

Dans cette partie on consacre à la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis inversés [12],[10].

Nous rappelons d'abord quelques notations géométriques.

**Définition 9.** Le simplexe infini (ou triangle infini) de sommets  $a_0, a_1$  et  $a_2$  de  $\mathbb{R}^2$  est défini comme suit :

$$T(a_0|a_1, a_2) = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 | \lambda_0 \leq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

Le sommet  $a_0$  est appelé sommet fictif de  $T$  et les autres sommets  $a_1, a_2$  sont appelés les sommets réels de  $T$  (voir figure (2.1)).

On associe à  $T$  le simplexe fini  $S_T$  (voir figure (2.1)) défini par

$$S_T(a_0, a_1, a_2) = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, 0 \leq \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

On note  $h_T$  le vecteur altitude associé à ce triangle infini  $T$  défini par  $h_T = \pi a_0 - a_0$  où  $\pi a_0$  est la projection orthogonale du sommet fictif  $a_0$  sur le droit  $(a_1, a_2)$ . On note aussi  $|h_T|$  la distance entre  $a_0$  et la droite  $(a_1, a_2)$  ceci est illustré par figure (2.1).

On définit les simplexes infini et fini de référence

$$\hat{T} = \{x = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in \mathbb{R}^2/\bar{\omega}, \hat{\lambda}_k \geq 0 \text{ pour } k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 \hat{\lambda}_k \geq 1\}$$

$$\hat{K} = \hat{S} = \{x = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in \mathbb{R}^2/\bar{\omega}, 0 \leq \hat{\lambda}_k \leq 1 \text{ pour } k = 1, 2, \sum_{k=1}^2 \hat{\lambda}_k \leq 1\}$$

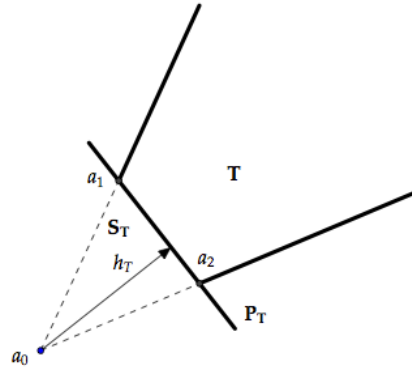


FIGURE 2.1 – le simplexe fini et infini en  $2D$

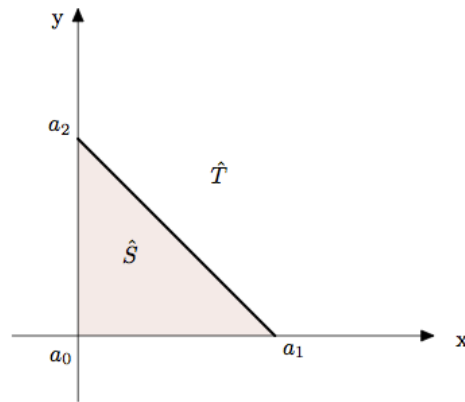


FIGURE 2.2 – le simplexe fini et infini de référence en  $2D$

### 2.2.1 Décomposition du domaine

※ 1<sup>er</sup> étape :

Nous décomposons le domaine extérieur  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$  en deux sous - domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_\infty$  tels que

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty$$

- $\Omega_0$  est un domaine borné et polygonal.
- $\Omega_\infty = \Omega \setminus \Omega_0$  est domaine non borné qui est divisé en  $M$  simplexes infinis  $T_1, \dots, T_M$  vérifiant
  1.  $\bar{\Omega}_\infty = \cup_{l=1}^M T^l$ ,
  2.  $T_1, \dots, T_M$  ont le même sommet fictif  $a_0$ . On supposera, sans perdre de généralité que  $a_0 = 0$ ,
  3. pour tous  $l, m \leq M$  avec  $l \neq m$ ,  $T_l \cap T_m$  est soit vide, soit un sommet ou soit une arête infini .

2.2. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

Notes

- ★ On domaine borné, les simplexes infinis ne vont pas jouer le rôle des élément finis.
- ★  $M$  est nombre fixé, généralement  $M = 1, 2, 3, 4$ .
- ★ La décomposition du domaine  $\Omega$  en sous-domaine formés par les simplexes infinis avec  $\Omega_0$ .

