UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :

N° de série :

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT 3$^{\text{ème}}$ Cycle

Année : 2022/2023

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Étude d'une classe de problèmes à frontière libre

Spécialité :

Modélisation, Controles et Optimisation

Par : Messaouda Ben Attia

Devant le jury :

PRÉSIDENT :	Mabrouk Meflah	Prof.	UKM Ouargla, Algérie
DIRECTEUR DE THÈSE :	Elmehdi Zaouche	M.C.A	UHL El Oued, Algérie
CO-DIRECTEUR :	Salim Badidja	M.C.A	UKM Ouargla, Algérie
EXAMINATEURS :	Brahim Tellab	M.C.A	UKM Ouargla, Algérie
	Kouidri Mohammed	M.C.A	UKM Ouargla, Algérie
	Abderachid Saadi	M.C.A	UMB M'sila, Algérie

Remerciements

Louanges à Dieu qui m'a permis de mener à bien cette recherche en me donnant force, endurance et capacité.
Ma profonde gratitude va au Dr. Elmehdi Zaouche, mon superviser , pour son leadership et son aide continue. Il mérite également des éloges pour sa tolérance et sa sollicitude.
De plus, je voudrais exprimer ma gratitude au Dr. Badidja Salim, co-encadreur, pour toutes ses suggestions faites lorsque j'écrivais cette thése.
Je remercie également tous les professeurs de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Kasdi Merbah à Ouargla. J'exprime mes remerciements et ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé à accomplir ce modeste travail. Et à tous ceux qui n'ont pas eu la chance de citer leur nom.
Je n'oublierai pas de remercier par avance les professeurs, rapporteurs, examinateurs et M. Président.

Merci

Dédicace

À celui qui m'a encouragé à persévérer tout au long de ma vie, à l'homme le plus important de ma vie (mon cher pére)
À qui je m'élève au-dessus, et sur lequelle je repose, au coeur généreux
(ma chère mère)
À ceux qui ont tout fait pour m'aider et ont été le meilleur soutien
(mes frères et soeurs)
À ma famille, amis et collègues
À tous ceux qui ont contribué une lettre dans ma vie universitaire
À tous je dédie ce travail.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود و وحدانية الحل لفئة من مسائل الحافة الحرة الناتجة عن المعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر بشكل طبيعي في عدة ظواهر من العلوم التطبيقية مثل فيزياء البلازما، الأوساط المسامية والاحتراق.
النتيجة الأولى هي إثبات وحدانية الحل لمسألة السد غير خطية في وسط مسامي غير متجانس من $\mathbb{R}^n$ $(n \in \{2,3\})$ ، ذات قاع أفقي غير نفوذ باستخدام طريقة مضاعفة المتغيرات ودوال اختبارية ملائمة. النتيجة الثانية تتعلق بوجود حل لمسألة السد الغير خطية في مجموعة غير محدودة من $\mathbb{R}^{n+1}$ بتقنية تقريب.
الكلمات المفتاحية: مسألة الحافة الحرة، مسألة السد، وجود، وحدانية، دالة إختبارية، طريقة مضاعفة المتغيرات، تقنية تقريب.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions d'une classe de problèmes à frontière libre engendrés par des équations aux dérivées partielles qui apparaissent naturellement dans de nombreux phénomènes scientifiques appliqués tels que la physique des plasmas, milieux poreux et combustion.
Le premier résultat est de prouver l'unicité de la solution d'un problème d'évolution non linéaire de la digue dans un milieu poreux hétérogène de $\mathbb{R}^n$, $(n \in \{2,3\})$, avec un fond horizontal imperméable en utilisant la méthode de double variables et des fonctions tests convenables. Le second résultat concerne l'existence d'une solution du problème d'évolution non linéaire de la digue dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ par une technique d'approximation.
Mots-clés : Problème à frontière libre, problème de la digue, existence, unicité, fonction test, méthode de double variables, méthode d'approximation.

Abstract

The objective of this thesis is to study the existence and uniqueness of the solutions of a class of free boundary problems generated by partial differential equations. These problems arise in various phenomena applied sciences, such that the physics of plasmas, porous media and combustion.
The first result is to prove the uniqueness of the solution of a nonlinear evolution dam problem in an arbitrary heterogeneous porous medium of $\mathbb{R}^n$, $(n \in \{2,3\})$, with an impermeable horizontal bottom using the method of doubling variables and convenient test functions. The second result is concerned with the existence of a solution of the nonlinear evolution dam problem in an unbounded domain of $\mathbb{R}^{n+1}$ by an approximation technique.
Keywords: Free boundary problem, dam problem, existence, uniqueness, test function, method of doubling variables, approximation technique.

Table des matières

NOTATIONS

$\mathbb{R}^n$: l'ensemble des vecteurs réels de dimension n.
$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.
$d(.,.)$: la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.
$\langle f, g \rangle$: le produit scalaire de f et g.
$\bar{Q}$: la fermeture d'un ensemble Q.
$sup\ f(x)$: la borne supérieure de la fonction f.
$inf\ f(x)$: la borne inférieure de la fonction f.
$\rightharpoonup$: convergence faible.
$\rightarrow$: convergence forte.
$\hookrightarrow$: l'injection.
$|Q|$: la mesure de Lebesgue de l'ensemble Q.
A^c : l'ensemble complémentaire de A.
$B(0, R)$: la boule du center 0 et du rayon R.
$H_\epsilon(s) = \min(1, \frac{s^+}{\epsilon})$, où $s \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in]0, +\infty[$.
$(u - x)^- = \min(u - x, 0)$.
$(u - x)^+ = \max(u - x, 0)$.
u_i : la dérivée partielle de u par rapport i d'une fonction u.
$\frac{\partial u}{\partial \nu}$: la dérivée normale extérieure.
∇u : le gradient de u définie par $\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^T$.
$\sum$: le symbole de la somme.
Ω : un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
$supp(\xi) = \overline{\{x \in \Omega : \xi \neq 0\}} \subset \Omega$, le support de la fonction ξ.
p.p. : presque partout.

Introduction

Un problème non stationnaire de la digue est une modélisation d'un phénomène qui décrit l'évolution d'un fluide dans un milieu poreux. L'étude de la pression du fluide dans un milieu poreux et de la zone saturée figure parmi les préoccupations du problème de la digue. Le graphe qui sépare les zones humide et sèche de la digue s'appelle la frontière libre. Les problèmes de la digue ont été étudiés par plusieurs chercheurs en utilisant des différentes méthodes de résolution. Le problème d'evolution non linéaire de la digue est modélisé par l'equation

$$(g - \alpha u)_t + div(B(x, \nabla u) - gB(x, e)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $T \in]0, \infty[$, $e = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, α est un nombre positif qui réfère à l'état du fluide, incompressible ($\alpha = 0$) ou compressible ($\alpha > 0$), $B : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory satisfait des conditions d'ellipticité, de bornitude et de monotonie, et (u, g) est la solution à trouver telle que u est la pression du fluide et g est la saturation du milieu poreux. Si $B(x, \nabla u) = \nabla u$, on dit que le milieu poreux est homogène et si $B(x, \nabla u) = a(x)\nabla u$, où $a(x)$ est une matrice carrée d'ordre n représentant la perméabilité de Ω, le milieu poreux est dit hétérogène. Le p-Laplacien $B(x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$, $p \in]1, \infty[$ et la perturbation mesurable du p-Laplacien $B(x, \nabla u) = |a(x)\nabla u|^{p-2}a(x)\nabla u$ peuvent être cités comme des exemples utiles du problème non linéaire de la digue.

Si on considère une forme étendue de la fonction $B(x, e)$ que l'on note $H(x)$, l'équation ci-dessus engendre le problème d'evolution non linéaire à frontière libre. L'équation du problème stationnaire non linéaire à frontière libre s'écrit comme suit :

$$div(B(x, \nabla u) - gH(x)) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Si $h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction, $H(x) = (0, h(x))$ et

$$B(x, \nabla u) = \begin{pmatrix} h^3(x) & 0 \\ 0 & h^3(x) \end{pmatrix} \cdot \nabla u,$$

on obtient l'éqution qui engendre le problème de lubrification, voir [13]. Le modèle qui correspond à $H(x) = (h(x), 0)$ et

$$B(x, \nabla u) = \begin{pmatrix} k(x) & 0 \\ 0 & k(x) \end{pmatrix} \cdot \nabla u,$$

nous donne le problème d'électrolyse de l'aluminium (voir [15]), où $k : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Dans le cas stationnaire, les premiers résultats remontent à C. Baiocchi ([9], [10]) qui a résolu le problème de la digue dans un domaine rectangulaire en introduisant une transformation dite de Baiocchi, ce qui l'a amené à considérer des problèmes d'inégalités variationnelles. Puis, il a établit des résultats d'existence et d'unicité, mais sa méthode n'a été pas adaptée à la situation gènèrale. De nombreux auteurs ([11], [12], [28], [46]) ont utilisé les mêmes techniques pour traiter des questions liées aux digues rectangulaires hétérogènes ou tridimensionnels.

Quelques années après, le problème stationnaire a été étudié dans le cas général par H.W. Alt ([2], [14], [4]), H. Brezis, D. Kinderlehrer et G. Stampacchia [21], J. Carrillo et M. Chipot [24]. L'existence, l'unicité et la régularité de la frontière libre ont été prouvées pour une certaine classe de fonctions perturbatrices.

A. Torelli ([47], [48]) a utilisé une transformation similaire à Baiocchi pour résoudre le problème d'évolution de la digue qui lui a permis de réduire le problème à un problème d'inégalités quasi-variationnelles. Il a obtenu ainsi des résultats d'existence, d'unicité et la régularité de la solution. Malheureusement, cette méthode n'est pas adaptée au cas général.

Dans un milieu poreux homogène, J. Gilardi [31] a démontré un théorème d'existence pour une formulation du problème d'évolution linéaire de la digue associé à un fluide incompressible. E. Dibenedetto et Friedman [30] ont prouvé un théorème d'existence par une autre méthode pour des fluides compressible et incompressible, et l'unicité de la solution dans une digue rectangulaire. L'unicité de la solution dans un domaine de $\mathbb{R}^n$ a été établie par J. Carrillo [23] en utilisant la méthode de double variables. L'utilisation d'une telle méthode a permis A. Lyaghfouri [38] d'obtenir l'unicité dans le cas non linéaire.

Dans un domaine hétérogène, M. Bousselsal, A. Lyaghfouri et E. Zaouche [17] ont prouvé l'existence d'une solution du problème d'évolution à frontière libre par la méthode de régularisation et le théorème du point fixe de Tychonoff [45]. Ainsi, des résultats de régularité ont été obtenus. En supposant que la digue est mouillée au fond et sèche en haut, A. Lyaghfouri et E. Zaouche [41] ont montré l'unicité dans un milieu poreux rectangulaire d'une idée de [30]. E. Zaouche a obtenu l'unicité dans un domaine rectangulaire pour des fluides incompressible [50] et compressible [51], respectivement, par la méthode de double variables et une tranformation de l'équation du problème à une forme ne contient pas du terme temporel en u. Par la technique de régularisation, nous renvoyons aux papiers M. Bousselsal et E. Zaouche [18] et A. Lyaghfouri [38] liés respectivement à des fluides compressible et incompressible pour l'existence d'une solution du problème d'evolution non linéaire de la digue en utilisant les théorèmes du point fixe de Schauder et de Tychonoff.

Dans le contexte d'un domaine non borné et d'un fluide incompressible, on réfère aux articles G. Gilardi et D. Kröner [32] et J. Carrillo et A. Lyaghfouri [26], respectivement pour l'existence d'une solution du problème d'évolution linéaire de la digue et l'existence d'une solution d'un problème non linéaire de filtration.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres dans lesquels nous allons étudier une classe de problèmes à frontière libre. Dans le premier chapitre, on va parcourir des outils de base qui seront ensuite utilisés. Dans le deuxième chapitre, nous expliquerons les étapes de position du problème d'évolution non linéaire de la digue et donnons quelques propriétés des solution d'un problème d'évolution non linéaire de la digue dans un milieu poreux hétérogène arbitraire de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, à fond horizontal imperméable. En utlisant la méthode de double variables et des fonctions tests convenables, on prouve dans le troisième chapitre l'unicité de la solution du problème considéré au deuxième chapitre. Le quatrième chapitre est consacré à l'existence d'une solution du problème d'évolution non linéaire de la digue dans un domaine non borné Q_∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$ lié à des fluides compressible et incompressible. On approxime Q_∞ par une suite de domaines bornés $(Q_r)_r$ et considère le problème régularisé $(P_{r\epsilon})$ d'un paramètre ϵ sur le domaine borné Q_r qui a une solution unique [18]. Alors, on passe à la limite dans $(P_{r\epsilon})$ lorsque $\epsilon \to 0$ et puis $r \to \infty$ à obtenir une solution au problème original.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous présenterons quelques outils fondamentaux dans le premier chapitre que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Le contenu de ce chapitre se trouve dans les références [1], [21] et [45].

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1.1 *(Espace métrique) Le couple (E, d) est dit un espace métrique si E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant pour tout x, y et z de E :*
(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Par example,

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\\&(x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)) \longmapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\end{aligned}$$

définit une distence sur $\mathbb{R}^n$ s'appelle la distence euclidienne.

Définition 1.1.2 *Soit (E, d) un espace métrique. La distance entre deux ensembles F_1 et*

F_2 de E est

$$d(F_1, F_2) = \inf\{d(x_1, x_2)/x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\}.$$

Définition 1.1.3 *(Espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une fonction $\|.\|$: $E \longrightarrow [0, +\infty[$ vérifiant :*
(1) $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow x = 0.$
(2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
(3) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
On dit que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. Par example,

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ s'appelle la norme euclidienne.

Définition 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel. Une semi-norme sur E est une application $P : E \longrightarrow [0, +\infty[$ vérifiant*
(1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda x) = |\lambda| P(x).$
(2) $\forall (x, y) \in E^2, \quad P(x + y) \leq P(x) + P(y).$
En particulier $P(0) = 0$ mais il manque la propriété $P(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pour que P soit une norme.

Définition 1.1.5 *Soient $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $t \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers t et on note $\lim\limits_{j\to+\infty} t_j = t$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N, \quad |t_j - t| < \epsilon.$$

Définition 1.1.6 *(Convergence forte). Une suite $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est dite converge fortement vers t dans un espace vectoriel normé E, si*

$$\lim_{j\to\infty} \|t_j - t\| = 0,$$

et on note $t_j \to t$.

Définition 1.1.7 *Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(t_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ est dite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall j, i > N \Longrightarrow \|t_j - t_i\| < \epsilon.$$

Définition 1.1.8 *Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est un espace de Banach si tout suite de Cauchy de* $(E, \|.\|)$ *est convergente.*

Définition 1.1.9 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. On définit la boule ouverte de centre* x *et de rayon* $r > 0$ *par*

$$B(x, r) := \{y \in E : \ \|x - y\| < r\}.$$

Définition 1.1.10 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé et* U *une partie non-vide de* E*. On dit* U *est ouvert si,*

$$\forall x \in U, \ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U.$$

Définition 1.1.11 *Soient* E *un espace vectoriel normé et* A *un sous-ensemble de* E*. On dit que* A *est fermé si son complémentaire est un ouvert.*

Théorème 1.1.1 *Soient* E *un espace vectoriel normé et* A *un sous-ensemble de* E*. On dit que* A *est fermé si et seulement si pour tout suite* $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *qui converge vers un élément* t *de* E*, alors* t *appartient à* A*.*

Définition 1.1.12 *Soit* E *un espace vectoriel normé. Un recouvrement ouvert de* E *est une famille* $(V_i)_{i\in I}$ *d'ouverts de réunion égale à* X*.*
Un recouvrement ouvert d'une partie A *de* E *est une famille* $(V_i)_{i\in I}$ *d'ouverts dont la réunion contient* A*.*

Définition 1.1.13 *Soit* E *un espace vectoriel normé et* A *une partie de* E*. On dit que* A *est une partie compacte de* E *si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.1.14 *Soit* E *un espace vectoriel normé et* A *une partie de* E*. On dit que* A *est une partie compacte de* E *si de toute suite* $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *on peut extraire une suite convergeant dans* A*.*

Définition 1.1.15 *L'adhérence d'une partie* A *d'un espace vectoriel normé* E *est le plus petit ensemble fermé de* E *qui contient* A*.*

Définition 1.1.16 *Une partie* A *d'un espace vectoriel normé* E *est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de* E*. Ceci revient à dire que toute suite d'éléments de* A *admet une sous-suite qui converge dans* E*.*

Définition 1.1.17 *Soit E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E est dit convexe si :*

$$\forall (x,y) \in A^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in A.$$

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $T : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 1.1.18 *(Application continue) On dit que T est continue en x_0 de E si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_{x_0} > 0,\ \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \delta_{x_0} \Longrightarrow \|T(x) - T(x_0)\|_F < \epsilon.$$

On dit que T est continue sur une partie F non vide si elle est continue en tout point x de E.

Proposition 1.1.1 *T est continue en x_0 si et seulement si T transforme toute suite convergente vers x_0 en suite convergente vers $T(x)$, c'est-à-dire :*

$$(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E, \lim_{j\to+\infty} x_j = x_0 \Rightarrow \lim_{j\to+\infty} T(x_j) = T(x_0).$$

Définition 1.1.19 *On dit que T est Lipschitzienne si :*

$$\exists k > 0,\ \forall (x,y) \in E^2, \quad \|T(x) - T(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Définition 1.1.20 *Soit E un espace de Banach. On appelle dual de E et note E' l'espace de toutes les formes linéaire continue f sur E.*

Proposition 1.1.2 *Une application $f \in E'$ est continue si et seulement si*

$$\exists C > 0,\ \forall x \in E, \quad |f(x)| \leq C\|x\|_E,$$

et on écrit $f(x) = < f, x >$ $(x \in E)$. De plus, E' est un espace vectoriel normé par :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

1.1.2 Topologie faible

Définition 1.1.21 *Soit E un espace de Banach. La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E, c'est-à-dire, avec le minimum d'ensembles ouverts, rendant continues toutes les applications $f \in E'$.*

Définition 1.1.22 *Soit $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $t \in E$ pour la topologie faible si*

$$\forall f \in E', \quad < f, t_j > \longrightarrow < f, t >,$$

et on note $t_j \rightharpoonup t$.

Proposition 1.1.3 *Soit $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Alors*
(1) $t_j \rightharpoonup t$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ ssi $< f, t_j > \longrightarrow < f, t > \ \forall f \in E'$.
(2) Si $t_j \longrightarrow t$ fortement, alors $t_j \rightharpoonup t$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.
(3) Si $t_j \rightharpoonup t$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $(\|t_j\|)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|t\| \leq \lim\limits_{j\to\infty} \inf \|t_j\|$.
(4) Si $t_j \rightharpoonup t$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_j \longrightarrow f$ fortement dans E', alors $\langle f_j, t_j \rangle \longrightarrow \langle f, t \rangle$.

Théorème 1.1.2 *Soient E un espace de Banach et C un sous-ensemble convexe de E. Alors C est fermé dans la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si elle est fermé dans la topologie forte.*

Définition 1.1.23 *Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif si et seulment si toute suite bornée $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous-suite extraite faiblement convergente.*

1.1.3 Espace Hilbertien réel

Définition 1.1.24 *(Produit scalaire) : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Définition 1.1.25 *Espace Hilbertien H est un espace de Banach dont la norme $\|.\|$ découle d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ par la formule*

$$\forall x \in H, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Théorème 1.1.3 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit H un espace Hilbertien réel. Alors*

$$\forall (x, y) \in H^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

1.1.4 Espaces de fonctions régulières

Définition 1.1.26 *L'espace $C^k(\Omega)$ est un espace des fonctions k fois continues différentiables $k \geq 0$.*

Définition 1.1.27 $C^\infty(\Omega)$ *est l'espace défini comme suit*

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

Définition 1.1.28 $C_c^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* $C^\infty(\Omega)$ *à support compact dans* Ω. *De plus, on note*

$$C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.1.29 *On définit* $C_c(\Omega)$ *l'espace de toutes les fonctions continues sur* Ω *avec support compact, c'est-à-dire*

$$C_c(\Omega) = \big\{f \in C(\Omega);\ supp(f) \subset \Omega\big\}.$$

De plus, on note

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

et

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

Définition 1.1.30 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *est l'espace des fonctions höldériennes d'exposant* α ($\alpha \in]0,1]$) *défini par*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \Big\{f \in C(\Omega) : \exists K \in [0,\infty[,\ \forall (x,y) \in \Omega^2,\quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha\Big\}.$$

Proposition 1.1.4 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme suivante*

$$\|f\| = \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + \sup_{(x,y)\in\Omega^2,\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Définition 1.1.31 $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *est l'espace des fonctions* α*-höldériennes sur* $\bar{\Omega}$.

1.1.5 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1.32 *Soit* $p \in \mathbb{R}$. *Pour* $1 \leq p < \infty$ *on définit l'espace* $L^p(\Omega)$ *par*

$$L^p(\Omega) = \Big\{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p dx < \infty\Big\},$$

et pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{f : \Omega \to \mathbb{R}\Big|^{f \text{ est mesurable et il existe une constante } C}_{tel\ que\ |f(x)|\leq C\ p.p.\ x\in\Omega}\Big\}.$$

Proposition 1.1.5 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{1/p},$$

pour $1 \leq p < \infty$ et pour $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\Big\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\Big\}.$$

Définition 1.1.33 *L'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur Ω noté par*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \Big\{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } f \in L^1(K) \quad \forall\, K \subset \Omega\Big\}.$$

De même

$$L^p_{loc}(\Omega) = \Big\{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } f \in L^p(K) \quad \forall\, K \subset \Omega\Big\}.$$

Théorème 1.1.4 *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.*

Théorème 1.1.5 *(Inégalité de Hölder) Supposons que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

où q est l'exposant conjugué de p qui vérifie

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

si $p = \infty$ alors $q = 1$, et si $p = 1$ il vient $q = \infty$.

Théorème 1.1.6 *Soit $1 < p < \infty$. L'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$.*

Théorème 1.1.7 *(Fubini) Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $F \in L^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Alors, pour p.p. $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y) dy \in L^1_x(\Omega_1),$$

et pour p.p. $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x,y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y) dx.$$

Théorème 1.1.8 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue). Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge p.p. sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tell que*

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad |f_j(x)| \leq g(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_1 = 0.$$

Théorème 1.1.9 *(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi). Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ qui vérifie :*
(1) $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_j \leq f_{j+1} \leq ...$ p.p. dans Ω,
(2) $\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_j \; dx < \infty$.
Donc $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge p.p. dans Ω vers une limite finie, que l'on note par f. La fonction f appartient à $L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_1 = 0.$$

Soit E un espace vectoriel normé et $0 < T < \infty$.

Définition 1.1.34 *Soit $1 \leq p < \infty$. On définit $L^p(0,T;E)$ l'espace des fonctions u : $]0,T[\longrightarrow E$ mesurables telle que $t \longmapsto \|u(t)\|_E$ appartient à $L^p(0,T)$.*

Proposition 1.1.6 *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(0,T;E)$ est un espace vectoriel normé, muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(0,T;E)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_E^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.35 *$C^0([0,T];E)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans E.*

1.1.6 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1.36 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini comme suit*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u\varphi' \; dx = -\int_\Omega g\varphi \; dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \Big\}.$$

Nous fixons

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Théorème 1.1.10 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p} = \Big(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{i=N} \|\partial_i u\|_p^p\Big)^{1/p}.$$

Définition 1.1.37 *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Définition 1.1.38 *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $W^{-1,q}(\Omega)$ est l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Remarque 1.1.1 *La semi-norme*

$$\big|v\big|_{1,p} = \Big(\sum_{i=1}^{i=N} \|\partial_i v\|_p^p\Big)^{1/p}$$

sur $W^{1,p}(\Omega)$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.1.7 *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif.*

Théorème 1.1.11 *(Inégalité de Poincaré) Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.1.12 *(Opérateur de trace) Soient $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert Lipschitzien borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

L'application $u \longmapsto u_{|\partial\Omega}$ est une application linéaire prolonge continûment en

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega).$$

Cette application, appelée l'opérateur de trace. Son noyau coïncide avec $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.13 *(Formule de Green) Soient Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^n$, sa frontière $\partial\Omega$ et η le vecteur normale unitaire vers l'extérieur. On a*

$$\forall f, g \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} fg\eta \, d\sigma.$$

Définition 1.1.39 *Soient* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $W^{1,p}(\Omega)$, $f \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $1 < p < \infty$. *La convergence faible* $f_j \rightharpoonup f$ *dans l'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est équivalente à*

$$\forall g \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1, ..., n : \qquad \begin{aligned} &\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega f_j g\ dx = \int_\Omega fg\ dx, \\ &\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega \frac{\partial f_j}{\partial x_i} g\ dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\ dx. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.14 *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue telle que* $f' \in L^\infty(\Omega)$, *alors,* $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$. *De plus,* $\nabla(f \circ u) = f' \circ u \nabla u$.

1.2 Point fixe, Injection continue et compacte

Définition 1.2.1 *Pour une application* T *d'un ensemble* X *dans lui-même, un élément* x *de* X *est un point fixe de* T *si*

$$T(x) = x.$$

Théorème 1.2.1 *(Théorème du point fixe de Schauder) Soient* E *un espace vectoriel normé,* K *un convexe fermé non vide de* E, $T : K \longrightarrow K$ *continue et* $T(K)$ *est relativement compact (* $\overline{T(K)}$ *est compact). Alors* T *admet un point fixe.*

Définition 1.2.2 *Un opérateur compact est une application continue entre deux espaces vectoriels normés* X *et* Y *envoyant les parties bornées de* X *sur les parties relativement compactes de* Y.

Définition 1.2.3 *Soient* X *et* Y *deux espaces vectoriels normés. Si* X *est un sous-espace de* Y *et toute suite convergente dans* X *est convergente dans* Y, *on dit* X *est injecte continûment dans* Y. *Autrement, l'identité* $I : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto x$ *est continue telle que*

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \quad \forall u \in X,$$

où C *est une constante positive.*

Définition 1.2.4 *Soient* X *et* Y *deux espaces vectoriels normés. Si* X *s'injecte continûment dans* Y *et l'injection canonique de* X *dans* Y *est compacte, on dit que l'injection de* X *dans* Y *est compacte et on note*

$$X \hookrightarrow Y.$$

Autrement dit, I transforme toute suite bornée dans X en un ensemble relativement compact de Y.

Théorème 1.2.2 *Soient Ω un ouvert borné, régulier, $p \in [1, \infty[$, $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ et $\beta = 1 - \dfrac{n}{p}$. Alors les injections*
(1) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < p^*$, si $1 \leq p < n$,
(2) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, si $p = n$,
(3) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $0 \leq \alpha < \beta$, si $p > n$,
sont des injections compactes.

1.3 Convolution, Lemme d'Urysohn et Partition de l'unité

La convolution est une technique simple avec de nombreuses utilisations. Son application principale sera les fonctions d'un outil de régularisation. Pour la convolution, on utilise la mesure de Lebesgue et on opère en $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.1 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. La fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable pour $x \in \mathbb{R}^n$ et la fonction

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$, elle est appelée la convoluée de f et g et on a $f * g = g * f$. De plus,

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Définition 1.3.1 *Soit $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $[0, \infty[$. On dit $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante sur $\mathbb{R}^n$ si*
(1) $\forall j \geq 1, \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j = 1.$
(2) $\rho_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(3) $supp(\rho_j) \subset B(0, \epsilon_j)$ avec $\epsilon_j \longrightarrow 0$ si $j \longrightarrow \infty$.

Théorème 1.3.2 *Supposons $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante sur $\mathbb{R}^n$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$\rho_j * f \longrightarrow f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty.$$

Lemme 1.3.1 *(Lemme d'Urysohn) Soient K un compact de Ω et F un fermé de Ω tels que $K \cap F = \emptyset$. Alors, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$, qui vaut 0 sur un voisinage de F et 1 sur un voisinage de K.*

Théorème 1.3.3 *(Partition de l'unité) Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq N}$ des ouverts de Ω tels que*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j.$$

Alors, il existe des fonctions $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall j \in \{1, ..., N\} : \quad 0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad supp(\varphi_j) \subset \Omega_j$$

et

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j = 1 \ \ \textit{sur un voisinage de } K.$$

Chapitre 2

Position du problème d'évolution non-linéaire de la digue et quelques propriétés des solutions

Il y a deux sections principales dans ce chapitre. Nous présentons la formulation faible de problèmes d'évolution non-linéaire de la digue dans la première section. Dans la deuxième section, nous avons introduit quelques propriétés de la solution d'un type de ces problèmes.

