



UNIVERSITE KASDI MERBAH DE  
OUARGLA  
faculté de Mathématique et des Sciences de la  
Matière



# DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

MASTER

Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par : GHERIB SALMA

T H E M E

Chaotification des applications linéaires en n-D par une fonction bornée

soutenu publiquement, le :15/06/2023

devant le jury composé de :

- . Mr A. Hocine            M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla    Président
- . Mr A. K. Benchikh    M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla    Examineur
- . Mr A. R.Hachifa      M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla    Examineur
- . Mr M. Mammeri       M.C.B Université KASDI Merbah Ouargla    Rapporteur

# Remerciement

En premier lieu, je remercie **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour pouvoir réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire Monsieur **Dr. Mohammed Mammeri**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Mes remerciements vont également à Monsieur le professeur **A. Hocine**, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire. Mes remerciements vont aussi à Monsieur le professeur **A. K. Benchikh** et **A. R. Hachifa** pour la participation au jury. Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques l'université d'Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, " Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier".

Enfin, j'adresse mes vifs remerciements à tous mes frères, mes sœurs, mes amis et mes collègues des études pour leur sympathie et leur encouragement, surtout dans les moments difficiles.

# Dédicace

Je dédie ce travail :

À ma chère mère et mon cher père, source de la tendresse.

À mon cher frère et mes sœurs, source de joie et de bonheur.

À ma chère grand-mère.

À tous les membres de ma famille.

À toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicace</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations générales</b>	<b>3</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Système dynamique à temps continu . . . . .	4
1.2.1 Système autonome et non autonome . . . . .	4
1.2.2 Flot . . . . .	5
1.2.3 Trajectoire ( ou orbite) . . . . .	5
1.2.4 L'espace des phases . . . . .	6
1.2.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatives . . . . .	6
1.2.6 Points critiques . . . . .	6
1.2.7 Orbites périodiques . . . . .	7
1.3 Système dynamique à temps discret . . . . .	7
1.3.1 Définition et représentation . . . . .	7
1.3.2 Orbites positives et orbites négatives . . . . .	8
1.3.3 Points fixes . . . . .	9

1.3.4	Stabilité . . . . .	9
1.3.5	Stabilité locale . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Systèmes dynamiques et chaos</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction . . . . .	11
2.2	Attracteur et attracteur chaotique [4] . . . . .	12
2.3	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	13
2.4	Attracteur . . . . .	14
2.4.1	Ensemble invariant . . . . .	14
2.4.2	Définitions d'attracteur . . . . .	14
2.4.3	Bassin d'attraction . . . . .	15
2.4.4	Propriétés d'attracteurs . . . . .	15
2.5	Les différents types d'attracteurs . . . . .	16
2.5.1	Attracteurs réguliers . . . . .	16
2.6	Attracteurs chaotiques . . . . .	16
2.6.1	Définitions d'attracteur chaotique . . . . .	17
2.6.2	Les différents types d'attracteurs chaotiques . . . . .	17
2.7	Exposant de Lyapunov . . . . .	20
2.7.1	Exposant de Lyapunov d'un application à temps discret . . . . .	20
2.8	Routes vers le chaos (bifurcation) . . . . .	23
2.8.1	Différente types des routes vers le chaos . . . . .	23
2.8.2	Diagramme de bifurcation . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Chaotification des applications linéaires en n-D par une fonction bornée</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Méthode chaotification utilisant un fonction bornée . . . . .	27
3.2.1	Preuve . . . . .	29
3.2.2	Exemple . . . . .	34
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Introduction

La théorie du chaos s'applique à de nombreux modèles développés pour expliquer des situations rencontrées dans presque tous les domaines de la connaissance scientifique [28], [29]. L'étude du chaos touche donc de larges champs de recherche, allant de la physique à la psychologie, en passant par l'économie [15] et la biologie [19], [26]. Elle donne un cadre mathématique permettant une étude quantitative de phénomènes auparavant étudiés de manière qualitative. Comprendre les systèmes chaotiques permet notamment de connaître les limites des modèles utilisés.

Bien que les bases mathématiques de la théorie aient été jetées dès le **XIXe siècle** par **H. Poincaré** [20], son importance en physique n'a vraiment été mise en évidence qu'à partir de 1962, par **E. N. Lorenz** [17]. Ce dernier, météorologue et physicien, a montré dans un article célèbre que certains systèmes en mécanique des fluides pouvaient exhiber une sensibilité aux conditions initiales. À sa suite, les scientifiques se sont intéressés au chaos, montrant son importance dans de nombreux domaines de la connaissance.

Une des approches nouvelles pour aborder le chaos a été l'émergence de l'approche statistique des systèmes complexes.

Mathématiquement, le chaos est une propriété qui émerge lors de l'étude des systèmes dynamiques. Il apparaît dans des systèmes non-linéaires discrets (comme la suite logistique) ou continus à plus de 3 degrés de liberté (comme le système de Lorenz). La représentation graphique des solutions de ces systèmes conduit souvent à des structures caractéristiques appelées «attracteurs étranges», comme le papillon de Lorenz représenté ci-contre. Ces figures possèdent souvent une structure fractale.

Chaotification des applications linéaires en n-D n'ont pas été largement étudiées comme

les applications non-linéaire en 2-D et 3-D [8], [10], [22], [24], [25].

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une nouvelle méthode de chaotification des applications linéaires en n-D utilisant une fonction de contrôle réelle bornée. Notre mémoire est organisée travers trois chapitres comme suit :

**Dans le premier chapitre :** On rappellera les principales définitions et notions générales aux systèmes dynamiques (continues et discrets ), utilisons tout au long de ce mémoire conservant système autonome et non autonome, systèmes conservatifs et systèmes dissipatives, points fixes et leurs stabilités.

**Dans le deuxième chapitre :** Nous présentons quelques définition et notions conservant attracteurs, attracteurs chaotique. L'exposants de Lyapunov et route vers le chaos (bifurcation).

**Dans Le troisième chapitre :** Nous avons présenter un méthode simple pour chaotifier une application linéaire en n-D par une fonction non-linéaire.

# Notations générales

$|\cdot|$  : Valeur absolue.

$\lambda_i$  : Les multiplicateurs caractéristiques.

$W^s$  : Les variétés stables.  $W^i$  : Les variétés instables.

" $\circ$ " : La loi de combinaison.

$\|\cdot\|$  : La norme.

$J(X)$  : La matrice jacobienne.



# Généralités sur les systèmes dynamiques

## 1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant le système dynamique étudié, nature qui dépend des outils utilisés (analytique, géométriques ou probabilistes).

Historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures et qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire. Les travaux de **Lagrange** sur le sujet consistèrent à interpréter l'influence des corps autres que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux : Ces travaux retrouvent des échos dans le théorème **K.A.M** (**Kolmogorov - Arnold - Moser**).