L'exemple suivant illustre cette division

**Exemple 1.** Soit  $\Omega = \mathbb{R}^2 / \bar{\omega}$  où  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . On définit le rectangle

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq R_1 \text{ et } |y| \leq R_2\} = [-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont deux réels choisis tels que

$$\omega \subset Q$$

On pose

$$\Omega_0 = \Omega \cap \text{int}(Q) = Q \setminus \bar{\omega},$$

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > R_1 \text{ et } |y| > R_2\}$$

On peut décomposer  $\Omega_\infty$  comme suit

$$\bar{\Omega}_\infty = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \tag{2.3}$$

avec

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq R_1 \text{ et } x \geq \frac{R_1}{R_2|y|}\},$$

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq R_2 \text{ et } y \geq \frac{R_2}{R_1|x|}\},$$

$$T_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq -R_1 \text{ et } x \leq -\frac{R_1}{R_2|y|}\},$$

$$T_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -R_2 \text{ et } y \leq -\frac{R_2}{R_1|x|}\},$$

Le figure 2.3 illustre cette décomposition.

Les vecteurs hauteurs de  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  sont

$$h_1 = R_1 e_1, h_2 = R_2 e_2, h_3 = -R_1 e_1, h_4 = -R_2 e_2,$$

Avec  $e_1 = (1, 0)^T$  et  $e_2 = (0, 1)^T$  sont les vecteurs unitaires de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Dans le cas particulier où  $\omega$  est un rectangle tels que  $\omega = [-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]$  et  $R_1 > 0$  et  $R_2 > 0$ .

2.2. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

On décompose  $\Omega$  en l'union de quart simplexes infinis  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  définis comme ci-dessus. Dans ce cas  $\Omega_0 = \emptyset$ . Cette division est représentée dans la figure (2.4).

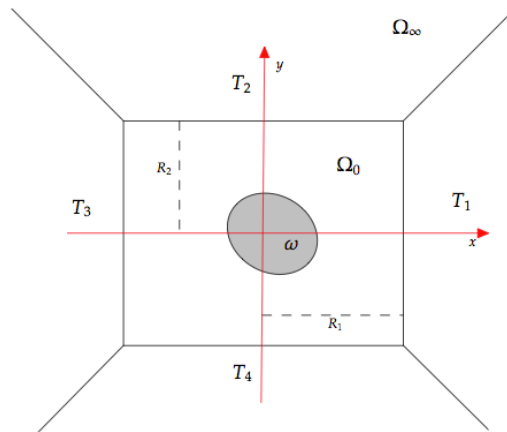


FIGURE 2.3 – Décomposition des domaine extérieur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$  en la réunion d'un domaine borné et de quatre simplexes infinis

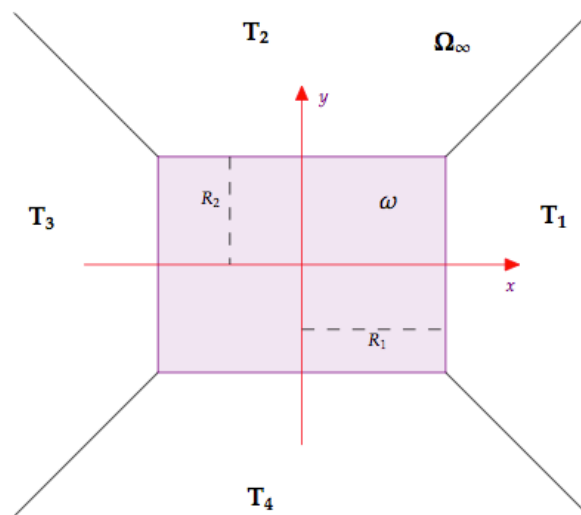


FIGURE 2.4 – décomposition d'un domaine extérieur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$  en la réunion de quatre simplexes infinis.

※ 2<sup>ème</sup> étape  
On pose

$$\Omega_* = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 - \{0\}$$



2.2. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

$\Omega_*$  est appelé le domaine fictif, il est borné et polygonal, Il faut la distinguer de  $\Omega_0$

On considère l'application suivante

$$\forall x \in G = \bar{\Omega}_* \cup \bar{\Omega}_\infty - \{a_0\}, \phi(x) = \frac{x - a_0}{r(x)^2} + a_0, .$$

Cette application s'appelle l'inversion polygonal  $\phi(x)$  qui transforme  $\Omega_\infty$  en domaine borné  $\Omega_*$

Avec  $r(\cdot)$  est le rayon polygonal défini de la façon suivante

$$\forall l \in \{1, \dots, M\}, \forall x \in \overline{T_l \cup S_l}, r(x) = \frac{(x - a_0)h_l}{|h_l|^2}.$$

L'application  $\phi$  et le rayon  $r(x)$  vérifient les propriétés suivantes

- \* la fonction  $r(x)$  est continu sur  $G$ ;
- \*  $r(x) \simeq |x|, \forall x \in G$ ;
- \*  $r(x)=1, \forall x \in \partial\Omega = \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty$ ;
- \*  $\phi(x)$  transforme  $T_l$  en  $S_l$  et vice versa;
- \*  $\phi$  est continu et injective de  $\Omega_\infty$  dans  $\Omega_*$ . Elle laisse invariant les points d'intersection de  $\bar{\Omega}_\infty$  et  $\bar{\Omega}_0$ ;
- \*  $\phi = \phi^{-1}, \phi \circ \phi = id_{\mathbb{R}^2} \setminus \{0\}$ ;

La démonstration de ses propriétés se trouve dans [11]

Maintenant, fixons un paramètre  $\theta > 0$ .