2.1 Position du problème d'évolution non-linéaire de la digue

Soit Ω un domaine borné de frontière localement Lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ représentant un milieu poreux, qui est défini par sa frontière Γ, telle que Γ est divisée en deux parties. La partie imperméable Γ_1 et Γ_2 est la partie en contact avec l'air ou recouverte de fluide. Nous supposons aussi que Γ_2 est un sous ensemble non vide relativement ouvert de Γ. On s'intéresse au mouvement des fluides compressibles et incompressibles dans le temps $[0, T]$. Le problème est maintenant de chercher la pression de fluide u et la saturation g de la partie humide W de $Q := \Omega\times]0, T[$.
Soit φ une fonction Lipschitzienne positive définie sur $\bar{Q}$ de classe $C^{0,1}$ en x et de C^1 en t qui représente la pression assignée à Γ_2. Nous donnons les définitions suivantes :

$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$, $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$, $\Sigma_3 = \Sigma_2 \cap \{\varphi > 0\}$ *et* $\Sigma_4 = \Sigma_2 \cap \{\varphi = 0\}$. *La FIGURE 2.1 est un exemple de la digue.*

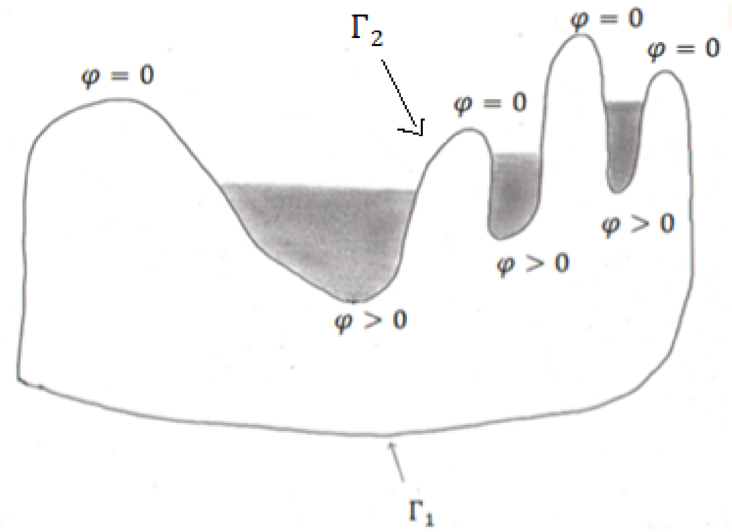

FIGURE 2.1 –

Ensuite, la loi de Darcy donne une expression liant la pression p du fluide dans W et sa vitesse v telles que : $v = -B(x, \nabla(p + x_n))$, *où* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. B *est une fonction définie sur* $\Omega \times \mathbb{R}^n$. *Dans ce qui suit nous mettons* $p + x_n = u$, *alors*

$$v = -B(x, \nabla u). \tag{2.1}$$

Supposons que la partie humide $W = \{u > x_n\}$ *soit donnée par*

$$W = \{(x_1, ..., x_{n-1}, x_n, t) = (x', x_n, t) \in \mathrm{Q}/x_n < \Phi(x', t)\},$$

où Φ *est une fonction régulière sur* $\mathbb{R}^n$. *Nous ajoutons (2.1) à l'équation de conservation de la masse, nous obtenons*

$$\alpha u_t + div\big(B(x, \nabla u)\big) = 0 \quad dans \quad W \tag{2.2}$$

où α *est une valeur positive, qui indique l'état du fluide s'il est compressible* $(\alpha > 0)$ *ou incompressible* $(\alpha = 0)$. *Le fluide ne peut pas passer par* Σ_1,

$$v \cdot \nu = 0 \quad sur \ \Sigma_1,$$

où $\nu = (\nu_x, \nu_t)$ *indique la normale extérieure de l'unité à* Σ_1, *donc par (2.1) :*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} B(x, \nabla u) = 0 \quad sur \ \Sigma_1.$$

Ensuite, on peut écrire le flux de fluide à travers Σ_4 *comme*

$$v \cdot \nu \geq 0 \quad sur\ \Sigma_4, \tag{2.3}$$

alors nous aurons en appliquant (2.1) :

$$B(x, \nabla u) \cdot \nu \leq 0 \quad sur\ \Sigma_4. \tag{2.4}$$

D'autre part

$$u = \phi \quad sur\ \Sigma_2, \tag{2.5}$$

parce que la pression sur Σ_2 *est représentée par* ϕ. *Supposons que la surface* $\Sigma = \{x_n = \Phi(x', t)\} = \partial(\{u > x_n\}) \cap Q$ *est représentée la frontière libre. Prolongeons* u *en dehors de* $Q \backslash W$ *par* x_n *et dénotons toujours par* u *qui est une fonction supposée être régulière. L'unité extérieure normale est ainsi déterminée par :*

$$\nu = (\nu_x, \nu_t) = -\frac{(\nabla_x u, u_t)}{\sqrt{|\nabla_x u|^2 + u_t^2}}.$$

Nous concluons de (2.1) *que*

$$\nu_t = B(x, \nabla u) \cdot \nu_x \quad sur\ \Sigma \tag{2.6}$$

puisque $\nu \cdot (v, 1) = 0$ *sur* Σ. *Ainsi, pour une fonction test* $\xi \in \mathcal{D}(Q)$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} \langle div\big(B(x, \nabla u)\big), \xi \rangle &= -\int_Q \nabla\xi \cdot B(x, \nabla u)\ dxdt \qquad (2.7) \\ &= -\int_{\{u > x_n\}} \nabla\xi \cdot B(x, \nabla u)\ dxdt - \int_{\{u = x_n\}} \nabla\xi \cdot B(x, e)\ dxdt \end{aligned}$$

où $e = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. *De plus, en utilisant (2.2), on obtient*

$$\begin{aligned} \int_{\{u > x_n\}} \nabla\xi \cdot B(x, \nabla u)\ dxdt &= \int_\Sigma \xi B(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \alpha \int_{\{u > x_n\}} \xi_t u\ dxdt \\ &= \int_\Sigma \xi \nu_t\ d\sigma - \alpha \int_{\{u > x_n\}} \xi_t u\ dxdt \qquad (2.8) \\ &= \int_{\{u > x_n\}} \xi_t\ dxdt - \alpha \int_{\{u > x_n\}} \xi_t u\ dxdt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.7)-(2.8) et la fonction caractéristique de l'ensemble $\{u > x_n\}$ *dénotée par* $g_{\{u > x_n\}}$, *on peut dériver*

$$\langle div\big(B(x, \nabla u)\big), \xi \rangle = -\int_Q g_{\{u > x_n\}} \nabla\xi \cdot B(x, e)\ dxdt + \int_Q \xi_t \big(\alpha u - g_{\{u > x_n\}}\big)\ dxdt.$$

Par conséquence :

$$(\alpha u - g_{\{u>x_n\}})_t + div(B(x,\nabla u) - g_{\{u>x_n\}}B(x,e)) = 0 \quad dans \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Maintenant, à partir de la loi non linéaire de Darcy, en prenant des conditions aux limites de Dirichlet sur le bord et la condition initiale de $\alpha u_0 - g_0$*, le flux est régi par les équations suivantes*

$$\begin{cases} u \geq x_n,\ 0 \leq g \leq 1,\ g(u-x_n) = 0 & p.p.\ dans\ Q \\ \big(\alpha u - g\big)_t + div\big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big) = 0 & dans\ Q \\ u = \phi \quad sur\ \Sigma_2 & \\ \big(\alpha u - g\big)\big(\cdot,0\big) = \alpha u_0 - g_0 & dans\ \Omega \\ \big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\cdot\nu = 0 & sur\ \Sigma_1 \\ \big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\cdot\nu \leq 0 & sur\ \ \Sigma_4. \end{cases} \tag{2.9}$$

Pour trouver la formulation faible correspondante à (2.9), on multiplie

$$\big(\alpha u - g\big)_t + div\big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big) = 0$$

par une fonction régulière ξ *et intègre par parties, on obtient*

$$\int_Q \nabla\xi\cdot\big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\ dxdt - \int_{\partial Q}\xi\big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\nu\ d\sigma$$
$$+\int_Q \xi_t(\alpha u - g)\ dxdt + \int_\Omega \xi(x,T)(\alpha u - g)\big(x,T\big)\ dx - \int_\Omega \xi(x,0)(\alpha u - g)(x)\ \ dx = 0.$$

On utilise les conditions

$$\big(\alpha u - g\big)\big(\cdot,0\big) = \alpha u_0 - g_0\ dans\ \Omega,$$

$$\big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\cdot\nu = 0\ sur\ \Sigma_1,$$

$$\big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\cdot\nu \leq 0\ sur\ \Sigma_4,$$

et nous considérons

$$\xi = 0\ sur\ \Sigma_3,\ \xi \geq 0\ sur\ \Sigma_4\ et\ \xi(x,T) = 0\ p.p.\ x\in\Omega,$$

nous trouvons la formulation faible suivante :

$$\begin{cases} Trouver\ (u,g) \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty(Q)\ tel\ que : \\ u \geq x_n, 0 \leq g \leq 1, g(u-x_n) = 0 \quad p.p.\ dans\ Q \\ u = \phi \quad sur\ \Sigma_2 \\ \displaystyle\int_Q \xi_t(g-\alpha u) + \nabla\xi \cdot \big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\big)\ dxdt \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega \xi(x,0)(\alpha u_0 - g_0)(x)\ dx \leq 0, \\ \forall\ \xi\ \in\ W^{1,p}(Q),\ \xi = 0 \quad sur\ \Sigma_3, \quad \xi \geq 0\ \ sur\ \Sigma_4, \\ \qquad \xi(x,T)\ =\ 0\ pour\ p.p.\ x\ \in\ \Omega, \end{cases}$$

où $B : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} la\ \ fonction\ \ x \longmapsto B(x,\xi)\ \ est\ mesurable\ \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \\ la\ fonction\ \ \xi \longmapsto B(x,\xi)\ \ est\ continue\ pour\ p.p\ x \in \Omega \end{cases}$$

pour certaines constantes $\beta \geq \alpha > 0$ et $p > 1$

$$\forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ p.p.\ x\ \in\ \Omega, \quad \xi B(x,\xi) \geq \alpha|\xi|^p,$$

$$\forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \ p.p.\ x\ \in \Omega, \quad |B(x,\xi)| \leq \beta|\xi|^{p-1},$$

$$\forall\xi,\zeta \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq \zeta, \quad (\xi-\zeta)(B(x,\xi) - B(x,\zeta)) > 0,$$

$$\exists\ \gamma > 1, \quad div(B(x,e))\ \in\ L^\gamma(\Omega).$$

En outre, soient g_0 et u_0 deux fonctions mesurables dans Ω telles que :

$$0 \leq g_0 \leq 1 \quad p.p.\ dans\ \Omega,$$

$$x_n \leq u_0 \leq H_0 \quad p.p.\ dans\ \Omega,$$

où H_0 est une constante.

2.2 Quelques propriétés des solutions d'un problème d'évolution non-linéaire de la digue

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés des solution d'un problème non linéaire de la digue dans le cas d'un fluide incompressible et Ω est un milieu hétérogène borné de $\mathbb{R}^2$ avec un fond horizontal. Soient A, B et D des nombres réels tels que $B > A$. La partie imperméable est $\Gamma_1 = [A,B] \times \{D\}$ et Γ_2 est la partie perméable. La FIGURE 2.2 représente un exemple de la digue en question.

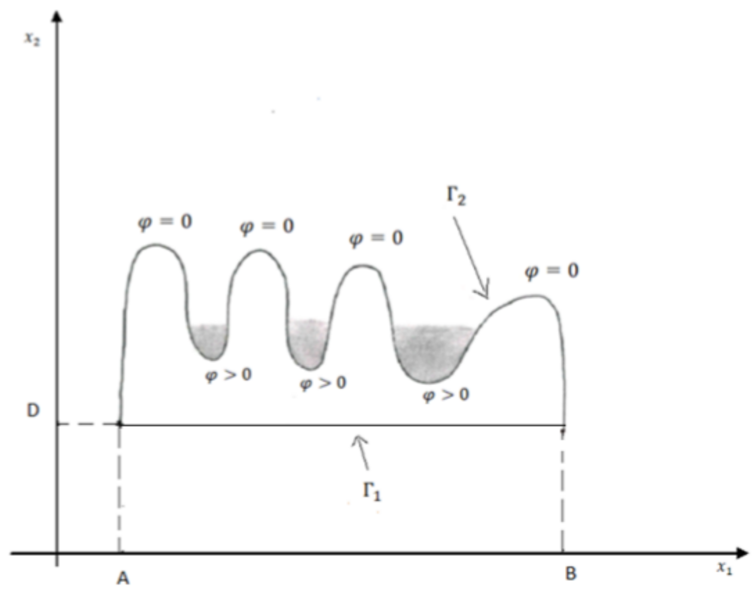

FIGURE 2.2 –

La matrice de perméabilité du mileu poreux est donnée par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k(x_1) \end{pmatrix},$$

où $k :]A, B[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de la variable x_1. Ensuite, la vitesse du fluide est

$$v = (k(x_1))^{p-1} |u_{x_2}|^{p-2} u_{x_2}.$$

Si on pose $h(x_1) = (k(x_1))^{p-1}$ et $b(u_{x_2}) = |u_{x_2}|^{p-2} u_{x_2}$, nous pouvons réécrire v comme suit :

$$v = h(x_1) b(u_{x_2}).$$

Par conséquent, si nous prenons les conditions aux limites et le donné initial de g_0, nous obtenons la formulation faible suivante :

$$(P) \begin{cases} \textit{Trouver } (u, g) \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty(Q) \textit{ tel que :} \\ i)\ u \geq x_2, \quad 0 \leq g \leq 1, \quad g(u - x_2) = 0 \quad \textit{p.p dans } Q \\ ii)\ u = \phi \quad \textit{sur } \Sigma_2 \\ iii) \displaystyle\int_Q \xi_t g + \xi_{x_2} h(x_1) \big(b(u_{x_2}) - g b(1)\big)\ dxdt + \int_\Omega \xi(x, 0) g_0(x)\ dx \leq 0, \\ \forall \xi \in W^{1,p}(Q),\ \xi = 0 \textit{ sur } \Sigma_3,\ \xi \geq 0 \textit{ sur } \Sigma_4,\ \xi(x, T) = 0 \textit{ p.p. } x \in \Omega, \end{cases}$$

où g_0 est une fonction mesurable sur Ω qui vérifie

$$0 \leq g_0 \leq 1 \quad p.p.\ dans\ \Omega \tag{2.10}$$

et $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$la\ fonction\ \ r \longmapsto b(r)\ \ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad rb(r) \geq \lambda |r|^p, \tag{2.12}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |b(r)| \leq \Lambda |r|^{p-1}, \tag{2.13}$$

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2, \quad (r_1 - r_2)(b(r_1) - b(r_2)) > 0, \tag{2.14}$$

où $\Lambda \geq \lambda > 0$ et $p > 1$ sont des constantes. D'autre part, $h :]A, B[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne de la variable x_1 telle que pour deux constantes $h_2 \geq h_1 > 0$,

$$\forall x_1 \in]A, B[, \quad h_1 \leq h(x_1) \leq h_2. \tag{2.15}$$

Pour l'existence d'une solutions du problème (P), nous renvoyons à la référence [38]. Dans la suite, nous présentons quelques propriétes des solutions de tel problème.

Lemme 2.2.1 *[38] Soient v une fonction de $W^{1,p}(Q)$ et F une fonction de $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ satisfaisant*
1)$F(u - x_2, v) \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$,
2) $F(\phi - x_2, v) \in W^{1,p}(Q)$,
3) $F(z_1, z_2) \geq 0$ p.p. $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,
4) $\dfrac{\partial F}{\partial z_1}(z_1, z_2) \geq 0$ p.p $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $\dfrac{\partial F}{\partial z_1}(z_1, z_2) \leq 0$ p.p. $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.
Alors, si (u, g) est une solution de (P) et ξ est une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega} \times]0, T[)$, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_Q g(\xi F(0, v))_t + \big(\xi F(u - x_2, v)\big)_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - gb(1)\big)\ dxdt \\ &= \int_Q g\big(\xi F\big(\phi - x_2, v\big)\big)_t + \big(\xi F(\phi - x_2, v)\big)_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - gb(1)\big)\ dxdt.\end{aligned}$$

En particulier, si $\xi F(\phi - x_2, v) = 0$ sur Σ_2,

$$\int_Q g\big(\xi F(0, v)\big)_t + \big(\xi F(u - x_2, v)\big)_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - gb(1)\big)\ dxdt = 0.$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Lemme 2.2.1.

Corollaire 2.2.1 *Soient $\epsilon > 0$ et $k \geq 0$ des nombres réels et ξ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times]0,T[)$ tels que $\xi \geq 0$ et $\xi = 0$ sur Σ_2. Si (u,g) est une solution de (P), nous avons*

$$\int_Q \big(\xi \min\big(1, \frac{(u-x_2-k)^+}{\epsilon}\big)\big)_{x_2} h(x_1) b(u_{x_2})\ dxdt = 0.$$

Posons

$$\sigma_1 = \bar{\Sigma}_2 \cap \Sigma_1 = (\bar{\Gamma}_2 \cap \Gamma_1) \times]0,T[,$$
$$\sigma_2 = \bar{\Sigma}_3 \cap \Sigma_4 = (\Gamma_2 \times]0,T[) \cap \{\overline{\varphi > 0}\} \cap \{\varphi = 0\}$$

et supposons dans la suite que σ_1 et σ_2 sont des ensembles polaires $(1,q)$ de Q (voir [1]), où q est l'exposant conjugué de p. Comme l'ensemble vide est le seul $(1,q)$ ensemble polaire de $\bar{Q}$ dans le cas $p > 3$, alors on peut considérer $p \leq 3$.

Pour prouver la proposition suivante, on utilise la régularisation par convolution par rapport aux variables x_2 et t.

Proposition 2.2.1 *Soient λ un nombre de $[0,1]$ et ξ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times]0,T[)$ telle que $\xi \geq 0$ et $\xi = 0$ sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$. Si (u,g) est une solution de (P), nous avons*

$$\int_Q \big\{\big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\big(\lambda - g\big)^+ + \xi_{x_2} h(x_1)(b(u_{x_2}) - b(1))\big\}\ dxdt \leq 0. \tag{2.16}$$

Preuve. On applique le Corollaire 2.2.1 pour $k = 0$ à obtenir

$$\int_Q \big(\xi \min\big(1, \frac{(u-x_2)^+}{\epsilon}\big)\big)_{x_2} h(x_1) b(u_{x_2})\ dxdt = 0. \tag{2.17}$$

D'autre part, nous avons

$$\int_Q \big(\xi \min\big(1, \frac{(u-x_2)^+}{\epsilon}\big)\big)_{x_2} h(x_1) b(1)\ dxdt = 0. \tag{2.18}$$

dès que $\xi \min\big(1, \frac{(u-x_2)^+}{\epsilon}\big) = 0$ sur Σ et $(h(x_1))_{x_2} = 0$ p.p. dans Q. En soustrayant (2.18) de (2.17), on obtient

$$\int_Q \big(\xi \min\big(1, \frac{(u-x_2)^+}{\epsilon}\big)\big)_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - b(1)\big)\ dxdt = 0,$$

qui peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon} \int_{\{u-x_2<\epsilon\}\cap Q} \xi\big(u_{x_2} - 1\big) h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - b(1)\big)\ dxdt \\ &+ \int_Q \min\big(1, \frac{u-x_2}{\epsilon}\big)\xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - (1)\big)\ dxdt = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Par (2.14) et le fait que $\xi h(x_1) > 0$ p.p. dans Q, la première intégrale de (2.19) est positive, alors

$$\int_Q \min\big(1, \frac{u - x_2}{\epsilon}\big)\xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - b(1)\big)\ dxdt \leq 0. \tag{2.20}$$

On fait $\epsilon \longrightarrow 0$ dans (2.20), on obtient

$$\int_Q \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - b(1)\big)\ dxdt \leq 0, \tag{2.21}$$

et alors (2.16) est valable pour $\lambda = 0$. De plus, l'inégalité (2.16) est valable pour $\lambda = 1$ puisque $0 \leq g \leq 1$ p.p. dans Q et ξ est une fonction test pour (P),

$$\int_Q \big\{\xi_t g + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - gb(1)\big)\big\}\ dxdt \leq 0. \tag{2.22}$$

Maintenant, nous allons prouver (2.16) pour $\lambda \in]0, 1[$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$d(\Sigma_1 \cup \Sigma_3, supp(\xi)) := \epsilon_0 > 0.$$

Posons

$$\mathcal{A} = \Sigma_3 \cup \sigma_2 \cup \big((\mathbb{R}^2 \times]0, T[) \setminus \Sigma_1\big),$$

et

$$\mathcal{A}_{\epsilon_0} = \big\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times]0, T[\ /\ d((x, t), \Sigma_1 \cup \Sigma_3 \cup \sigma_2) > \frac{\epsilon_0}{2}\big\}.$$

Nous prolongeons $u(resp.\ g)$ sur $\mathcal{A} \setminus Q$ par $x_2(resp.\ 1)$ et on note toujours cette fonction par $u(resp.\ g)$. De plus, la fonction h peut être étendue à une fonction Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, toujours désigner par h. On utilise une régularisation par convolution pour $b(u_{x_2})$ et g par rapport aux variables x_2 et t, $(b(u_{x_2}))_\epsilon = \rho_\epsilon * b(u_{x_2})$, $g_\epsilon = \rho_\epsilon * g$ où $\epsilon \in]0, \frac{\epsilon_0}{2}[$, $\rho_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, T[)$, $supp(\rho_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$ est une suite de régularisation. Nous pouvons utiliser le théorème de Fubini à écrire

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big\{\xi_t g_\epsilon + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2})_\epsilon - g_\epsilon b(1)\big)\big\}\ dxdt \\
&= \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big\{\int_{\mathbb{R}\times]0,T[} \rho_\epsilon(y, s) g\big(x_1, x_2 - y, t - s\big)\ dyds\big\}\xi_t\ dxdt \\
&+ \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big\{\int_{\mathbb{R}\times]0,T[} \rho_\epsilon(y, s)\big(b(u_{x_2}) - gb(1)\big)\big(x_1, x_2 - y, t - s\big)\ dyds\big\} h(x_1)\xi_{x_2}\ dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}\times]0,T[} \big\{\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \xi_t g\big(x_1, x_2 - y, t - s\big)\ dxdt\big\}\rho_\epsilon(y, s)\ dyds \\
&+ \int_{\mathbb{R}\times]0,T[} \big\{\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - gb(1)\big)\big(x_1, x_2 - y, t - s\big)\ dxdt\big\}\rho_\epsilon(y, s)\ dyds.
\end{aligned}$$

Alors, si on fait le changement de variables $\tau = t - s$ et $z = x_2 - y$, on obtient

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{\xi_t g_\epsilon + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2})_\epsilon - g_\epsilon b(1)\big)\Big\}\, dxdt$$
$$= \int_{B(0,\epsilon)} \Big\{ \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big(\xi\big(x_1, z+y, \tau+s\big)\big)_\tau g\big(x_1, z, t\big)\ dx_1 dz d\tau \Big\} \rho_\epsilon(y,s)\ dyds$$
$$+ \int_{B(0,\epsilon)} \Big\{ \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big(\xi\big(x_1, z+y, \tau+s\big)\big)_z h(x_1)\big(b(u_z) - gb(1)\big)\big(x_1, z, t\big)\ dx_1 dz d\tau \Big\} \rho_\epsilon(y,s)\ dyds.$$

L'équation ci-dessus peut être récrite comme suit

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{\xi_t g_\epsilon + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2})_\epsilon - g_\epsilon b(1)\big)\Big\}\, dxdt$$
$$= \int_{B(0,\epsilon)} \Big\{ \int_{Q} \big(\xi\big(x_1, z+y, \tau+s\big)\big)_\tau g\big(x_1, z, t\big)\ dx_1 dz d\tau \Big\} \rho_\epsilon(y,s)\ dyds$$
$$+ \int_{B(0,\epsilon)} \Big\{ \int_{Q} \big(\xi\big(x_1, z+y, \tau+s\big)\big)_z h(x_1)\big(b(u_z) - gb(1)\big)\big(x_1, z, t\big)\ dx_1 dz d\tau \Big\} \rho_\epsilon(y,s)\ dyds.$$

Observons que $(x_1, z, \tau) \mapsto \xi(x_1, z+y, \tau+s)$ est une fonction positive dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ et s'annule sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$ pour tout $(y, s) \in B(0, \epsilon)$. Par conséquent, comme $\rho_\epsilon \geq 0$, on déduit de (2.22) que

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{\xi_t g_\epsilon + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2})_\epsilon - g_\epsilon b(1)\big)\Big\}\, dxdt \leq 0,$$

qui peut être écrit

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{\big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\big(\lambda - g_\epsilon\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2})_\epsilon - b(1)\big)\Big\}\, dxdt \leq 0$$

puisque

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \xi_{x_2} h(x_1) b(1)\ dxdt = \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \lambda \xi_t\ dxdt = 0.$$

De même, en utilisant (2.21), on arrive à

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2})_\epsilon - b(1)\big)\ dxdt \leq 0.$$

Maintenant, pour tout nombre réel positif δ, on pose

$$\vartheta_\delta = \min\big(1, \frac{(\lambda - g_\epsilon)^+}{\delta}\big)$$

qui vérifie $\vartheta_\delta \in L^p_{loc}(\mathcal{A}_{\epsilon_0})$, $\vartheta_{\delta x_2}, \vartheta_{\delta t} \in L^p_{loc}(\mathcal{A}_{\epsilon_0})$. En utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{ \big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\vartheta_\delta\big(\lambda - g_\epsilon\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\big((b(u_{x_2}))_\epsilon - b(1)\big) \Big\}\, dxdt \\
&\quad -\frac{\delta}{2}\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\vartheta_\delta^2\, dxdt \\
&= \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{ \big(h(x_1)b(1)\big(\vartheta_\delta\xi\big)_{x_2} - \big(\vartheta_\delta\xi\big)_t\big)\big(\lambda - g_\epsilon\big) + \big(\vartheta_\delta\xi\big)_{x_2} h(x_1)\big((b(u_{x_2}))_\epsilon - b(1)\big) \Big\}\, dxdt \\
&\quad + \int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big((1-\vartheta_\delta)\xi\big)_{x_2} h(x_1)\big((b(u_{x_2}))_\epsilon - b(1)\big)\, dxdt
\end{aligned}$$

et comme (2.21) et (2.22) restent valables, respectivement, pour $\vartheta_\delta\xi$ et $(1-\vartheta_\delta\xi)$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{ \big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\vartheta_\delta\big(\lambda - g_\epsilon\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\big((b(u_{x_2}))_\epsilon - b(1)\big) \Big\}\, dxdt \\
&\quad -\frac{\delta}{2}\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\vartheta_\delta^2\, dxdt \le 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Enfin, en passant successivement à la limite dans (2.23) lorsque $\delta \longrightarrow 0$ et puis $\epsilon \longrightarrow 0$ et en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient

$$\int_{\mathcal{A}_{\epsilon_0}} \Big\{ \big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\big)\big(\lambda - g\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{x_2}) - b(1)\big) \Big\}\, dxdt \le 0,$$

et alors (2.16) est vérifié puisque $u = x_2$, $g = 1$ p.p. dans $\mathcal{A} \setminus Q$ et ϵ_0 est arbitraire ■

Lemme 2.2.2 *Soit χ une fonction de $L^\infty(Q)$ vérifiant*

$$\chi(x) \in [0,1] \quad p.p.\ x \in Q \ et\ \chi_{x_2} h(x_1)b(1) - \chi_t = 0 \ dans\ \mathcal{D}'(Q). \tag{2.24}$$

Soient $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$ tels que $\xi, \xi_1 \ge 0$, $\xi = \xi_1 = 0$ sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$, $\xi_2 = 0$ sur ∂Q. Soient k, λ et ϵ des nombres réels positives, tel que $\epsilon > 0$ et $\lambda \in 1 - H(k)$ avec H désigne le graphe monotone maximale associé à la fonction Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ [0,1], & t = 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Alors, si (u, g) *est une solution de* (P)*, on a*

$$\int_Q \Big\{ \Big(h(x_1)b(1)\xi_{2x_2} - \xi_{2t}\Big)\Big(\lambda - \chi\Big)^+ + \Big(h(x_1)b(1)\xi_{1x_2} - \xi_{1t}\Big)\Big(\lambda - g\Big)^+$$
$$+\Big(\xi \min(1, \frac{(u - x_2 - k)^+}{\epsilon})\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{x_2})\Big\}\, dxdt \le C(u, k, \xi_1), \tag{2.25}$$

où

$$\begin{aligned} C(u, 0, \xi_1) &= -\int_Q \xi_{1x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(1)\Big)\, dxdt \\ &= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_Q \xi_1 \Big(\min(1, \frac{u - x_2}{\epsilon})\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(1)\Big)\, dxdt, \\ C(u, k, \xi_1) &= 0 \text{ pour } k > 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Preuve. De (2.24), on a immédiatement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\xi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times]0, T[)$ tel que $\xi_2 = 0$ sur ∂Q,

$$\int_Q \Big(h(x_1)b(1)\xi_{2x_2} - \xi_{2t}\Big)\Big(\lambda - \chi\Big)^+ dxdt = 0. \tag{2.27}$$

