

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

---

---

MASTER  
EN  
MATHÉMATIQUES

OPTION  
ANALYSE FONCTIONNELLE

INTITULÉ

Théorème du point fixe de Brouwer et applications

PAR  
Aicha GHETTAS

Devant le jury :

Salim BADIDJA	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mohamed Tayeb BENMOUSSA	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Amine BAHAYOU	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Soutenu publiquement le : 14-06-2023

## Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude envers **Dieu** pour m'avoir aidé à accomplir ce travail. De plus, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers mes parents pour leur amour et leur soutien moral inconditionnels.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à mon encadreur, **Monsieur Amine Bahayou**, qui m'a proposé le thème de ce mémoire, et pour ses conseils et directives précieuses tout au long de ce travail.

Je souhaite exprimer ma gratitude à **Monsieur Salim Badidja**, qui a accepté d'être le président de ce jury. Je lui suis reconnaissante pour cet honneur.

Je tiens également à remercier chaleureusement **Monsieur Mohamed Tayeb Benmoussa** d'avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir examiné mon travail.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers mes professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné tout au long de mon parcours universitaire.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements les plus vifs à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide et ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire.

## Dédicace

Louange à **Dieu**, par la grâce duquel les bonnes actions sont accomplies. Après un long parcours semé de nombreuses difficultés, me voici aujourd'hui à récolter les fruits de mes efforts. Je dédie ce succès :

À l'âme de mon cher père, **Abderrezak**, et de ma chère sœur, **Zaineb**. J'espère que vous partagez ma joie en ce jour spécial.

À ma mère, **Nassira**, qui est la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur. Tu ne m'as jamais été avare de ton soutien.

À mes frères et sœurs qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de ma vie.

À mon époux bien-aimé, **Ilyes**, qui est mon compagnon, mon soutien et ma source de bonheur.

À tous les membres de ma famille élargie, les **Ghettas**, les **Abadli** et **mamie**, chacun à sa place, petits et grands.

À mes frères qui ne sont pas nés de ma mère, mais qui m'ont soutenu.

À mes amis et collègues d'école, sans exception, à tous ceux qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours universitaire.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Transversalité</b>	<b>6</b>
1.1	Stabilité . . . . .	10
1.2	Généricité . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Théorie du degré</b>	<b>16</b>
2.1	Degré modulo 2 . . . . .	17
2.2	Degré orienté . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Théorème de point fixe de Brouwer</b>	<b>32</b>
3.1	Exemples et généralisations . . . . .	34

# Introduction

---

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat clé en topologie qui affirme qu'une application continue d'une boule fermée euclidienne sur elle-même possède toujours un point fixe. Bien que ce théorème ait de nombreuses applications, sa démonstration est souvent considérée comme difficile. Dans ce mémoire de Master, nous présentons une preuve de ce théorème en utilisant la notion de degré orienté.

Nous commençons par introduire les concepts de base de la topologie différentielle, notamment la transversalité, l'homotopie, ainsi que les notions de degré modulo 2 et de degré orienté. Par la suite, nous utilisons le degré orienté pour démontrer le « Lemme de non-rétraction ». Nous prouvons qu'une fonction lisse de la boule fermée euclidienne sur elle-même, ne possédant aucun point fixe, conduit à l'existence d'une rétraction lisse de la boule sur son bord. Cette observation va à l'encontre du lemme de non-rétraction et nous permet donc de conclure que ladite fonction possède un point fixe.

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Le premier chapitre examine la notion importante de transversalité et explore ses deux propriétés fondamentales : la stabilité et la généricité. Dans le deuxième chapitre, nous abordons la notion de degré d'une application et démontrons son invariance par homotopie. Enfin, le troisième chapitre présente une analyse détaillée de la démonstration du Théorème du point fixe de Brouwer en utilisant ces concepts, tout en proposant quelques exemples d'applications.

En résumé, ce mémoire de Master vise principalement à présenter une démonstration géométrique du théorème du point fixe de Brouwer, en mettant l'accent sur l'utilisation du degré orienté. Il propose également à illustrer des exemples concrets d'applications de ce théorème.