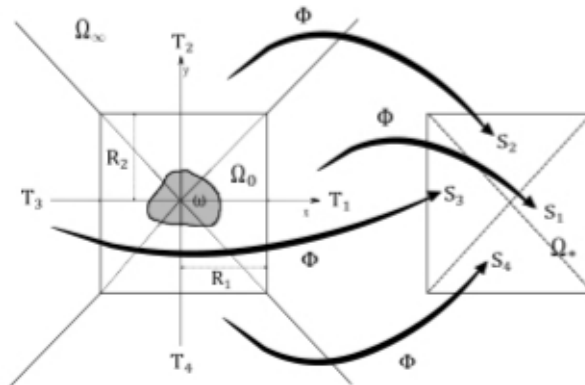


FIGURE 2.5 – transformation des  $\Omega_\infty$  par l'inversion polygonal  $\phi_i$ .

2.2. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

---

Ètant donné une fonction à valeur réelle  $v$  définie sur  $\Omega_\infty$ , on définit la fonction  $\hat{v}$  sur  $\Omega_*$  comme suit

$$\hat{v}(x^*) = r(x_*)^{-\theta+1}v(\phi^{-1}(x_*)) \quad \text{pour } x_* \in \bar{\Omega}_*.$$

On observe que  $v(x) = r(x)^{-\theta+1}\hat{v}(\phi(x))$  pour  $x \in \bar{\Omega}_\infty$ .

et  $\hat{v}(x_*) = v(x_*)$   $x_* \in \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty$ .

2.2. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

2.2.2 Espace discret

Pour construire l'espace approché  $W_h$  on commence par la construction du maillage, ceci est fait en utilisant deux types des triangulation pour les sous-domaines  $\Omega_*$  et  $\Omega_0$  séparément, tels que

1. Dans le domaine  $\Omega_0$ , on construit une triangulation classique  $\{K; K \in \mathcal{T}_h\}$  qui vérifiant les condition de régularité suivantes.

- L'intersecion de deux simplexes adjacents est vide ou est une face  $k$ -dimensionnelle entière avec  $0 \leq k \leq n - 1$ .
- Il existe une constante  $\sigma$  telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_k}{\rho_k} \leq \sigma \text{ pour chaque } h$$

où

$h$  : est le paramètre de discrétisation qui défini par  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$ .

$h_K$  : la diamètre de  $K$ .

$\rho_K$  : le rayon de sphère inscrite dans  $K$ .

2. Dans le domine fictif  $\Omega_*$ . On construit une triangulation  $\{K; K \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}$  (un maillage gradué), satisfaisant en plus des condition de la régularité, les hypothèses suivantes :

- Pour tout  $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h^* = \{K \in \mathcal{T}_h; 0 \notin K\}$

$$h_k \leq h_K^{1-\mu}$$

$$h^{1/\mu} \leq d_K.$$

avec

$d_K$  : désigne la distance entre l'origine 0 et  $K$

$\mu$  : réel  $> 0$  est la paramètre de graduation, indépendant du raffinement.

- Pour tout  $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h - \tilde{\mathcal{T}}_h^*$

$$h_K \leq h^\frac{1}{\mu},$$

- Il existe  $i \in \{1, \dots, M\}$  tel que  $K \subset S_i$

2.2. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

Maintenant, nous allons expliquer comment construire un maillage gradué sur l'élément de référence.

$$\hat{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0, y \leq 0, x + y \leq 1\}.$$

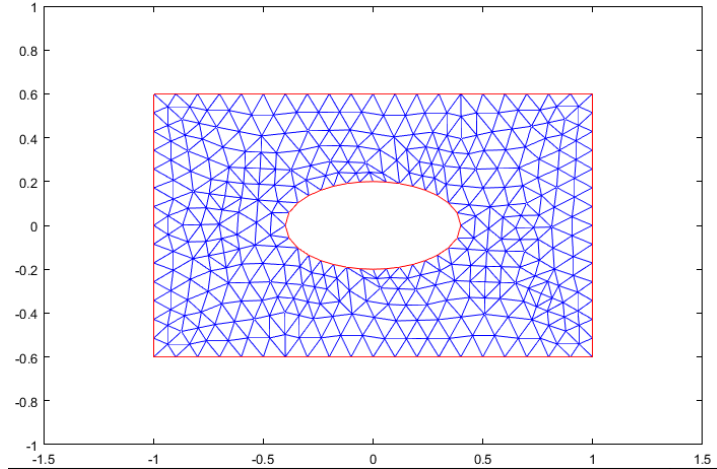


FIGURE 2.6 – Le maillage du sous-domaine borné  $\Omega_0$

D'abord, Soit  $(\alpha_i)_{i \leq 1}$  une suite croissante définie par

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{i+1} = \alpha_i + \alpha_i^{1-\mu}.$$