Puisque $\xi \min\Big(1, \dfrac{(u - x_2 - k)^+}{\epsilon}\Big) = 0$ sur Σ_2 pour tout $k \ge 0$, on déduit du Corollaire 2.2.1,

$$\int_Q \Big(\xi \min\big(1, \frac{(u - x_2 - k)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{x_2})\, dxdt = 0. \tag{2.28}$$

En additionnant (2.27) et (2.28), on déduit (2.25) pour $k > 0$ puisque dans ce cas $\lambda = 0$. En utilisant (2.28) pour $k = 0$, $\xi = \xi_1$ et le fait que $\xi_1 \min\big(1, \dfrac{u - x_2}{\epsilon}\big) = 0$ sur $\partial\Omega\times]0, T[$, on obtient :

$$\int_Q \xi_1 \Big\{\Big(\min\big(1, \frac{u - x_2}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(x_{2x_2})\Big)\Big\}\, dxdt + \tag{2.29}$$
$$+\int_Q \Big(\min\big(1, \frac{u - x_2}{\epsilon}\big)\Big)\Big\{\xi_{1x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(x_{2x_2})\Big)\Big\}\, dxdt = 0.$$

Maintenant, en passant à limite $\epsilon \to 0$ dans (2.29), on obtient :

$$\int_Q \xi_{1x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(1)\Big)\, dxdt = \tag{2.30}$$
$$= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_Q \xi_1 \Big\{\Big(\min\big(1, \frac{u - x_2}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(1)\Big)\Big\}\, dxdt.$$

En additionnant (2.27) et (2.28), il vient

$$\int_Q \Big(h(x_1)b(1)\xi_{2x_2} - \xi_{2t}\Big)\Big(\lambda - \chi\Big)^+ + \tag{2.31}$$
$$+\Big(\xi \min\big(1, \frac{(u - x_2 - k)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{x_2})\, dxdt = 0.$$

En écrivant (2.16) pour $\xi = \xi_1$ et tenant compte de (2.30), on déduit

$$\int_Q \Big(h(x_1)b(1)\xi_{1x_2} - \xi_{1t}\Big)\Big(\lambda - g\Big)^+ dxdt \leq$$
$$\leq \lim_{\epsilon \to 0} \int_Q \xi_1 \Big\{\Big(\min\big(1, \frac{u - x_2}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(1)\Big)\Big\}\ dxdt. \qquad (2.32)$$

On additionne (2.31) et (2.32), on obtient (2.25) pour $k = 0$. ■

Lemme 2.2.3 *Supposons que*

$$\Big(0, h(x_1)b(1)\Big) \cdot \nu \leq 0 \quad sur\ \Gamma_1. \qquad (2.33)$$

Soit Ψ une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^{0,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Psi(0) = 0$, $\Psi' \geq 0$, $\Psi \leq 1$ et soient k, λ, ϵ les nombres réels positives définis au Lemme 2.2.2. Alors, si (u, g) est une solution de (P) et $\xi \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}^2 \times]0, T[\big)$, $\xi \geq 0$, $\xi\Big(1 - \Psi(u - x_2)\Big) = 0$ sur Σ_2, on a

$$\int_Q \Big\{\Big(\xi\Big(1 - \Psi(u - x_2)\Big) \min\Big(1, \frac{(k - (u - x_2))^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - \lambda b(1)\Big)$$
$$-\Big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2} - \xi_t\Big)\Big(g - \lambda\Big)^+\Big\}\ dxdt \geq 0. \qquad (2.34)$$

Preuve. Soit $\mathbf{B} = \mathbb{R}^2 \times]0, T[\backslash \overline{\Sigma_4}$. Puisque σ_1 et σ_2 sont $(1, q)$ des ensembles polaires de Q, alors sans perte de généralité on peut supposer que ξ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{B})$ et $d(\overline{\Sigma_4}, supp(\xi)) = \epsilon_0 > 0$. Pour $\epsilon > 0$, on considère $H_\epsilon(u - x_2) = \min(1, \dfrac{u - x_2}{\epsilon})$. En appliquant le Lemme 2.2.1 pour

$$F(z_1, z_2) = H_\epsilon(z_1)$$

et

$$F(z_1, z_2) = H_\epsilon(z_1)\Psi(z_1),$$

on obtient

$$\int_Q \Big(\xi H_\epsilon(u - x_2)\big(1 - \Psi(u - x_2)\big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{x_2})\ dxdt = 0 \qquad (2.35)$$

puisque $g = 0$ presque partout $H_\epsilon(u - x_2) \neq 0$. En utilisant (2.35) et en tenant compte de (2.14) et (2.33), il vient

$$\int_Q \Big\{\Big(\xi\big(1 - \Psi(u - x_2)\big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2}) - b(1)\Big)\Big\} H_\epsilon(u - x_2)\ dxdt \leq$$
$$\leq \int_{\Sigma_1} -\xi\Big(1 - \Psi(u - x_2)\Big)\Big(h(x_1)b(1)\nu\Big)\ d\sigma(x, t). \qquad (2.36)$$

On fait $\epsilon \to 0$ dans (2.36), on obtient

$$\int_Q \Big(\xi\big(1-\Psi(u-x_2)\big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{x_2})\ dxdt \leq 0. \tag{2.37}$$

En appliquant le Lemme 2.2.1 pour

$$F(z_1,z_2)=1-\Psi(z_1),$$

on obtient puisque $F(0,z_2)=1$,

$$\int_Q g\Big(\xi_{x_2}h(x_1)b(1)-\xi_t\Big)\ dxdt = \int_Q \Big(\xi\big(1-\Psi(u-x_2)\big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{x_2})\ dxdt \leq 0 \tag{2.38}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbf{B})$ tel que $\xi \geq 0$, $\xi\Big(1-\Psi(u-x_2)\Big)=0$ sur Σ_2 et $d(\Sigma_4, supp(\xi))=\epsilon_0>0$. Prolongeons g par 0 en dehors de Q et notons toujours cette fonction par g. Pour $\epsilon \in]0,\epsilon_0/2[$, soit $\rho_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$ une suite régularisante avec $supp(\rho_\epsilon)\subset B(0,\epsilon)$. Posons $g_\epsilon=\rho_\epsilon * g$. Pour tout nombre réel positive δ, on définit

$$\eta=\min\Big(1,\frac{g_\epsilon-\lambda}{\delta}\Big).$$

De (2.38), on a

$$\int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[} \Big((\eta\xi)_{x_2}h(x_1)b(1)-(\eta\xi)_t\Big)\Big(g_\epsilon-\lambda\Big)\ dxdt = J_1+J_2 \leq 0, \tag{2.39}$$

où

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[}\Big(g_\epsilon-\lambda\Big)\min\Big(1,\frac{g_\epsilon-\lambda}{\delta}\Big)\Big(\xi_{x_2}h(x_1)b(1)-\xi_t\Big)\ dxdt,\\
J_2 &= \int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[}\xi\Big(g_\epsilon-\lambda\Big)\Big(\Big(\min\Big(1,\frac{g_\epsilon-\lambda}{\delta}\Big)\Big)_{x_2}h(x_1)b(1)-\Big(\min\Big(1,\frac{g_\epsilon-\lambda}{\epsilon}\Big)\Big)_t\Big)\ dxdt\\
&= -\frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[}\Big(\min\Big(\delta,g_\epsilon-\lambda\Big)\Big)^2\Big(h(x_1)b(1)\xi_{x_2}-\xi_t\Big)\ dxdt.
\end{aligned}$$

En passant successivement $\delta \longrightarrow 0$ et $\epsilon \longrightarrow 0$ dans (2.39), on obtient (2.34) pour $k=0$. Supposons que $k>0$. Alors $\lambda=0$ et $(g-\lambda)^+=g$. Puisque $s \longmapsto \min\Big(1,\frac{(k-s)^+}{\epsilon}\Big)$ est une fonction decroissante, on obtient en appliquant le Lemme 2.2.1,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \Big(\xi\Big(1-\Psi(u-x_2)\Big)\min\Big(1,\frac{(k-(u-x_2))^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{x_2})-gb(1)\Big)+\\
&\qquad +\min\Big(1,\frac{k}{\epsilon}\Big)\xi_t g\ dxdt=0,
\end{aligned}$$

qui s'écrit en tenant compte de (2.34) pour $k = 0$ et le fait que $g(u - x_2) = 0$ p.p. dans Q :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \Big(\xi\big(1 - \Psi(u - x_2)\big) \min\Big(1, \frac{(k - (u - x_2))^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(x_1) b(u_{x_2}) \\
&-g\Big(\xi_{x_2} h(x_1) b(1) - \xi_t\Big)\, dxdt \\
&= \Big(\min\big(1, \frac{k}{\epsilon}\big) - 1\Big) \int_Q g\Big(\xi_{x_2} h(x_1) b(1) - \xi_t\Big)\, dxdt \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où le lemme pour $k > 0$. ∎

Chapitre 3

Unicité de la solution d'un problème d'évolution non-linéaire de la digue

Le but de ce chapitre est de démontrer que la solution du problème (P) est unique. Pour cela, nous utilisons la technique de double variables qui est inspirée de S.N. Kružhkov dans [30] afin d'obtenir une L^1-propriété de contraction pour solutions d'entropie de problèmes hyperboliques. Voir [8], [16], [26], [33], [34], [36], [42], [43], [44] et [49] pour quelques utilisations de cette technique. Pour les applications de la méthode de Kružhkov aux problèmes stationnaires et non stationnaires à frontière libre, nous référons aux [5]-[7], [23], [26], [38] et [50].

3.1 Unicité de la solution du problème (P)

Théorème 3.1.1 *Supposons que* $(2.10) - (2.15)$ *sont vérifiés et* $(0, h(x_1)b(1)) \cdot \nu \leq 0$ *sur* Γ_1. *Alors, la solution du problème* (P) *associé à la donnée initiale* g_0 *est unique.*

Tout d'abord, nous cherchons à obtenir un résultat de comparaison de solutions qui nous permet de prouver l'unicité de la solution du problème (P). Tout d'abord, nous commençons par les deux lemmes suivantes de comparaison de solutions.

Lemme 3.1.1 *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $\mathbf{B}\cap\Omega = \emptyset$ *ou* $\mathbf{B}\cap\Omega$ *est un graphique de Lipschitz. Pour deux solutions* (u_1, g_1) *et* (u_2, g_2) *à* (P)*, nous posons* $u_m = min(u_1, u_2)$ *et* $g_M = max(g_1, g_2)$*. Alors, pour tout* $\xi \in \mathcal{D}(\mathbf{B}\times]0, T[)$*,* $\xi \geq 0$*,* $(\Sigma_1, \Sigma_3) \cap supp(\xi) = \emptyset$ *et pour* $i = 1, 2$*, on a :*

$$\int_Q \Big\{\xi_t\big(g_i - g_M\big) + \xi_{x_2}h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - (g_i - g_M)b(1)\Big)\Big\}\ dxdt \leq 0. \tag{3.1}$$

Preuve. Soient (u_1, g_1) et (u_2, g_2) deux solutions de (P) et soit ξ la fonction définie au Lemme 3.1.1. Pour tout $(x, y, t, s) \in \overline{Q \times Q}$, on définit :

$$\vartheta\big(x, t, y, s\big) = \xi\big(\frac{x + y}{2}, \frac{t + s}{2}\big)\rho_{3,\delta_2}\big(\frac{x_2 - y_2}{2}\big)\rho_{2,\delta_1}\big(\frac{x_1 - y_1}{2}\big)\rho_{1,\delta_1}\big(\frac{t - s}{2}\big),$$

où δ_1,δ_2 sont des nombres réels positifs, ρ_{1,δ_1},ρ_{2,δ_1},$\rho_{3,\delta_2}$$\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et ρ_{1,δ_1},ρ_{2,δ_1},$\rho_{3,\delta_2} \geq 0$ dans $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_{1,\delta_1}(t)\ dt = 1,\ \int_{\mathbb{R}} \rho_{2,\delta_1}(t)\ dt = 1,\ \int_{\mathbb{R}} \rho_{3,\delta_2}(t)\ dt = 1,$$
$$supp(\rho_{1,\delta_1}), supp(\rho_{2,\delta_1}) \subset]-\delta_1, \delta_1[,\ supp(\rho_{3,\delta_2}) \subset]-\delta_2, \delta_2[$$

et pour tout $(x, y) \in (\mathbf{B} \setminus \Omega) \times (\mathbf{B} \cap \Omega)$,

$$\rho_{3,\delta_2}\big(\frac{x_2 - y_2}{2}\big)\rho_{2,\delta_1}\big(\frac{x_1 - y_1}{2}\big) = 0.$$

Remarquons qu'en choisissant δ_1 et δ_2 suffisamment petits, ϑ appartient à $\mathcal{D}\big(\mathbf{B}\times]0, T[\times\mathbf{B}\times]0, T[\big)$ et

$$\vartheta = 0 \quad sur\ \big(Q \times \Sigma\big) \cup \big((\Sigma_1 \cup \Sigma_3) \times Q\big). \tag{3.2}$$

Donc, en appliquant le Lemme 2.2.2 à (u_1, g_1) avec $k = u_2(y, s) - y_2$, $\lambda = g_2(y, s)$, $\xi(x, t) = \xi_1(x, t) = \vartheta(x, t, y, s)$, $\xi_2(x, t) = 0$, pour p.p. $(x, s) \in Q$ nous obtenons :

$$\int_Q \Big\{\Big(\xi \min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{1x_2})$$
$$+\Big(h(x_1)b(1)\vartheta_{x_2} - \vartheta_t\Big)\Big(g_2 - g_1\Big)^+\Big\}\ dxdt \leq C\big(u_1, u_2 - y_2, \vartheta\big).$$

En intégrant sur Q, il vient

$$\int_{Q\times Q} \Big\{\Big(h(x_1)b(1)\vartheta_{x_2} - \vartheta_t\Big)\Big(g_2 - g_1\Big)^+ + \tag{3.3}$$
$$+\Big(\min\big(\frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}, 1\big)\xi\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{1x_2})\Big\}\ dxdtdyds$$
$$\leq \int_Q C\big(u_1, u_2 - y_2, \vartheta\big)\ dyds.$$

En outre, on applique le Lemme 2.2.3 à (u_2, g_2) avec $k = u_1(x,t) - x_2$, $\lambda = g_1(x,t)$, $\xi(y,s) = \vartheta(x,t,y,s)$ et $\Psi = 0$, nous avons pour p.p. $(x,t) \in Q$,

$$\int_Q \Big\{ \Big(\vartheta \min\Big(1, \frac{(u_1 - x_2 - u_2 + y_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{y_2} h(y_1)\Big(b(u_{2y_2}) - g_1 b(1)\Big) \\ - \Big(h(y_1)b(1)\vartheta_{y_2} - \vartheta_t\Big)\Big(g_2 - g_1\Big)^+ \Big\}\, dyds \geq 0. \tag{3.4}$$

On utilise (3.2) et le fait que la fonction $(y,s) \mapsto h(y_1)g_1 b(1)$ ne dépend pas de y_2, on trouve

$$\int_Q \Big(\vartheta \min\Big(1, \frac{(u_1 - x_2 - u_2 + y_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{y_2} g_1 h(y_1) b(1)\; dyds = 0.$$

Par conséquent, (3.4) peut être écrit comme

$$\int_Q \Big\{ \Big(\vartheta \min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 - u_2 + y_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{y_2} h(y_1) b(u_{2y_2}) \\ - \Big(h(y_1)b(1)\vartheta_{y_2} - \vartheta_t\Big)\Big(g_2 - g_1\Big)^+ \Big\}\, dyds \geq 0.$$

En intégrant sur Q, nous obtenons

$$\int_{Q\times Q} \Big\{ \Big(\vartheta \min\Big(1, \frac{(u_1 - x_2 - u_2 + y_2)^+}{\epsilon}, 1\Big)\Big)_{y_2} h(y_1) b(u_{2y_2}) \\ - \Big(h(y_1)b(1)\vartheta_{y_2} - \vartheta_t\Big)\Big(g_2 - g_1\Big)^+ \Big\}\, dxdtdyds \geq 0. \tag{3.5}$$

Nous avons

$$\vartheta \min\Big(1, \frac{\big(u_1 - x_2 - u_2 + y_2\big)^+}{\epsilon}\Big) = 0 \quad sur\ \big(Q \times \Sigma\big) \cup \big(\Sigma \times Q\big).$$

D'autre part, comme les fonctions $h(x_1)$ et $u_1(resp.h(y_1)\ et\ u_2)$ ne dépendent pas de $y_2(resp.x_2)$, il vient

$$\int_{Q\times Q} \Big(\vartheta \min\Big(1, \frac{\big(u_1 - x_2 - u_2 + y_2\big)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{y_2} h(x_1) b(u_{1x_2})\; dxdtdyds = 0, \tag{3.6}$$

$$\int_{Q\times Q} \Big(\vartheta \min\Big(1, \frac{\big(u_1 - x_2 - u_2 + y_2\big)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(y_1) b(u_{2y_2})\; dxdtdyds = 0, \tag{3.7}$$

$$u_{1y_2} = u_{2x_2} = 0 \ p.p.\ dans\ Q. \tag{3.8}$$

En soustrayant (3.5) de (3.3) et utilisant (3.6)-(3.8), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q\times Q}\Big\{\Big(\partial_{x_2}+\partial_{y_2}\Big)\Big(\vartheta min\Big(1,\frac{(u_1-x_2-u_2+y_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)\\
&\quad\times\Big(h(x_1)b((\partial_{x_2}+\partial_{y_2})u_1)-h(y_1)b((\partial_{x_2}+\partial_{y_2})u_2)\Big)\\
&\quad+\Big(\big(h(x_1)\vartheta_{x_2}+h(y_1)\vartheta_{y_2}\big)b(1)-\vartheta_t-\vartheta_s\Big)\Big(g_2-g_1\Big)^+\Big\}\ dxdtdyds\\
&\quad\le\int_Q C\big(u_1,u_2-y_2,\vartheta\big)\ dyds,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
&\int_{Q\times Q}\min\Big(1,\frac{(u_1-x_2-u_2+y_2)^+}{\epsilon}\Big)\times\\
&\times\Big(h(x_1)-h(y_1)\Big)b\Big((\partial_{x_2}+\partial_{y_2})u_2\Big)\Big(\partial_{x_2}+\partial_{y_2}\Big)\vartheta\ dxdtdyds\\
&+\int_{Q\times Q}\Big\{\min\Big(1,\frac{(u_1-x_2-u_2+y_2)^+}{\epsilon}\Big)\times\\
&\times h(x_1)\Big(b\big((\partial_{x_2}+\partial_{y_2})u_1\big)-b\big((\partial_{x_2}+\partial_{y_2})u_2\big)\Big)\Big(\partial_{x_2}+\partial_{y_2}\Big)\vartheta\\
&+\Big(h(y_1)b(1)\big(\vartheta_{x_2}+\vartheta_{y_2}\big)-\vartheta_t-\vartheta_s\Big)\Big(g_2-g_1\Big)^+\Big\}\ dxdtdyds\\
&+\int_{Q\times Q}\Big(h(x_1)-h(y_1)\Big)b(1)\vartheta_{x_2}\Big(g_2-g_1\Big)^+\ dxdtdyds\\
&+\int_{Q\times Q}\Big(\partial_{x_2}+\partial_{y_2}\Big)\Big(\min\big(1,\frac{(u_1-x_2-u_2+y_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)\times\\
&\times\Big(h(x_1)-h(y_1)\Big)b\Big(\big(\partial_{x_2}+\partial_{y_2}\big)u_2\Big)\vartheta\ dxdtdyds\\
&+\int_{Q\times(Q\cap\{u_2=y_2\})}\vartheta\Big(\min\big(1,\frac{u_1-x_2}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2}h(x_1)\Big(b(u_{1x_2})-b(1)\Big)\ dxdtdyds\\
&\le\int_Q C\big(u_1,u_2-y_2,\vartheta\big)\ dyds,
\end{aligned}\tag{3.9}$$

en tenant compte des conditions (2.14) et (2.15). On considère les changements de variables suivants :

$$z=\frac{x+y}{2},\quad ,\sigma=\frac{x-y}{2}\quad ,\tau=\frac{t+s}{2},\quad \theta=\frac{t-s}{2}.\tag{3.10}$$

Soient respectivement I_1 et I_2 désignent les domaines des variables $z_2=\dfrac{x_2+y_2}{2}$ et $\sigma_2=$

$\dfrac{x_2 - y_2}{2}$, et notons J le domaine des variables x_2 et y_2. Posons

$$Q_1 =]A, B[\times I_1 \times]0, T[, \quad Q_2 = \Big]\frac{A-B}{2}, \frac{B-A}{2}\Big[\times I_2 \times \Big]\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\Big[,$$
$$Q_3 =]A, B[\times J \times]0, T[, \quad Q_4 = \Big]\frac{A-B}{2}, \frac{B-A}{2}\Big[\times J \times \Big]\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\Big[.$$

En utilisant (3.10) et (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}
&\bar{D}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1} + \bar{E}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1} + \bar{F}_{\delta_2,\delta_1} + \bar{G}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1} \\
&+ \int_{Q\times(Q\cap\{u_2=y_2\})} \vartheta\Big(\min\big(1, \frac{u_1 - x_2}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{1x_2}) - b(1)\Big)\, dxdtdyds \\
&\leq \int_Q C\big(u_1, u_2 - y_2, \vartheta\big)\, dyds,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1} = &\int_{Q_1\times Q_2} \min\Big(1, \frac{\big(\hat{u}_1 - \hat{u}_2 - 2\sigma_2\big)^+}{\epsilon}\Big) \\
&\times \hat{\vartheta}_{z_2}\Big(h(z_1+\sigma_1) - h(z_1-\sigma_1)\Big) b\big(\tilde{u}_{2z_2}\big)\, dzd\tau d\sigma d\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1} = \quad &\int_{Q_1\times Q_2} \Big\{\min\Big(1, \frac{\big(\hat{u}_1 - \hat{u}_2 - 2\sigma_2\big)^+}{\epsilon}\Big)\hat{\vartheta}_{z_2} h\big(z_1+\sigma_1\big)\Big(b\big(\hat{u}_{1z_2}\big) - b\big(\hat{u}_{2z_2}\big)\Big) \\
&+ \Big(h\big(z_1-\sigma_1\big)b(1)\hat{\vartheta}_{z_2} - \hat{\vartheta}_\tau\Big)\Big(\hat{g}_2 - \hat{g}_1\Big)^+\Big\}\, dzd\tau d\sigma d\theta,
\end{aligned}$$

$$\bar{F}_{\delta_2,\delta_1} = \int_{Q_3\times Q_4} \Big(\bar{g}_2 - \bar{g}_1\Big)^+ \bar{\vartheta}_{x_2}\Big(h\big(z_1+\sigma_1\big) - h\big(z_1-\sigma_1\big)\Big) b(1)\, dz_1dx_2d\tau d\sigma_1 dy_2 d\theta,$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1} = \quad &\int_{Q_1\times Q_2} \Big(\min\big(1, \frac{\big(\hat{u}_1 - \hat{u}_2 - 2\sigma_2\big)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{z_2} \\
&\times \hat{\vartheta}\Big(h(z_1+\sigma_1) - h\big(z_1-\sigma_1\big)\Big) b\Big(\hat{u}_{2z_2}\Big) dzd\tau d\sigma d\theta.
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_1 = u_1(z+\sigma, \tau+\theta), \quad \bar{u}_1 = u_1(z_1+\sigma_1, x_2, \tau+\theta), \\
&\hat{u}_2 = u_2(z-\sigma, \tau-\theta), \quad \hat{\vartheta} = \xi(z,\tau)\rho_{1,\delta_1}(\theta)\rho_{2,\delta_1}(\sigma_1)\rho_{3,\delta_2}(\sigma_2), \\
&\bar{\vartheta} = \xi(z_1, \frac{x_2+y_2}{2}, \tau)\rho_{1,\delta_1}(\theta)\rho_{2,\delta_1}(\sigma_1)\rho_{3,\delta_2}(\frac{x_2-y_2}{2}), \\
&\hat{g}_1 = g_1(z+\sigma, \tau+\theta), \quad \hat{g}_2 = g_2(z-\sigma, \tau-\theta), \\
&\bar{g}_1 = g_1(z_1+\sigma_1, x_2, \tau+\theta), \quad \bar{g}_2 = g_2(z_1-\sigma_1, y_2, \tau-\theta).
\end{aligned}$$

Comme h est une fonction Lipschitzienne et $supp(\rho_{2,\delta_1}) \subset]-\delta_1,\delta_1[$, il existe une constante K telle que

$$\begin{aligned}\left|\bar{F}_{\delta_2,\delta_1}\right| &\leq K\int_{Q_3\times Q_4}|\sigma_1|\left|\bar{\vartheta}_{x_2}\right|b(1)\big(\bar{g}_2-\bar{g}_1\big)^+\; dz_1dx_2d\tau d\sigma_1 dy_2 d\theta \\ &\leq K\delta_1\int_{Q_3\times Q_4}\left|\bar{\vartheta}_{x_2}\right|b(1)\big(\bar{g}_2-\bar{g}_1\big)^+\; dz_1dx_2d\tau d\sigma_1 dy_2 d\theta \\ &:= \delta_1 M^1_{\delta_2,\delta_1},\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\left|\bar{G}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1}\right| &\leq K\delta_1\int_{Q_1\times Q_2}\hat{\vartheta}\left|\Big(\min\big(1,\frac{\big(\hat{u}_1-\hat{u}_2-2\sigma_2\big)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{z_2}b\big(\hat{u}_{2z_2}\big)\right|\; dzd\tau d\sigma d\theta \\ &=: \delta_1 M^2_{\epsilon,\delta_2,\delta_1},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\left|\bar{D}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1}\right| &\leq K\delta_1\int_{Q_1\times Q_2}\left|\min\Big(1,\frac{\big(\hat{u}_1-\hat{u}_2-2\sigma_2\big)^+}{\epsilon}\Big)\hat{\vartheta}_{z_2}b\big(\hat{u}_{2z_2}\big)\right|\; dzd\tau d\sigma d\theta \\ &=: \delta_1 M^3_{\epsilon,\delta_2,\delta_1}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Comme $(M^1_{\delta_2,\delta_1})_{\delta_1>0}$, $(M^2_{\epsilon,\delta_2,\delta_1})_{\delta_1>0}$ et $(M^3_{\epsilon,\delta_2,\delta_1})_{\delta_1>0}$ sont bornés, on peut passer à la limite dans $(3.12)-(3.14)$ lorsque $\delta_1\to 0$ à obtenir

$$\lim_{\delta_1\to 0}\big(\bar{F}_{\delta_2,\delta_1}\big)=\lim_{\delta_1\to 0}\big(\bar{G}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1}\big)=\lim_{\delta_1\to 0}\big(\bar{D}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1}\big)=0. \tag{3.15}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta_2\to 0}\big(\lim_{\delta_1\to 0}\big(\bar{E}_{\epsilon,\delta_2,\delta_1}\big)\big) &= \int_Q\Big\{\min\Big(1,\frac{(u_1-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\xi_{z_2}h(z_1)\big(b(u_{1z_2})-b\big(u_{2z_2}\big)\big) \\ &\quad +\big(h(z_1)b(1)\xi_{z_2}-\xi_\tau\big)(g_2-g_1)^+\Big\}\; dzd\tau,\end{aligned} \tag{3.16}$$

où $u_1=u_1(z,\tau)$, $u_2=u_2(z,\tau)$, $g_1=g_1(z,\tau)$, $g_2=g_2(z,\tau)$ et $\xi=\xi(z,\tau)$. Maintenant, en utilisant (2.26) et le théorème de Lebesgue, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_Q C\big(u_1,u_2-y_2,\vartheta\big)\; dyds \\ &=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{Q\cap\{u_2=y_2\}}\Big\{\int_Q\vartheta\Big(\min\big(1,\frac{(u_1-x_2)}{\epsilon}\big)\Big)_{z_2}h(x_1)(b(u_{1x_2})-b(1))\; dxdt\Big\}\; dyds.\end{aligned}$$

Alors, en passant successivement $\delta_1\to 0$, $\delta_2\to 0$, $\epsilon\to 0$ dans (3.11) et en utilisant $(3.15)-(3.16)$, il vient

$$\int_Q\Big\{\big(h(z_1)b(1)\xi_{x_2}-\xi_\tau\big)\big(g_2-g_1\big)^+ +\chi_{\{u_1-u_2\geq 0\}}\xi_{z_2}h(z_1)\big(b(u_{1,z_2})-b(u_{2,z_2})\big)\Big\}\; dzd\tau\leq 0,$$

où $\chi_{\{u_1-u_2\geq 0\}}$ représente la fonction caractéristique de l'ensemble $\{u_1 - u_2 \geq 0\}$. Ceci nous donne (3.1) pour $i = 1$. Si on change les rôles de (u_1, g_1) et (u_2, g_2), on obtient aussi (3.1) pour $i = 2$. $\blacksquare$