## 1.2 Système dynamique à temps continu

### 1.2.1 Système autonome et non autonome

#### Système autonome

Un système autonome est un système à évolution temporelle continue qui a une indépendance du temps  $t$  :

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t)) \quad (1.1)$$

### Système non autonome

Un système non autonome est un système à évolution temporelle continue qui dépend du temps  $t$  :

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t) \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Flot

On appelle flot de l'équation (1.2) l'application  $\varphi$  définie par :

$$\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \quad (1.3)$$

$$(t, x_0) \longrightarrow \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$$

Tel que

1. Pour chaque  $x_0$  fixe,  $t \longrightarrow \varphi(t, x_0)$  est une solution de l'équation différentielle.
2. Le flot  $\varphi$  possède les propriétés suivantes :
  - (a)  $\varphi(0, x_0) = x_0$  en d'autres termes  $\varphi(t, x_0)$  est la valeur à l'instant  $t$  de la solution qui vaut  $x_0$  en  $t = 0$ .
  - (b)  $\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0) \times \varphi(t_2, x_0)$  pour tous  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}$ . Donc  $\varphi$  possède la propriété d'un semi-groupe.

### 1.2.3 Trajectoire ( ou orbite)

Soit  $x_0 \in X$  une condition initiale et  $x(t, x_0)$  la solution de l'équation (1.3). L'ensemble des points  $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$  est la trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état passant par le points  $x_0$  à l'instant  $t = 0$ .

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectoire d'une application autonome ne dépend que l'état initial.

### 1.2.4 L'espace des phases

#### L'espace des phases(ou espace d'état)

Chez les physiciens, l'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques de système étudié des que la dimension  $n$  d'application dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment l'application évolue, l'outil de passe pour y palier est l'espace de phase. On considère chaque composante  $x_k$  de  $X$  (l'espace d'état) comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension  $n$ , l'évolution suivant  $t$  d'application se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

#### Portrait de phase

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un application dans le plan de phase : À chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point applications conservatifs et applications dissipatives. Le caractère conservatif ou non de l'application fait référence à un nouveau point de vue sur l'évolution dans l'espace de phases. En effet, les définitions que nous avons introduites jusqu'à présent sont implicitement rattachées à la détermination de trajectoires individuelles.

### 1.2.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatives

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

### 1.2.6 Points critiques

Les points  $\bar{x}$  où le champ de vitesse  $v$  s'annule sont appelés points critiques, ou points d'équilibre. Ils correspondent à des points fixes du flot :  $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$  pour tout  $t$ .

Un point d'équilibre est une trajectoire particulière. Une autre trajectoire particulière est la trajectoire qui se referme sur elle-même.

### 1.2.7 Orbites périodiques

On appelle cycle (ou trajectoire périodique ou orbite périodique) une trajectoire  $\phi_t(x)$  qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe  $T > 0$  vérifiant  $\phi_T(x) = x$ . Le plus petit réel  $T$  strictement positif tel que  $\phi_T(x) = x$  est appelé période, il est indépendant du point  $x$  pris sur la trajectoire.

## 1.3 Système dynamique à temps discret

### 1.3.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à la dynamique de **Poincaré** aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des applications discrets, ou dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes.

Un système dynamique discret est de la forme :

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{1.4}$$

Où  $G$  est une application régulière d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui même.

le système dynamique continu  $\frac{dx}{dt} = v(x)$  peut être étudié comme une application discret si, au lieu de considérer son flot continu  $\phi_t$  on considère  $\tau > 0$  ( "sorte" de période d'échantillonnage ) et l'application associée :

$$\begin{aligned} G : U &\longrightarrow U \\ x &\longrightarrow G(x) = \phi_\tau(x) \end{aligned}$$

Comme  $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$ , il est clair que l'étude de  $\phi_t$  lorsque  $t \longrightarrow +\infty$  et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$

Lorsque l'entier  $k$  tend vers  $+\infty$  doivent être très similaires. Nous rappelons ici, succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les systèmes dynamiques continues, se transposent aux les systèmes discrets.

### 1.3.2 Orbites positives et orbites négatives

#### Orbite positive

Une orbite positive  $O^+$  d'un point  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  est la suite des images de  $x_0$  par les composées successives de

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\}$$

Si  $G$  inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}(x_0)}_{k\text{-fois}}$$

#### Orbite négative

Une orbite négative  $O^-$  d'un point  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  est la suite des images de  $x_0$  par les composées successives de  $G$  :

$$O^-(x_0) = \{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\}$$

Si  $O^+(x_0)$  et  $O^-(x_0)$  existent alors l'orbite  $O(x_0)$  de  $x_0$  est l'ensemble :

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

**Exemple 1.1.** *l'application de Hénon [27] :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où  $a, b$  sont des paramètres réels, l'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^2$

### 1.3.3 Points fixes

Soit un système autonome ou non, caractérisé par l'équation d'état (1.1) ou (1.2), un état d'équilibre est caractérisé par la relation suivante :

$$F(x) = 0 \tag{1.5}$$

Tout solution  $x$  vérifiant cette relation est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe ou encore solution stationnaire.

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Ils s'agit des nœuds stables et des foyer stables.

### 1.3.4 Stabilité

[1] Puisque les solutions de la plupart des systèmes dynamiques ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées.

Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, la réponse de cette question a été étudiée en détail, par l'éminent mathématicien russe **A. Lyapunov (1857 - 1918)**.

Un point d'équilibre d'un système dynamique continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : Si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ou encore : Une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

### 1.3.5 Stabilité locale

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction réelle définie un système dynamique discret, soit  $Df(x_0)$  sa matrice jacobienne évaluée au point fixe  $x_0$  de l'application  $f$ , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe  $x_0$  on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

**Définition 1.1.** *Les valeurs propres du jacobienne  $Df(x_0)$  sont appelées multiplicateurs caractéristiques de  $f$  en  $x_0$ .*

**Définition 1.2.** *Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

**Définition 1.3.** *Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit instable si l'un des multiplicateurs est de module strictement supérieur à 1.*

**Définition 1.4.** *Le point fixe  $x_0$  de  $f$  est dit point selle si au moins un multiplicateur est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplicateurs sont tous de module strictement supérieur à 1.*

# Systemes dynamiques et chaos

## 2.1 Introduction

Les systemes dynamiques se sont developpes et specialises au cours du **XIXe siecle**. En effet, vers la fin du ce siecle le mathematicien, physicien et philosophe francais **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phenomene de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du probleme des trois corps.

Toujours au **XIXe siecle**, le mathematicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales.

Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

En **1963** le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minimale des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systemes répondant à cette propriété seront à partir de **1975** dénommés : Systemes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Évidemment, les travaux des prédécesseurs de **Lorenz** ont donc été très importants pour la compréhension du chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systemes chaotiques c'est **l'ordinateur**.



En effet, les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

## 2.2 Attracteur et attracteur chaotique [4]

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition communément admise l'attracteur. La notion d'attracteur est liée à un type de régime asymptotique. Dire d'un système dynamique qu'il possède plusieurs attracteurs, c'est aussi dire qu'il admet plusieurs types notablement différents de régimes asymptotiques.