On pose  $h_N = \alpha_N^{-\mu}$  pour tout entier  $N \leq 2$ .

et on définit la suite finie  $d_i$  qui est définie comme suit

$$d_i = \alpha_i h_N^{1/\mu} = \frac{\alpha_i}{\alpha_N} \quad \text{pour } i \in [1, M].$$

De plus, on considère les segments

$$D_i = \{(x, y) \in \hat{K}_2; x + y = d_i\}, \quad i \in [1, N].$$

On subdivise le segment  $D_i$  en  $i$  segments égaux. Dans cela, on relie les sommets pour obtenir le maillage final de  $\hat{K}_2$  (voir le figure 2.7)

Soit  $k \geq 1$  est un entier, On a

$$W_h(\Omega) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, \hat{v}|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h^* \text{ et } \hat{v}(0) = 0, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

2.3. ESTIMATION D'ERREUR

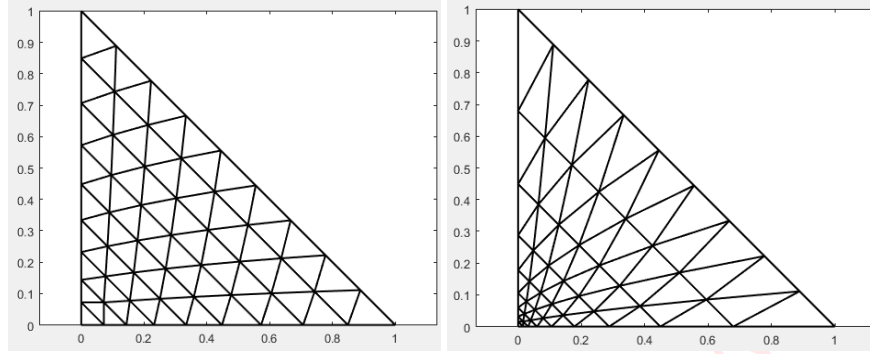


FIGURE 2.7 – Un illustration de maillage gradué de l'élément de référence quand,  $\mu = 0.7$  (gauche),  $\mu = 0.2$  (droite).

**Lemme 4.** (voir[8])

Si  $\theta > 0$ , alors on a

$$W_h(\Omega) \hookrightarrow \mathring{W}_{\log}^1(\Omega)$$

donc, le problème approché associé au (2.2)

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h(\Omega) \text{ tels que :} \\ \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h) \quad \forall v_h \in W_h(\Omega) \end{cases} \quad (2.4)$$

Conclusion, pour  $\theta > 0$  le problème approché (2.4) admet une solution  $u_h$  unique dans  $W_h$ .

### 2.3 Estimation d'erreur

Nous présentons maintenant le résultat principal lié à l'erreur d'approximation dans le théorème suivante

**Théorème 5.** Soit  $u_h \in W_h$  solution du problème discret (2.4). On suppose que  $u \in H_{loc}^{k+1}(\Omega)$  et

$$\forall |\lambda| \leq k+1, \quad \|(\partial^\lambda u)(|x|, \cdot)\|_{L^2(S^1)} \leq \frac{C}{|x|^{\theta+|\lambda|}} \quad \text{pour } |x| \geq R, \quad (2.5)$$

où  $S^1$  est cercle unitaire. Pour deux nombres constantes  $C > 0$  et  $R > 0$

Alors, pour chaque nombre réel  $\epsilon$  tel que  $0 < \epsilon < \min(1, \theta)$ , il existe une constante  $C_\epsilon$  ne dépend pas de  $u, h$  et  $p$  telle que

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C_\epsilon \left( h^k \left\{ \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} \right\} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \left\{ \|u\|_{W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1}(\Omega_\infty)} \right\} \right)$$

2.3. ESTIMATION D'ERREUR

avec  $\mu_0 = \frac{\theta - \epsilon}{k}$

**preuve :** Soit  $u \in H_{loc}^{k+1}(\Omega)$ ,

d'après la (2.5), on a  $u \in W_{k+\theta-\epsilon}^{k+1,2}(\Omega)$  pour tout  $\epsilon > 0$ . D'après le lemme de C ea on a l'estimation suivant :