Lemme 3.1.2 *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $\mathbf{B} \cap \Omega = \emptyset$ *ou* $\mathbf{B} \cap \Omega$ *est un graphe de Lipschitz. Soient* (u_1, g_1) *et* (u_2, g_2) *deux solutions de* (P) *et soit* $\bar{g}$ *une fonction de* $L^\infty(Q)$ *telle que*

$$0 \leq \bar{g} \leq g_1, g_2 \quad p.p. \text{ dans } Q, \quad \bar{g}_{x_2} h(x_1) b(1) \; - \bar{g}_t = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \tag{3.17}$$

Alors, pour toute fonction ξ *de* $\mathcal{D}(\mathbf{B}\times]0, T[)$, $\xi \geq 0$, $(\Sigma_4 \cup \sigma_1) \cap supp(\xi) = 0$ *et pour* $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, *on a*

$$\int_Q \Big\{ \xi_t \big(g_j - \bar{g}\big)^+ + \xi_{x_2} h(x_1) \big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_j - \bar{g}\big)^+ b(1)\big) \Big\} \; dxdt \leq 0. \tag{3.18}$$

Preuve. Soient (u_1, g_1) et (u_2, g_2) deux solutions de (P) et soit ξ la fonction définie dans le Lemme 3.1.2. Pour tout $(x, y, t, s) \in \overline{Q \times Q}$, on définit :

$$\vartheta(x, t, y, s) = \xi\big(\frac{x + y}{2}, \frac{t + s}{2}\big) \rho_{3,\delta_3}\big(\frac{x_2 - y_2}{2}\big) \rho_{2,\delta_2}\big(\frac{x_1 - y_1}{2}\big) \rho_{1,\delta_1}\big(\frac{t - s}{2}\big),$$

où δ_1,δ_2,δ_3 sont des nombres réels positifs, ρ_{1,δ_1},ρ_{2,δ_2},$\rho_{3,\delta_3} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et ρ_{1,δ_1}, ρ_{2,δ_2}, $\rho_{3,\delta_3} \geq 0$ dans $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_{1,\delta_1}(t) \; dt = 1, \; \int_{\mathbb{R}} \rho_{2,\delta_2}(t) \; dt = 1, \; \int_{\mathbb{R}} \rho_{3,\delta_3}(t) \; dt = 1,$$
$$supp(\rho_{1,\delta_1}) \subset] - \delta_1, \delta_1[, supp(\rho_{2,\delta_2}) \subset] - \delta_2, \delta_2[, \; supp(\rho_{3,\delta_3}) \subset] - \delta_3, \delta_3[$$

et pour tout $(x, y) \in (\mathbf{B} \setminus \Omega) \times (\mathbf{B} \cap \Omega)$,

$$\rho_{3,\delta_3}\big(\frac{x_2 - y_2}{2}\big) \rho_{2,\delta_2}\big(\frac{x_1 - y_1}{2}\big) = 0.$$

Pour δ_1, δ_2 et δ_3 suffisamment petits, la fonction ϑ appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{B}\times]0, T[\times\mathbf{B}\times]0, T[)$ et

$$\vartheta = 0 \quad sur \; (Q \times (\sigma_1 \cup \Sigma_4) \cup (\Sigma \times Q).$$

D'autre part, puisque $supp(\xi) \cap (\sigma_1 \cap \Sigma_4) = \emptyset$ et si on suppose $supp(\xi) \cap \Sigma_3 \neq \emptyset$, on peut trouver $r_0 \in (0, \min\limits_{supp(\xi)\cap\Sigma_3} \varphi)$ et $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^{0,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Psi' \geq 0$, $\Psi(r) = 0$ si $r \leq 0$ et $\Psi(r) = 1$ si $r \geq r_0$, et cette fonction Ψ satisfait pour δ_1, δ_2 suffisamment petits,

$$\vartheta\big(1 - \Psi(u_2 - y_2)\big) = 0 \quad sur \; \big(\Sigma \times Q\big) \cup \big(Q \times \Sigma_2\big). \tag{3.19}$$

Si $supp(\xi)\cap\Sigma_3=\emptyset$, on choisit $\Psi=0$. Maintenant, en appliquant le Lemme 2.2.2 à (u_1,g_1) avec $k=u_2(y,s)-y_2$, $\lambda=g_2(y,s)$, $\xi(x,t)=\xi_2(x,t)=\vartheta(x,t,y,s)$, $\xi_1(x,t)=0$ et $\chi=\bar{g}$, on obtient pour p.p. $(y,s)\in Q$,

$$\int_Q \Big\{ \big(h(x_1)b(1)\vartheta_{x_2}-\vartheta_t\big)\big(g_2-\bar{g}\big)^+ + \\ +\Big(\vartheta \min\Big(1,\frac{(u_1-x_2+y_2-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{1x_2})\Big\}\, dxdt \le 0.$$

En intégrant sur Q, on trouve

$$\int_{Q\times Q} \Big\{ \big(h(x_1)b(1)\vartheta_{x_2}-\vartheta_t\big)\big(g_2-\bar{g}\big)^+ + \\ +\Big(\vartheta \min\Big(1,\frac{(u_1-x_2+y_2-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{1x_2})\Big\}\, dxdtdyds \le 0 \tag{3.20}$$

De même, pour p.p. $(x,t)\in Q$, on applique le Lemme 2.2.3 à (u_2,g_2) avec $k=u_1(x,t)-x_2$, $\lambda=\bar{g}(x,t)$, $\xi(y,s)=\vartheta(x,t,y,s)$, alors on intègre sur Q à obtenir

$$-\int_{Q\times Q} \Big\{ \Big(\vartheta\big(1-\Psi(u_2-y_2)\big)\min\Big(1,\frac{(u_1-x_2+y_2-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{y_2} \\ \times h(y_1)\Big(b(u_{2y_2})-\bar{g}b(1)\Big) - \Big(h(y_1)b(1)\vartheta_{y_2}-\vartheta_s\Big)\Big(g_2-\bar{g}\Big)^+\Big\}\, dxdtdyds \\ \le 0. \tag{3.21}$$

D'autre part, d'après le Corollaire 2.2.1, on a

$$\int_{Q\times Q} \Big(\vartheta \min\Big(1,\frac{(u_1-x_2+y_2-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(x_1)b(u_{1x_2})\, dxdtdyds = 0. \tag{3.22}$$

L'utilisation de (3.17) et (3.19) conduit à

$$\int_{Q\times Q} \Big(\vartheta\big(1-\Psi(u_2-y_2)\big)\min\Big(1,\frac{(u_1-x_2+y_2-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} \bar{g}h(y_1)b(1)\, dxdtdyds = 0, \tag{3.23}$$

$$\int_{Q\times Q} \Big(\vartheta\big(1-\Psi(u_2-y_2)\big)\min\Big(1,\frac{(u_1-x_2+y_2-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} h(y_1)b(u_{2y_2})\, dxdtdyds = 0. \tag{3.24}$$

L'addition de (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24) donne

$$\bar{K}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2} + \bar{L}_{\delta_1,\delta_3,\delta_2} + \bar{M}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2} \le 0, \tag{3.25}$$

où

$$\bar{K}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2} = \int_{Q\times Q} \Big\{ \Big(\big(\vartheta_{x_2} + \vartheta_{y_2}\big) h(y_1) b(1) - \vartheta_t - \vartheta_s \Big) \Big(g_2 - \bar{g} \Big)^+ +$$

$$+ \Big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2} \Big) \Big(\vartheta \min \big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon} \big) \Big) \Big(h(x_1) b(u_{1x_2}) - h(y_1) b(u_{2y_2}) \Big) \Big\} \, dxdtdyds,$$

$$\bar{L}_{\delta_1,\delta_3,\delta_2} = \int_{Q\times Q} \Big(h(x_1) - h(y_1) \Big) b(1) \vartheta_{x_2} \Big(g_2 - \bar{g} \Big)^+ \, dxdtdyds,$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2} = \quad & \int_{Q\times Q} \Big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2} \Big) \Big(\vartheta \Psi(u_2 - y_2) \min \Big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon} \Big) \Big) \times \\ & \times h(y_1) \Big(b\big((\partial_{x_2} + \partial_{y_2}) u_2\big) - \bar{g} b(1) \Big) \, dxdtdyds \\ & - \int_{Q\times Q} \Big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2} \Big) \Big(\vartheta \min \big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon} \big) \Big) \\ & \times h(x_1) \Big(b\Big((\partial_{x_2} + \partial_{y_2}) u_1 \Big) - \bar{g} b(1) \Big) \, dxdtdyds \\ & - \int_{Q\times Q} \Big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2} \Big) \Big(\vartheta \min \big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon} \big) \Big) \\ & \times \bar{g} b(1) \Big(h(x_1) - h(y_1) \Big) \, dxdtdyds. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans $\bar{L}_{\delta_1,\delta_3,\delta_2}$ lorsque $\delta_2 \to 0$, il vient

$$\lim_{\delta_2 \to 0} \big(\bar{L}_{\delta_1,\delta_3,\delta_2} \big) = 0. \tag{3.26}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta_3 \to 0} \big(\lim_{\delta_2 \to 0} (\bar{M}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2}) \big) \\ & = \int_0^T \int_Q \Big(\xi \Psi(u_2 - x_2) \min \Big(1, \frac{(u_1 - u_2)^+}{\epsilon} \Big) \Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1) \Big(b(u_{2x_2}) - \bar{g} b(1) \Big) dxdtds \\ & - \int_0^T \int_Q \Big(\xi \min(1, \frac{(u_1 - u_2)^+}{\epsilon}) \Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1) \Big(b(u_{1x_2}) - \bar{g} b(1) \Big) dxdtds \\ & =: \bar{S}_{\epsilon,\delta_1}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

où $u_1 = u_1(x,t)$, $u_2 = u_2(x,s)$, $\bar{g} = \bar{g}(x,t)$, $\xi = \xi\big(x, \dfrac{t+s}{2}\big)$ et $\rho_{1,\delta_1} = \rho_{1,\delta_1}(\dfrac{t-s}{2})$. En appliquant le Lemme 2.2.1 à

$$F(z_1, z_2) = \big(1 - \Psi(z_2)\big) \min \big(1, \frac{(z_1 - z_2)^+}{\epsilon} \big)$$

avec $v = u_2 - x_2$ et en tenant compte

$$\xi\big(x, \frac{t+s}{2}\big)\big(1 - \Psi(u_2(x,s) - x_2)\big)\rho_{1,\delta_1}\big(\frac{t-s}{2}\big) = 0$$

pour tout $(x,t,s) \in \Sigma_2 \times]0,T[$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_Q \Big(\xi\big(1 - \Psi(u_2 - x_2)\big) \min\Big(1, \frac{(u_1-u_2)^+}{\epsilon}\Big)\Big)_{x_2} \\ \times \rho_{1,\delta_1} h(x_1)\Big(b(u_{1x_2}) - gb(1)\Big)\, dxdtds = 0.\end{aligned} \tag{3.28}$$

En utilisant (3.28) et le fait que $\bar{g} \leq g_1$ et $\Psi(0) = 0$, on déduit de (3.27) que

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\epsilon,\delta_1} = & \int_0^T \int_Q \Big(\xi\Psi(u_2 - x_2) \min\big(1, \frac{(u_1-u_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1)\Big(b(u_{2x_2}) - g_2 b(1)\Big)\, dxdtds \\ & - \int_0^T \int_Q \Big(\xi\Psi(u_2 - x_2) \min\big(1, \frac{(u_1-u_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1)\Big(b(u_{1x_2}) - g_1 b(1)\Big)\, dxdtds.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Remarquons que

$$\pm\xi\Psi\Big(\phi(x,s) - x_2\Big)\Big(\min\big(1, \frac{(u_1 - \phi(x,s))^+}{\epsilon}\big) - \min\big(1, \frac{(\phi(x,t) - \phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\Big)\rho_{1,\delta_1}$$

sont des fonctions tests pour (P) correspondant à (u_2, g_2). De plus, en appliquant le Lemme 2.2.1 à u_2 avec $v = u_1 - x_2$,

$$F(z_1,z_2) = \big(1 - \Psi(z_1)\big) \min\big(1, \frac{(z_2 - z_1)^+}{\epsilon}\big)$$

et

$$F(z_1,z_2) = \min\big(1, \frac{(z_2 - z_1)^+}{\epsilon}\big),$$

en soustrayant l'une des équation de l'autre et tenant compte de $\Psi(0) = 0$, $g_2(u_2 - x_2) = 0$ p.p. en Q, on déduit que

$$\begin{aligned}& \int_0^T \int_Q \Big(\xi\Psi(u_2 - x_2) \min\big(1, \frac{(u_1-u_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1)\Big(b(u_{2x_2}) - g_2 b(1)\Big)\, dxdtds \\ & = \int_0^T \int_Q \Big\{\Big(\xi\Psi\big(\phi(x,s) - x_2\big) \min\big(1, \frac{(\phi(x,t) - \phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1)\Big(b(u_{2x_2}) - g_2 b(1)\Big) \\ & + g_2\Big(\xi\Psi\big(\phi(x,s) - x_2\big) \min\big(1, \frac{(\phi(x,t) - \phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\rho_{1,\delta_1}\Big)_s\Big\}\, dxdtds.\end{aligned} \tag{3.30}$$

De même, si on applique le Lemme 2.2.1 à u_1 avec $v = u_2 - x_2$ et

$$F(z_1,z_2) = \Psi(z_2) \min\big(1, \frac{(z_1 - z_2)^+}{\epsilon}\big),$$

on a

$$\int_0^T \int_Q \Big(\xi \Psi(u_2 - x_2) \min\big(1, \frac{(u_1-u_2)^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1} h(x_1)\Big(b(u_{1x_2}) - gb(1)\Big)\ dxdtds$$
$$= \int_0^T \int_Q \Big\{ \Big(\xi\Psi\big(\phi(x,s)-x_2\big) \min\big(1, \frac{(\phi(x,t)-\phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2} \rho_{1,\delta_1}\ h(x_1)\Big(b(u_{1x_2}) - g_1 b(1)\Big)$$
$$+ g_1\Big(\xi\Psi(\phi(x,s)-x_2)\min\big(1, \frac{(\phi(x,t)-\phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\rho_{1,\delta_1}\Big)_t\Big\}\ dxdtds. \tag{3.31}$$

Comme g_1(*resp.* g_2) ne dépend pas de s(*resp.* t), on obtient de (3.29), (3.30) et (3.31),

$$\bar{S}_{\epsilon,\delta_1} = \int_0^T \int_0^T \int_Q \Big\{ \Big(\xi\Psi\big(\phi(x,s)-x_2\big)\min\big(1, \frac{(\phi(x,t)-\phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\Big)_{x_2}$$
$$\times h(x_1)\Big(b(u_{2x_2}) - b(u_{1x_2}) + \big(g_1 - g_2\big)b(1)\Big) \tag{3.32}$$
$$-\Big(g_1-g_2\Big)\Big(\partial_t + \partial_s\Big)\Big(\xi\Psi(\phi(x,s)-x_2)\min\big(1, \frac{(\phi(x,t)-\phi(x,s))^+}{\epsilon}\big)\Big)\Big\}\rho_{1,\delta_1}\ dxdtds.$$

On peut alors passer à la limite dans (3.32) lorsque $\delta_1 \to 0$ à déduire

$$\lim_{\delta_1\to 0}\big(\lim_{\delta_3\to 0}\big(\lim_{\delta_2\to 0}\big(\bar{M}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2}\big)\big)\big) = \lim_{\delta_1\to 0}\big(\bar{S}_{\epsilon,\delta_1}\big) = 0. \tag{3.33}$$

Ainsi, pour $\bar{K}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2}$, on utilise (2.14) et (2.15) à écrire

$$\bar{K}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2} = \int_{Q\times Q} \big\{ \min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}\big)\big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2}\big)\vartheta\big[h(x_1)\big(b(u_{1x_2}) - b(u_{2y_2})\big)\big]$$
$$+ \big[\big(\vartheta_{x_2} + \vartheta_{y_2}\big)h(y_1)b(1) - \vartheta_t - \vartheta_s\big]\big(g_2 - \bar{g}\big)^+\big\}\ dxdtdyds$$
$$+ \int_{Q\times Q}\big\{\big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2}\big)\min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}\big)h(x_1)\big(b(u_{1x_2}) - b(u_{2y_2})\big)\vartheta\big\}\ dxdtdyds$$
$$+ \int_{Q\times Q}\big\{\big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2}\big)\big(\vartheta\min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}\big)\big)\big(h(x_1) - h(y_1)\big)b(u_{2y_2})\big\}\ dxdtdyds$$
$$\geq \int_{Q\times Q}\big\{ \min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}\big)\big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2}\big)\vartheta\big[h(x_1)\big(b(u_{1x_2}) - b(u_{2y_2})\big)\big]$$
$$+ \big[\big(\vartheta_{x_2} + \vartheta_{y_2}\big)h(y_1)b(1) - \vartheta_t - \vartheta_s\big]\big(g_2 - \bar{g}\big)^+\big\}\ dxdtdyds$$
$$+ \int_{Q\times Q}\big\{\big(\partial_{x_2} + \partial_{y_2}\big)\big(\vartheta\ \min\big(1, \frac{(u_1 - x_2 + y_2 - u_2)^+}{\epsilon}\big)\big)\big(h(x_1) - h(y_1)\big)b(u_{2y_2})\big\}\ dxdtdyds.$$

Maintenant, on passe successivement à la limite lorsque $\delta_2 \to 0$, $\delta_3 \to 0$, $\delta_1 \to 0$, $\epsilon \to 0$ à trouver

$$\int_{Q\times Q}\Big\{\chi_{\{u_1 - u_2 \geq 0\}}\vartheta_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{1x_2}) - b(u_{2x_2})\Big) + \Big(h(x_1)b(1)\vartheta_{x_2} - \vartheta_t\Big)\Big(g_2 - \bar{g}\Big)^+\Big\}dxdt$$
$$\leq \liminf_{\epsilon\to 0}\big(\lim_{\delta_1\to 0}\big(\lim_{\delta_3\to 0}\big(\lim_{\delta_2\to 0}\big(\bar{K}_{\epsilon,\delta_1,\delta_3,\delta_2}\big)\big)\big)\big). \tag{3.34}$$

Maintenant, en faisant successivement $\delta_2 \to 0$, $\delta_3 \to 0$, $\delta_1 \to 0$, $\epsilon \to 0$ dans (3.25) et en utilisant (3.26), (3.33) et (3.34), on obtient (3.18) pour $i = 1$ et $j = 2$. On peut changer les rôles de (u_1, g_1) et (u_2, g_2) à obtenir (3.18) pour $i = 2$ et $j = 1$. ∎

Pour arriver au résultat de comparaison de solutions, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1.3 *Soient* (u_1, g_1) *et* (u_2, g_2) *deux solutions de* (P). *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $\mathbf{B} \cap \Gamma = \emptyset$ *ou* $\mathbf{B} \cap \Gamma$ *est un graphe de Lipschitz. Alors on a pour* $i = 1, 2$:

$$\int_Q \Big\{\xi_t\Big(g_i - g_M\Big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\, dxdt \leq 0,$$
$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbf{B}\times]0,T[), \quad \xi \geq 0, \quad supp(\xi) \cap (\sigma_1 \cup \Sigma_2) = \emptyset. \tag{3.35}$$

Preuve. Soit ξ la fonction définie dans (3.35). Soit $\theta_\epsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)$ la fonction définie par

$$\theta_\epsilon = \Big(1 - \frac{d(\partial\Omega, x)}{\epsilon}\Big)^+,$$

où $\epsilon > 0$. Posons

$$\Omega_\epsilon = \Big\{x \in \Omega / d(\partial\Omega, x) < \epsilon\Big\}$$

et soit $\bar{g}$ comme dans (3.17). D'après le Lemme 3.1.1, on a pour $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \Big\{\xi_t\Big(g_i - g_M\Big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\, dxdt \leq \\
&\leq \int_Q \Big\{\big(\xi\theta_\epsilon\big)_t\Big(g_i - g_M\Big) + \big(\xi\theta_\epsilon\big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\, dxdt \\
&= \int_Q \Big\{ - \big(\xi\theta_\epsilon\big)_t\Big(g_j - \bar{g}\Big)^+ + \big(\xi\theta_\epsilon\big)_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) + \big(g_j - \bar{g}\big)^+ b(1)\Big)\Big\}\, dxdt \\
&+ \int_Q \Big(h(x_1)b(1)(\xi\theta_\epsilon)_{x_2} - (\xi\theta_\epsilon)_t\Big)\Big((g_j - g_i)^+ - (g_j - \bar{g})^+\Big)\, dxdt.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Par le Lemme 3.1.2, (3.36) récrit comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_Q \Big\{\xi_t\Big(g_i - g_M\Big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\, dxdt \leq \\
&\leq \int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} \Big(h(x_1)b(1)(\xi\theta_\epsilon)_{x_2} - (\xi\theta_\epsilon)_t\Big)\Big((g_j - g_i)^+ - (g_j - \bar{g})^+\Big)\, dxdt \leq \\
&\leq \max(1, \beta)\Big[|\Omega_\epsilon\times]0,T[|^{1/2}\Big(\Big(\int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} |\xi_t|^2\, dxdt\Big)^{1/2} + \Big(\int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} |\xi_{x_2}|^2\, dxdt\Big)^{1/2}\Big) \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} \xi\, dxdt\Big].
\end{aligned} \tag{3.37}$$

En utilisant les l'inégalités de Hölder et de Poincaré, on déduit l'existence d'une constante C telle que :

$$\int_Q \Big\{\xi_t\,\Big(g_i - g_M\Big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\,dxdt \leq$$
$$\leq \max(1,\beta)\Big(\Big(T^{1/2}|\Omega_\epsilon|^{1/2} + \epsilon^{1/2}C\Big)\Big(\big(\int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} |\xi_t|^2\,dxdt\big)^{1/2} + \big(\int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} |\xi_{x_2}|^2\,dxdt\big)^{1/2}\Big)\Big),$$

ce qui conduit à (3.35) en passant ϵ tendre vers 0. ■

Lemme 3.1.4 *Soient* (u_1, g_1) *et* (u_2, g_2) *deux solutions de* (P). *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $\mathbf{B}\cap\Gamma = \emptyset$ *ou* $\mathbf{B}\cap\Gamma$ *est un graphe de Lipschitz. Alors on a pour* $i = 1, 2$:

$$\int_Q \Big\{\xi_t\big(g_i - g_M\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\,dxdt \leq 0,$$
$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbf{B}\times]0,T[), \quad \xi \geq 0, \quad supp(\xi)\cap(\Sigma_1\cup\Sigma_4) = \emptyset. \tag{3.38}$$

Preuve. Soient ξ la fonction définie comme dans Lemme 3.1.4, θ une fonction régulière telle que

$$\theta(0) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \xi(1 - \theta(\psi - x_2)) = 0 \quad sur\ \Sigma.$$

Soient θ_ϵ, Ω_ϵ et $\bar{g}$ comme dans la preuve précédente. On déduit pour $i, j = 1, 2$:

$$\int_Q \Big\{\xi_t\big(g_i - g_M\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - \big(g_i - g_M\big)b(1)\Big)\Big\}\,dxdt \leq$$
$$\leq \int_{\Omega_\epsilon\times]0,T[} \Big(h(x_1)b(1)\ \big(\xi\theta_\epsilon(1 - \theta(u_j - x_2))\big)_{x_2} - (\xi\theta_\epsilon)_t\Big)\Big((g_j - g_i)^+ - (g_j - \bar{g})^+\Big)\,dxdt.$$

Nous concluons en utilisant les inégalités de Hölder, de Poincaré et en faisant ϵ tendre vers 0. ■

Preuve du Théorème 3.1.1. Soit ξ une fonction telle que :

$$\xi \in \mathcal{D}(\mathbf{B}\times]0,T[),\ \xi \geq 0, \quad \xi(x,0) = \xi(x,T) = 0 \quad p.p.\ x\ dans\ \Omega.$$

En tenant compte que σ_1 et σ_2 sont $(1,q)$ ensembles polaires de Q, il existe une suite ξ_ϵ telle que :

$$\xi_\epsilon \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}\times]0,T[\setminus(\sigma_1\cup\sigma_2)), \quad \xi_\epsilon \geq 0\ et\ \xi_\epsilon \longrightarrow \xi \quad dans\ W^{1,p}(Q).$$

En utilisant la partition de l'unité, nous pouvons écrire :

$$\xi_\epsilon = u_{\epsilon,1} + \xi_{\epsilon,1} + w_{\epsilon,1}$$

où $u_{\epsilon,1}$, $\xi_{\epsilon,1}$ et $w_{\epsilon,1}$ vérifient respectivement les Lemme 3.1.1, 3.1.3 et 3.1.4. Pour $i = 1, 2$, on obtient

$$\int_Q \Big\{\xi_{\epsilon t}\big(g_i - g_M\big) + \xi_{\epsilon x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - (g_i - g_M)b(1)\Big)\Big\} \; dxdt \leq 0. \tag{3.39}$$

En passant $\epsilon \longrightarrow 0$ dans (3.39), on arrive au résultat de comparaison de solutions suivant,

$$\int_Q \Big\{\xi_t\big(g_i - g_M\big) + \xi_{x_2} h(x_1)\Big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2}) - (g_i - g_M)b(1)\Big)\Big\} \; dxdt \leq 0. \tag{3.40}$$

Si on choisit $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\xi \geq 0$ dans (3.40), on obtient

$$\int_Q \xi_t\big(g_i - g_M\big) \; dxdt \leq 0,$$

qui peut être écrire comme

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \big(g_M - g_i\big) \; dx \leq 0, \;\; dans \; \mathcal{D}'(0,T).$$

Puisque $g_i \in C^0([0,T]; L^1(\Omega))$ (voir [40]) et $g_1(x,0) = g_2(x,0) = g_0(x)$ p.p. $x \in \Omega$, il vient

$$\int_\Omega \big(g_M - g_i\big) \; dx \leq 0, \;\; dans \; [0,T],$$

qui conduit à

$$g_i = g_M \quad p.p. \; dans \; Q. \tag{3.41}$$

En utilisant (3.41) – (3.40), on trouve

$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}\times]0,T[), \; \xi \geq 0, \qquad \int_Q \xi_{x_2} h(x_1)\big(b(u_{ix_2}) - b(u_{mx_2})\big) \; dxdt \leq 0. \tag{3.42}$$

De (2.14) – (2.15) et le fait que (3.42) reste vrai pour $\xi = u_i - u_m$, on déduit que $(u_i - u_m)_{x_2} = 0$ p.p. dans Q. Puisque $u_i - u_m = 0$ sur Σ_2, on peut étendre $u_i - u_m$ à $\mathbb{R}\times]D, +\infty[\times]0, T[$ par 0 et toujours noté par $u_i - u_m$. Ainsi, pour p.p. $(x_1, t) \in \mathbb{R}\times]0, T[$, il existe $\bar{w} \in C^0([D, +\infty[)$ tel que $\bar{w}(x_2) = (u_i - u_m)(x_1, x_2, t)$ p.p. $x_2 \in]D, +\infty[$ et

$$\forall z_1, \; z_2 \in [D, +\infty[, \quad \bar{w}(z_1) - \bar{w}(z_2) = \int_{z_2}^{z_1} (u_i - u_m)(x_1, z, t) \; dz = 0,$$

ce qui signifie que $\bar{w} = c$ dans $[D, +\infty[$ pour une constante $c \geq 0$. Dès que $\bar{w}(x_2) = 0$ pour x_2 assez grand, il s'ensuit que $\bar{w} = 0$ dans $[D, +\infty[$, et donc $u_i = u_m$ p.p. dans Q pour $i = 1, 2$. D'où la preuve est complète. ■

Remarque 3.1.1 *Si* E, F *sont des nombres réels tels que* $F > E$*,* $n = 3$ *et* $\Gamma_1 = [A, B] \times [E, F]$*, le résultat d'unicité obtenu reste vrai si on remplace* x_1 *par* $y' = (y_1, y_2) \in [A, B] \times [E, F]$ *et* x_2 *par* y_3*, où* $y = (y', y_3) = (y_1, y_2, y_3)$ *est un point générique de* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*.*

Chapitre 4

Existence d'une solution du problème d'évolution non-linéaire de la digue dans un domaine non borné

Soit L une constante réele et Ω_∞ un domaine non borné dans $\mathbb{R}^{n-1}\times]-\infty, L[(n \geq 2)$, qui représente un milieu poreux de frontière lacalement Lipschitzienne $\partial\Omega := \Gamma$ et $Q_\infty = \Omega\times]0,\infty[$. Nous désignons par Γ_N la partie imperméable de Γ et par Γ_D la partie perméable. Soit $\varphi \in C_x^{0,1} \cap C_t^1$ une fonction bornée positive définie sur $\overline{Q_\infty}$ représentant la pression assignée sur $\Gamma_D\times]0,\infty[:= \Sigma_D$. Posons $\Upsilon_D^1 = \Sigma_D \cap \{\varphi > 0\}$, $\Upsilon_D^0 = \Sigma_D \cap \{\varphi = 0\}$ et $\phi = \varphi + x_n$, où $x = (x_1, ..., x_n)$ est le point générique dans Ω_∞. Soit $B : \Omega_\infty \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto B(x, \xi)$ est mesurable et pour p.p. $x \in \Omega_\infty$, la fonction $\xi \mapsto B(x, \xi)$ est continue. Pour certaines constantes $p > 1$ et $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, nous supposons que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ p.p.\ x \in \Omega_\infty, \quad \xi B(x,\xi) \geq \lambda |\xi|^p, \tag{4.1}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ p.p.\ x \in \Omega_\infty, \quad |B(x,\xi)| \leq \Lambda |\xi|^{p-1}, \tag{4.2}$$

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq \eta, \quad (\xi - \eta)(B(x,\xi) - B(x,\eta)) > 0 \quad p.p.\ x \in \Omega_\infty, \tag{4.3}$$

$$\exists\ \beta > 1, \quad div(B(x,e)) \in L^\beta_{loc}(\Omega_\infty) \tag{4.4}$$

avec $e = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. De plus, soient u_0 et g_0 deux fonctions définies sur Ω_∞ telles que pour une certaine constante H_0 :

$$x_n \leq u_0(x) \leq H_0 \quad p.p.\ x \in \Omega_\infty, \tag{4.5}$$

$$0 \leq g_0(x) \leq 1 \quad p.p.\ x \in \Omega_\infty. \tag{4.6}$$

On considère la formulation faible suivante du problème de la digue d'évolution non linéaire sur le domaine Q_∞ :

$$(P) \begin{cases} Trouver\ (u, g) \in (L^p_{loc}(0, \infty; W^{1,p}_{loc}(\Omega_\infty)) \cap L^q_{loc}(Q_\infty)) \times L^\infty(Q_\infty)\ tel\ que : \\ u \geq x_n, \quad 0 \leq g \leq 1, \quad g(u - x_n) = 0 \quad p.p.\ dans\ Q_\infty \\ u = \phi \quad sur\ \Sigma_D \\ \displaystyle\int_{Q_\infty} \left[\xi_t\big(g - \alpha u\big) + \nabla\xi \cdot \big(B(x, \nabla u) - gB(x, e)\big)\right] dxdt \\ \qquad\qquad \leq \displaystyle\int_{\Omega_\infty} \xi(x, 0)\big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big)\ dx, \\ \forall\ \xi\ \in\ W^{1,p}(Q_\infty),\ \xi = 0\ sur\ \Upsilon^1_D,\ \xi \geq 0\ \ sur\ \Upsilon^0_D,\ et\ supp(\xi)\ est\ born\acute{e}. \end{cases}$$

Nous établissons l'existence d'une solution du problème de la digue d'évolution non linéaire dans le domain non borné Q_∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$, lié à un fluide compressible ou incompressible. On approxime Q_∞ par une suite de domains bornés $(Q_r)_r$ et nous sélectionnons le problème régularisé $(P_{r\epsilon})$ sur le domaine borné Q_r qui admet une unique solution. On peut construire une suite de fonctions monotones définies sur Q_∞ en appliquant le lemme 4.2.1 de comparaison obtenu dans le cas borné. Par conséquent, en passant à la limite comme $r \longrightarrow \infty$ dans $(P_{r\epsilon})$ pour obtenir une solution de (P_ϵ) qui représente un problème régularisé à (P) sur le domaine non borné Q_∞. Finalement, en faisant $\epsilon \longrightarrow 0$ dans (P_ϵ) pour obtenir une solution à (P).