# Notation

$C^\infty(M)$	algèbre des fonctions lisses sur $M$ .
$\Gamma_f$	graphe de l'application $f$ .
$\deg(f)$	degré de l'application $f$ .
$\dim$	dimension.
$df_x$	différentielle de $f$ en $x$ .
$\partial$	bord.
$\Omega^k(M)$	espace des formes différentielles de degré $k$ sur $M$ .
$R_f$	ensemble des valeurs régulières de $f$ .
$\mathbb{S}^n$	sphère de dimension $n$ .
$\text{sgn}$	signe du déterminant.
$T_x M$	espace tangent à $M$ au point $x$ .
$\mathbb{T}^n$	tore de dimension $n$ .
$\text{tr}$	trace.
$(U, \varphi)$	carte locale d'une variété.
$\chi(M)$	caractéristique d'Euler.
$\#f^{-1}(Z)$	nombre d'éléments de $f^{-1}(Z)$ .

# 1

## Transversalité

En géométrie différentielle et en algèbre linéaire, la notion de transversalité est utilisée pour qualifier l'intersection de sous-espaces ou de sous-variétés. Pour deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$ , on dit qu'ils sont transverses (et on note  $F \pitchfork G$ ) si leur somme est égale à  $E$ , ou de manière équivalente, si la codimension de leur intersection est égal à la somme de leurs codimensions. Pour deux sous-variétés  $X$  et  $Y$  d'une variété différentielle  $M$ , on dit qu'elles sont transverses si, en tout point  $x$  de leur intersection  $X \cap Y$ , les espaces tangents  $T_x X$  et  $T_x Y$  sont transverses dans l'espace tangent  $T_x M$ , c'est-à-dire si  $T_x M$  est engendré par  $T_x X$  et  $T_x Y$ .

Deux sous espaces vectoriel  $F, G$  d'un espace vectoriel  $E$  sont dits *transverses* lorsque  $F + G = E$ . Cette condition peut être réécrite en termes de codimension :

$$\text{codim}(G) + \text{codim}(F) = \text{codim}(F \cap G).$$

Deux sous variété  $X$  et  $Y$  d'une variété différentielle  $M$  sont dites transverses lorsque, pour tout point  $x$  de  $X \cap Y$ , les espaces tangents  $T_x X$  et  $T_x Y$  sont transverses dans l'espaces

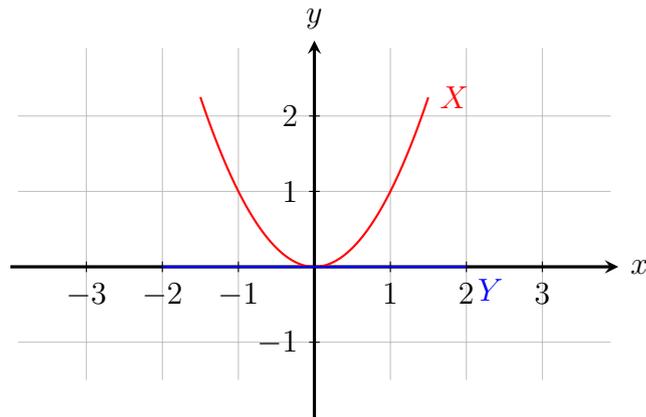


FIG. 1.1: Intersection de la parabole et de l'axe des abscisses dans le plan

tangent  $T_x M$ , c'est-à-dire :

$$T_x M = T_x X + T_y Y.$$

**Remarques 1.0.1.**

- Deux sous variété disjointes sont transverses.
- La transversalité est fortement liée aux codimensions dans l'espace ambiant : deux droites non tangentes sont transverses dans la plan, mais elles ne le sont pas dans l'espace.

**Exemples 1.0.2.**

1. La parabole  $X = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$  et l'axe des abscisses  $Y = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$  ne sont pas transverses (car tangents en  $(0, 0)$ ).
2. Dans le plan, les deux courbes  $X = \{(x, x^3), x \in \mathbb{R}\}$  et  $Y = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$  sont transverses (en les trois points d'intersection, les droites tangentes sont complémentaires).