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)}$$

Puisque  $W_h \subset W_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_{\log}^1(\Omega)$

on a

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{W_0^1(\Omega)}$$

Soit l'opérateur d'interpolation  $\pi_h$  qui définit de  $C^0(\bar{\Omega})$  dans  $W_h$  comme suit :

pour tout  $v \in C^0$  on associe un élément unique  $z \in W_h$  vérifie :

$$\begin{aligned} z|_K &= \pi_K v \quad \text{pour tout } K \in \mathcal{T}_h \\ \hat{z}|_{K_*} &= \pi_{K_*} \hat{v} \quad \text{pour tout } K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h \end{aligned}$$

où

- pour  $K \in \mathcal{T}_h$  ou  $K_* \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ ,  $\pi_K$  est un opérateur d'interpolation local dans  $K$ .
- $\pi_{K_*}$  désigne l'opérateur d'interpolation local  $\mathbb{P}_k^\circ$  dans  $K_*$  avec  $\mathbb{P}_k^\circ = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} | P(a_0) = 0\}$ , pour  $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{T}}_h \setminus \tilde{\mathcal{T}}_h^*$  (c'est -à-dire  $a_0 \in K_*$ ).

Supposons que  $u$  est continue d'alors on obtient

$$\|u - u_h\|_{\dot{W}_{\log}^1(\Omega)} \leq C \|u - \pi_h u\|_{\dot{W}_{\log}^1(\Omega)}$$

D'après le théorème 1 dans [11] on a

$$\|u - \pi_h u\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq h^k \left\{ \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} \right\} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \left\{ \|u\|_{W_{\log}^{k+1,2}(\Omega_\infty)} \right\} \quad (2.6)$$

avec  $\mu_0 = \frac{\theta - \epsilon}{k}$ .

2.3. ESTIMATION D'ERREUR

Finalement, on trouve

$$\|u - u_h\|_{W_{\log}^1(\Omega)} \leq C_\epsilon \left( h^k \left\{ \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} \right\} + h^{k \min(\frac{\mu_0}{\mu}, 1)} \left\{ \|u\|_{W_{\log}^{k+1,2}(\Omega_\infty)} \right\} \right)$$

□

## Chapitre3

---

# QUELQUES TESTS NUMÉRIQUES

---

3.1	<i>Mise en œuvre de la méthode</i>	34
3.1.1	<i>La matrice de rigidité</i>	34
3.2	<i>Testes numériques</i>	39
	<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>



Le but de ce chapitre est présente comme calculer la matrice de rigidité.

### 3.1 Mise en œuvre de la méthode

#### 3.1.1 La matrice de rigidité

Soit  $(x_i)_{1 \leq i \in J}$  (resp.  $(x_{*,i})_{i \in \hat{J}}$ ) les nœuds du maillage  $\mathcal{T}_h$  (resp.  $\tilde{\mathcal{T}}_h$ ). Certains de ces nœuds sont communs à  $\Omega_*$  et  $\Omega_\infty$ .

On pose

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= \{i \in J \mid x_i \in \bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_0\} = \{i \in J \mid x_i \in \partial\Omega_*\}, \\ \mathcal{J} &= \{i \in J \mid x_i \in \partial\omega\} \\ \hat{\mathbb{J}} &= \{i \in \hat{J} \mid \hat{x}_i \in \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty\} = \{i \in \hat{J} \mid \hat{x}_i \in \partial\Omega_*\}. \end{aligned}$$

Parce que les triangles  $\mathcal{T}_h$  et  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  ont les même nœuds sur la frontière commune  $\bar{\Omega}_\infty \cap \bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}_* \cap \bar{\Omega}_\infty$ . On a

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{J}\} = \{\hat{x}_i \mid i \in \hat{\mathbb{J}}\} \quad (3.1)$$

Pour chaque  $(i \in J)$ , considérons la fonction de base  $\psi_i$  définie sur  $\Omega$  comme suite

- $\psi_i \in W_h(\Omega)$ ,
- $\psi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \forall j \in J$ ,
- $\hat{\psi}_i(x_{*,j}) = 0, \forall j \in \hat{J} \setminus \hat{\mathbb{J}}$ .

On définit la deuxième fonction de base  $(\psi_i^*)_{i \in \hat{J}}$  comme suit

- $\psi_i^* \in W_h(\Omega)$ ,
- $\hat{\psi}_i^*(x_{*,j}) = \delta_{i,j}, \forall j \in \hat{J}$ ,
- $\psi_i^*(x_j) = 0, \forall j \in J \setminus \mathbb{J}$ .