4.1 Résultats principaux

Soit $\mathbf{B}_r$ la boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ du center 0 et du rayon $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ assez grand et soit $(\theta_r)_r \subset D(\mathbb{R}^{n+1})$ une suite telle que pour une certaine constante positive C indépendante de r,

$$0 \leq \theta_r \leq 1,\ |\nabla\theta_r| \leq C \quad dans\ \mathbb{R}^{n+1},\ \theta_r = 1 \quad dans\ \mathbf{B}_{r-1}\times] - r + 1, r - 1[,$$
$$\theta_r = 0 \quad dans\ \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathbf{B}_r\times] - r, r[).$$

Posons

$$\phi_r = \theta_r\varphi + x_n,\ \Omega_r = \Omega_\infty \cap \mathbf{B}_r,\ \Gamma_r = \partial\Omega_r \setminus \Gamma_N,\ Q_r = \Omega_r \times]0,r[\ et\ \Sigma_r = \Gamma_r \times]0,r[.$$

Pour $\epsilon \in]0,1[$ et $v \in L^p(Q_r)$ ou $L^p(\Omega_r)$, nous définissons

$$S_\epsilon(v) = \begin{cases} 0 & si\ \ v - x_n \geq \epsilon \\ 1 - \dfrac{v - x_n}{\epsilon} & si\ \ 0 \leq v - x_n \leq \epsilon \\ 1 & si\ v - x_n \leq 0, \end{cases}$$

et $G_\epsilon(v) = S_\epsilon(v) - \alpha v$.

D'abord, nous avons le théorème suivant sur le domaine borné Q_r,

Théorème 4.1.1 *Le problème régularisé suivant admet une solution unique*

$$(P_{r\epsilon}) \begin{cases} Trouver\ u_{r\epsilon} \in W^{1,p}(Q_r) \cap L^\infty(Q_r)\ telle\ que:\ \ u_{r\epsilon} = \phi_r\ sur\ \Sigma_r, \\ \displaystyle\int_{Q_r} \big[\xi_t\big(\epsilon|u_{r\epsilon t}|^{p-2}u_{r\epsilon t} + G_\epsilon(u_{r\epsilon})\big) + \epsilon\xi\big(|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon} - |x_n|^{p-2}x_n\big) \\ +\nabla\xi \cdot \big(B(x,\nabla u_{r\epsilon}) - S_\epsilon(u_{r\epsilon})B(x,e)\big)\big]\ dxdt - \displaystyle\int_{\Omega_r} \xi(x,r)G_\epsilon\big(u_{r\epsilon}(x,r)\big)\ dx \\ = \displaystyle\int_{\Omega_r} \xi(x,0)\big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big)\ dx, \\ \qquad \forall\xi \in W^{1,p}(Q_r),\ \xi = 0\ sur\ \Sigma_r. \end{cases}$$

Ensuite, nous passons à la limite dans $(P_{r\epsilon})$ lorsque $r \to \infty$ pour avoir le résultat suivant :

Théorème 4.1.2 *Selon les hypothèses* $(4.1) - (4.6)$ *le problème suivant admet une solution :*

$$(\mathbf{P}_\epsilon) \begin{cases} Trouver\ u_\epsilon \in W^{1,p}_{loc}(Q_\infty) \cap L^\infty_{loc}(Q_\infty)\ telle\ que:\ \ u_{r\epsilon} = \phi_r\ sur\ \Sigma_D, \\ \displaystyle\int_{Q_\infty} \big[\xi_t\big(\epsilon|u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t} + G_\epsilon(u_\epsilon)\big) + \epsilon\xi\big(|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon - |x_n|^{p-2}x_n\big) \\ +\nabla\xi \cdot \big(B(x,\nabla u_\epsilon) - S_\epsilon(u_\epsilon)B(x,e)\big)\big]\ dxdt = \displaystyle\int_{\Omega_\infty} \xi(x,0)\big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big)\ dx, \\ \qquad \forall\xi \in W^{1,p}_{loc}(Q_\infty),\ \xi = 0\ sur\ \Sigma_D\ et\ supp(\xi)\ est\ born\acute{e}. \end{cases}$$

Finallement, en faisant $\epsilon \to 0$ dans (P_ϵ) à obtenir une solution à (P) qui prouve l'existence d'une solution du problème d'évolution non linéaire de la digue, associé à un fluide compressible ou incompressible, dans un domaine non borné :

Théorème 4.1.3 *Nous supposons que* $(4.1) - (4.6)$ *sont vérifiés. Alors, il existe au moins une solution* (u, g) *de* (P).

4.2 Preuve du Théorème 4.1.1

Les étapes pour prouver ce théorème sont basées sur la référence [18]. D'abord, nous prouvons l'unicite de la solution du problème $(P_{r\epsilon})$. Pour cela, nous avons besoin du lemme de comparaison suivant.

Lemme 4.2.1 *Soient u, v deux fonctions de $W^{1,p}(Q_r)$ et δ un nombre réel positif. Posons*

$$f_\delta(s) = \begin{cases} s & si \quad |s| \leq \delta \\ \delta \dfrac{s}{|s|} & si \quad |s| > \delta \end{cases}$$

et $\xi_\delta = f_\delta((v-u)^+)$. Si

$$\begin{aligned} &\int_{Q_r} \{\xi_{\delta t}\big[\epsilon\big(|v_t|^{p-2}v_t - |u_t|^{p-2}u_t\big) + (G_\epsilon(v) - G_\epsilon(u))\big] \\ &+\nabla\xi_\delta \cdot \big[B(x,\nabla v) - B(x,\nabla u) - \big(S_\epsilon(v) - S_\epsilon(u)\big)B(x,e)\big]\big\}\ dxdt \\ &\quad + \int_{Q_r} \epsilon\xi_\delta\big(|v|^{p-2}v - |u|^{p-2}u\big)\ dxdt \\ &\quad \leq \int_{\Omega_r} \xi_\delta(x,r)\big(G_\epsilon(v(x,r)) - G_\epsilon(u(x,r))\big)\ dx, \end{aligned} \tag{4.7}$$

alors, nous avons $u \geq v$ p.p. dans Q_r.

Pour prouver le Lemme 4.2.1 on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.2 *[29] Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $(t,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a*

$$\begin{aligned} &\mu|t-z|^p \leq \big(|t|^{p-2}t - |z|^{p-2}z, t-z\big) \quad si\ p \in [2,+\infty[, \\ &\mu|t-z|^2 \leq \big(|t|+|z|\big)^{2-p}\big(|t|^{p-2}t - |z|^{p-2}z, t-z\big) \quad si\ p \in]1,2[. \end{aligned}$$

Preuve du Lemme 4.2.1. On remarque que $\xi_\delta \in W^{1,p}(Q_r)$ et

$$\nabla\xi_\delta = \chi_{\{(v-u)^+ \leq \delta\}}\nabla(v-u)^+,$$

puisque f_δ est Lipschitzienne. Grâce à la monotonie de G_ϵ et f_δ, l'intégrale de membre de droite de (4.7) est négative. De plus, si on utilise (4.3) et le Lemme 4.2.2, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_{\{(v-u)^+ \leq \delta\}} \big[(v-u)^+_t (G_\epsilon(v) - G_\epsilon(u))\big) \\ &-\nabla(v-u)^+ \cdot \big(S_\epsilon(v) - S_\epsilon(u)\big)B(x,e)\big]\ dxdt \\ &\quad +\delta \int_{\{(v-u)^+ > \delta\}} \epsilon\big(|v|^{p-2}v - |u|^{p-2}u\big)\ dxdt \leq 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De (4.2), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de Lipschitz de S_ϵ et G_ϵ, il vient

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} -\nabla(v-u)^+\cdot\Big(S_\epsilon(v)-S_\epsilon(u)\Big)B(x,e)\big)\ dxdt\Big| \\
&\leq \frac{\Lambda}{\epsilon}\int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} \big|\nabla(v-u)^+\big|\big|v-u\big|\ dxdt \\
&\leq \delta\frac{\Lambda}{\epsilon}\int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} |\nabla(v-u)^+|\ dxdt,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} (v-u)^+_t\Big(G_\epsilon(v)-G_\epsilon(u)\Big)\ dxdt\Big| \\
&= \Big| \int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} \Big(v-u\Big)^+_t\Big(S_\epsilon(v)-S_\epsilon(u)-\alpha(v-u)\Big)\ dxdt\Big| \\
&\leq \delta\int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} \big|(v-u)^+_t\big|\big(\alpha+\frac{1}{\epsilon}\big)\ dxdt.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

En utilisant (4.9)-(4.10), on déduit de (4.8) que

$$\begin{aligned}
&\int_{\{(v-u)^+>\delta\}} \epsilon\Big(|v|^{p-2}v-|u|^{p-2}u\Big)\ dxdt \leq \frac{\Lambda}{\epsilon}\int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} |\nabla(v-u)^+|\ dxdt \\
&+\int_{\{(v-u)^+\leq\delta\}} |(v-u)^+_t\big(\alpha+\frac{1}{\epsilon}\big)|\ dxdt.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

En passant à la limite lorsque $\delta\to 0$ dans (4.11), on obtient

$$\int_{\{(v-u)^+>0\}} \Big(|v|^{p-2}v-|u|^{p-2}u\Big)\ dxdt \leq 0.$$

En utilisant le Lemme 4.2.2, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\{(v-u)^+>0\}} \mu|v-u|^{p-1}\ dxdt \leq 0 \quad si\ p\in[2,+\infty[, \\
&\int_{\{(v-u)^+>0\}} \mu\frac{|v-u|}{(|v|+|u|)^{2-p}}\ dxdt \leq 0 \quad si\ p\in]1,2[.
\end{aligned}$$

Cela implique que $u\geq v$ p.p. dans Q_r. ■

Maintenant, supposons que $u_{r\epsilon1}$ et $u_{r\epsilon2}$ soient deux solutions de $(P_{r\epsilon})$. Si on choisit $f_\delta(u_{r\epsilon1}-u_{r\epsilon2})$ comme fonction test pour les deux solutions et on soustrait une équation de l'autre, on voit que la relation (4.7) est satisfaite. Alors, d'après le Lemme 4.2.1, on a $u_{r\epsilon2}\leq u_{r\epsilon1}$ p.p. dans Q_r. On peut changer les rôles de $u_{r\epsilon1}$ et $u_{r\epsilon2}$, à obtenir $u_{r\epsilon1}\leq u_{r\epsilon2}$ p.p. dans Q_r. Donc, nous avons

$$u_{r\epsilon1}=u_{r\epsilon2} \quad p.p.\ dans\ Q_r. \tag{4.12}$$

Ceci prouve que $(P_{r\epsilon})$ admet au plus une solution.

La proposition suivante montre que toute solution de $(P_{r\epsilon})$ est uniformément bornée indépendamment de r et ϵ .

Proposition 4.2.1 *Pour une certaine constante*

$$M \geq \max\Big(1+H, \sup\Big\{\phi_r(x,t)/(x,t) \in \overline{\Sigma_r}, r>1 \text{ assez grand}\Big\}, H_0\Big)$$

indépendamment de r et ϵ, nous avons

$$x_n \leq u_{r\epsilon} \leq M \quad p.p. \text{ dans } Q_r. \tag{4.13}$$

Preuve. Montrons d'abord que $u_{r\epsilon} \geq x_n$ p.p. dans Q_r. En utilisant $\xi = \big(u_{r\epsilon} - x_n\big)^-$ comme fonction test pour $(P_{r\epsilon})$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r}\Big[\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\Big(\epsilon|u_{r\epsilon t}|^{p-2}u_{r\epsilon t}+G_\epsilon(u_{r\epsilon})\Big)+\\
&+\epsilon\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-\Big(|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon}-|x_n|^{p-2}x_n\Big)+\\
&+\nabla\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-\cdot\Big(B(x,\nabla u_{r\epsilon})-S_\epsilon(u_{r\epsilon})B(x,e)\Big)\Big]\,dxdt\\
&-\int_{\Omega_r}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)G_\epsilon\big(u_{r\epsilon}(x,r)\big)\,dx\\
&=\int_{\Omega_r}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,0)\Big(\alpha u_0(x)-g_0(x)\Big)\,dx.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

De la définition de S_ϵ et G_ϵ on a

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r}\nabla\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-\cdot S_\epsilon(u_{r\epsilon})B(x,e)\,dxdt=\int_{Q_r}\nabla\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-\cdot B(x,e)\,dxdt,\\
&\int_{\Omega_r}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)G_\epsilon\big(u_{r\epsilon}(x,r)\big)\,dx\\
&=\int_{\Omega_r}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx-\int_{\Omega_r}\alpha u_{r\epsilon}(x,r)\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx\\
&=\int_{\Omega_r}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx-\int_{\Omega_r}\alpha\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)(x,r)\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx\\
&-\int_{\Omega_r}\alpha x_n(x,r)\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx\\
&=\int_{\Omega_r}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx-\int_{\Omega_r}\alpha\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^{-^2}(x,r)\,dx\\
&-\int_{\Omega_r}\alpha x_n(x,r)\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\,dx
\end{aligned}$$

et

$$\int_{Q_r} \big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^- G_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt = \int_{Q_r} \big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\ dxdt - \int_{Q_r} \alpha u_{r\epsilon}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\ dxdt.$$

En intégrant par rapport à t, on obtient

$$\int_{Q_r} \big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\ dxdt = \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\ dx - \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,0)\ dx,$$

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \alpha u_{r\epsilon}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\ dxdt\\
&= \int_{Q_r} \alpha\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)\ dxdt + \int_{Q_r} \alpha x_n\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\ dxdt\\
&= \int_{Q_r} \frac{\alpha}{2}\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^{-^2}\ dxdt + \int_{Q_r} \alpha x_n\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)_t^-\ dxdt\\
&= \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega_r} \{\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^{-^2}(x,r) - \big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^{-^2}(x,0)\}\ dx\\
&+ \int_{\Omega_r} \alpha x_n\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,r)\ dx - \int_{\Omega_r} \alpha x_n\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)^-(x,0)\ dx.
\end{aligned}$$

En utilisant les identités ci-dessus, on déduit de (4.14) que

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u_{r\epsilon}<x_n\}} \Big[\epsilon|\Big(u_{r\epsilon}-x_n\Big)_t|^p + \epsilon\Big(u_{r\epsilon}-x_n\Big)\Big(|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon} - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\\
&+\nabla\big(u_{r\epsilon}-x_n\big)\cdot\Big(B(x,\nabla u_{r\epsilon}) - B(x,\nabla x_n)\Big)\Big]\ dxdt\\
&\le \int_{\Omega_r} \Big(u_{r\epsilon}-x_n\Big)^-(x,0)\Big(\alpha\Big(u_0(x)-x_n\Big) + 1 - g_0(x)\Big)\ dx,
\end{aligned}$$

et par (4.3) et (4.5)-(4.6), il vient

$$\int_{\{u_{r\epsilon}<x_n\}} \epsilon\Big(u_{r\epsilon}-x_n\Big)\Big(|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon} - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\ dxdt \le 0.$$

D'après le Lemme 4.2.2, on déduit que $u_{r\epsilon} \ge x_n$ p.p. dans Q_r
Maintenant, nous prouvons que $u_{r\epsilon} \le M$ dans p.p. dans Q_r. On choisit $(u_{r\epsilon}-M)^+$ comme fonction test pour $(P_{r\epsilon})$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \Big[\big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+ \big(\epsilon |u_{r\epsilon t}|^{p-2} u_{r\epsilon t} + G_\epsilon(u_{r\epsilon})\big) \\
&+ \epsilon \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+ \big(|u_{r\epsilon}|^{p-2} u_{r\epsilon} - |x_n|^{p-2} x_n\big) \\
&+ \nabla \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+ \cdot \big(B(x, \nabla u_{r\epsilon}) - S_\epsilon(u_{r\epsilon}) B(x,e)\big)\Big] \; dxdt \\
&- \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,r) G_\epsilon\big(u_{r\epsilon}(x,r)\big) \; dx \\
&= \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,0) \big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big) \; dx.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

En utilisant la définition de S_ϵ, G_ϵ et M, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \nabla \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+ \cdot S_\epsilon(u_{r\epsilon}) B(x,e) \; dxdt = 0, \\
&\int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,r) G_\epsilon\big(u_{r\epsilon}(x,r)\big) \; dx = -\int_{\Omega_r} \alpha u_{r\epsilon}(x,r) \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,r) \; dx \\
&= -\int_{\Omega_r} \alpha \big(u_{r\epsilon} - M\big)^{+^2}(x,r) \; dx - \int_{\Omega_r} \alpha M \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,r) \; dx.
\end{aligned}$$

On intègre par rapport à t à obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+ G_\epsilon(u_{r\epsilon}) \; dxdt = -\int_{Q_r} \alpha u_{r\epsilon} \big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+ \; dxdt \\
&= -\int_{Q_r} \alpha \big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+ \big(u_{r\epsilon} - M\big) \; dxdt - \int_{Q_r} \alpha M \big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+ \; dxdt \\
&= -\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_r} \{ \big(u_{r\epsilon} - M\big)^{+^2}(x,r) - \big(u_{r\epsilon} - M\big)^{+^2}(x,0) \} \; dx \\
&- \alpha M \int_{\Omega_r} \{ \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,r) \; dx - \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,0) \} \; dx.
\end{aligned}$$

En combinant les identités ci-dessus et utilisant la définition de M et la monotonie de la fonction $\mathbb{R} \ni r \mapsto |r|^{p-2} r \in \mathbb{R}$ pour $p > 1$, on déduit de (4.15) :

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \epsilon |\big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+|^p + \nabla \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+ \cdot B(x, \nabla \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+) \; dxdt \\
&= \int_{Q_r} \epsilon |\big(u_{r\epsilon} - M\big)_t^+|^p + \nabla \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+ \cdot B(x, \nabla u_{r\epsilon}) \; dxdt \\
&\le \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon} - M\big)^+(x,0) \big(\alpha \big(u_0(x) - M\big) - g_0(x)\big) \; dx \\
&\le 0,
\end{aligned}$$

puisque $M \geq u_0(x)$ et $0 \leq g_0(x) \leq 1$ p.p. $x \in \Omega_r$. Donc, (4.1) conduit à $u_{r\epsilon} \leq M$ dans Q_r. ■

Dans ce qui suit, nous prouvons l'existence d'une solution du problème $(P_{r\epsilon})$. Considérons d'abord la fonction de troncature suivante de G_ϵ définie par

$$\bar{G}_\epsilon(u_{r\epsilon}) = \begin{cases} G_\epsilon(M) & si\ u_{r\epsilon} \geq M \\ G_\epsilon(u_{r\epsilon}) & si\ x_n \leq u_{r\epsilon} \leq M \\ G_\epsilon(x_n) & si\ u_{r\epsilon} \leq x_n, \end{cases}$$

qui peut s'écrire, en utilisant la définition de M, G_ϵ et S_ϵ , comme

$$\bar{G}_\epsilon(u_{r\epsilon}) = \begin{cases} -\alpha M & si\ u_{r\epsilon} \geq M \\ G_\epsilon(u_{r\epsilon}) & si\ x_n \leq u_{r\epsilon} \leq M \\ 1-\alpha x_n & si\ u_{r\epsilon} \leq x_n. \end{cases}$$

Donc, si $u_{r\epsilon}$ est une solution de $(P_{r\epsilon})$, on voit que $u_{r\epsilon}$ satisfait :

$$(iii)_{r\epsilon} \qquad \begin{aligned} &\int_{Q_r} \Big[\xi_t\Big(\epsilon|u_{r\epsilon t}|^{p-2}u_{r\epsilon t} + \bar{G}_\epsilon(u_{r\epsilon})\Big) + \epsilon\xi\Big(|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon} - |x_n|^{p-2}x_n\Big) \\ &+\nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u_{r\epsilon}) - S_\epsilon(u_{r\epsilon})B(x,e)\Big)\Big]\ dxdt \\ &-\int_{\Omega_r}\xi(x,r)\bar{G}_\epsilon\big(u_{r\epsilon}(x,r)\big)\ dx = \int_{\Omega_r}\xi(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\ dx, \\ &\qquad \forall\xi\in W^{1,p}(Q_r),\ \xi = 0\ sur\ \Sigma_r. \end{aligned}$$

Inversement, soit $v_{r\epsilon}$ une fonction de $W^{1,p}(Q_r)$ vérifiant $v_{r\epsilon} = \phi_r$ sur Σ_r et $(iii)_{r\epsilon}$. Alors, de la même manière que la preuve de la Proposition 4.2.1, on voit que $x_n \leq v_{r\epsilon} \leq M$, où M est la même constante positive dans la Proposition 4.2.1. Alors, $v_{r\epsilon}$ est une solution de $(P_{r\epsilon})$, et par unicité nous avons $v_{r\epsilon} = u_{r\epsilon}$. Alors, il suffit donc de trouver une fonction $u_{r\epsilon} \in W^{1,p}(Q_r)$ satisfaisant $u_{r\epsilon} = \phi_r$ sur Σ_r et $(iii)_{r\epsilon}$ pour prouver l'existence d'une solution de $(P_{r\epsilon})$. On va donner la preuve en deux étapes :
Étape 1 : Nous définissons

$$V = \Big\{v \in W^{1,p}(Q_r)/v = 0 \quad sur\ \Sigma_r\Big\}, \quad K = \Big\{v\in W^{1,p}(Q_r)/v = \phi_r \quad sur\ \Sigma_r\Big\}.$$

Pour $u \in K$ et $v \in L^p(Q_r)$, on considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} A(u): \quad & W^{1,p}(Q_r) \to \mathbb{R} \\ & \xi \to \langle A(u), \xi \rangle = \int_{Q_r} \nabla \xi \cdot B(x, \nabla u) + \epsilon \Big(\xi_t |u_t|^{p-2} u_t + \xi |u|^{p-2} u \Big) \, dxdt \\ & \qquad - \int_{\Omega_r} \xi(x,r) \bar{G}_\epsilon\big(u(x,r)\big) \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_v: \quad & W^{1,p}(Q_r) \to \mathbb{R} \\ & \xi \to \int_{Q_r} \nabla \xi \cdot S_\epsilon(v) B(x,e) - \xi_t \bar{G}_\epsilon(v) dxdt + \int_{Q_r} \epsilon \xi |x_n|^{p-2} x_n \, dxdt \\ & \qquad + \int_{\Omega_r} \xi(x,0) \Big(\alpha u_0(x) - g_0(x) \Big) \, dx. \end{aligned}$$

Pour tout $u \in K$ nous avons $A(u) \in (W^{1,p}(Q_r))'$, l'opérateur A est continu de K dans $(W^{1,p}(Q_r))'$, monotone et coercitif. D'autre part, $f_v \in (W^{1,p}(Q_r))'$. On en déduit que pour tout $v \in W^{1,p}(Q_r)$ il existe une solution unique [37] $u \in K$ de l'inégalité variationnelle

$$\langle A(u_{r\epsilon}), w - u_{r\epsilon} \rangle \geq \langle f_v, w - u_{r\epsilon} \rangle \quad \forall w \in V. \tag{4.16}$$

En choisissant $w = u_{r\epsilon} \pm \xi$ où $\xi \in V$ dans (4.16), on obtient

$$\langle A(u_{r\epsilon}), \xi \rangle = \langle f_v, \xi \rangle \quad \forall \xi \in V. \tag{4.17}$$

Étape 2 : On considère l'application F_ϵ définie par $F_\epsilon : L^p(Q_r) \to K, \ v \mapsto u_{r\epsilon}$, et soit $\bar{B}(0, R_{r\epsilon})$ désigne la boule fermée dans $W^{1,p}(Q_r)$. L'application F_ϵ admet un point fixe, puisque
(1) $\exists R_{r\epsilon} > 0 / \quad F_\epsilon(L^p(Q_r)) \subset \bar{B}(0, R_{r\epsilon})$.
On utilise $u_{r\epsilon} - \phi_r$ comme fonction test dans (4.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{Q_r} \nabla u_{r\epsilon} \cdot B(x, \nabla u_{r\epsilon}) + \epsilon \big(|u_{r\epsilon t}|^{p-2} u_{r\epsilon t}^2 + |u_{r\epsilon}|^{p-2} u_{r\epsilon}^2 \big) \, dxdt \\ & = \int_{Q_r} \nabla \phi_r \cdot B(x, \nabla u_{r\epsilon}) \, dxdt + \int_{Q_r} \nabla u_{r\epsilon} \cdot S_\epsilon(v) B(x,e) \, dxdt \\ & + \int_{Q_r} \epsilon \big(u_{r\epsilon} - \phi_r \big) |x_n|^{p-2} x_n \, dxdt - \int_{Q_r} \nabla \phi_r \cdot S_\epsilon(v) B(x,e) \, dxdt \\ & + \int_{Q_r} \epsilon \big(|u_{r\epsilon t}|^{p-2} u_{r\epsilon t} \phi_{rt} + |u_{r\epsilon}|^{p-2} u_{r\epsilon} \phi_r \big) \, dxdt - \int_{Q_r} \bar{G}_\epsilon(v) u_{r\epsilon t} \, dxdt \\ & + \int_{Q_r} \bar{G}_\epsilon(v) \phi_{rt} \, dxdt + \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon} - \phi_r \big)(x,r) \bar{G}_\epsilon(u_{r\epsilon}(x,r)) \, dx \\ & + \int_{\Omega_r} \big(u_{r\epsilon} - \phi_r \big)(x,0) \big(\alpha u_0(x) - g_0(x) \big) \, dx. \end{aligned} \tag{4.18}$$

En utilisant (4.1)-(4.2), (4.5)-(4.6), l'inégalité de Hölder, la continuité de l'opérateur de trace, le fait que S_ϵ et $\bar{G}_\epsilon$ sont bornés et $\phi_r \in C^{0,1}(\bar{Q}_r)$, on obtient de (4.18) pour certains constantes c_i , $i = 1, 2, 3$,

$$|u_{r\epsilon}|_{1,p}^p \leq c_1 |u_{r\epsilon}|_{1,p}^{p-1} + c_2 |u_{r\epsilon}|_{1,p} + c_3.$$

D'après cette inégalité, pour une constante $R_{r\epsilon}$ dépendant de ϵ et r, on a

$$|u_{r\epsilon}|_{1,p} \leq R_{r\epsilon}. \tag{4.19}$$

Donc, (1) est vérifie.