En effet, puisqu'un attracteur est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3 ( $< 3$ ). Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 ( point fixe ) ni 2 (cycle). Nous recherchons donc des objets géométriques complexes de dimension non-entière. De telles structures existent, moyennant une définition plus générale du concept de dimension. Mandelbrot leur a donné le nom de fractales. Nous examinerons dans ce chapitre le problème de leur dimension. Pour l'heure, essayons de mieux caractériser ces attracteurs. On comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes périodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges ou chaotiques. Et pour cause : Il s'agit d'ensembles compacts, donc bornées, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la **S.C.I.** (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). Comment peut-on faire coexister l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la **S.C.I.**, qui implique leur écartement ? La solution réside dans le concept d'hyperbolicité de l'attracteur : L'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes sera dénommé variété stable. Notons que ceci ne peut se concevoir que dans un espace de phase d'au moins trois dimensions. Les attracteurs étranges sont caractéristiques l'évolution des applications chaotiques, au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. On va

parler de ce type d'attracteur dans ce chapitre.

## 2.3 Sensibilité aux conditions initiales

La **S.C.I** est un phénomène découvert dès la fin du *XIX<sup>ième</sup>* siècle par **Poincaré** dans des travaux concernant le problème à  $N$  corps en mécanique céleste, puis par **Hadamard** avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé « flot géodésique sur une surface à courbure négative ». Ce découvert a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en **1963** par **Lorenz** lors de ses travaux en météorologie [17].

Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Ce résultat est souvent vulgarisé sous le nom « d'effet papillon ».

La **S.C.I** se traduit mathématiquement par l'hyperbolicité d'une partie de l'espace des phases d'un système, hyperbolicité à laquelle est associée un ensemble d'exposants de **Lyapunov** positifs, ainsi qu'une entropie topologique également positive.

### Exemple 2.1. *S.C.I*

- *Évolution population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches.*

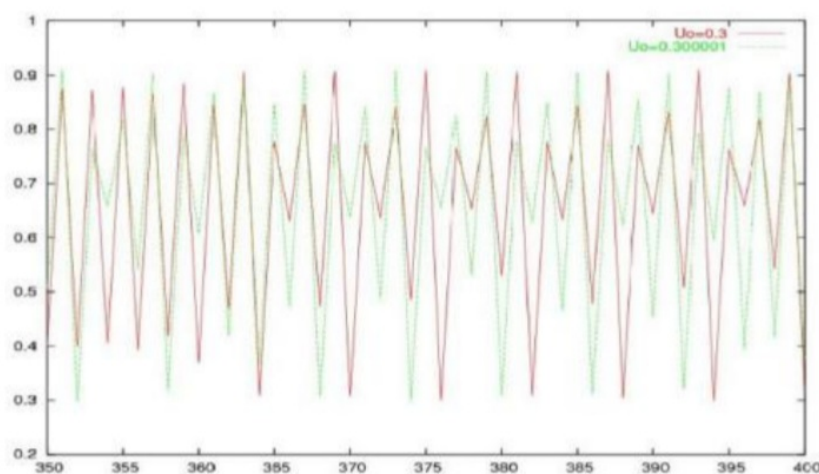


FIGURE 2.1 – Évolution population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches  $U_{n+1} = 4a(1 - U_n)$  ( $U_0 = 0.3$  et  $U_0 = 0.000001$ )

## 2.4 Attracteur

### 2.4.1 Ensemble invariant

**Définition 2.1.** [7] Soit  $A$  un sous-ensemble de l'espace des phases  $U$ ,  $A$  est dit ( resp. Positivement invariant ) par un flots  $\varphi_t$ , si pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$  ( resp. Dans  $[0, +\infty[$ ,  $\varphi_t(A)$  est inclus dans  $A$  ).

### 2.4.2 Définitions d'attracteur

**Définition 2.2.** Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne une seule définition possible d'attracteur.

**Définition 2.3. (Guckenheimer , Holmes)** : Soit  $\langle X, g \rangle$  un système dynamique discret, une sous-partie  $A$  de  $X$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée.
2.  $A$  est positivement invariante.
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - (a)  $U$  est positivement invariant.
  - (b)  $U$  est attiré par  $A$  :  $\forall u \in U$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(g^t(u), A) = 0.$$

**Exemple 2.2.** Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  considérons le système dynamique discret dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

*La variété instable*

$$\mathbb{R}_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

*Est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas. Au contraire, la variété stable*

$$\mathbb{R}_s^2 = W^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$$

*Est non-vide, fermée et strictement positivement invariante mais n'est pas un attracteur.*

### 2.4.3 Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition précédent est appelée voisinage attiré par  $A$ . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré  $U$ , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : En effet  $A$  peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. On donne quelques définitions du bassin d'attraction.

On appelle bassin d'attraction  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés, c'est à dire

$$B(A) = \bigcup \left\{ U \in P(X) : U \text{ est un voisinage attiré } A \right\}$$

**Définition 2.4.** [9] *Le bassin d'attraction  $B(A)$  d'un attracteur  $A$  est l'ensemble des conditions initiales ( l'ensemble des tous états initiaux des orbites ) est à long-temps un comportement approche vers  $A$ .*

### 2.4.4 Propriétés d'attracteurs

1.  $A$  est un sous ensemble bornée de l'espace est de volume nul, invariant par le flot  $\varphi_t$  autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ . Il existe un ensemble  $B \subset A$ , tel que pour tout voisinage de  $A$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de  $A$ . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans  $B$  tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin

d'attraction).

2. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

## 2.5 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : Les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

### 2.5.1 Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution d'application non chaotique, et peuvent être de trois sortes nous allons en apprendre davantage sur le premier sorte :

#### Les points fixes

Toute solution  $x_0$  vérifiant la relation  $g(x_0) = 0$  est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe, ou encore solution stationnaire. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés. Le point d'équilibre unique d'un pendule amorti est l'exemple classique de ce type d'attracteur.

## 2.6 Attracteurs chaotiques

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotique est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé. On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de **Poincaré**, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble

possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière [18]. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotique présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'**Hausdorff** [15].

### 2.6.1 Définitions d'attracteur chaotique

**Définition 2.5.** *L'attracteur chaotique(ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution du dynamiques des applications chaotiques.*

*Un sous-ensemble bornée  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une application  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $\mathbb{R}$  de  $A$ , c'est à dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1. Attraction :  $\mathbb{R}$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $\mathbb{R}$ , est entièrement contenue dans  $R$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.*
- 2. Il est continu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière ).*
- 3. Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*
- 4. Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle ( **S.C.I** ).*

### 2.6.2 Les différents types d'attracteurs chaotiques

Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principales :

1. Attracteur hyperbolique.
2. Attracteur de type de Lorenz.

## 3. Quasi attracteurs.

**Exemple 2.3. (L'attracteur de Hénon)** [20], [21] : L'attracteur de **M. Hénon (1976)**, associé à une application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forme  $(x, y) \rightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$ , est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaires. Le système différentiel initial (**application de Hénon-Heiles**) est un système hamiltonien non intégrable, il est traité par la méthode des surfaces de section de **Poincaré** pour lui associer. Un système du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de **Hénon**.