La famille

$$\{\psi_i \mid i \in J \setminus \mathcal{J}\} \cup \{\psi_i^* \mid i \in \hat{J} \setminus \hat{\mathbb{J}}\}$$

forme un de base de  $W_h$ , tout fonction  $w_h \in W_h$  peut décomposer sous la forme suivante

$$w_h(x) = \sum_{i \in J \setminus \mathcal{J}} w_h(x_i) \psi_i(x) + \sum_{i \in \hat{J} \setminus \hat{\mathbb{J}}} \hat{w}_h(\hat{x}_i) \psi_i^*(\hat{x}), \quad x \in \Omega.$$

avec

$$\begin{cases} \psi_i|_K = w_i & K \in \mathcal{T}_h \\ \psi_i|_{K^*} = w_i^* & K^* \in \tilde{\mathcal{T}}_h \end{cases}$$

Pour tout  $u_h$ ,  $u_h$  est composé de la forme suivante

$$U(x) = \sum_{i=1}^{DOF} u_i \psi_i$$

Les coefficients  $u_i$  sont donnés par

$$u_i = \begin{cases} u_h(x_i) & \text{si } x_i \in K, \text{ pour } K \subset \Omega_0 \\ \hat{u}_h(x_{*,i}) & \text{si } x_{*,i} \in K, \text{ pour } K \subset \Omega_* \end{cases}$$

Nous formulons le système discret (2.4) sous la forme d'un système linéaire

$$AU = b$$

avec  $U = \{u_1, \dots, u_{DOF}\}$  et

$$A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq DOF}, \quad B = (b_i)_{1 \leq i \leq DOF}$$

Où DOF de degré de Freedholm .

$$A_{i,j} = a(\psi_i, \psi_j) = a(w_i, w_j) + a(w_i^*, w_j^*), \quad b_i = l(\psi_i)$$

Les coefficients de la matrice  $A_{i,j}$  s'écrivent

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_{\Omega_0} a(x) \nabla \psi_i \nabla \psi_j dx + \int_{\Omega_\infty} a(x) \nabla \psi_i \nabla \psi_j dx. \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

On commence par le premier intégrale  $I_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_0} a(x) \nabla \psi_i \nabla \psi_j dx \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k a(x) \nabla \psi_i \nabla \psi_j dx \end{aligned}$$

On définit est la transformation affine  $F_k$  qui transforme le triangle de référence  $\hat{K}$  en autre triangle  $K$  du maillage est donnée par

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = B_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + b_K$$

avec

$$B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \text{ et } b_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\psi(x) = \hat{\psi}(F(\hat{x})) \text{ et } \nabla \psi(x) = B_k^{-t} \nabla \hat{\psi} \circ F_k^{-1} = B_k^{-t} \nabla \hat{\psi}(\hat{x})$$

alors

$$\begin{aligned} \int_k a(x) [\nabla \lambda_i]^t \nabla \lambda_j dx &= \int_{\hat{K}} [B_k^t \nabla \hat{\lambda}_j(\hat{x})]^t B_k^t \nabla \hat{\lambda}_j(\hat{x}) |det B_k| d\hat{x} \\ &= |det B_k| \int_{\hat{K}} [\nabla \hat{\lambda}_i(\hat{x})]^t B_k^t B_k^{-1} \nabla \hat{\lambda}_j(\hat{x}) d\hat{x} \end{aligned}$$

Nous rappelons que

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \hat{\lambda}_2 = \hat{x}, \hat{\lambda}_3 = \hat{y}$$

Donc

$$\nabla \hat{\lambda}_1 = (-1, -1)^t, \quad \nabla \hat{\lambda}_2 = (1, -0)^t, \quad \nabla \hat{\lambda}_3 = (0, 1)^t$$

Donc, la matrice élémentaire s'exprime

$$A^K = \frac{1}{4|K|} = \begin{pmatrix} \|\vec{s}_2 \vec{s}_3\|_2 & \vec{s}_1 \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_3 \vec{s}_2 & \vec{s}_1 \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 \vec{s}_3 \\ \vec{s}_1 \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_3 \vec{s}_2 & \|\vec{s}_1 \vec{s}_3\|_2 & \vec{s}_1 \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_2 \vec{s}_1 \\ \vec{s}_1 \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 \vec{s}_3 & \vec{s}_1 \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_2 \vec{s}_1 & \|\vec{s}_1 \vec{s}_2\|_2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer  $I_2$  on procédé comme suit

On a

$$\psi_i = \tilde{\psi}_i(x_*)$$

avec

$$\tilde{\psi}_i(x_*) = r(x_*)^\gamma \hat{\psi}_i(x_i), \quad x_* = \phi(x) \text{ et } \gamma = \theta - 1$$