**Proposition 1.0.3.** Une intersection transverse de deux sous-variétés  $X \cap Y$  est encore une sous-variété, de plus, pour tout  $x \in X \cap Y$ ,

$$T_x(X \cap Y) = T_x X \cap T_x Y.$$

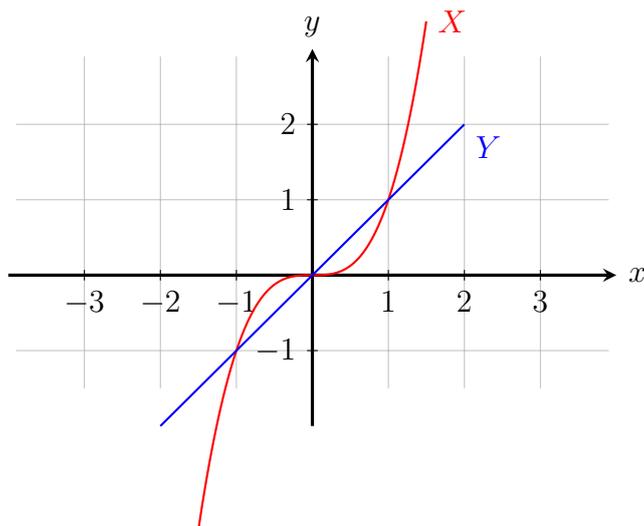


FIG. 1.2: Intersection transverse de deux courbes dans le plan

### Application transverse à une sous-variété

Si  $y$  est une valeur régulière de l'application  $f : X \rightarrow Y$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = y$  forme une variété différentielle. Si  $Z$  est une sous-variété de  $Y$  au lieu d'un point, quelle condition doit être remplie pour que  $f^{-1}(Z)$  soit également une sous-variété? Cette question nous amène à introduire la notion de transversalité, qui constitue une extension naturelle de la notion de régularité.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés différentielles et  $Z$  une sous-variété de  $Y$ . On dit qu'une fonction lisse  $f : X \rightarrow Y$  est transverse à  $Z$  et on écrit  $f \pitchfork Z$  si et pour tout  $x \in f^{-1}(Z)$

$$\text{Im } D_x f + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

En d'autres termes  $f$  est transverse à  $Z$  si, pour tout  $x \in f^{-1}(Z)$ ,  $\text{Im } D_x f$  et  $T_{f(x)} Z$  sont transverses (en tant que sous-espaces vectoriels de  $T_{f(x)} Y$ ).

#### Remarques 1.0.4.

1. Les deux notions de transversalité ci-dessus sont équivalentes. En effet, si  $X$  et  $Y$  sont deux sous-variétés de  $M$  et  $i_X : X \hookrightarrow M$  est l'injection de  $X$  dans  $M$  alors :

$$X \pitchfork Y \iff i_X \pitchfork Y.$$

Réciproquement, si  $f : X \rightarrow Y$  est lisse et  $Z$  une sous-variété de  $Y$  alors