Ce procédé d'analyse d'un système différentiel non intégrable ( et c'est le cas le plus souvent ! ) par une méthode de section est assez courant, bien que l'application itératif associé soit lui aussi non linéaire, son analyse est souvent plus facile à développer.

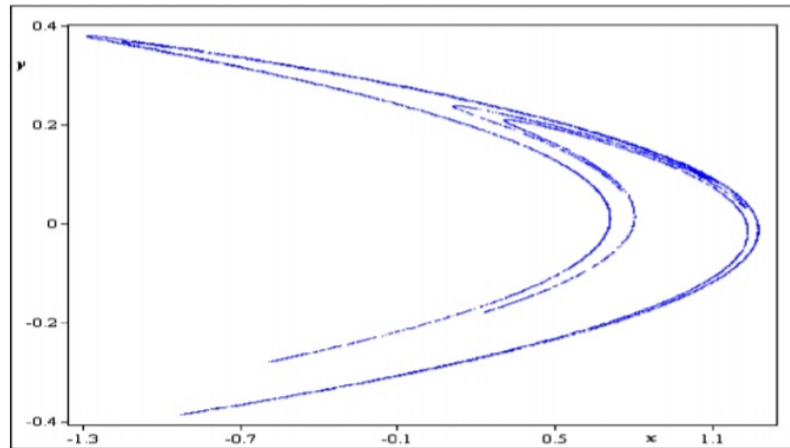


FIGURE 2.2 – Attracteur de Hénon avec  $(a, b) = (1.4, 0.3)$  et  $(x_0 = 0.25, y_0 = 0.25)$

**Exemple 2.4. (L'attracteur de Lorenz)** [17] : L'attracteur de **E.Lorenz** signe, en (1963), les débuts de la météorologie moderne : C'est en se posant la question de savoir comment prévoir le temps à l'avance que **E.Lorenz** a abouti à son système différentiel et à son attracteur étrange. Il s'agit de modéliser certains mouvements atmosphériques : On considère pour cela le mouvement d'un fluide entre deux plaques horizontales portées à des températures légèrement différentes ( la plaque la plus chaude en bas ). Pour une différence de température suffisante, il apparaît alors des tourbillons convectifs qui vérifient les équations de la convection de Rayleigh-Bénard dont la formulation est classique en

mécanique des fluides : On obtient un système de trois équations aux dérivées partielles. Avec quelques hypothèses simplificatrices, on peut associer à ce application aux dérivées partielles un système différentiel ordinaire de la forme ( $a, b, c$  étant des paramètres réelles,  $b$  décrivant la différence des températures des deux plaques) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases}$$

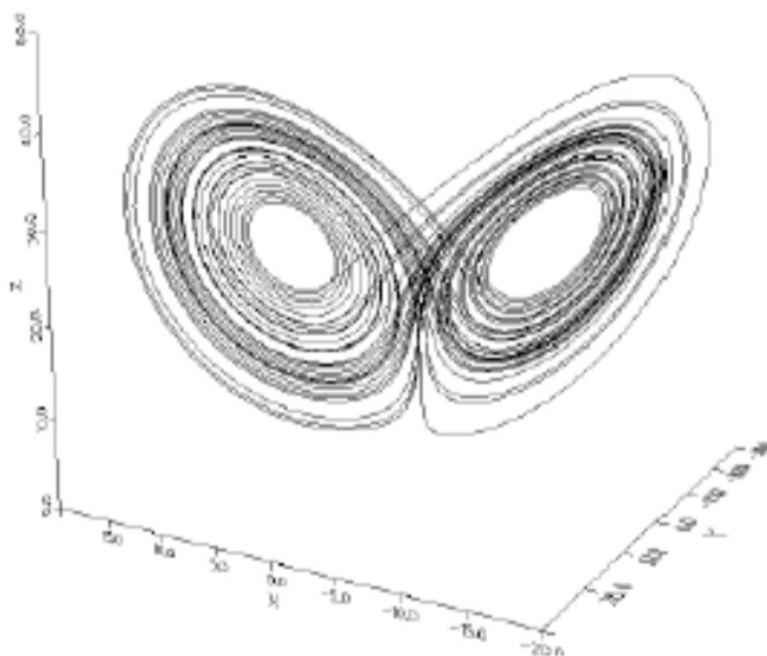


FIGURE 2.3 – Attracteur de Lorenz :  $(a, b, c) = (10, 28, 8/3)$

( On observera que les seconds membres de ces équations sont assez simples mais cependant non linéaires ).

On effectue une résolution numérique de ces équations : Pour  $b$  supérieur à une certaine valeur critique, on obtient un comportement chaotique pour les trajectoires de ce système ( l'attracteur étrange de Lorenz ), simulez une vue en 3 dimensions de l'attracteur de Lorenz. L'attracteur a la forme d'un papillon en vol, pour laquelle le deux "yeux" des ailes seraient remplacés par vide.



## 2.7 Exposant de Lyapunov

[13], [16], [23] L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'un système est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de **Lyapunov** qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'un système dynamique. Le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange .... Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (**S.C.I**). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. On peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence.

L'exposants de **Lyapunov** mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace de phases, ayant des conditions initiales différentes.

### 2.7.1 Exposant de Lyapunov d'un application à temps discret

$G$  un système dynamique unidimensionnelle  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $x^{n+1} = G(x_n)$ ,  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  deux point initiaux poroches après  $n$  itération on aura :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = \left| G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0) \right| \quad (2.1)$$

Quand  $n$  tend vers l'infini et  $\varepsilon$  tend vers 0

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)}{\varepsilon} \right| \quad (2.2)$$

Notons  $x_i = G^i(x_0)$  et on sait que

$$G^n(x_0) = G(G^{n-1}(x_0)) \quad (2.3)$$

Par règle de chaîne on obtient :

$$\frac{dG^n(x_0)}{dx} = G'(x_{n-1})G'(x_{n-2})\dots G'(x_1)G'(x_0) \quad (2.4)$$

Alors l'exposant de Lyapunov égale :

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |G'(x_i)| \quad (2.5)$$

**Définition 2.6.**

*On considère le système dynamique discret du plan suivant :*

$$X_{k+1} = G(X_k), X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Où la fonction  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est le champ de vecteurs associé avec le système (2.6). Soit  $J(X_k)$  sa Jacobienne en  $X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots$  et de définir la matrice :

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1})J(X_{n-2})\dots J(X_1)J(X_0). \quad (2.7)$$

Par ailleurs, soit  $J_i(X_0, n)$  le module de la  $i^{ieme}$  valeur propre de la  $n^{ieme}$  matrice  $T_n(X_0)$ , où  $i = 1, 2$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$

Maintenant on a la définition : Les exposants de Lyapunov pour l'application discret en dimension deux à temps discret sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (2.8)$$

**Exemple 2.5.** Soit l'équation discret quadratique suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - ax_k^2 = ax_k(1 - x_k) \\ y_{k+1} = b - x_k - by_k + x_k y_k = (b - x_k)(1 - y_k) \end{cases}$$

La matrice jacobienne de l'équation est :

$$\begin{pmatrix} a(1-2x) & 0 \\ (1+y) & -b+1 \end{pmatrix}$$

Parce que la matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln a|1-2x| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-b+x| \end{cases}$$

**Exemple 2.6.** Considérons à nouveau l'application itérative  $F$ , qui applique  $x_n$  sur  $x_{n+1}$ . Deux conditions initiales très proches, soient  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues.