Nous trouvons

$$\nabla \psi_i(x) = M(x_*) \nabla_* \tilde{\psi}_i(x_*).$$

où

- $\nabla_* \hat{\psi}_i$  : est le gradient de  $\tilde{\psi}_i$  par rapport à  $x_*$ .
- $M(x_*)$  : est la matrice carrée telle que.

$$\begin{aligned} M(x_*) &= \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \\ &= \frac{1}{r(x)^2} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{h(x) \cdot e_i x_j}{r(x) |h|^2} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}, \quad x = \phi(x_*) \\ &= r(x_*)^2 I_2 - 2 \frac{r(x_*)}{|h|^2} \hat{M}(x_*), \end{aligned}$$

Avec

$$\hat{M}(x_*) = h(x_*)(x_*)^t.$$

On montre facilement que .

$$\det(M(x_*)) = -r(x_*)^4.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\infty} a(x) (\nabla \psi_i)^t (\nabla \psi_j) dx dy &= \int_{\Omega_*} a(\phi(x_*)) \nabla_* (\tilde{\psi}_i)^t M(x_*) M(x_*)^t \nabla_* \tilde{\psi}_j | \det(M(x_*)^{-1}) | dx_* \\ &= \int_{\Omega_*} a^*(x_*) (\nabla_* \tilde{\psi}_i)^t H^*(x_*) (\nabla_* \tilde{\psi}_j) dx_*. \end{aligned}$$

Avec

$$H^*(x_*) = \frac{1}{r(x_*)^4} M(x_*)^t M(x_*) \quad \text{et } a^*(x_*) = a(\phi(x_*)) \quad \text{pour } x_* \in \Omega_*$$

qui peut s'écrire aussi

$$H^*(x_*) = I - \frac{2}{|h|^2 r(x_*)} (\hat{M}(x_*)^t + \hat{M}(x_*)) + \frac{4}{|h|^4 r(x_*)} \hat{M}(x_*)^t \hat{M}(x_*).$$

Observant que

$$\hat{M}(x_*)^t \hat{M}(x_*) = |h(x)|^2 x_* (x_*)^t$$

Alors

$$H^*(x_*) = I - 2 \frac{1}{|h|^2 r(x_*)} (\hat{M}(x_*)^t + \hat{M}(x_*)) + 4 \frac{1}{|h|^4 r(x_*)} x_* (x_*)^t.$$

D'autre part, on a

$$\tilde{\psi}_i(x_*) = r(x_*) \hat{\psi}_i(x_*).$$

Ainsi,

$$\nabla^* \hat{\psi}_i(x_*) = r(x_*)^{\gamma-1} [r(x_*) \nabla^* \hat{\psi}_1(x_*) + \gamma \hat{\psi}_i(x_i) \nabla^* r(x_*)].$$

alors, On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\infty} a(x) (\nabla \psi_i)^t (\nabla \psi_j) dx &= \int_{\Omega_*} a^*(x_*) r(x_*)^{2\gamma} (\nabla_* \hat{\psi}_i)^t H^*(x_*) (\nabla_* \hat{\psi}_j) dx_* \\ &+ \gamma^2 \int_{\Omega_*} a^*(x_*) r(x_*)^{2(\gamma-1)} \hat{\psi}_i(x_*) \hat{\psi}_j(x_*) (\nabla_* r(x_*)^t H^* \nabla_* r(x_*)) dx_* \\ &+ \gamma \int_{\Omega_*} a^*(x_*) r(x_*)^{2\gamma-1} [\hat{\psi}_i(x_*) \nabla_* \hat{\psi}_j(x_*) + \hat{\psi}_j(x_*) \nabla_* \hat{\psi}_i(x_*)]^t H^* \nabla_* r(x_*) dx_*. \end{aligned}$$

Pour la partie droite, sa formule est donnée sous la forme suivante

$$\int_{\Omega} f(x) \psi_i(x) dx = \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k f(x) \psi_i(x) dx + \sum_{k_* \in \mathcal{T}} \int_{k_*} r(x_*)^{\gamma-4} f(\phi(x_*)) \hat{\psi}_i(x_*) dx_*. \quad (3.2)$$

Ces intégrales sont calculés en utilisant une forme quadrature

$$\int_k f(x) dx \approx |k| \sum_{i=1}^q \omega_i f(\xi_i),$$

où  $\xi_i$ ,  $1 \leq i \leq q$  sont des points de quadrature et  $\omega_i$  sont les poids associés .