$$f \pitchfork Z \iff \Gamma_f \pitchfork (X \times Z),$$

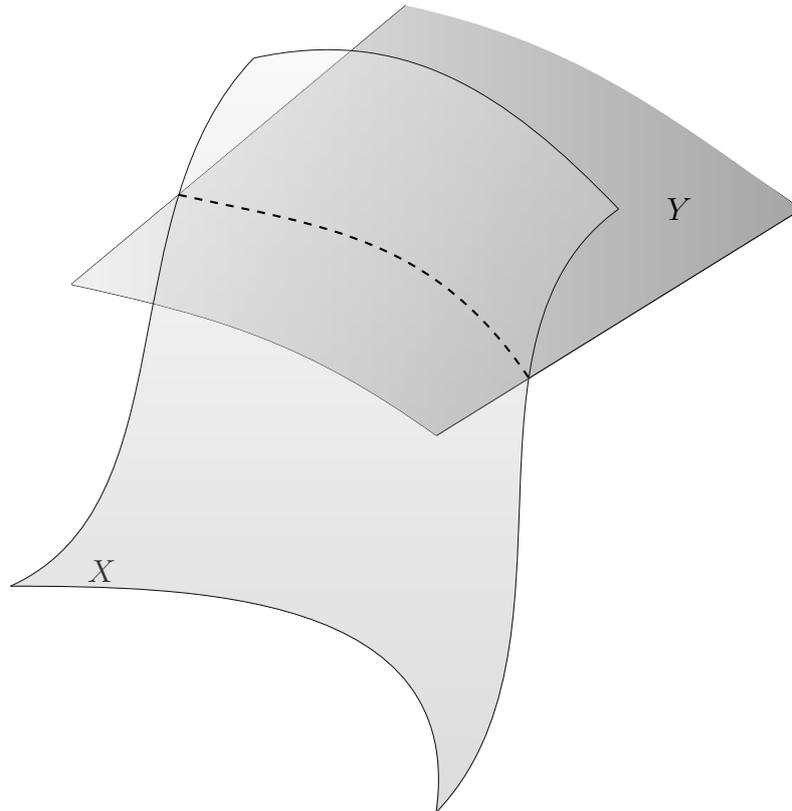


FIG. 1.3: Deux surfaces transverses dans  $\mathbb{R}^3$ .

où  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$  est le graphe de  $f$ .

2. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une submersion alors  $f$  est transverse à toute sous-variété de  $Y$ .
3. L'image réciproque d'une sous-variété par une application qui lui est transverse est une variété.

**Proposition 1.0.5.** Si  $f \pitchfork Z$  et  $f^{-1}(Z)$  n'est pas vide alors

1.  $f^{-1}(Z)$  est une sous-variété qui à la même codimension de  $Z$ , i.e.

$$\text{codim} f^{-1}(Z) = \text{codim} Z.$$

2. L'espace tangent de  $f^{-1}(Z)$  est l'image réciproque par la différentielle de  $f$  de l'espace tangent à  $Z$ , i.e. pour tout  $x \in f^{-1}(Z)$ ,

$$T_x f^{-1}(Z) = (D_x f)^{-1} (T_{f(x)} Z).$$

*Démonstration.*

1. Montrons que tout point de  $f^{-1}(Z)$  admet un voisinage (dans  $f^{-1}(Z)$ ) qui est la fibre d'une submersion. Pour tout  $x \in f^{-1}(Z)$ , il existe un voisinage  $U$  de  $y = f(x)$  dans  $Y$  est une submersion  $\varphi : U \cap Z \rightarrow \mathbb{R}^d$  (avec  $d = \text{codim } Z$ ) telle que  $U \cap Z = \varphi^{-1}(0)$ . Vérifions que si  $V = f^{-1}(U)$  alors

$$V \cap f^{-1}(Z) = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$$

et que  $\varphi \circ f$  est une submersion. Comme  $T_y Z = \ker D_y \varphi$  et comme  $f \pitchfork Z$  alors

$$\begin{aligned} \text{Im } D_x(\varphi \circ f) &= D_y \varphi(\text{Im } D_x f) \\ &= D_y \varphi(\text{Im } D_x f + \ker D_y \varphi) \\ &= D_y \varphi(T_y Y) = \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{codim } f^{-1}(Z) &= \dim X - \dim \ker D_x(\varphi \circ f) \\ &= \text{rang } D_x(\varphi \circ f) = d = \text{codim } Z. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} T_x(f^{-1}(Z)) &= \ker D_x(\varphi \circ f) = \ker(D_y \varphi \circ D_x f) \\ &= (D_y \varphi \circ D_x f)^{-1}(0) \\ &= (D_x f)^{-1}((D_y \varphi)^{-1}(0)) \\ &= (D_x f)^{-1}(\ker D_y \varphi) \\ &= (D_x f)^{-1}(T_y Z). \end{aligned}$$

On retrouve aussi le résultat concernant l'intersection de deux sous-variétés transverses.

□

## 1.1 Stabilité

La stabilité est la première propriété fondamentale de la transversalité, qui signifie qu'une application qui est transverse à une sous-variété reste transverse même après une petite perturbation. Pour formuler précisément cette propriété intuitive, nous allons d'abord donner quelques définitions.