Après  $N$  itérations, nous avons  $F^{(N)}(x_0)$  et  $F^{(N)}(x_0 + \varepsilon_0)$  pour les deux valeurs initiales différentes. Donc la séparation de deux trajectoires après  $N$  itérations est :

$$\varepsilon_N = F^{(N)}(x_0 + \varepsilon_0) - F^{(N)}(x_0)$$

Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel, nous en déduisons :

$$\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_0} = e^{\lambda N} \tag{2.9}$$

On pourra alors trouver un réel  $\lambda$  tel que :

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \varepsilon_0) - F^N(x_0)}{\varepsilon_0} \right|$$

La limite de cette expression quand  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$  est appelée exposant de Lyapunov. Dans la pratique, il n'est en général pas nécessaire de choisir un grand  $N$ , parce qu'un sur coût de simulation n'entraîne qu'une amélioration insignifiante de l'exactitude des calculs. On peut noter que l'exposant de Lyapunov  $\lambda$  n'est calculé que pour un seul point initial. Une valeur moyenne de  $\lambda$  peut être obtenue en moyennant les exposants de Lyapunov déduits de plusieurs points initiaux.

## 2.8 Routes vers le chaos (bifurcation)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application, suite à une variation d'un paramètre de l'application. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos.

On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcation [13].

### 2.8.1 Différents types des routes vers le chaos

Dans cette section, on considère trois types des routes locales : La route de doublement de période, la route point selle (ou nœud-col) et la route de Neimark. Ces routes sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à  $|\lambda_i| = 1$  (où  $\lambda_i$  représente les multiplicateurs) [2].

#### Route doublement de période ( $\lambda = -1$ )

Cette route a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égale à  $-1$ . Un cycle d'ordre  $k$  qui subie cette route va changer de nature et crée un cycle d'ordre  $2k$  de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

#### Route nœud-col ( $\lambda = +1$ )

La route  $\lambda = +1$  correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à  $+1$ . Ce type de route donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

#### Route Neimark ( $\rho = 1$ )

Cette route se produit lorsque la matrice jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjugués  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  et de plus  $|\lambda_{i=1,2}| = 1$ .

### 2.8.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

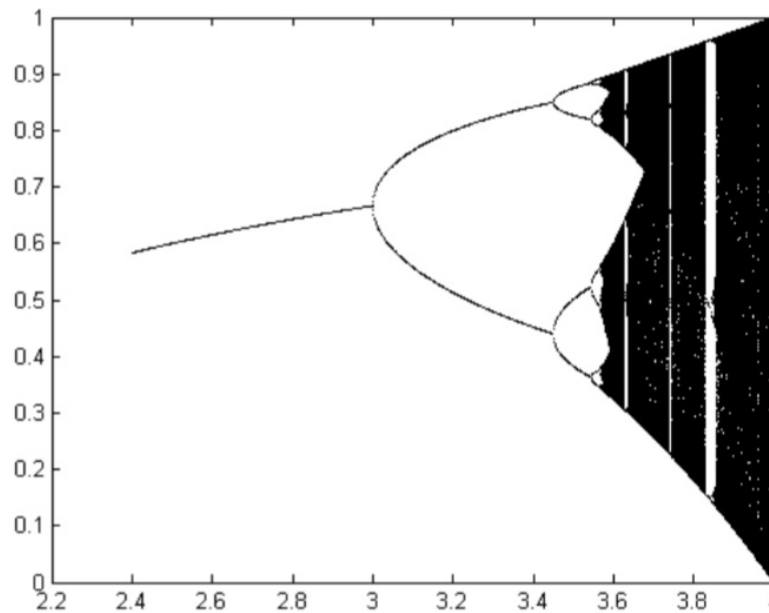


FIGURE 2.4 – Diagramme de bifurcation de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \lambda x(1-x)$  et  $2.4 \leq \lambda \leq 4$

# Chaotification des applications linéaires en n-D par une fonction bornée

## 3.1 Introduction

En général, le comportement chaotique est toujours indésirable. Pour cela, plusieurs méthodes de contrôle ont été développées dans le but de supprimer ce phénomène chaotique. Mais parfois le maintien et la génération du chaos est recherché pour certaines applications. On peut citer à titre d'exemple, le cryptage, la communication sécurisée, les processus épileptiques...etc. L'anti-contrôle ou la chaotification des systèmes dynamiques est une méthode de contrôle qui permet de générer le chaos à partir d'un système non chaotique ou d'un système chaotique mais dans sa partie stable. Depuis l'apparition de cette nouvelle théorie en 1996 [11], les chercheurs accordent de plus en plus d'intérêts à cet aspect [12], [13]. Les méthodes de chaotification développées sont pratiquement toutes basées sur le calcul des exposants de Lyapunov. Nous présentons dans ce chapitre la méthode développée par Chen [11], qui est une méthode assez représentative des techniques proposées.

**Définition 3.1.** *Dans cette section, nous présentons quelques résultats sur la norme infinie d'une matrice, et les valeurs propres de la somme de deux matrices.*

*En effet, soit  $A = (a)_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice réelle, alors, la norme infinie de  $A$  est donnée*

par

$$\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

**Proposition 3.1.** (a) Si  $A_1$  et sa perturbation  $A_2$  sont des matrices symétriques réelles.

(b) Si les valeurs propres de  $A_1$  et  $A_1 + A_2$  ils sont répertoriés respectivement dans l'ordre  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , et  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ . Que, on a  $|\lambda_i - \mu_i| \leq \|A_2\|_\infty, i = 1, 2, \dots, n$ .

(c) Soit  $A$  une matrice réelle carrée  $A$ , si  $\delta$  est une valeur propre arbitraire de  $A$  et  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  sont respectivement les plus petites et les plus grandes valeurs propres, de  $A^\top A$ . Alors on a  $0 \leq \lambda_{\min} \leq \delta^2 \leq \lambda_{\max}$ .