### 3.2 Testes numériques

**Exemple 2.** On considère l'équation (2.1) pour

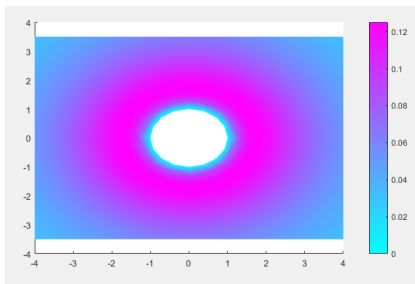
$$a(x) = 1, \quad b(x) = 0, \quad c(x) = 0.$$

et

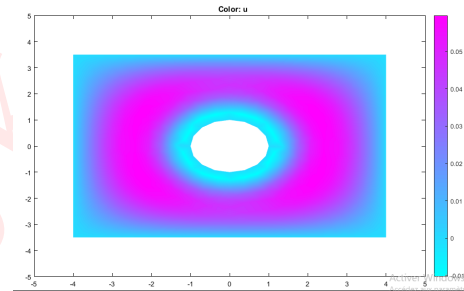
$$\omega = x^2 + y^2 \leq 1, \quad R_1 = 4, \quad R_2 = 3.5$$

La fonction  $f$  est choisit de telle sorte que la solution exact est donnée par :

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$



(a) Solution exacte dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$



(b) Solution approché dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$

**Conclusion**

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution d'une équation elliptique du second ordre posée en domaine extérieur de type  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$  avec  $\omega$  un ouvert borné par la méthode des éléments finis inversés où nous avons utilisé l'espace de Sobolev avec poids comme cadre fonctionnel. Après avoir montré l'existence et l'unicité de la solution, nous avons discuté la discrétisation du problème et donné une estimation d'erreur. À la fin de ce travail, nous avons présenté quelques résultats numériques pour montrer l'efficacité de cette méthode. En perspective, on propose d'étudier d'autres types de problèmes posés en domaine illimité.

---

## Bibliographie

---

- [1] B.Hanouzet, J.Lucjoly. Formulation de Green liée à l'ordre de  $H^1(\Omega)$ . Application au problème d'obstacle. Journées équation aux dérivées partielles(1975),p.207–214 .
- [2] C. Fabrice.Inégalités de Hardy sur des domaines non bornés.National Library of Canada, Ottawa.2003.
- [3] F.pr pascal.Introduction à la modélisation mathématique et à l'analyse numérique des équation aux dérivées partielles .
- [4] J.Ulrich, Razafison . Théorie  $L^p$  avec poids pour les équations d'Oseen dans des domaines non borné .PhD thesis.Université de Pau et des Pays de l'Adour,2004.
- [5] H.Le Dret, H.Le Dret.La méthode de Galerkin .Équations aux dérivées partielles elliptique non linéaires ,83–97.2013.
- [6] H- Urruty,J-Baptiste . Des démonstrations qui font boum !
- [7] K.Kaliche .Méthode des élément finis inversés pour des domaines non borné .PhD thesis , Université Paris-Saclay(ComUE),2016.
- [8] S. K.Bhowmik,R. Belbaki, T. Z.Boulmezaoud, S, Mziou. Solving two dimensional second order elliptic equations in exterior domains using the inverted finite elements method. Computers and Mathematics with Applications, 72(2016), 2315-2333.
- [9] S. Nicaise. Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : Cours et problèmes résolus. Dunod, Paris, ISBN 2100049410, 2000. Posté par Boyaya.
- [10] T. Z. Boulmezaoud, B. Boudjedaa, S. Mziou, and M. M. Babatin. Approximation of singular and radial elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 32(1) : 237–261, 2015.
- [11] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problem in unbounded domains. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1) :109–145, 2005.
- [12] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 60(2) :295–312,2014.



## Résumé

*Ce travail vise à résoudre une équation elliptique du second ordre posé en domaine non borné (domaine extérieurs) par la méthode des éléments finis inversés. Cette méthode repose sur l'utilisation des espaces de Sobolev à poids comme cadre fonctionnel, ainsi que des éléments finis inversés.*

**Mots clés :** *éléments finis inversés, problème elliptique du second ordre, domaines illimités, espaces de Sobolev à poids.*

## Abstract

*This work aims to solve second order elliptic equation in unbounded outer domain by the inverted finite elements method. This method is based on the use of Weighted Sobolev spaces as a functional framework, as well as inverted finite elements.*

**Keywords :** *inverted finite element, second-order elliptic problem, bounded domains, Weighted Sobolev spaces.*

## ملخص

يهدف هذا العمل الى حل معادلة اهليلجية من الدرجة الثانية في مجال غير محدود (المجالات الخارجية) بواسطة طريقة العناصر المنتهية المعكوسة. تعتمد هذه الطريقة على استخدام فضاءات سوبولوف الموزونة كإطار وظيفي بالإضافة الى العناصر المحدودة المعكوسة. الكلمات المفتاحية : العناصر المحدودة المعكوسة، مشكلة الاهليلجية من الدرجة الثانية، المجالات الغير محدودة، فضاءات سوبولوف الموزونة.