(2) $F_\epsilon : L^p(Q_r) \to L^p(Q_r)$ est continue.

On suppose que $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^q(Q_r)$ est une suite qui converge dans $L^p(Q_r)$ vers v. Nous posons $u_{r\epsilon}^j = F_\epsilon(v_j)$ et $u_{r\epsilon} = F_\epsilon(v)$. On écrit (4.17) pour $u_{r\epsilon}^j$ et $u_{r\epsilon}$ avec $\xi = u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}$ et on soustrait d'une equation de l'autre, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \Big[\nabla\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big) \cdot \Big(B(x, \nabla u_{r\epsilon}^j) - B(x, \nabla u_{r\epsilon})\Big) \\
&+\epsilon\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)_t \Big(|u_{r\epsilon t}^j|^{p-2} u_{r\epsilon t}^j - |u_{r\epsilon t}|^{p-2} u_{r\epsilon t}\Big) \\
&+\epsilon\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)\Big(|u_{r\epsilon}^j|^{p-2} u_{r\epsilon}^j - |u_{r\epsilon}|^{p-2} u_{r\epsilon}\Big)\Big]\ dxdt \\
&= -\int_{Q_r} \Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)_t \Big(\bar{G}_\epsilon(v_j) - \bar{G}_\epsilon(v)\Big)\ dxdt \\
&+\int_{Q_r} \nabla\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big) \cdot \Big(S_\epsilon(v_j) - S_\epsilon(v)\Big) B(x, e)\ dxdt \\
&+\int_{\Omega_r} \Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)(x, r)\Big(\bar{G}_\epsilon(u_{r\epsilon}^j(x, r)) - \bar{G}_\epsilon(u_{r\epsilon}(x, r))\Big) dx.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

En utilisant la bornitude de G_ϵ et S_ϵ , la monotonie de G_ϵ, (4.2)-(4.3), (4.19) , l'inégalité de Hölder et Lemme 4.2.2 , on déduit de (4.20) que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \epsilon\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)\Big(|u_{r\epsilon}^j|^{p-2} u_{r\epsilon}^j - |u_{r\epsilon}|^{p-2} u_{r\epsilon}\Big)\ dxdt \\
&\leq \int_{Q_r} \Big|\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)_t\Big| \Big|\bar{G}_\epsilon(v_j) - \bar{G}_\epsilon(v)\Big|\ dxdt \\
&+\Lambda \int_{Q_r} \Big|\nabla\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)\Big|\ \Big|S_\epsilon(v_j) - S_\epsilon(v)\Big| dxdt \\
&\leq \Big(\int_{Q_r} \Big|\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)_t|^p\ dxdt\Big)^{1/p} \Big(\int_{Q_r} \Big|\bar{G}_\epsilon(v_j) - \bar{G}_\epsilon(v)|^q\ dxdt\Big)^{1/q} \\
&+\Lambda\Big(\int_{Q_r} \Big|\nabla\Big(u_{r\epsilon}^j - u_{r\epsilon}\Big)\Big|^p\ dxdt\Big)^{1/p} \Big(\int_{Q_r} \Big|S_\epsilon(v_j) - S_\epsilon(v)\Big|^q\ dxdt\Big)^{1/q} \\
&\leq 2R_{r\epsilon}\Big(\Big|\bar{G}_\epsilon(v_j) - \bar{G}_\epsilon(v)\Big|_q + \Lambda\Big|S_\epsilon(v_j) - S_\epsilon(v)\Big|_q\Big).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Puisque G_ϵ est Lipschitzienne,

$$\begin{aligned}\int_{Q_r}\Big|\bar{G}_\epsilon(v_j)-\bar{G}_\epsilon(v)\Big|^q\,dxdt &= \int_{Q_r}\Big|\bar{G}_\epsilon(v_j)-\bar{G}_\epsilon(v)\Big|\Big|\bar{G}_\epsilon(v_j)-\bar{G}_\epsilon(v)\Big|^{q-1}\,dxdt\\ &\leq c_4\int_{Q_r}\Big|\bar{G}_\epsilon(v_j)-\bar{G}_\epsilon(v)\Big|\,dxdt\\ &\leq c_5\int_{Q_r}\Big|v_j-v\Big|\,dxdt \qquad (4.22)\\ &\leq c_6\Big|v_j-v\Big|_p.\end{aligned}$$

De la même façon, on établit

$$\int_{Q_r}\Big|S_\epsilon(v_j)-S_\epsilon(v)\Big|^q\,dxdt \leq c_7\Big|v_j-v\Big|_p. \qquad (4.23)$$

Si on combine (4.21)-(4.23), on obtient

$$0\leq\int_{Q_r}\epsilon\Big(u^j_{r\epsilon}-u_{r\epsilon}\Big)\Big(|u^j_{r\epsilon}|^{p-2}u^j_{r\epsilon}-|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon}\Big)\,dxdt\leq c_8\Big|v_j-v\Big|_p^{1/q},$$

ce qui implique que

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{Q_r}\epsilon\Big(u^j_{r\epsilon}-u_{r\epsilon}\Big)\Big(|u^j_{r\epsilon}|^{p-2}u^j_{r\epsilon}-|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon}\Big)\,dxdt=0.$$

Donc, si $p\in[2,+\infty[$, on obtient de la première inégalité du Lemme 4.2.2,

$$u^j_{r\epsilon}\to u_{r\epsilon}\quad \textit{fortement dans } L^p(Q_r),$$

et si $p\in]1,2[$, on peut aussi appliquer la première inégalité du Lemme 4.2.2 à $q>2$, $t=f(u^j_{r\epsilon})$, et $z=f(u_{r\epsilon})$, où $f: L^p(Q_r)\to L^q(Q_r)$, $w\mapsto|w|^{p-2}w$, pour trouver une constante $\mu_q>0$ tell que

$$\begin{aligned}&\mu_q\int_{Q_r}\Big|f(u^j_{r\epsilon})-f(u_{r\epsilon})\Big|^q\,dxdt\\ &\leq\int_{Q_r}\Big(f(u^j_{r\epsilon})-f(u_{r\epsilon})\Big)\Big(|f(u^j_{r\epsilon})|^{q-2}f(u^j_{r\epsilon})-|f(u_{r\epsilon})|^{q-2}f(u_{r\epsilon})\Big)\,dxdt\\ &=\int_{Q_r}\Big(u^j_{r\epsilon}-u_{r\epsilon}\Big)\Big(|u^j_{r\epsilon}|^{p-2}u^j_{r\epsilon}-|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon}\Big)\,dxdt,\end{aligned}$$

qui conduit à

$$f(u^j_{r\epsilon})\to f(u_{r\epsilon})\quad \textit{fortement dans } L^q(Q_r).$$

Puisque f a un inverse continu $f^{-1} : L^q(Q_r) \to L^p(Q_r)$, $w \mapsto |w|^{q-2}w$, on en déduit que

$$u^j_{r\epsilon} \to u_{r\epsilon} \quad fortement\ dans\ L^p(Q_r), \qquad p \in]1,2[.$$

Donc, $F_\epsilon : L^p(Q_r) \to L^p(Q_r)$ est continue.
Ainsi, par le théorème du point fixe de Schauder nous concluons que F_ϵ admet un point fixe qui est une solution au problème $(P_{r\epsilon})$. Finalement, la preuve du Théorème 4.1.1 est terminée.

4.3 Preuve du Théorème 4.1.2

Tout d'abord, nous énonçons et prouvons plusieurs lemmes nécessaires pour la preuve du Théorème 4.1.2. Le lemme suivant nous permet de construire un couple de suites monotones des fonctions définies dans Q_∞.

Lemme 4.3.1 *Soient $r, s > 1$ assez grand que $s > r$. Ensuite, il existe deux solutions $u_{r\epsilon}$ et $u_{s\epsilon}$, respectivement à $(P_{r\epsilon})$ et $(P_{s\epsilon})$, satisfaisant*

$$u_{r\epsilon} \le u_{s\epsilon} \quad et \quad S_\epsilon(u_{s\epsilon}) \le S_\epsilon(u_{r\epsilon}) \quad p.p.\ dans\ Q_r.$$

Preuve. Soient $u_{r\epsilon}$ et $u_{s\epsilon}$ les solutions uniques correspondant respectivement à $(P_{r\epsilon})$ et $(P_{s\epsilon})$. De la définition de θ_r, nous avons $u_{r\epsilon} = x_n$ dans $(\Omega_\infty \cap \partial\Omega_r) \times]0, r[$. Nous prolongeons $u_{r\epsilon}$ à $Q_s \setminus Q_r$ par x_n et encore dénoter par $u_{r\epsilon}$ cette fonction.
Grâce à (4.13), la fonction $\xi_\delta = f_\delta\big((u_r - u_s)^+\big) = 0$ p.p. dans $Q_s \setminus Q_r$. Par conséquent $\xi_\delta(.,r) = \xi_\delta(.,s) = 0$ p.p. dans Ω_s et $\xi_\delta(.,0) = 0$ p.p. dans $\Omega_s \setminus \Omega_r$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r} \Big[\xi_{\delta t}\Big(\epsilon\big(|u_{r\epsilon t}|^{p-2}u_{r\epsilon t} - |u_{s\epsilon t}|^{p-2}u_{s\epsilon t}\big) + \big(G_\epsilon(u_{r\epsilon}) - G_\epsilon(u_{s\epsilon})\big)\Big) \\
&+\nabla\xi_\delta \cdot \Big(B(x,\nabla u_{r\epsilon}) - B(x,\nabla u_{s\epsilon}) - (S_\epsilon(u_{r\epsilon}) - S_\epsilon(u_{s\epsilon})) \cdot B(x,e)\Big)\Big]\ dxdt \\
&\quad + \int_{Q_r} \epsilon\xi_\delta\Big(|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon} - |u_{s\epsilon}|^{p-2}u_{s\epsilon}\Big)\ dxdt = \int_{\Omega_r} \xi_\delta(x,r)G_\epsilon(u_{r\epsilon}(x,r))\ dx \\
&\quad - \int_{\Omega_s} \xi_\delta(x,s)G_\epsilon(u_{s\epsilon}(x,s))\ dx + \int_{\Omega_r} \xi_\delta(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\ dx \\
&\quad - \int_{\Omega_s} \xi_\delta(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\ dx = -\int_{\Omega_s\setminus\Omega_r} \xi_\delta(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\ dx \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.2.1 de comparaison, nous obtenons

$$u_{r\epsilon} \leq u_{s\epsilon} \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_r.$$

En outre, en utilisant l'inégalité ci-dessus et la monotonie de S_ϵ, nous trouvons

$$S_\epsilon(u_{s\epsilon}) \leq S_\epsilon(u_{r\epsilon}) \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_r,$$

qui complète la preuve du lemme. ■

Remarque 4.3.1 *Pour $i = r, s$, nous prolongeons $u_{i\epsilon}$ et $S_\epsilon(u_{i\epsilon})$ en dehors du Q_i respectivement par x_n et 1. Ensuite, en utilisant* (4.13) *et le fait que $0 \leq S_\epsilon(u_{i\epsilon}) \leq 1$ p.p. dans Q_i, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&u_{r\epsilon} \leq u_{s\epsilon} \quad et \quad S_\epsilon(u_{s\epsilon}) \leq S_\epsilon(u_{r\epsilon}) \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_\infty,\\
&0 \leq u_{r\epsilon} - x_n \leq M - x_n \quad et \quad 0 \leq S_\epsilon(u_{r\epsilon}) \leq 1 \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_\infty,\\
&0 \leq u_{s\epsilon} - x_n \leq M - x_n \quad et \quad 0 \leq S_\epsilon(u_{s\epsilon}) \leq 1 \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_\infty.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Par le théorème de Beppo-Levi nous déduisons qu'il existe $u_\epsilon \in L^p_{loc}(Q_\infty) \cap L^q_{loc}(Q_\infty)$ telle que

$$u_{r\epsilon} \to u_\epsilon \quad fortement \text{ } dans \text{ } L^p_{loc}(Q_\infty), \tag{4.25}$$

$$u_{r\epsilon} \to u_\epsilon \quad fortement \text{ } dans \text{ } L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.26}$$

$$u_{r\epsilon} \to u_\epsilon \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_\infty. \tag{4.27}$$

En outre, comme S_ϵ est continue sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que

$$S_\epsilon(u_{r\epsilon}) \to S_\epsilon(u_\epsilon) \quad fortement \text{ } dans \text{ } L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.28}$$

$$S_\epsilon(u_{r\epsilon}) \to S_\epsilon(u_\epsilon) \quad p.p. \text{ } dans \text{ } Q_\infty. \tag{4.29}$$

Le lemme suivant prouve que $(u_{r\epsilon x_i})_r$, $i = 1, ..., n$ et $(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_{r\epsilon t})_r$ sont localement uniformémenet bornés dans $L^p(Q_\infty)$ indépendamment de ϵ.

Lemme 4.3.2 *Soit $R > 0$ un nombre positif fixe assez grand. Il existe une constante C_R, qui ne dépend que R, telle que pour tout $r > R + 1$, on a*

$$\int_{Q_R} \epsilon |u_{r\epsilon t}|^p + |\nabla u_{r\epsilon}|^p \, dxdt \leq C_R. \tag{4.30}$$

Preuve. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que $\theta = 1$ dans $\mathbf{B}_R \times] - R, R[$ et $\theta = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathbf{B}_{R+1} \times] - R - 1, R + 1[)$. Puisque $u_{r\epsilon} = \phi_r$ sur Σ_r, on peut choisir $(u_{r\epsilon} - \phi_r)\theta^p$ comme fonction test dans $(P_{r\epsilon})$ à obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{R+1}} \theta^p\Big(B(x,\nabla u_{r\epsilon})\cdot\nabla u_{r\epsilon}+\epsilon|u_{r\epsilon t}|^p\Big)\ dxdt\\
&=\int_{Q_{R+1}} \theta^{p-1}\Big(p(\phi_r-u_{r\epsilon})\nabla\theta+\theta\nabla\phi_r\Big)\cdot B(x,\nabla u_{r\epsilon})\ dxdt\\
&+\int_{Q_{R+1}} \epsilon\theta^{p-1}|u_{r\epsilon t}|^{p-2}u_{r\epsilon t}\Big(p(\phi_r-u_{r\epsilon})\theta_t+\theta\phi_{rt}\Big)\ dxdt\\
&+\int_{Q_{R+1}} \epsilon\Big(|x_n|^{p-2}x_n(u_{r\epsilon}-\phi_r)+|u_{r\epsilon}|^{p-2}u_{r\epsilon}\phi_r\Big)\theta^p\ dxdt\\
&+\int_{Q_{R+1}} \Big(\theta^p\nabla(u_{r\epsilon}-\phi_r)+(u_{r\epsilon}-\phi_r)\cdot\nabla\theta^p\Big)\cdot S_\epsilon(u_{r\epsilon})B(x,e)\ dxdt\\
&-\int_{B_{R+1}} \Big((u_{r\epsilon}-\phi_r)\theta^p\Big)(x,r)G_\epsilon(u_{r\epsilon}(x,r))\ dx\\
&+\int_{B_{R+1}} \Big((u_{r\epsilon}-\phi_r)\theta^p\Big)(x,0)\Big(\alpha u_0(x)-g_0(x)\Big)\ dx\\
&-\int_{Q_{R+1}} \Big((u_{r\epsilon}-\phi_r)\theta^p\Big)_t G_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt.
\end{aligned}\tag{4.31}$$

Posons $\Theta_\epsilon(s)=\displaystyle\int_0^s\big(1-H_\epsilon(z)\big)dz$. En utilisant l'intégration par parties par rapport à t, on voit que la dernière intégrale du côté droit de (4.31) peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{R+1}} \Big((u_{r\epsilon}-\phi_r)\theta^p\Big)_t G_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt\\
&=\int_{Q_{R+1}} \Big(u_{r\epsilon t}-\alpha u_{r\epsilon}u_{r\epsilon t}\Big)\theta^p S_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{R+1}} \Big((\phi_r\theta^p)_t+p\theta_t\theta^{p-1}u_{r\epsilon}\Big)G_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt\\
&=\int_{Q_{R+1}} \Big(\big(\Theta_\epsilon(u_{r\epsilon}-x_n)\big)_t-\frac{\alpha}{2}(u_{r\epsilon}^2)_t\Big)\theta^p\ dxdt\\
&\quad+\int_{Q_{R+1}} \Big((\phi_r\theta^p)_t+p\theta_t\theta^{p-1}u_{r\epsilon}\Big)G_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt \qquad (4.32)\\
&=-\int_{Q_{R+1}} p\theta_t\theta^{p-1}\Big(\Theta_\epsilon(u_{r\epsilon}-x_n)-\frac{\alpha}{2}u_{r\epsilon}^2\Big)\ dxdt\\
&\quad+\int_{\Omega_{R+1}} \theta^p(x,R+1)\Big(\Theta_\epsilon(u_{r\epsilon}-x_n)-\frac{\alpha}{2}u_{r\epsilon}^2\Big)\big(x,R+1\big)\ dx\\
&\quad-\int_{\Omega_{R+1}} \theta^p(x,0)\Big(\Theta_\epsilon(u_{r\epsilon}-x_n)-\frac{\alpha}{2}u_{r\epsilon}^2\Big)\big(x,0\big)\ dx
\end{aligned}$$

$$+\int_{Q_{R+1}} \Big((\phi_r\theta^p)_t + p\theta_t\theta^{p-1}u_{r\epsilon}\Big)G_\epsilon(u_{r\epsilon})\ dxdt.$$

En utilisant (4.1), (4.2), (4.5), (4.6), (4.13), (4.32), l'inégalité de Hölder, la défintion de ϕ_r, θ, S_ϵ, G_ϵ, Θ_ϵ et le fait que $\epsilon\in]0,1[$, on obtient de (4.31) pour une constante K_R ne dépend que R :

$$\int_{Q_{R+1}} \epsilon|\theta u_{r\epsilon t}|^p + \lambda|\theta\nabla u_{r\epsilon}|^p\ dxdt \le K_R\Big\{1 + \Big(\int_{Q_{R+1}} \epsilon|\theta u_{r\epsilon t}|^p\ dxdt\Big)^{1/q} + \\ + \Big(\int_{Q_{R+1}} \lambda|\theta\nabla u_{r\epsilon}|^p\ dxdt\Big)^{1/p} + \Big(\int_{Q_{R+1}} \lambda|\theta\nabla u_{r\epsilon}|^p\ dxdt\Big)^{1/q}\Big\},$$

qui conduit à

$$0 \le V_{r\epsilon} \le K_R\Big(1 + V_{r\epsilon}^{1/p} + V_{r\epsilon}^{1/q}\Big),$$

où

$$V_{r\epsilon} = \int_{Q_{R+1}} \epsilon|\theta u_{r\epsilon t}|^p + \lambda|\theta\nabla u_{r\epsilon}|^p\ dxdt.$$

Comme $p > 1$, on obtient

$$V_{r\epsilon} \le K_R.$$

Enfin, puisque $\theta = 1$ dans Q_R, on en déduit que

$$\int_{Q_R} \epsilon|u_{r\epsilon t}|^p + |\nabla u_{r\epsilon}|^p\ dxdt \le \frac{K_R}{\min(1,\lambda)} := C_R,$$

qui est le résultat recherché. ■

Maintenant, en utilisant (4.2), (4.24) et (4.30), on voit que $(u_{r\epsilon})_r$($resp.$ $(B(.,u_{r\epsilon}))_r$) est localement uniformément borné dans $W^{1,p}(Q_\infty)$($resp.$ $\mathbb{L}^q(Q_\infty)$). Par conséquent, de (4.25)-(4.29), on déduit qu'il existe une sous-suite, r_k, $D_\epsilon \in L^q_{loc}(Q_\infty)$ et $\mathcal{B}_\epsilon \in \mathbb{L}^q_{loc}(Q_\infty)$ tels que

$$u_{r_k\epsilon} \to u_\epsilon \quad fortement\ dans\ L^p_{loc}(Q_\infty), \tag{4.33}$$

$$u_{r_k\epsilon} \to u_\epsilon \quad fortement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.34}$$

$$u_{r_k\epsilon} \to u_\epsilon \quad p.p.\ dans\ Q_\infty, \tag{4.35}$$
$$u_{r_k\epsilon} \rightharpoonup u_\epsilon \quad faiblement\ dans\ W^{1,p}_{loc}(Q_\infty), \tag{4.36}$$
$$S_\epsilon(u_{r_k\epsilon}) \to S_\epsilon(u_\epsilon) \quad fortement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.37}$$
$$S_\epsilon(u_{r_k\epsilon}) \to S_\epsilon(u_\epsilon) \quad p.p.\ dans\ Q_\infty, \tag{4.38}$$
$$|u_{r_k\epsilon}|^{p-2}u_{r_k\epsilon} \to |u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon \quad fortement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.39}$$
$$|u_{r_k\epsilon t}|^{p-2}u_{r_k\epsilon t} \rightharpoonup D_\epsilon \quad faiblement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.40}$$
$$B(.,\nabla u_{r_k\epsilon}) \rightharpoonup \mathcal{B}_\epsilon \quad faiblement\ dans\ \mathbb{L}^q_{loc}(Q_\infty). \tag{4.41}$$

Ensuite, nous avons :

Lemme 4.3.3 *Les fonctions u_ϵ et $S_\epsilon(u_\epsilon)$ satisfont aux conditions suivantes :*

$$u_\epsilon = \phi \quad sur\ \Sigma_D, \tag{4.42}$$
$$x_n \le u_\epsilon \le M, \quad p.p.\ dans\ Q_\infty, \tag{4.43}$$
$$0 \le S_\epsilon(u_\epsilon) \le 1, \quad p.p.\ dans\ Q_\infty. \tag{4.44}$$

Preuve. Soit $R > 0$ un nombre positif fixé assez grand et $r_k > R+1$. Puisque $u_{r_k\epsilon}$ est une solution de $(P_{r_k\epsilon})$, on obtient en utilisant la définition de θ_{r_k} :

$$u_{r_k\epsilon} = \phi \quad sur\ \Sigma_D \cap \Sigma_R. \tag{4.45}$$

De (4.45), on voit que $u_{r_k\epsilon} \in K_\epsilon$, où

$$K_\epsilon = \Big\{ w \in W^{1,p}(Q_R)/w = \phi \quad sur\ \Sigma_D \cap \Sigma_R \Big\},$$

qui est fermé et convexe dans $W^{1,p}(Q_R)$, et donc, on déduit de (4.36) que $u_\epsilon \in K_\epsilon$. Ainsi, (4.42) est vérifié puisque R est arbitraire. En outre, en faisant aller $k \longrightarrow \infty$ dans (4.24) et en utilisant (4.35) et (4.38) on obtient (4.43)-(4.44). ■

Lemme 4.3.4 *Soit $R > 0$ un nombre positif fixé assez grand. Alors, nous avons*

$$\forall \zeta \in W^{1,p}(Q_R), \qquad \int_{Q_R} \epsilon\zeta_t|u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t} + \nabla\zeta\cdot B(x,\nabla u_\epsilon)\ dxdt \tag{4.46}$$
$$= \int_{Q_R} \epsilon\zeta_t D_\epsilon(x,t) + \nabla\zeta\cdot\mathcal{B}_\epsilon(x,t)\ dxdt.$$

Preuve. Soit $r_\epsilon > R+1$ et soit $\xi = \eta\psi$ tel que $\eta \in \mathcal{D}(\Omega_R)$, $\psi \in \mathcal{D}(0,R)$, $\eta \geq 0$ et $\psi \geq 0$. En choisissant $(u_\epsilon - \phi)\xi$ comme fonction test pour $(P_{r_k\epsilon})$, on obtient

$$\int_{Q_R} \Big[\Big((u_\epsilon - \phi)\xi\Big)_t \Big(\epsilon |u_{r_k\epsilon t}|^{p-2} u_{r_k\epsilon t} + G_\epsilon(u_{r_k\epsilon})\Big) + \epsilon\xi\Big(u_\epsilon - \phi\Big)\Big(|u_{r_k\epsilon}|^{p-2}u_{r_k\epsilon} - |x_n|^{p-2}x_n\Big) + \nabla\Big((u_\epsilon - \phi)\xi\Big) \cdot \Big(B(x, \nabla u_{r_k\epsilon}) - S_\epsilon(u_{r_k\epsilon})B(x,e)\Big)\Big]\, dxdt = 0. \tag{4.47}$$

Ainsi, en passant à la limite dans (4.47) lorsque $k \to \infty$, et en utilisant (4.34), (4.37) et (4.39)-(4.41), on trouve

$$\int_{Q_R} \Big[\Big((u_\epsilon - \phi)\xi\Big)_t \Big(\epsilon D_\epsilon(x,t) + G_\epsilon(u_\epsilon)\Big) + \epsilon\xi\big(u_\epsilon - \phi\big)\Big(|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon - |x_n|^{p-2}x_n\Big) + \nabla\Big((u_\epsilon - \phi)\xi\Big) \cdot \Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - S_\epsilon(u_\epsilon)B(x,e)\Big)\Big]\, dxdt = 0 \tag{4.48}$$

Maintenant, en utilisant $(u_{r_k\epsilon} - \phi)\xi$ comme fonction test dans $(P_{r_k\epsilon})$ et soustrayant (4.48) de l'identité obtenue, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \xi \Big[\epsilon |u_{r_k\epsilon t}|^p + \nabla u_{r_k\epsilon} \cdot B(x, \nabla u_{r_k\epsilon})\Big]\, dxdt \\
&= \int_{Q_R} \xi \Big[\mathcal{B}_\epsilon(x,t) \cdot \nabla u_\epsilon + \epsilon D_\epsilon(x,t) u_{\epsilon t}\Big]\, dxdt \\
&+ \int_{Q_R} \nabla\big(\phi\xi\big) \cdot \Big(B(x, \nabla u_{r_k\epsilon}) - \mathcal{B}_\epsilon(x,t)\Big)\, dxdt \\
&- \int_{Q_R} \nabla\xi \cdot \Big(u_{r_k\epsilon} B(x, \nabla u_{r_k\epsilon}) - u_\epsilon \mathcal{B}_\epsilon(x,t)\Big)\, dxdt \\
&- \int_{Q_R} \epsilon\xi_t \Big(|u_{r_k\epsilon t}|^{p-2} u_{r_k\epsilon t} u_{r_k\epsilon} - D_\epsilon(x,t) u_\epsilon\Big)\, dxdt \\
&+ \int_{Q_R} \epsilon\big(\phi\xi\big)_t \Big(|u_{r_k\epsilon t}|^{p-2} u_{r_k\epsilon t} - D_\epsilon(x,t)\Big)\, dxdt \\
&- \int_{Q_R} \epsilon\Big(\big(u_{r_k\epsilon} - \phi\big)|u_{r_k\epsilon}|^{p-2}u_{r_k\epsilon} - (u_\epsilon - \phi)|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon\Big)\xi\, dxdt \\
&+ \int_{Q_R} \epsilon |x_n|^{p-2} x_n \Big(u_{r_k\epsilon} - u_\epsilon\Big) \cdot \xi\, dxdt \\
&+ \int_{Q_R} B(x,e) \cdot \Big[\nabla\Big((u_{r_k\epsilon} - \phi)\xi\Big) \cdot S_\epsilon(u_{r_k\epsilon}) - \nabla\Big((u_\epsilon - \phi)\xi\Big) \cdot S_\epsilon(u_\epsilon)\Big]\, dxdt \\
&- \int_{Q_R} \Big[\Big((u_{r_k\epsilon} - \phi)\xi\Big)_t G_\epsilon(u_{r_k\epsilon}) - \Big((u_\epsilon - \phi)\xi\Big)_t G_\epsilon(u_\epsilon)\Big]\, dxdt.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

En faisant k tend vers $+\infty$ dans (4.49) et utilisant (4.33)-(4.34), (4.36)-(4.37) et (4.39)-