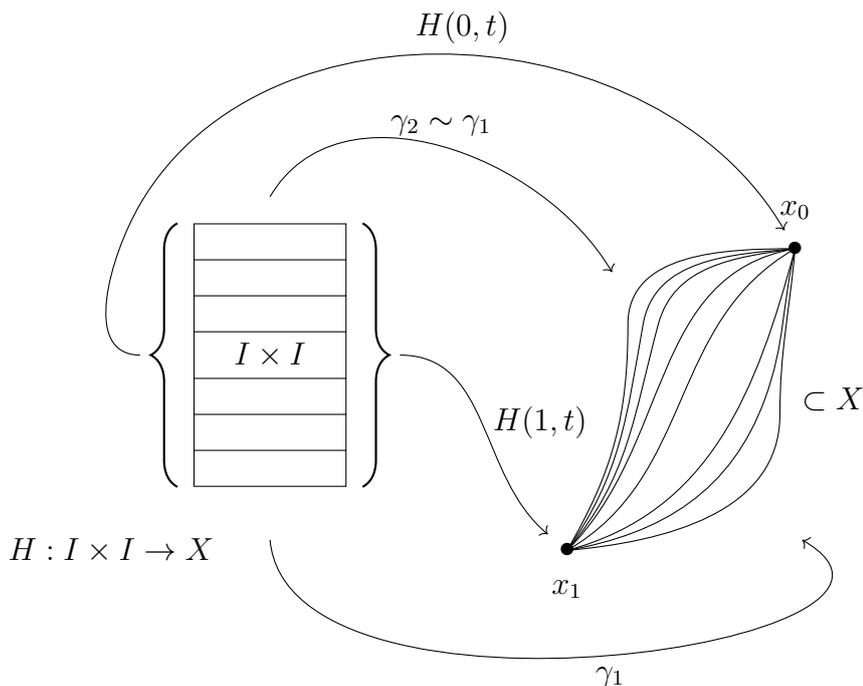


FIG. 1.4: Deux courbes homotopes dans un espace  $X$ .

**Définition 1.1.1** (Homotopie). Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux applications continues.

On dit que  $f$  est homotope à  $g$  et on note  $f \sim g$ , s'il existe une application continue (dite homotopie)

$$\begin{aligned}
 H : X \times [0, 1] &\rightarrow Y \\
 (x, t) &\mapsto H(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

telle que  $H(x, 0) = f(x)$  et  $H(x, 1) = g(x)$ .

**Remarques 1.1.2.** 1. L'homotopie est une relation d'équivalence.

2. Si  $X$  et  $Y$  sont des variétés différentielles et si  $f$  et  $g$  sont lisses et homotopes, alors elles sont  $C^\infty$ -homotopes.

**Définition 1.1.3** (Type d'homotopie). On dit que deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que :

$$f \circ g \sim \text{id}_Y \quad \text{et} \quad g \circ f \sim \text{id}_X.$$

**Rétraction par déformation.** Un exemple important d'équivalence d'homotopie entre deux espaces est la rétraction par déformation. Supposons que  $X$  est un espace topologique et que  $A$  est une partie de  $X$ . Une rétraction de  $X$  sur  $A$  est une fonction continue  $r : X \rightarrow A$  telle que  $r(x) = x$  pour tout  $x \in A$ . Si de plus, l'application  $r : X \rightarrow A$  satisfait la propriété que  $i \circ r : X \rightarrow X$ , où  $i : A \rightarrow X$  est l'injection canonique, est homotope à l'identité  $\text{Id}_X$ , alors on l'appelle une *rétraction par déformation*. On dit que  $A$  est un rétracte par déformation de  $X$  si une telle rétraction par déformation  $X \rightarrow A$  existe.

**Exemples 1.1.4.** 1. *Deux espaces homéomorphes sont équivalents homotopiquement.*

2. *Un cercle est un rétracte par déformation d'un cylindre.*

3. *Si  $Y$  est contractile (i.e. équivalent homotopiquement à un point), alors toutes applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  sont homotopes.*

4. *Un espace est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et si tout lacet (courbe fermée) est homotope à un point. Tout espace contractile est simplement connexe; la réciproque est fausse : les sphère  $\mathbb{S}^n$  ( $n \geq 2$ ) sont simplement connexes mais non contractiles.*

5. *Le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe; une courbe qui entoure l'origine n'est pas homotope à un point. L'anneau  $\{z \in \mathbb{C}, 0 < r < |z| < R\}$  et le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ne sont pas simplement connexes.*

6.  *$\mathbb{R}^n - \{\text{pt}\}$  est équivalent homotopiquement à la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  (la sphère est un rétracte par déformation de  $(\mathbb{R}^n)^*$  par  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ).*