**Théorème 3.1.** Considère le système  $x_{k+1} = f(x_k), x_k \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 0, 1, 2, \dots$  tel que

$$\|f'(x)\| = \sqrt{\mu_{\max}(f(x))^\top f(x)} \leq N < +\infty$$

et que la plus petite valeur propre de  $(f(x))^\top f(x)$  satisfait

$$\mu_{\min}((f(x))^\top f(x)) \geq \beta > 0$$

Où  $N^2 \geq \beta$  alors pour tout  $x_0 \in \Omega$ , tous les exposants de Lyapunov au point  $x_0$  sont situés à l'intérieur de l'intervalle  $[\frac{\ln \beta}{2}, \ln N]$ , c'est-à-dire

$$\frac{\ln \beta}{2} \leq l_i(x_0) \leq \ln N, i = 1, 2, 3.$$

Où  $l_i(X_0)$  sont les exposants de Lyapunov de l'application  $f$ , et  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ .

## 3.2 Méthode chaotification utilisant un fonction bornée

Considérons l'application linéaire en n-D définie par [6] :

$$X_{k+1} = f(x_k) = \begin{cases} Ax_k + b, b, x_k \in \mathbb{R}^n \\ x_0 - \text{donné} \end{cases} \quad (3.1)$$

Où

$$x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)})$$

Et

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$(a_{ij})$  coefficients réelles donc  $A$  est :

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transposée de  $A$  est :

$$A_{mn}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Telle que

$$\lambda_{\min}(A^\top A) > 1$$



Considérons l'application contrôlé

$$\begin{cases} X_{k+1} = Ax_k + b + \alpha h(x_k) \\ x_0 - \text{donné} \end{cases} \quad (3.2)$$

Où  $\alpha$  est un paramètre réel et la fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est donnée par

$$h(x_k) = \begin{pmatrix} g(x_k^{(1)}) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction non linéaire avec dérivée bornée par rapport à la première composante  $x_k^{(1)}$  du vecteur  $x_k^{(1)}$

$$\text{C'est - à-dire , } \exists M > 0, \forall x_k^{(1)} \in \mathbb{R} : \left| g'(x_k^{(1)}) \right| = \left| \frac{\partial g(x_k^{(1)})}{\partial x_k^{(1)}} \right| \leq M \quad (3.3)$$

Supposons aussi que l'application (3.2) contrôlée admis au moins un point fixe

$$\text{C'est -à- dire , } (A - I_n)x + b + \alpha h(x) = 0$$

Admis au moins une solution réelle.

Les avantages du contrôleur  $h(x_k)$  proposé sont : Il est très simple, et ne dépend que d'une variable  $x_k^{(1)}$  dans le premier sens avec  $(n - 1)$  composantes nulles, en général l'expression de la fonction  $g$  n'est pas nécessaire pour confirmer le caractère chaotique de l'application (3.2).

**Théorème 3.2.** *L'application de contrôle  $h(x_k)$  rend l'application  $f(x_k)$  chaotique si la*

condition suivant est satisfait

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) > 1$$

### 3.2.1 Preuve

La matrice jacobienne l'application (3.2) contrôlée est

$$J(x_k) = A + \alpha h'(x_k) = A + \alpha g'(x_k^{(1)})B \quad (3.4)$$

Où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\|B\|_\infty = 1$ ,  $B^\top = B = 1$  et  $B^2 = B$ .

Nous remarquons que  $\|J(x_k)\| \leq \|A\|_\infty + M|\alpha| = N(\alpha)$

La première condition du **théorème 3.1** est vérifiée pour  $\alpha$ .

On remarque que

$$J(x_k) = A + \alpha g'(x_k^{(1)})B \text{ et } J(x_k)^\top = A^\top + \alpha g'(x_k^{(1)})B$$

Puis que  $B^\top = B$  et  $B^2 = B$

Donc

$$\begin{aligned} J(x_k)^\top J(x_k) &= (A^\top + \alpha g'(x_k^{(1)})B)(A + \alpha g'(x_k^{(1)})B) \\ &= (A^\top + \alpha g'(x_k^{(1)})B)A + (A^\top + \alpha g'(x_k^{(1)})B)\alpha g'(x_k^{(1)})B \\ &= A^\top A + \alpha g'(x_k^{(1)})BA + A^\top B\alpha g'(x_k^{(1)}) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B^2 \\ &= A^\top A + \alpha g'(x_k^{(1)})BA + A^\top B\alpha g'(x_k^{(1)}) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \\ &= A^\top A + \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$J^\top(x_k)J(x_k) = A^\top A + \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \quad (3.5)$$

D'où

$$J^\top(x_k)J(x_k) = A^\top A + \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B = A_1 + A_2 \quad (3.6)$$

Tel que

$$A_1 = A^\top A \text{ et } A_2 = \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B$$

.

Deux matrice  $A_1$  et  $A_2$  sont symétriques puisque

$$A_1^\top = (A^\top A)^\top = A_1$$

Et

$$\begin{aligned} A_2^\top &= (\alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B)^\top \\ &= \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA)^\top + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \\ &= \alpha g'(x_k^{(1)})(BA + A^\top B) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \\ &= \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \end{aligned}$$

Alors

$$A_2^\top = \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B = A_2 \quad (3.7)$$

Maintenant, supposons que les valeurs propres de  $A$  et  $J$  soient respectivement listées dans l'ordre

$$\lambda_{\min}(A^\top A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\max}(A^\top A) = \lambda_n$$

Et

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{\max}(J^\top(x_k)J(x_k)) = \mu_n$$

Ensuite, en appliquant la **proposition 3.1** pour  $i = 1$ , on obtient

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) \geq \lambda_{\min}(A^\top A) - \|A_2\|_\infty \quad (3.8)$$

On obtient

$$\begin{aligned} A_2 &= \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})B \\ &= \alpha g'(x_k^{(1)})(A^\top B + BA + \alpha g'(x_k^{(1)})B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \alpha g'(x_k^{(1)}) \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \left. + \alpha g'(x_k^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha g'(x_k^{(1)}) \left( \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} \alpha g'(x_k^{(1)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \alpha g'(x_k^{(1)}) \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} + \alpha g'(x_k^{(1)}) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Après la simplification nous obtenons

$$A_2 = \alpha g'(x_k^{(1)}) \begin{pmatrix} 2a_{11} + \alpha g'(x_k^{(1)}) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Ainsi, la norme infinie de  $A_2$  est donné par :

$$\|A_2\|_\infty = \max \left\{ \left| 2a_{1,1} + \alpha g' + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)}) \right| + \sum_{j=2}^n |a_{1,j} \alpha g'(x_k^{(1)})|, \dots, |a_{1,n} \alpha g'(x_k^{(1)})| \right\} \quad (3.10)$$

D'où , on a

$$\|A_2\|_\infty = \left| 2a_{11} \alpha g'(x_k^{(1)}) + \alpha^2 g'^2(x_k^{(1)}) \right| + \sum_{j=2}^n |a_{1j} \alpha g'(x_k^{(1)})| \quad (3.11)$$

$$\|A_2\|_\infty \leq |a_{11}\alpha g'(x_k^{(1)})| + |\alpha^2 g'^2(x_k^{(1)})| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}\alpha g'(x_k^{(1)})|$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \|A_2\| &\leq |a_{11}|\alpha M + \alpha^2 M^2 + M \sum_{j=1}^n |a_{1j}|\alpha \\ \|A_2\| &\leq \alpha^2 M^2 + M(|a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}|)\alpha \end{aligned} \quad (3.12)$$