(4.41), on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow+\infty}\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon|u_{r_k\epsilon t}|^p+\nabla u_{r_k\epsilon}\cdot B(x,\nabla u_{r_k\epsilon})\Big]\,dxdt\\ =\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon u_{\epsilon t}D_\epsilon(x,t)+\nabla u_\epsilon\cdot\mathcal{B}_\epsilon(x,t)\Big]\,dxdt.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Maintenant, par (4.3) et le fait que la fonction $r\mapsto|r|^{p-2}r$ est monotone sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon\big(u_{r_k\epsilon}-v\big)_t\Big(|u_{r_k\epsilon t}|^{p-2}u_{r_k\epsilon t}-|v_t|^{p-2}v_t\Big)\\ &+\nabla\big(u_{r_k\epsilon}-v\big)\cdot\Big(B(x,\nabla u_{r_k\epsilon})-B(x,\nabla v)\Big)\Big]\,dxdt\geq 0,\\ &\quad\forall v\in W^{1,p}(Q_R),\end{aligned}$$

qui peut être s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon|u_{r_k\epsilon t}|^p+\nabla u_{r_k\epsilon}\cdot B(x,\nabla u_{r_k\epsilon})\Big]\,dxdt\\ &\quad-\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon u_{r_k\epsilon t}v_t|u_{r_k\epsilon t}|^{p-2}+\nabla v\cdot B(x,\nabla u_{r_k\epsilon})\Big]\,dxdt\\ &\quad-\int_{Q_R}\xi\Big[\nabla(u_{r_k\epsilon}-v)B(x,\nabla v)+\epsilon(u_{r_k\epsilon}-v)_t|v_t|^{p-2}v_t\Big]\,dxdt\geq 0,\\ &\quad\forall v\in W^{1,p}(Q_R).\end{aligned}\tag{4.51}$$

En passant à la limite $k\to\infty$ dans (4.51) et utilisant (4.36), (4.40), (4.41) et (4.50), il vient

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon u_{\epsilon t}D_\epsilon(x,t)+\nabla u_\epsilon\cdot\mathcal{B}_\epsilon(x,t)\Big]\,dxdt\\ &\quad-\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon v_tD_\epsilon(x,t)+\nabla v\cdot\mathcal{B}_\epsilon(x,t)\ \Big]\,dxdt\\ &\quad-\int_{Q_R}\xi\Big[(u_\epsilon-v)_t|v_t|^{p-2}v_t+\nabla(u_\epsilon-v)\cdot B(x,\nabla v)\Big]\,dxdt\geq 0,\\ &\quad\forall v\in W^{1,p}(Q_R).\end{aligned}$$

qui prend la forme suivante

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R}\xi\Big[\epsilon\big(u_\epsilon-v\big)_t\Big(D_\epsilon(x,t)-|v_t|^{p-2}v_t\Big)\\ &+\nabla\big(u_\epsilon-v\big)\cdot\Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t)-B(x,\nabla v)\Big)\Big]\,dxdt\geq 0,\\ &\quad\forall v\in W^{1,p}(Q_R).\end{aligned}\tag{4.52}$$

Soit $\zeta \in W^{1,p}(Q_R)$ et $\lambda \in [0,1]$. Si nous utilisons $v = u_\epsilon - \lambda\zeta$ comme fonction test dans (4.52), on trouve

$$\begin{aligned}\int_{Q_R} \xi \Big[\epsilon\zeta_t\Big(D_\epsilon(x,t) - (u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t)|u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t|^{p-2}\Big) \\ +\nabla\zeta \cdot \Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - B(x, \nabla u_\epsilon - \lambda\nabla\zeta)\Big)\Big] \, dxdt \geq 0.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Nous avons

$$\Big|(u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t)\big|u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t\big|^{p-2}\Big| = \Big|u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t\Big|^{p-1} \leq \Big(\big|u_{\epsilon t}\big| + \big|\zeta_t\big|\Big)^{p-1}, \tag{4.54}$$

et d'après (4.2),

$$\Big|B(x, \nabla u_\epsilon - \lambda\nabla\zeta)\Big| \leq \Lambda\Big|\nabla u_\epsilon - \lambda\nabla\zeta\Big|^{p-1} \leq \Lambda\Big(\big|\nabla u_\epsilon\big| + \big|\nabla\zeta\big|\Big)^{p-1}. \tag{4.55}$$

En utilisant la continuité de la fonction $y \mapsto B(.,y)$, (4.54) et (4.55), on déduit de (4.53) par le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R} \xi \Big[\epsilon\zeta_t\Big(D_\epsilon(x,t) - |u_{\epsilon t}|^{p-1}\Big) + \nabla\zeta\Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - B(x, \nabla u_\epsilon)\Big)\Big] \, dxdt \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \int_{Q_R} \xi \Big[\epsilon\zeta_t\Big(D_\epsilon(x,t) - (u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t) \cdot |u_{\epsilon t} - \lambda\zeta_t|^{p-2}\Big) \\ &+\nabla\zeta \cdot \Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - B(x, \nabla u_\epsilon - \lambda\nabla\zeta)\Big)\Big] \, dxdt \geq 0.\end{aligned}$$

D'autre part, si on choisit $v = u_\epsilon + \lambda\zeta$ dans (4.52), on arrive aussi à

$$\int_{Q_R} \xi \Big[\epsilon\zeta_t\Big(D_\epsilon(x,t) - |u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t}\Big) + \nabla\zeta \cdot \Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - B(x, \nabla u_\epsilon)\Big)\Big] \, dxdt \leq 0.$$

D'où,

$$\int_{Q_R} \xi \Big[\epsilon\zeta_t\Big(D_\epsilon(x,t) - |u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t}\Big) + \nabla\zeta \cdot \Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - B(x, \nabla u_\epsilon)\Big)\Big] \, dxdt = 0,$$

qui conduit à

$$\int_{Q_R} \Big[\epsilon\zeta_t\Big(D_\epsilon(x,t) - |u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t}\Big) + \nabla\zeta \cdot \Big(\mathcal{B}_\epsilon(x,t) - B(x, \nabla u_\epsilon)\Big)\Big] \, dxdt = 0.$$

Par conséquent, (4.46) est vérifié. ■

Soit $\xi \in W^{1,p}_{loc}(Q_\infty)$ tel que $\xi = 0$ sur Σ_D et $supp(\xi)$ est borné. Il existe $R > 0$ assez grand tel que $supp(\xi) \subset \overline{Q_R}$. Pour tout $r_k > R$, la fonction ξ est une fonction test de $(P_{r_k\epsilon})$. En tenant compte du fait que $\xi(., r_k) = 0$ p.p. dans Ω_R, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \Big[\xi_t\Big(\epsilon|u_{r_k\epsilon t}|^{p-2}u_{r_k\epsilon t} + G_\epsilon(u_{r_k\epsilon})\Big) + \epsilon\xi_t\Big(|u_{r_k\epsilon}|^{p-2}u_{r_k\epsilon} - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\\
&+\nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u_{r_k\epsilon}) - S_\epsilon(u_{r_k\epsilon})\cdot B(x,e)\Big)\Big]\,dxdt \qquad (4.56)\\
&= \int_{\Omega_R} \xi(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

En faisant $k \longrightarrow \infty$ dans (4.56) et utilisant (4.34), (4.37), (4.39)-(4.41) et (4.46), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \Big[\xi_t\Big(\epsilon|u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t} + G_\epsilon(u_\epsilon)\Big) + \epsilon\xi_t\Big(|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\\
&\nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u_\epsilon) - S_\epsilon(u_\epsilon)B(x,e)\Big)\Big]\,dxdt\\
&= \int_{\Omega_R} \xi(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\,dx,
\end{aligned}$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\infty} \Big[\xi_t\Big(\epsilon|u_{\epsilon t}|^{p-2}u_{\epsilon t} + G_\epsilon(u_\epsilon)\Big) + \epsilon\xi_t\Big(|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\\
&+\nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u_\epsilon) - S_\epsilon(u_\epsilon)B(x,e)\Big)\Big]\,dxdt\\
&= \int_{\Omega_\infty} \xi(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

Cela complète la preuve du Théorème 4.1.2.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.3

Dans cette section, on passe à la limite dans (P_ϵ) comme $\epsilon \to 0$ pour prouver le Théorème 4.1.3. Soit $R > 0$ un grand nombre positif fixé. Alors, on utilise (4.30) et (4.36) à obtenir

$$\forall \epsilon \in]0,1[, \qquad \int_{Q_R} \epsilon|u_{\epsilon t}|^p + |\nabla u_\epsilon|^p\,dxdt \le C_R, \tag{4.57}$$

où C_R est la même constante positive dans le Lemme 4.3.2, qui ne dépend que R. De (4.2), (4.43), (4.44) et (4.57), on a pour une sous-suite ϵ_l, $u \in L^p_{loc}(0,\infty;W^{1,p}_{loc}(\Omega_\infty))$, $g \in L^q_{loc}(Q_\infty)$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{L}^q_{loc}(Q_\infty)$,

$$u_{\epsilon_l} \rightharpoonup u \quad faiblement\ dans\ L^p_{loc}(0,\infty;W^{1,p}_{loc}(\Omega_\infty)), \tag{4.58}$$

$$S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon l}) \rightharpoonup g \quad faiblement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty), \tag{4.59}$$

$$B(.,u_{\epsilon_l}) \rightharpoonup \mathcal{B} \quad faiblement\ dans\ \mathbb{L}^q_{loc}(Q_\infty). \tag{4.60}$$

Alors nous avons

Lemme 4.4.1

$$u \geq x_n \quad p.p.\ dans\ Q_\infty \quad et \quad u = \phi \quad sur\ \Sigma_D, \tag{4.61}$$

$$0 \leq g \leq 1 \quad p.p.\ dans\ Q_\infty. \tag{4.62}$$

Preuve. Soient

$$K_1 = \big\{v \in L^p(0,R;W^{1,p}(\Omega_R))/v \geq x_n \quad p.p.\ dans\ Q_R, \quad v = \phi\ sur \quad \Sigma_D \cap \Sigma_R\big\},$$
$$K_2 = \big\{v \in L^q(Q_R)/\ 0 \leq v \leq 1 \quad p.p.\ dans\ Q_R\big\}.$$

Notons que K_1 est fermé et convexe dans $\mathrm{L}^p(0,R;W^{1,p}(\Omega_R))$. Grâce à (4.42) et (4.43), la suite u_{ϵ_l} appartient à K_1. On déduit donc de (4.36) que $u \in K_1$ pour tout $R > 0$ assez grand. Cela conduit à $u \geq x_n$ p.p. dans Q_∞ et $u = \phi$ sur Σ_D. Donc, (4.61) est vérifié. De même, l'ensemble K_2 est fermé et convexe dans $L^q(Q_R)$ et par (4.44), $S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) \in K_2$, ce qui conduit, par (4.59), à $g \in K_2$ pour tout $R > 0$ assez grand. Cela nous donne (4.62). ■

Lemme 4.4.2 *Nous avons*

$$g(u - x_n) = 0 \quad p.p.\ dans\ Q_\infty. \tag{4.63}$$

Preuve. De (4.43), la suite u_{ϵ_l} est localement uniformément bornée dans $L^q(Q_\infty)$. Donc, il existe une sous-suite, toujours notée par ϵ_l, et $w \in L^q_{loc}(Q_\infty)$ tels que

$$u_{\epsilon_l} \rightharpoonup w \quad faiblement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty). \tag{4.64}$$

Si $\zeta \in \mathcal{D}(Q_\infty)$, on déduit de (4.58) et (4.64) que

$$\int_{Q_\infty} \zeta(u-w)\ dxdt = \lim_{l\to\infty}\int_{Q_\infty} \zeta(u_{\epsilon_l}-w)\ dxdt + \lim_{l\to\infty}\int_{Q_\infty} \zeta(u-u_{\epsilon_l})\ dxdt = 0,$$

ce qui conduit à $u = w$ p.p. dans Q_∞. Donc,

$$u_{\epsilon_l} \rightharpoonup u \quad faiblement \quad dans\ L^q_{loc}(Q_\infty). \tag{4.65}$$

Par contre, en utilisant (4.57), on a facilement

$$\epsilon_l u_{\epsilon_l t}|u_{\epsilon_l t}|^{p-2} \longrightarrow 0 \quad fortement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty). \tag{4.66}$$

Ainsi, si nous définissons la fonction suivante

$$\eta_{\epsilon_l} = G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) + \epsilon_l u_{\epsilon_l t}|u_{\epsilon_l t}|^{p-2}, \tag{4.67}$$

on obtient en combinant (4.59) et (4.65) – (4.67),

$$\eta_{\epsilon_l} \rightharpoonup g - \alpha u \quad faiblement\ dans\ L^q_{loc}(Q_\infty). \tag{4.68}$$

Maintenant, en utilisant $\xi \in \mathcal{D}(0, R; W_0^{1,p}(\Omega_R))$ comme fonction test dans (P_{ϵ_l}), et employant (4.2), (4.57) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\Big| \int_{Q_R} \xi_t \eta_{\epsilon_l}\, dxdt\Big| \leq K|\xi|_{L^q(0,R;W^{-1,q}(\Omega_R))}, \tag{4.69}$$

où K est une constante indépendante de ϵ. Cela prouve que $\eta_{\epsilon_l t}$ est bornée dans $L^q(0, R; W^{-1,q}(\Omega_R))$. Maintenant, on introduit

$$W = \Big\{ v \in L^q(Q_R)/v_t \in L^q(0, R; W^{-1,q}(\Omega_R)) \Big\},$$

qui est un espace de Banach pour la norme $|v|_{L^q(Q_R)} + |v_t|_{L^q(0,R;W^{-1,q}(\Omega_R))}$. Ensuite, l'injectione

$$L^q(\Omega_R) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega_R),$$

est continue et compacte puisque $L^q(\Omega_R)$ et $W^{-1,q}(\Omega_R)$ sont réflexifs (voir [1]). En déduit que l'injection

$$W \hookrightarrow L^q(0, R; W^{-1,q}(\Omega_R)), \tag{4.70}$$

est compacte (voir [37]). De (4.68) et (4.69), la fonction η_{ϵ_l} est bornée dans W. Alors, il existe une sous-suite encore notée ϵ_l telle que $\eta_{\epsilon_l} \rightharpoonup \eta$ faiblement dans W. Grâce à (4.68), on a $\eta = g - \alpha u$ et par (4.70), on obtient

$$G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) \to g - \alpha u \quad fortement\ dans\ L^q(0, R; W^{-1,q}(\Omega_R)). \tag{4.71}$$

Si $\theta \in \mathcal{D}(Q_R)$ tel que $\theta \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{Q_R} S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)\theta \; dxdt \\ &= \int_{Q_R} \big(1 - H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)\big)\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)\theta \; dxdt \\ &\leq \int_{\{0 \leq u_{\epsilon_l} - x_n \leq \epsilon_l\} \cap Q_R} \big(1 - H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)\big)\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)\theta \; dxdt \\ &\leq \epsilon_l \big|\theta\big|\big|Q_R\big|, \end{aligned} \tag{4.72}$$

ce qui conduit, en passant à la limite $l \longrightarrow \infty$ dans (4.72),

$$\lim_{l \to \infty} \int_{Q_R} S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) \cdot \big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)\theta \; dxdt = 0. \tag{4.73}$$

De (4.58), nous avons

$$(u_{\epsilon_l} - x_n)\theta \rightharpoonup (u - x_n)\theta \quad faiblement \ dans \ L^p(0, R; W_0^{1,p}(\Omega_R)). \tag{4.74}$$

Si $\alpha = 0$, on obtient en utilisant (4.71), (4.73) et (4.74),

$$\int_{Q_R} g(u - x_n)\theta \; dxdt = \lim_{l \to \infty} \int_{Q_R} S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)\theta \; dxdt = 0.$$

Cela imlique que pour tout $\theta \in \mathcal{D}(Q_R)$, $\theta \geq 0$:

$$\int_{Q_R} g(u - x_n)\theta \; dxdt = 0,$$

ce qui donne $g(u - x_n) = 0$ p.p. dans Q_R pour tout R assez grand. Donc, $g(u - x_n) = 0$ p.p. dans Q_∞.
Si $\alpha > 0$, la relation (4.73) peut s'écrire comme suit

$$\lim_{l \to \infty} \int_{Q_R} \big(G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) + \alpha u_{\epsilon_l}\big)\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)\theta \; dxdt = 0. \tag{4.75}$$

En utilisant (4.71) et (4.74), on obtient de (4.75),

$$\begin{aligned} \lim_{l \to \infty} \int_{Q_R} \theta u_{\epsilon_l}^2 \; dxdt \quad &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{l \to \infty} \int_{Q_R} \Big[G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})(u_{\epsilon_l} - x_n)\theta - \alpha x_n \theta u_{\epsilon_l}\Big] \; dxdt \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_{Q_R} \Big[(g - \alpha u)(u - x_n)\theta - \alpha x_n \theta u\Big] \; dxdt \\ &= \int_{Q_R} \theta u^2 \; dxdt - \frac{1}{\alpha} \int_{Q_R} g(u - x_n)\theta \; dxdt. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Comme $u_{\epsilon_l} \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(Q_R)$, on a

$$\sqrt{\theta} u_{\epsilon_l} \rightharpoonup \sqrt{\theta} u \quad \textit{faiblement dans } L^2(Q_R).$$

Cela implique que

$$\int_{Q_R} u^2 \theta \, dxdt \leq \lim_{l \to \infty} \int_{Q_R} u_{\epsilon_l}^2 \theta \, dxdt. \tag{4.77}$$

Enfin, nous combinons (4.76) et (4.77) à obtenir

$$\int_{Q_R} u^2 \theta \, dxdt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_{Q_R} g(u - x_n) \theta \, dxdt + \int_{Q_R} u^2 \theta \, dxdt \leq \int_{Q_R} u^2 \theta \, dxdt,$$

qui donne

$$\forall \theta \in \mathcal{D}(Q_R), \ \theta \geq 0, \quad \int_{Q_R} g(u - x_n) \theta \, dxdt = 0.$$

Cela implique que $g(u - x_n) = 0$ p.p. dans Q_R pour tout $R > 0$ assez grand, ce qui conduit à $g(u - x_n) = 0$ p.p. dans Q_∞ ■

Remarque 4.4.1 *De (4.63) et (4.76), on déduit que*

$$\int_{Q_R} u^2 \, dxdt = \lim_{l \to +\infty} \int_{Q_R} u_{\epsilon_l}^2 \, dxdt,$$

et comme u_{ϵ_l} converge faiblement vers u dans $L^2(Q_\infty)$, on a

$$u_{\epsilon_l} \to u \ \textit{fortement dans } L^2(Q_\infty).$$

Lemme 4.4.3 *Soit ξ une fonction de $\mathcal{D}(Q_R)$ et $\xi \geq 0$. Nous avons*

$$\begin{aligned} &\int_{Q_R} \nabla\Big((u - \phi)\xi\Big) \cdot \Big(\mathcal{B}(x,t) - gB(x,e)\Big) \, dxdt \\ &= \int_{Q_R} \Big(\varphi\xi\Big)_t \Big(g - \alpha u\Big) \, dxdt + \frac{\alpha}{2} \int_{Q_R} \xi_t \Big(u - x_n\Big)^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Preuve. Soit ζ une fonction régulière telle que $d(supp(\zeta), \Sigma_D \cap \Sigma_R) > 0$ et $supp(\zeta) \subset B_R \times (] - R, -\rho[\cup]\rho, R[)$ pour une constante positive $\rho > 0$. Pour tout $\tau \in] - \rho, \rho[$, $(x,t) \mapsto \zeta(x, t - \tau)$ est une fonction test de (P_{ϵ_l}) et s'annule dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Alors

$$\begin{aligned} &\int_{Q_R} \Big[\nabla\zeta\big(x, t - \tau\big) \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) \cdot B(x,e)\Big) \\ &\quad + \zeta_t\big(x, t - \tau\big)\Big(\epsilon_l |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} + G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})\Big) \\ &\quad + \epsilon_l \zeta\big(x, t - \tau\big)\Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2} u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2} x_n\Big)\Big] \, dxdt = 0. \end{aligned}$$

En prenant $l \to \infty$, on obtient en utilisant (4.59), (4.60), (4.65), (4.66) et le fait que $\epsilon_l|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2}x_n \to 0$ fortement dans $L^q(Q_R)$,

$$\int_{Q_R} \Big[\nabla\zeta\big(x,t-\tau\big)\cdot\big(\mathcal{B}(x,t) - gB(x,e)\big) + \zeta_t\big(x,t-\tau\big)\big(g-\alpha u\big)\Big]\ dxdt = 0,$$

qui peut s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R} \nabla\zeta\big(x,t-\tau\big)\cdot\big(\mathcal{B}(x,t) - gB(x,e)\big)\ dxdt\\ &\quad -\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\int_{Q_R} \zeta(x,t-\tau)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t\big)\ dxdt\Big) = 0.\end{aligned}$$

Ensuite, pour $\tau \in]-\rho,\rho[$ on a

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R} \nabla\zeta\big(x,t-\tau\big)\cdot\big(\mathcal{B}(x,t) - gB(x,e)\big)\ dxdt\\ &\quad -\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\int_{Q_R} \zeta(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t-\tau\big)\ dxdt\Big) = 0.\end{aligned} \tag{4.79}$$

La relation (4.79) est vraie pour chaque $\zeta \in L^p((0,R);W^{1,p}(\Omega_R))$ telle que $\zeta = 0$ sur $\Sigma_D \cap \Sigma_R$ et $\zeta = 0$ dans $\Omega_R \times (]0,\rho[\cup]R-\rho,R[)$. On choisit $\zeta = (u-\phi)\xi$ avec $\xi \in \mathcal{D}(Q_R)$ et $\xi \geq 0$, on obtient pour $\tau \in]-\rho,\rho[$,

$$\begin{aligned}&\int_{Q_R} \nabla\big((u-\phi)\xi\big)\big(x,t-\tau\big)\cdot\big(\mathcal{B}(x,t) - gB(x,e)\big)\ dxdt\\ &= \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\int_{Q_R} \big((u-\phi)\xi\big)(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t+\tau\big)\ dxdt\Big).\end{aligned} \tag{4.80}$$

La fonction

$$\tau \mapsto \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\int_{Q_R} \big((u-\phi)\xi\big)(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t+\tau\big)\ dxdt\Big)$$

appartient à $C^0(-\rho,\rho)$. Donc, la fonction

$$\tau \mapsto \int_{Q_R} \big((u-\phi)\xi\big)(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t+\tau\big)\ dxdt$$

appartient à $C^1(-\rho,\rho)$. En outre, ξ et ϕ sont des fonctions régulières par rapport à t, donc, on a

$$\tau \mapsto \int_{Q_R} \big(\phi\xi\big)(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t+\tau\big)\ dxdt$$

appartient à $C^1(-\rho,\rho)$. Ensuite de (4.80), la fonction

$$Y(\tau) = \int_{Q_R} \big((u-x_n)\xi\big)(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t+\tau\big)\ dxdt$$

est dans $C^1(-\rho,\rho)$ et on a

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \nabla\big((u-\phi)\xi\big)\big(x,t-\tau\big)\cdot\big(\mathcal{B}(x,t)-gB(x,e)\big)\ dxdt\\
&= Y'(0)+\int_{Q_R}\big((\phi-x_n)\xi\big)_t(x,t)\big(g-\alpha u\big)\big(x,t\big)\ dxdt.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

On peut écrire Y comme

$$Y = Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4,$$

où

$$\begin{aligned}
Y_1(\tau) &= \int_{Q_R}\big((u-x_n)\xi\big)(x,t)g(x,t+\tau)\ dxdt,\\
Y_2(\tau) &= \alpha\int_{Q_R}\xi(x,t)\Big\{\big(u(x,t)-x_n\big)\big(u(x,t+\tau)-u(x,t)\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big(\big(u(x,t)-x_n\big)^2-\big(u(x,t+\tau)-x_n\big)^2\Big)\Big\}\ dxdt,\\
Y_3(\tau) &= \frac{\alpha}{2}\int_{Q_R}\xi(x,t)\big(u(x,t)-x_n\big)^2\ dxdt,\\
Y_4(\tau) &= \frac{\alpha}{2}\int_{Q_R}\xi(x,t)\big(u(x,t+\tau)-x_n\big)^2\ dxdt\\
&= \frac{\alpha}{2}\int_{Q_R}\xi(x,t-\tau)\big(u(x,t)-x_n\big)^2\ dxdt.
\end{aligned}$$

D'abord, on a

$$\frac{\partial Y_3}{\partial\tau}(0)=0, \tag{4.82}$$

puisque Y_3 est indépendante de τ. Ensuite, comme ξ est une fonction régulière on voit que $Y_4\in C^1(-\rho,\rho)$, et on a

$$\frac{\partial Y_4}{\partial\tau}(0) = -\frac{\alpha}{2}\int_{Q_R}\xi_t(x,t)\big(u(x,t)-x_n\big)^2\ dxdt. \tag{4.83}$$

De plus, nous avons pour tout $\tau\in]-\rho,\rho[$,

$$\begin{aligned}
Y_1(\tau) &= \int_{Q_R}\big((u-x_n)\xi\big)(x,t)g(x,t+\tau)\ dxdt\\
&\geq 0 = Y_1(0),\\
Y_2(\tau) &= -\frac{\alpha}{2}\int_{Q_R}\xi(x,t)\big(u(x,t+\tau)-u(x,t)\big)^2\ dxdt\\
&\leq 0 = Y_2(0).
\end{aligned}$$

Alors, 0 est un minimum absolu pour $Y_1 - Y_2$ dans $]-\rho, \rho[$, et puisque

$$Y_1 - Y_2 = Y + Y_3 + Y_4 \in C^1(-\rho, \rho),$$

on obtient

$$\frac{\partial\big(Y_1 - Y_2\big)}{\partial\tau}(0) = 0. \tag{4.84}$$

En utilisant (4.82), (4.83) et (4.84), il résulte de (4.80) que l'on a

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \nabla\big((u-\phi)\xi\big)(x,t) \cdot \big(\mathcal{B}(x,t) - gB(x,e)\big)\ dxdt \\
&= \int_{Q_R} \big(\phi\xi\big)_t(x,t)\big(g - \alpha u\big)(x,t)\ dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_{Q_R} \xi_t(x,t)\big(u(x,t) - x_n\big)^2\ dxdt.
\end{aligned}$$

Enfin, si on choisit $\xi \in \mathcal{D}(Q_R)$, $\xi \geq 0$, on voit que (4.78) est vrai. ■

Lemme 4.4.4 *Soit $\xi \in W^{1,p}(Q_\infty)$ tel que supp(ξ) est borné. Nous avons*

$$\int_{Q_\infty} \nabla\xi \cdot B(x, \nabla u)\ dxdt = \int_{Q_\infty} \nabla\xi \cdot \mathcal{B}(x,t)\ dxdt. \tag{4.85}$$

Preuve. Considérons $(\theta_\delta)_{\delta>0} \subset \mathcal{D}(\Omega_R)$ tel que $0 \leq \theta_\delta \leq 1$ dans Ω_R, pour une certaine constante K indépendante de δ, $|\nabla\theta_\delta| \leq K$, et pour δ assez petit,

$$\theta_\delta = 1 \quad dans\ \big\{x \in \Omega_R / d(\partial\Omega_R, x) > \delta\big\} := \Omega_{R,\delta}.$$

Choisissons $(u_{\epsilon_l} - \phi)\theta_\delta\eta$ avec $\eta \in \mathcal{D}(0,R)$ et $\eta > 0$ comme une fonction test dans (P_{ϵ_l}), en écrivant (4.78) pour $\xi = \theta_\delta\eta$ et en soustrayant l'une des égalités de l'autre, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{Q_R} \theta_\delta\eta\nabla u_{\epsilon_l} \cdot B(x, \nabla u_{\epsilon_l})\ dxdt &= \int_{Q_R} \theta_\delta\eta\nabla u \cdot \mathcal{B}(x,t)\ dxdt \\
&- \int_{Q_R} \eta\nabla\theta_\delta \cdot \Big(u_{\epsilon_l}B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - u\mathcal{B}(x,t)\Big)\ dxdt \\
&+ \int_{Q_R} \theta_\delta\eta\nabla\phi \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - \mathcal{B}(x,t)\Big)\ dxdt \\
&+ \int_{Q_R} \phi\eta\nabla\theta_\delta \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - \mathcal{B}(x,t)\Big)\ dxdt \\
&- \int_{Q_R} \epsilon_l\big((u_{\epsilon_l} - \phi)\eta\big)_t\theta_\delta|u_{\epsilon_l t}|^{p-2}u_{\epsilon_l t}\ dxdt \\
&- \int_{Q_R} \epsilon_l\big(u_{\epsilon_l} - \phi\big)\theta_\delta\eta\Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\ dxdt
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{Q_R} B(x,e)\theta_\delta\eta\Big(\nabla\big(u_{\epsilon_l}-\phi\big)S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})-g\nabla\big(u-\phi\big)\Big)\;dxdt\\
&+\int_{Q_R} \eta\nabla\theta_\delta\cdot B(x,e)\Big(\big(u_{\epsilon_l}-\phi\big)S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big)-g(u-\phi)\Big)\;dxdt\\
&-\int_{Q_R} g\theta_\delta\big(\varphi\eta\big)_t\;dxdt-\int_{Q_R} S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big)\theta_\delta\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t\;dxdt\\
&+\int_{Q_R} \alpha u_{\epsilon_l}\theta_\delta\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t\;dxdt+\int_{Q_R}\alpha u\theta_\delta(\varphi\eta)_t\;dxdt\\
&-\int_{Q_R}\frac{\alpha}{2}\eta_t\theta_\delta(u-x_n)^2\;dxdt.
\end{aligned}
$$