7. *Par les projections stéréographiques  $\mathbb{S}^n - \{\text{pt}\} \sim \mathbb{R}^n$  et*

$$(\mathbb{S}^n - \{N\}) \cap (\mathbb{S}^n - \{S\}) \sim (\mathbb{R}^n)^* \sim \mathbb{S}^{n-1}.$$

**Définition 1.1.5** (Stabilité locale). *Une propriété ( $\mathcal{P}$ ) d'une classe d'applications  $f : X \rightarrow Y$  est dite localement stable si tout point  $x \in X$  possède un voisinage  $U$  telles que si  $f|_U : U \rightarrow Y$  possède la propriété ( $\mathcal{P}$ ) et si  $H : U \times [0, 1] \rightarrow Y$  est une homotopie avec  $H(\cdot, 0) = f$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f_t = H(\cdot, t) : U \rightarrow Y$  possède la propriété ( $\mathcal{P}$ ) pour tout  $t < \varepsilon$ . On dit que la propriété est globalement stable si les conditions ci-dessus sont vérifiées avec  $U = X$ .*

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème de stabilité de la transversalité.

**Théorème 1.1.6.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés différentielles. Les classes des applications lisses  $f : X \rightarrow Y$  suivantes sont localement stables :*

1. *immersions,*
2. *submersions,*
3. *plongements,*
4. *applications transverses à une sous-variété donnée  $Z$  de  $Y$ .*

*Si  $X$  est compacte la stabilité est globale.*

*Démonstration.* Seul le cas de transversalité nous intéresse (pour une preuve complète, voir [3], page 49). Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse et transverse à  $Z$ , dont la codimension est égale à  $d$ . Soit  $x_0 \in f^{-1}(Z)$  et soit  $V$  un voisinage de  $y_0 = f(x_0)$  telle que  $V \cap Z = \varphi^{-1}(0)$  où  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une submersion sur  $V \cap Z$ .  $W = f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x_0$ ,  $W \cap f^{-1}(Z) = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$  et  $\varphi \circ f : W \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une submersion sur  $W \cap f^{-1}(Z)$  (car  $f$  est transverse à  $Z$ ).

Pour tout  $x \in W \cap f^{-1}(Z)$ , la matrice de  $D_x(\varphi \circ f)$  possède un mineur  $M_d(\varphi \circ f, x)$  d'ordre  $d \times d$  de déterminant non nul. L'application  $(x, t) \mapsto \det M_d(\varphi \circ f_t, x)$  est continue (comme composée d'applications continues) et ne s'annule pas en  $(x_0, 0)$ . Il existe donc un ouvert  $U \subset W$  et un  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $(x, t) \in U \times [0, \varepsilon[$ ,  $\det M_d(\varphi \circ f_t, x) \neq 0$ . Ceci signifie que  $D_x(\varphi \circ f_t)$  est surjective sur  $U \times [0, \varepsilon[$  et donc  $f_t \pitchfork Z$ .

Si  $X$  est compacte, elle peut être recouverte par un nombre fini de  $U_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Il suffit de prendre  $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \varepsilon_i$  pour avoir la stabilité globale. □

**Exemples 1.1.7.** *Soit  $f_t(x) = (x, x^2 + 2t - 1)$  et soit l'axe des abscisses  $d = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ . Pour tout  $0 \leq t < \frac{1}{2}$ ,  $f_t \pitchfork d$ . En effet,  $f_t^{-1}(d) = \{\pm\sqrt{1 - 2t}\}$  et  $\text{Im}D_{\pm\sqrt{1-2t}}f_t$  est engendrée par le vecteur  $(1, \pm 2\sqrt{1 - 2t})$ . D'autre part,  $f_{\frac{1}{2}} \not\pitchfork d$  (donc ici on peut prendre  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ).*

## 1.2 Généricité

La transversalité est une propriété *générique* : toute fonction lisse  $f : X \rightarrow Y$  peut être légèrement modifiée pour devenir une fonction transverse à une sous-variété  $Z$  donnée de  $Y$ . Cela s'avère très utile pour établir le caractère générique d'une propriété qui

dépend d'un nombre fini de paramètres réels et qui peut être décrite à l'aide d'un système d'équations non linéaires.