Et on a

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) \geq \lambda_{\min}(A^\top A) - \|A_2\|_\infty$$

Alors

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) \geq \lambda_{\min}(A^\top A) - \alpha^2 M^2 - M(|a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}|)\alpha \quad (3.13)$$

Supposons que  $\alpha > 0$ , on obtient

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) \geq \lambda_{\min}(A^\top A) - \alpha^2 M^2 - M(|a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}|)\alpha = \beta \quad (3.14)$$

Dans ce qui suit, nous ne choisissons que les valeurs de  $\alpha > 0$  telle que  $\beta > 1$ , c'est-à-dire, tous les exposants de Lyapunov de l'application (3.2) contrôlée sont positifs

Si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 1$ , on a

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A^\top A) - M^2\alpha^2 - M(|a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}|)\alpha &> 1 \\ \lambda_{\min}(A^\top A) - M^2\alpha^2 - M(|a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}|)\alpha - 1 &> 0 \end{aligned}$$

Donc

$$M^2\alpha^2 + M(|a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1j}|)\alpha + 1 - \lambda_{\min}(A^\top A) < 0 \quad (3.15)$$

Si  $\lambda_{\min}(A^\top A) < 1$ , alors la méthode proposée ne peut pas être appliquée ici.

Ainsi, nous supposons que  $\lambda_{\min}(A^\top A) > 1$ .

Le discriminant de (3.15) est

$$\begin{aligned}\Delta &= M^2 \left( |a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1,j}| \right)^2 - 4(M^2) (1 - \lambda_{\min}(A^\top A)) > 0 \\ \Delta &= M^2 \left( |a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1,j}| \right)^2 + 4(M^2) (\lambda_{\min}(A^\top A) - 1) > 0\end{aligned}$$

Si  $\lambda_{\min}(A^\top A) > 1$

Soit

$$\Delta = M^2 \left( \left( |a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1,j}| \right)^2 + 4(\lambda_{\min}(A^\top A) - 1) \right) > 0 \quad (3.16)$$

être le discriminant de l'équation correspondante de  $\alpha$ . Ainsi,  $\beta > 1$  si seulement si  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ .

D'où

$$\alpha_1 = \frac{-M \left( |a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1,j}| \right) - \sqrt{\Delta}}{2M^2} < 0$$

Et

$$\alpha_2 = \frac{-M \left( |a_{11}| + \sum_{j=1}^n |a_{1,j}| \right) + \sqrt{\Delta}}{2M^2} > 0$$

Puisque nous choisissons  $\alpha > 0$ , alors nous avons  $\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) > 1$ , pour  $\alpha \in (0, \alpha_2)$ .

En appliquant le **théorème 3.1**. Ce qui montre que l'application (3.2) contrôlée entre dans le chaos pour  $\alpha \in (0, \alpha_2)$ .

### 3.2.2 Exemple

Dans ce section nous avons chaotifier la fonction linéaire par bornée on utilisent ce méthode.

$$X_{k+1} = \begin{cases} Ax_k + b + \alpha h(x_k) \\ x_0 - \text{donné} \end{cases}$$

Et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$h(x_k) = \begin{pmatrix} \sin(x_k^{(1)}) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

En utilisant la fonction non linéaire avec dérivée bornée par rapport à la première composante  $x_k^{(1)}$  du vecteur  $x_k^{(1)}$  nous obtenons :

$$\forall x_k^{(1)} \in \mathbb{R} : \left| \frac{\partial \sin(x_k^{(1)})}{\partial x_k} \right| \leq 1 = M \implies |\cos(x_k^{(1)})| \leq 1 \quad (3.17)$$

Tel que

$$J(x_k) = A + \alpha h'(x_k) = A + \alpha g'(x_k^{(1)})B \quad (3.18)$$

Avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \|B\|_\infty = 1, B^\top = B \text{ et } B^2 = B$$

Alors

$$J(x_k) = A + \alpha \cos(x_k^{(1)})B \quad (3.19)$$

$J(x_k)$  est un jacobienne matrice de l' application (3.2)

On remarque que

$$\|J(x_k)\| \leq \|A\|_\infty + |\alpha| = N(\alpha)$$

La condition est vérifiée pour  $\alpha$ , on a

$$J^\top(x_k) = A^\top + \alpha \cos(x_k^{(1)})B$$

Alors

$$J^\top(x_k)J(x_k) = A^\top A + \alpha \cos(x_k^{(1)}) (A^\top B + BA) + \alpha^2 \cos^2(x_k^{(1)})B = A_1 + A_2 \quad (3.20)$$



Tel que

$$A_1 = A^\top A \text{ et } A_2 = \alpha \cos(x_k^{(1)}) (A^\top B + BA) + \alpha \cos^2(x_k^{(1)}) B$$

On a

$$A_2 = \alpha \cos(x_k^{(1)}) (A^\top B + BA + \alpha \cos(x_k^{(1)}) B)$$

Alors

$$A_2 = \alpha \cos(x_k^{(1)}) \begin{pmatrix} 2a_{11} + \alpha \cos(x_k^{(1)}) & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

La norme infinie de  $A_2$  est donné par :

$$\|A_2\|_\infty = \max \left\{ \left| 2a_{11}\alpha \cos(x_k^{(1)}) + \alpha^2 \cos^2(x_k^{(1)}) \right| + \left| a_{12}\alpha \cos(x_k^{(1)}) \right|, \left| a_{12}\alpha \cos(x_k^{(1)}) \right| \right\} \quad (3.22)$$

D'où

$$\|A_2\|_\infty = \left| 2a_{11}\alpha \cos(x_k^{(1)}) + \alpha^2 \cos^2(x_k^{(1)}) \right| + \left| a_{12}\alpha \cos(x_k^{(1)}) \right| \quad (3.23)$$

Nous obtenons

$$\|A_2\| \leq \alpha^2 + (|a_{11}| + |a_{12}|)\alpha$$

supposons que  $\alpha > 0$  et  $\beta > 1$ , on obtient

$$\mu_{\min}(J^\top(x_k)J(x_k)) \geq \lambda_{\min}(A^\top A) - \alpha^2 - (|a_{11}| + |a_{12}|)\alpha = \beta$$

On a

$$\lambda_{\min}(A^\top A) - \alpha^2 - (a_{11} + a_{12})\alpha - 1 > 0$$

Donc

$$\alpha^2 + (a_{11} + a_{12})\alpha + 1 - \lambda_{\min}(A^\top A) = 0 \quad (3.24)$$

Alors

$$\Delta = \left( (a_{11} + a_{12})^2 + 4(\lambda_{\min}(A^\top A) - 1) \right) > 0 \quad (3.25)$$

On a  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$  donc

$$\alpha_1 = \frac{-(a_{11} + a_{12}) - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

$$\alpha_2 = \frac{-(a_{11} + a_{12}) + \sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une méthode simple de chaostification des applications linéaires en  $n$ -D à l'aide d'une fonction non linéaire contrôlée. Une preuve rigoureuse de l'existence du chaos, a été présentée dans ce mémoire en utilisant la définition standard de la plus grand exposant de Lyapunov.