En faisant $\delta\to 0$, on obtient en utilisant la définition de θ_δ,

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_R}\eta\nabla u_{\epsilon_l}\cdot B(x,\nabla u_{\epsilon_l})\;dxdt=\int_{Q_R}\eta\nabla u\cdot\mathcal{B}(x,t)\;dxdt\\
&+\int_{Q_R}\eta\nabla\phi\cdot\Big(B(x,\nabla u_{\epsilon_l})-\mathcal{B}(x,t)\Big)\;dxdt\\
&-\int_{Q_R}\epsilon_l\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t|u_{\epsilon_l t}|^{p-2}u_{\epsilon_l t}\;dxdt\\
&-\int_{Q_R}\epsilon_l\eta\big(u_{\epsilon_l}-\phi\big)\Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l}-|x_n|^{p-2}x_n\Big)\;dxdt\\
&+\int_{Q_R}\eta B(x,e)\Big(\nabla(u_{\epsilon_l}-\phi)\cdot S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})-g\nabla(u-\phi)\Big)\;dxdt\\
&-\int_{Q_R}g(\varphi\eta)_t\;dxdt-\int_{Q_R}\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_tS_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big)\;dxdt\\
&+\int_{Q_R}\alpha u_{\epsilon_l}\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t\;dxdt+\int_{Q_R}\alpha u(\varphi\eta)_t\;dxdt\\
&-\int_{Q_R}\frac{\alpha}{2}\eta_t(u-x_n)^2\;dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

Par (4.60), nous avons

$$
\lim_{l\to+\infty}\int_{Q_R}\eta\nabla\phi\cdot\Big(B(x,\nabla u_{\epsilon_l})-\mathcal{B}(x,t)\Big)\;dxdt=0.\tag{4.88}
$$

D'autre part, on a

$$
\overline{\lim}-\int_{Q_R}\epsilon_l\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t|u_{\epsilon_l t}|^{p-2}u_{\epsilon_l t}\;dxdt\le 0,\tag{4.89}
$$

puisque

$$\int_{Q_R} \epsilon_l \big((u_{\epsilon_l} - \phi)\eta\big)_t |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} \; dxdt =$$
$$= \int_{Q_R} \epsilon_l \eta |u_{\epsilon_l t}|^p \; dxdt + \int_{Q_R} \epsilon_l |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} u_{\epsilon_l} \eta_t \; dxdt - \int_{Q_R} \epsilon_l \big(\phi\eta\big)_t |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} \; dxdt,$$

le premier terme de coté droite de l'égalité ci-dessus est positive. De plus, en utilisant (4.66) et le fait que u_{ϵ_l} est uniformément bornée, on obtient (4.89).
De (4.63), on déduit :

$$\begin{aligned} &\int_{Q_R} \eta B(x,e) \cdot \Big(\nabla(u_{\epsilon_l} - \phi) S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) - g\nabla(u-\phi)\Big) \; dxdt \\ &= \int_{Q_R} \eta S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) \nabla(u_{\epsilon_l} - x_n) \cdot B(x,e) \; dxdt \\ &- \int_{Q_R} \nabla(\phi\eta) \cdot \big(S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) - g\big) B(x,e) \; dxdt. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Par (4.59), le dernier terme de (4.90) tend vers 0. En appliquant la formule de divergence, il vient :

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{Q_R} \eta S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) \nabla(u_{\epsilon_l} - x_n) \cdot B(x,e) \; dxdt \Big| \qquad (4.91)\\ &= \Big| \int_{Q_R} \nabla\Big(\int_0^{\min(u_{\epsilon_l} - x_n, \epsilon_l)} \big(1 - H_{\epsilon_l}(s)\big) \; ds\Big) \cdot \eta B(x,e) \; dxdt \Big| \\ &\leq \epsilon_l \Big(\int_{\partial\Omega_R \times]0,R[} \eta | \; B(x,e)\nu| \; d\sigma(x,t) + \int_{Q_R} \eta \big| div\big(B(x,e)\big)\big| \; dxdt \Big). \end{aligned}$$

On obtient de (4.90)–(4.91) :

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{Q_R} \eta B(x,e) \cdot \Big(\nabla(u_{\epsilon_l} - \phi) S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}) - g\nabla(u-\phi)\Big) \; dxdt = 0. \tag{4.92}$$

Également, on a

$$\lim_{l \to +\infty} - \int_{Q_R} \big((u_{\epsilon_l} - \phi)\eta\big)_t S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big) \; dxdt - \int_{Q_R} g(\varphi\eta)_t \; dxdt = 0, \tag{4.93}$$

puisque

$$\begin{aligned} &- \int_{Q_R} \big((u_{\epsilon_l} - \phi)\eta\big)_t S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big) \; dxdt - \int_{Q_R} g(\varphi\eta)_t \; dxdt \\ &= - \int_{Q_R} \eta_t S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big)\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big) \; dxdt - \int_{Q_R} \eta S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big)\big(u_{\epsilon_l} - x_n\big)_t \; dxdt \\ &+ \int_{Q_R} \big(S_{\epsilon_l}\big(u_{\epsilon_l}\big) - g\big)(\varphi\eta)_t \; dxdt, \end{aligned} \tag{4.94}$$

en raisonnant comme dans (4.73), le premier terme du côté droit de (4.94) converge vers 0. En intégrant par parties, on voit comme dans (4.91) que le second terme tend aussi vers 0. En utilisant (4.59), on obtient (4.93). Ensuite, par (4.43) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{Q_R} \epsilon_l\eta\big(u_{\epsilon_l}-\phi\big)\big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l}-|x_n|^{p-2}x_n\big)\ dxdt\Big|\\
&\leq \int_{Q_R} \epsilon_l\eta\Big(M+|x_n|+\varphi\Big)\Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-1}-|x_n|^{p-1}\Big)\ dxdt \qquad (4.95)\\
&\leq \epsilon_l^{1/p}\Big\{\Big(\int_{Q_R}\epsilon_l|x_n|^p\ dxdt\Big)^{1/q}+\Big(\int_{Q_R}\epsilon_l|u_{\epsilon_l}|^p\ dxdt\Big)^{1/q}\Big\}\Big|\eta\big(M+|x_n|+\varphi\big)\Big|_p,
\end{aligned}$$

et en faisant $l\to+\infty$ dans (4.95) et tenant compte de (4.57), on déduit

$$\lim_{l\to+\infty}\int_{Q_R}\epsilon_l\eta\big(u_{\epsilon_l}-\phi\big)\big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l}-|x_n|^{p-2}x_n\big)\ dxdt=0. \tag{4.96}$$

De plus, observons que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_R}\alpha u_{\epsilon_l}\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t\ dxdt &= \int_{Q_R}\alpha\big((u_{\epsilon_l}-x_n)\eta\big)_t\big(u_{\epsilon_l}-x_n\big)\ dxdt\\
&+\int_{Q_R}\alpha u_{\epsilon_l}(\varphi\eta)_t\ dxdt-\int_{Q_R}\alpha x_n\big(\big(u_{\epsilon_l}-x_n\big)\eta\big)_t\ dxdt. \qquad (4.97)
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à t, on obtient

$$\int_{Q_R}\alpha\big((u_{\epsilon_l}-x_n)\eta\big)_t\big(u_{\epsilon_l}-x_n\big)\ dxdt=\int_{Q_R}\frac{\alpha}{2}\eta_t(u_{\epsilon_l}-x_n)^2\ dxdt, \tag{4.98}$$

$$\int_{Q_R}\alpha x_n\big(\big(u_{\epsilon_l}-x_n\big)\eta\big)_t\ dxdt=0, \tag{4.99}$$

alors, de (4.97)-(4.99) on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R}\alpha u_{\epsilon_l}\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t\ dxdt+\int_{Q_R}\alpha u(\varphi\eta)_t\ dxdt-\int_{Q_R}\frac{\alpha}{2}\eta_t(u-x_n)^2\ dxdt\\
&=\int_{Q_R}\frac{\alpha}{2}\eta_t\big((u_{\epsilon_l}-x_n)^2-(u-x_n)^2\big)\ dxdt-\int_{Q_R}\alpha(\varphi\eta)_t\big(u_{\epsilon_l}-u\big)\ dxdt.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{Q_R}\eta_t\big((u_{\epsilon_l}-x_n)^2-(u-x_n)^2\big)\ dxdt\Big| &= \Big|\int_{Q_R}\eta_t(u_{\epsilon_l}+u-2x_n)\big(u_{\epsilon_l}-u\big)\ dxdt\Big|\\
&\leq\Big|\eta_t\big(u_{\epsilon_l}+u-2x_n\big)\Big|_2\Big|u_{\epsilon_l}-u\Big|_2,
\end{aligned}$$

et
$$\Big|\int_{Q_R}(\varphi\eta)_t\big(u_{\epsilon_l}-u\big)\ dxdt\Big| \leq \Big|(\varphi\eta)_t\Big|_2\Big|u_{\epsilon_l}-u\Big|_2.$$
En utilisant la Remarque 4.4.1, on déduit
$$\lim_{l\to+\infty}\int_{Q_R}\eta_t\big((u_{\epsilon_l}-x_n)^2-(u-x_n)^2\big)\ dxdt=0, \tag{4.101}$$
$$\lim_{l\to+\infty}\int_{Q_R}(\varphi\eta)_t\big(u_{\epsilon_l}-u\big)\ dxdt=0. \tag{4.102}$$
En faisant $l\to\infty$ dans (4.100) et utilisant (4.101)-(4.102), il vient
$$\lim_{l\to\infty}\int_{Q_R}\alpha u_{\epsilon_l}\big((u_{\epsilon_l}-\phi)\eta\big)_t\ dxdt+\int_{Q_R}\alpha u(\varphi\eta)_t\ dxdt$$
$$-\int_{Q_R}\frac{\alpha}{2}\eta_t(u-x_n)^2\ dxdt=0. \tag{4.103}$$
En passant à la limite sup dans (4.87), et utilisant (4.88), (4.89), (4.92), (4.93), (4.96), et (4.103), on obtient
$$\overline{\lim}\int_{Q_R}\eta\nabla u_{\epsilon_l}\cdot B(x,\nabla u_{\epsilon_l})\ dxdt\leq\int_{Q_R}\eta\nabla u\cdot\mathcal{B}(x,t)\ dxdt,$$
$$\forall\eta\in\mathcal{D}(0,R),\eta\geq 0, \tag{4.104}$$
Maintenant, on considère $v\in L^p(0,R;W^{1,p}(\Omega_R))$ et $\eta\in\mathcal{D}(0,R)$ tel que $\eta\geq 0$. L'utilisation de (4.3) donne
$$\int_{Q_R}\eta\nabla\big(u_{\epsilon_l}-v\big)\cdot\big(B(x,\nabla u_{\epsilon_l})-B(x,\nabla v)\big)\ dxdt\geq 0\quad\forall l\in\mathbb{N},$$
qui peut s'écrire comme
$$\int_{Q_R}\eta\nabla u_{\epsilon_l}\cdot B(x,\nabla u_{\epsilon_l})\ dxdt-\int_{Q_R}\eta\nabla v\cdot B(x,\nabla u_{\epsilon_l})\ dxdt \tag{4.105}$$
$$-\int_{Q_R}\eta\nabla\big(u_{\epsilon_l}-v\big)\cdot B(x,\nabla v)\ dxdt\geq 0\quad\forall l\in\mathbb{N}.$$
En passant à la limite sup dans (4.105) et tenant compte de (4.104), (4.58) et (4.60), on obtient
$$\int_{Q_R}\eta\nabla\big(u-v\big)\cdot\big(\mathcal{B}(x,t)-B(x,\nabla v)\big)\ dxdt\geq 0. \tag{4.106}$$
Ainsi, si on choisit dans (4.106), $v=u-\lambda\xi$ tel que $\xi\in L^p(0,R,W^{1,p}(\Omega_R))$, et $\lambda\in[0,1]$, on obtient
$$\int_{Q_R}\eta\nabla\xi\cdot\big(\mathcal{B}(x,t)-B(x,\nabla u-\lambda\nabla\xi)\big)\ dxdt\geq 0,$$
$$\forall\lambda\in[0,1],\quad\forall\xi\in L^p(0,R,W^{1,p}(\Omega_R)). \tag{4.107}$$

En utilisant la continuité de $y \mapsto B(.,y)$, (4.55) et du théorème de Lebesgue en passant $\lambda \to 0$ dans (4.107), on déduit

$$\int_{Q_R} \eta \nabla\xi \cdot \big(\mathcal{B}(x,t) - B(x,\nabla u)\big)\ dxdt \geq 0. \tag{4.108}$$

Enfin, on voit que l'inégalité ci-dessus reste vraie si on remplace ξ par $-\xi$. Alors

$$\int_{Q_R} \nabla\xi \cdot B(x,\nabla u) dxdt = \int_{Q_R} \nabla\xi \cdot \mathcal{B}(x,t)\ dxdt,$$

qui est équivalent à

$$\int_{Q_\infty} \nabla\xi \cdot B(x,\nabla u) dxdt = \int_{Q_\infty} \nabla\xi \cdot \mathcal{B}(x,t)\ dxdt.$$

D'où (4.85). ■

Soit $\xi \in W^{1,p}(Q_\infty)$ tel que $\xi = 0$ sur Υ_D^1, $\xi \geq 0$ sur Υ_D^0 et $supp(\xi)$ est borné. Il existe $R > 0$ suffisamment grand tel que $supp(\xi) \subset \overline{Q_R}$. Pour tout $\delta > 0$, on définit

$$\xi_\delta = \min\big(\xi, \frac{u_{\epsilon_l} - x_n}{\delta}\big).$$

On remarque que $\xi_\delta \in W^{1,p}_{loc}(Q_\infty)$, $\xi_\delta = 0$ sur Σ_D et $supp(\xi_\delta)$ est borné. Nous utilisons ξ_δ comme fonction test dans (P_{ϵ_l}), nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_{Q_R} &\Big[\xi_{\delta t}\Big(\epsilon_l|u_{\epsilon_l t}|^{p-2}u_{\epsilon_l t} + G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})\Big) + \epsilon_l\xi_\delta\Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2}x_n\Big)\\ &+\nabla\xi_\delta \cdot \Big(B(x,\nabla u_{\epsilon_l}) - S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})B(x,e)\Big)\Big]\ dxdt \\ &= \int_{\Omega_R} \xi_\delta(x,0)\Big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\Big)\ dx.\end{aligned} \tag{4.109}$$

En tenant compte du fait que $\xi_\delta(x,R) = 0$ p.p. dans Ω_R et

$$\begin{aligned}\int_{Q_R} \xi_{\delta t} G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})\ dxdt &= \int_{Q_R} \xi_{\delta t}\big(1 - H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) - \alpha u_{\epsilon_l}\big)\ dxdt\\ &= \int_{\Omega_R} \alpha\xi_\delta(x,0)u_{\epsilon_l}(x,0)\ dx + \int_{Q_R} \alpha u_{\epsilon_l t}\xi_\delta\ dxdt\\ &- \int_{\Omega_R} \xi_\delta(x,0)\ dx - \int_{Q_R} \xi_{\delta t} H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)\ dxdt,\end{aligned}$$

donc, (4.109) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \Big[\epsilon_l \xi_{\delta t} |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} + \epsilon_l \xi_\delta \Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2} u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2} x_n\Big) \\
&+\nabla \xi_\delta \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - B(x,e)\Big)\Big] \ dxdt + \int_{Q_R} \nabla \xi_\delta \cdot H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) B(x,e) \ dxdt \\
&- \int_{Q_R} \xi_{\delta t} H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) \ dxdt + \int_{\Omega_R} \alpha \xi_\delta(x,0)(u_{\epsilon_l} - x_n)(x,0) \ dx \\
&+ \int_{Q_R} \alpha u_{\epsilon_l t} \xi_\delta \ dxdt = \int_{\Omega_R} \xi_\delta(x,0)\big(\alpha(u_0(x) - x_n) + 1 - g_0(x)\big) \ dx.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \epsilon_l \xi_{\delta t} |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} + \nabla \xi_\delta \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - B(x,e)\Big) \ dxdt \\
&= \int_{[u_{\epsilon_l} - x_n < \delta \xi]} \frac{\epsilon_l}{\delta} |u_{\epsilon_l t}|^p + \nabla \big(\frac{u_{\epsilon_l} - x_n}{\delta}\big) \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - B(x,e)\Big) \ dxdt \\
&+ \int_{[u_{\epsilon_l} - x_n \geq \delta \xi]} \epsilon_l \xi_t |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} + \nabla \xi \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - B(x,e)\Big) \ dxdt.
\end{aligned} \tag{4.111}$$

En utilisant (4.111), (4.3) et tenant compte $\alpha(u_0(x) - x_n) + 1 - g_0(x) \geq 0$ p.p. $x \in \Omega_R$ dans (4.110), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{[u_{\epsilon_l} - x_n \geq \delta \xi]} \Big[\epsilon_l \xi_t |u_{\epsilon_l t}|^{p-2} u_{\epsilon_l t} + \epsilon_l \xi_\delta \Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2} u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2} x_n\Big) \\
&+\nabla \xi \cdot \Big(B(x, \nabla u_{\epsilon_l}) - B(x,e)\Big)\Big] \ dxdt + \int_{Q_R} \nabla \xi_\delta \cdot H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) B(x,e) \ dxdt \\
&- \int_{Q_R} \xi_{\delta t} H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) \ dxdt + \int_{\Omega_R} \alpha \xi_\delta(x,0)(u_{\epsilon_l} - x_n)(x,0) \ dx \\
&\leq \int_{\Omega_R} \xi(x,0)\Big(\alpha(u_0(x) - x_n) + 1 - g_0(x)\Big) \ dx.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Ensuite, en employant (4.4), on peut utiliser la formule de divergence à obtenir :

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \nabla \xi_\delta H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) B(x,e) \ dxdt = \\
&- \int_{Q_R} div\Big(H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) B(x,e)\Big) \xi_\delta \ dxdt + \int_{\partial Q_R} H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n) B(x,e) \nu \cdot \xi_\delta \ d\sigma_R(x,t).
\end{aligned}$$

Puisque $\xi_\delta \to \xi$ p.p. dans $[u_{\epsilon_l} > x_n]$ quand δ tend vers 0, on obtient par le théorème de

Lebesgue,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int_{Q_R} \nabla\xi_\delta \cdot H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)B(x,e)\ dxdt = \\
&-\int_{Q_R} div\Big(H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)B(x,e)\Big)\xi\ dxdt + \int_{\partial Q_R} H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)B(x,e)\nu\cdot\xi\ d\sigma_R(x,t) \\
&= \int_{Q_R} \nabla\xi \cdot H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)B(x,e)\ \ dxdt. \qquad (4.113)
\end{aligned}$$

De la même manière que la preuve de (4.113), on prouve que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Q_R} \xi_{\delta t} H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)\ dxdt = \int_{Q_R} \xi_t H_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l} - x_n)\ dxdt. \qquad (4.114)$$

En faisant $\delta \to 0$ dans (4.112) et utilisant (4.113)-(4.114) et tenant compte du fait que

$$\int_{Q_R} \alpha u_{\epsilon_l t}\xi\ dxdt = -\int_{\Omega_R} \alpha u_{\epsilon_l}(x,0)\xi(x,0)\ dx - \int_{Q_R} \alpha u_{\epsilon_l}\xi_t\ dxdt$$

et

$$\int_{\Omega_R} \xi(x,0)\ dx = -\int_{Q_R} \xi_t\ dxdt,$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \Big[\xi_t\Big(\epsilon_l|u_{\epsilon_l t}|^{p-2}u_{\epsilon_l t} + G_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})\Big) + \epsilon_l\xi\Big(|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2}x_n\Big) \qquad (4.115)\\
&\quad +\nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u_{\epsilon_l}) - S_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l})B(x,e)\Big)\Big]\ dxdt \\
&\le \int_{\Omega_R} \xi(x,0)\big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big)\ dx.
\end{aligned}$$

En passant à la limite comme $l \to \infty$ dans (4.115) et utilisant (4.59), (4.60), (4.65), (4.66), (4.85) et le fait que $|u_{\epsilon_l}|^{p-2}u_{\epsilon_l} - |x_n|^{p-2}x_n \to 0$ fortement dans $L^p(Q_R)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_R} \xi_t\big(g - \alpha u\big) + \nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\Big)\ dxdt \\
&\le \int_{\Omega_R} \xi(x,0)\big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big)\ dx,
\end{aligned}$$

qui peut s'écrit comme

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\infty} \xi_t\big(g - \alpha u\big) + \nabla\xi\cdot\Big(B(x,\nabla u) - gB(x,e)\Big)\ dxdt \\
&\le \int_{\Omega_\infty} \xi(x,0)\big(\alpha u_0(x) - g_0(x)\big)\ dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, la preuve du Théorème 4.1.3 est terminée.

Conclusion

Cette thèse apporte une contribution à l'étude analytique d'une classe de problèmes à frontière libre. Nous avons prouvé l'unicité de la solution d'un problème d'évolution non linéaire de la digue dans un milieu poreux hétérogène borné de deux ou trois dimensions avec un fond imperméable horizontal et l'existence d'une solution du problème d'évolution non linéaire de la digue dans un domaine multidimensionnel non borné associé à un fluide compressible ou incompressible. Cette étude peut constituer une référence pour renforcer la contribution au secteur de l'eau en Algérie.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] H.W. Alt, Strömungen durch inhomogene poröse, Medien mit freiem Rand. Journal furüdie Reine und Angewandte Mathematik 305, (1979), 89–115.

[3] H.W. Alt, The fluid flow through porous media. Regularity of the free surface, Manuscripta Math. 21, (1977), 255–272.

[4] H.W. Alt, A free boundary problem associated with the flow of ground water, Arch. Rat. Mech. Anal. 64, (1977), 111–126.

[5] S.J. Alvarez, Problemas de frontera libre en teoria de lubrificacion, Ph.D. Thesis, Universidad Complutense de Madrid, Spain, 1986.

[6] S.J. Alvarez, J. Carrillo, A free boundary problem in theory of lubrication, Comm. Partial Differential Equations 19, (1994), 1743–1761.

[7] S.J. Alvarez, R. Oujja, On the uniqueness of the solution of an evolution free boundary problem in theory of lubrication, Nonlinear Anal. 54, (2003), 845–872.

[8] F. Andreu, J.M. Mazón, J.S. Moll, The total variation flow with nonlinear boundary conditions, Asymptot. Anal. 43, (2005), 9–46.

[9] C. Baiocchi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media, Proceedings of the International Congress of Mathematicians – Vancouver, (1974), 237–243.

[10] C. Baiocchi, Free boundary problems in fluid flows through porous media and variational inequalities, in “Free Boundary Problems” – Proceedings of a seminar held in Pavia Sept–Oct (1979), Vol. 1, Roma, 1980, 175–191.

[11] C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes, G.A. Pozzi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : existence and uniqueness theorems, Ann. Mat. Pura Appl. 96, (1973), 1–82.

[12] C. Baiocchi, A. Friedman, A filtration problem in a porous medium with variable permeability, Ann. Mat. Pura Appl. 4(114), (1977), 377–393.

[13] G. Bayada, M. Chambat, Existence and uniqueness for a lubrication problem with nonregular conditions on the free boundary, Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 3, (1984), no. 2, 543-557.

[14] M. Ben Attia, A. Zaouche, M. Bousselsal, Uniqueness of solution of a evolution dam problem in a heterogenous porous medium, Opuscula Math. 1, (2022), 5-29.

[15] A. Bermúdez, M. C. Muñiz, P. Quintela, Existence and uniqueness for a free boundary problem in aluminum electrolysis, J. Math. Anal. Appl. 191, No. 3, (1995), 497-527.

[16] Ph. Bénilan, J. Carrillo, P. Wittbold, Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 29, (2000), 313–327.

[17] M. Bousselsal, A. Lyaghfouri, E. Zaouche, On the existence of a solution of a class of non-stationary free boundary problems, Glas. Mat. Ser. III 53(2), (2018), 449-475.

[18] M. Bousselsal, E. Zaouche, The evolution dam problem for a compressible fluid with nonlinear Darcy's law and Dirichlet boundary condition, Math. Methods Appl. Sci. 44(1), (2021), 66-90.

[19] F.E. Browder, Problèmes non-linéaires, Séminaire de Mathématiques supérieures – été 1965. Les presses de l'Université de Montréal.

[20] H. Brézis. Functional analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.

[21] H. Brézis, D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, Sur une nouvelle formulation du problème de l' ´ecoulement à travers une digue, C.R. Acad. Sci Paris Serie A, 287, (1978), 711–714.

[22] J. Carrillo, An evolution free boundary problem : filtrations of a compressible fluid in a porous medium, Research Notes in Mathematics, Pitman, London, Vol. 89, (1983), 97-110.

[23] J. Carrillo, On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem, Nonlinear Anal. 22, (1994), 573–607.

[24] J. Carrillo, M. Chipot, On the dam problem, J. Differential Equations 45, (1982), 234–271.

[25] J. Carrillo, A. Lyaghfouri, A filtration problem with nonlinear Darcy's law and generalized boundary conditions, Adv. Differential Equation 5(4-6), (2000), 515-555.

[26] J. Carrillo, A. Lyaghfouri, The dam problem for nonlinear Darcy's laws and Dirichlet boundary conditions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 26, (1998), 453–505.

[27] J. Carrillo, P. Wittbold, Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems, J. Differential Equations 156, (1999), 93–121.

[28] L.A. Caffarelli, A. Friedman, The dam problem with two layers, Arch. Ration. Mech. Anal. 68, (1978), 125–154.

[29] J.I. Díaz : Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries, Pitman, Boston, 1985.

[30] E. DiBenedetto, A. Friedam, Periodic behaviour for the evoltionary dam problem and related free boundary problems Evolutionary dam problem, Comm. Partial Differential Equations 11(12), (1986), 1297-1377

[31] G. Gilardi, A new approach to evolution free boundary problems, Comm. Partial Differential Equations 4(10), (1979), 1099-1122.

[32] G. Gilardi, D. Kröner, The dam problem in unbounded domains, Ann. Mat. pura App. 164, (1993), 321-364.

[33] V.G. Jakubowski, P. Wittbold, On a nonlinear elliptic-parabolic integro-differential equation with L1-data, J. Differential Equations 197, (2004), 427–445.

[34] K.H. Karlsen, M. Ohlberger, A note on the uniqueness of entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 275, (2002), 439–458.

[35] S.N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math.USSR-Sb. 10, (1970), 217–243.

[36] M. Lazar, D. Mitrović, Existence of solutions for a scalar conservation law with a flux of low regularity, Electron. J. Differential Equations 2016, (2016), 1–18.

[37] JL. Lions, Quelques méthodes de résoltion des problèmes aux limites non linéaires, Dunod/Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[38] A. Lyaghfouri, The evolution dam problem for nonlinear Darcy's law and Dirichlet boundary conditions, Port. Math. 56, (1999), 1–38.

[39] A. Lyaghfouri, The evolution dam problem with nonlinear Darcy's law and leaky boundary conditions, Rie. Mat. XLVII(2), (1998), 297-357.

[40] A. Lyaghfouri, A regularity result for a heterogeneous evolution dam problem, Z.Anal.Anwend. 24, (2005), 149–166.

[41] A. Lyaghfouri, E. Zaouche, Uniqueness of solution of the unsteady filtration problem in heterogeneous porous media, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.RACSAM 112, (2018), 89–102.

[42] F.Kh. Mukminov, Uniqueness of the renormalized solutions to the Cauchy problem for an anisotropic parabolic equation, Ufa Math. J. 8, (2016), 44–57.

[43] F.Kh. Mukminov, Uniqueness of the renormalized solution of an elliptic-parabolic problem in anisotropic Sobolev-Orlicz spaces, Sb. Math. 208, (2017), 1187–1206.

[44] S. Ouaro, H. Toure, Uniqueness of entropy solutions to nonlinear elliptic-parabolic problems, Electron. J. Differential Equations 2007, (2007), 1–15.

[45] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press 1974.

[46] G. Stampacchia, On the filtration of a fluid through a porous medium with variable cross section, Russian Math. Surveys, 29(4), (1974), 89–102

[47] A. Torelli, Existence and uniqueness of the solution of a non steady free boundary, Boll. Un. Mat.Ital.14-B(5), (1977), 423-466.

[48] A. Torelli, On a free boundary value problem connected with a non steady filtration phenomenon, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 4(4), (1977), 33–59.

[49] E.Yu. Panov, On existence and uniqueness of entropy solutions to the Cauchy problem for a conservation law with discontinuous flux, J. Hyperbolic Differ. Equ. 6, (2009), 525–548.

[50] E. Zaouche, Uniqueness of solution in a rectangular domain of an evolution dam problem with heterogeneous coefficients, Electron. J. Differential Equations 2018, (2018), 1–17.

[51] E. Zaouche, Uniqueness of solution of a heterogeneous evolution dam problem associated with a compressible fluid flow through a rectangular porous medium, Glas. Mat. Ser. III 55, (2020), 93–99.

[52] E. Zaouche, M. Bousselsal, M. Ben Attia, Nonlinear evolution dam problems in an unbounded domain, Math. Meth. Appl. Sci. Accepted, 2023.