# Bibliographie

- [1] A. Chenciner, Stabilité Structurale et Ergodicité (ou catégorie et mesure), J. Physique, (1978).
- [2] Avila, A. "*Bifurcations of unimodal maps*," C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334, 483 – 488, (2002) .
- [3] C.Li "*On super-chaotifying discrete dynamical systems*," Chaos, Solitons and Fractals 21, 855 – 861, (2004).
- [4] C. P. Li, W. H. Deng, D. Xu, Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order, Physica A360, 171 – 185, (2006).
- [5] D.Lai and G.Chen, "*Making a discrete dynamical system chaotic Theoretical results and numerical simulations*," Int .J.Bifurcation and chaos 13(11), 3437 – 3442, (2003).
- [6] E.Zeroulia, chaos, "*Choatification des applications linéaires en  $n$ -D par une fonction bornée*," colloque national sur les sciences Mathématiques, 10, (2012).
- [7] E. Zeraoulia. Etude de Quelques Types de Systemes Chaotique : Generalisation d'un Modele Issu du Modele de Chen, (2006).
- [8] E. Zeraoulia, and J. C. Sprott., Classification of Three-Dimensional Quadratic Diffeomorphisms with constant jacobian, Front. Phys. China, 4, 111 – 121, (2009).
- [9] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications. Front. Phys. China, 3, 195 – 204, (2008).
- [10] G. Baier, and M. Klein., Maximum hyperchaos in generalized Hénon maps, Phys. Lett. A., 151, (6 – 7), 281 – 284, (1990).

- [11] G. Chen and D. Lai, " *Anticontrol of chaos via feedback*," IEEE, CDC. 36, San Diego, pp. 367-372.
- [12] G. Chen and D. Lai, " *Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time chaotic dynamical systems*," Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol.6, pp.1341 – 1349, (1996).
- [13] G. Chen and D. Lai, " *Making a dynamical system chaotic : Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems*," IEEE trans. Circuits syst. I, vol.44, No.3, pp.250 – 253, (1997).
- [14] G.I Bschi, F.Tramontana, Three-dimensional discrete-time Lotka-Volterra models with an application to industrial clusters,. Commun N-Sci Numer Simulat 15, 3000 – 3014, (2010).
- [15] H. Schuster Georg. " *Deterministic Chaos-an Introduction*". 4 edition,Wiley, 288pp, (2005).
- [16] J. P. Eckmann, and D. Ruelle (1985), Ergodic theory of chaos and strange attractors, Rev. Mod. Phys. 57, 617 .
- [17] L. Chuandong, L. Xiaofeng, and W. Kwok-wo., Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications. Chaos Solitons Fractals., 23, 183 – 193, (2005).
- [18] L. Y. Lu and Z. H. Lu, The Periodicity of chaotic Impact Oscillators in Hausdroff Phase Spaces. J. Sound and Vibration, 235(1), 105 – 116, (2000).
- [19] M.Galach, Dynamics of the tumor-immune system competition : the efect of time delay , Int.J.Appl.Math. Comput .Sci.,395 – 406, (2003).
- [20] M. Hénon., A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor. Comm. Math. Phys.,50, 69 – 77, (1976).
- [21] M. Hénon, Numerical study of Quadratic Area-Preserving Mapping, Quart . Appl.Math., 2, 291 – 312, (1969).
- [22] M. Mammeri., A Large Chaotic Region in a 3-D Sinusoid Discrete Map. Int. J. Applied Mathematics and Statistics. Vol.55, no.3, 133 – 144, (2016).
- [23] M. Mammeri., Hyperchaotic Behavior in a New 3-D Discrete-Time Systems, Int. J. Research and Reviews in Applied Sciences. Vol. 25.no.2, 41 – 43, (2015).

- [24] M. Mammeri., "*Sur les applications discretes en dimension  $N$ ,  $N > 1$ ,*" thèse de doctorat, (2017).
- [25] M. Mammeri., Symmetry and peroidic-chaos in 3-D sinusoid discrete maps, Bulletin of mathematical analysis and applications Vol.9.no.1 – 1 – 9, (2017).
- [26] P. Bi, S. Ruan, Bifurcation in Delay Differential Equations and Applications to Tumor and Immune System Interaction Models, SIAM J. Appl. Dynamical Systems, Vol. 12(4), 1847 – 1888, (2013).
- [27] P. Rouchon, Systèmes Dynamique et Modélisation, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris France, (1993).
- [28] S.Banerjee, G. C. Verghese, Nonlinear phenomena in power electronic : Attractorv, Bifurcation, Chaos, and Nonlinear Control, IEEE Trans, New York, (2001).
- [29] T. K. Tse, Complex behavior of switching power converters, CRC Press, Boca Raton, USA , (2003).
- [30] W. Lin, J. Ruan, and W.Zhou, "*On the mathematical clarification of the snapback repeller in high-dimensional systems and chaos in a discrete neural network model,*" Int. J. Bifurcation and chaos , 12(5), 1129 – 1139, (2002).

## **Abstract :**

The main objective of this thesis is to present a new method of chaotification linear map in n-D using a controller map non-linear and the definition of the Lyapunov exponent.

At first we have given some preliminary definition and general and specific notions on dynamic systems and chaotic dynamic systems.

Finally a new method chaotification of linear maps in n-D was presented.

**Key words :** Discrete *dynamic* systems, attractor, chaotic attractor, bifurcation, Lyapunov exponents, orbits .

## **Résumé :**

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une nouvelle méthode de chaotification d'application linéaire en n-D utilisant une application contrôleur non-linéaire et la définition de l'exposant de Lyapunov.

Au début nous avons donné quelque préliminaire définition et notions générales et spécifiques sur les systèmes dynamiques et les systèmes dynamiques chaotiques.

En fin une nouvelle méthode chaotification des applications linéaires en n-D a été présenter.

**Mots clés :** Systèmes dynamique discrète, attracteur, attracteur chaotique, bifurcation, exposants de Lyapunov, orbites .

## **ملخص:**

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو تقديم طريقة جديدة للفوضى التطبيقات الخطية في n-D باستخدام تطبيق تحكم غير خطية و تعريف أسس ليابونوف .

في البداية لقد قدمنا بعض الأفكار الأولية والمفاهيم العامة والخاصة حول الأنظمة الديناميكية والأنظمة الديناميكية الفوضوية.

أخيرا تم تقديم طريقة جديدة للفوضى التطبيقات الخطية في n-D .

الكلمات المفتاحية : الأنظمة الديناميكية المنفصلة ، الجاذب ، الجاذب الفوضوي، التشعب، أسس ليابونوف، المدارات.