Commençons par un exemple. Soit  $F : X \times S \rightarrow Y$  lisse et  $F_s : X \rightarrow Y$  telle que  $F_s(x) = F(x, s)$ . Si  $F \pitchfork Z$ , est-ce que  $F_s \pitchfork Z$  pour tout  $s \in S$ ? La réponse est négative :

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((x, y), s) \mapsto (x, y, s)$$

$F$  est une submersion et donc transverse à toute sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . En particulier,  $F \pitchfork S^2$ .  $F_s$  envoie le plan  $\mathbb{R}^2$  sur le plan horizontal  $\{z = s\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $s = -1, 1$ ,  $F_s$  n'est pas transverse à  $S^2$  (les deux plans  $\{z = \pm 1\}$  sont tangents à  $S^2$ ). Remarquons tout de suite que pour tout  $s$  différent de  $-1$  et  $1$ ,  $F_s \pitchfork S^2$  (i.e. la transversalité pour presque tout  $s$ ).

**Théorème 1.2.1** (Théorème de Transversalité). *Soit  $F : X \times S \rightarrow Y$  une application lisse entre des variétés différentielles telles que seule  $X$  ait un bord (éventuellement vide!). Soit  $Z$  une sous-variété sans bord de  $Y$ . Si  $F$  et  $\partial F = F|_{\partial X \times S}$  sont transverses à  $Z$ , alors pour presque tout  $s \in S$  les applications  $F_s$  et  $\partial F_s$  sont transverses à  $Z$ .*

*Démonstration.* L'image réciproque  $W = F^{-1}(Z)$  est une sous-variété de  $X \times S$  de bord  $\partial W = W \cap (\partial X \times S)$ . Soit  $\pi : W \rightarrow S$  la restriction à  $W$  de la projection  $X \times S \rightarrow S$ . Nous allons montrer que si  $s \in S$  est une valeur régulière de  $\pi$  alors  $F_s \pitchfork Z$  et de même, si  $s \in S$  est valeur régulière de  $\partial\pi$  alors  $\partial F_s \pitchfork Z$ . Le théorème suit alors immédiatement du Théorème de Sard, car presque tout  $s \in S$  est valeur régulière à la fois de  $\pi$  et de  $\partial\pi$ . On a  $s$  valeur régulière de  $\pi$  si, pour tout  $(x, s) \in W$  :

$$\forall e \in T_s S, \exists (v, e) \in T_{(x,s)} W = (D_{(x,s)} F)^{-1}(T_z Z),$$

pour  $z = F_s(x)$ . Ceci se traduit par,  $\forall (u, e) \in T_{(x,s)} X \times S = T_x X \times T_s S, \exists v \in T_x X$  tels que  $D_{(x,s)} F(u, e) - D_{(x,s)} F(u - v, 0) \in T_z Z$ , ou encore

$$D_{(x,s)} F(u, e) - D_x F_s(u - v) \in T_z Z,$$

$$\left( \text{car } D_{(x,s)} F(a, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\gamma(t), s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_s(\gamma(t)) = D_x F_s(a) \right).$$

On peut dire que tout vecteur de l'image de  $D_{(x,s)} F$  est un vecteur de l'image de  $D_x f_s$  à un vecteur de  $T_z Z$  près ou encore

$$\text{Im} D_{(x,s)} F + T_z Z = \text{Im} D_x F_s + T_z Z.$$

D'où, sous la condition  $s$  valeur régulière de  $\pi$  :

$$F \pitchfork Z \implies F_s \pitchfork Z.$$

De même,  $\partial F \pitchfork Z \implies \partial F_s \pitchfork Z$ . □

Le caractère générique de la transversalité est formulé dans les deux théorèmes qui suivent. Pour une démonstration détaillée voir [3].

**Théorème 1.2.2** (Homotopie à une application transverse). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse. Soit  $Z$  une sous variété sans bord de la variété sans bord  $Y$ , alors il existe  $g : X \rightarrow Y$  lisse, homotope à  $f$  telle que  $g$  et  $\partial g$  soient transverse à  $Z$ .*

**Théorème 1.2.3.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  est telle que  $\partial f : \partial X \rightarrow Y$  soit transverse à  $Z$ , alors il existe  $g : X \rightarrow Y$  homotope à  $f$  telle que  $g$  soit transverse à  $Z$ .*

La conséquence la plus utile de ce théorème est que si  $h : \partial X \rightarrow Y$  est transverse à  $Z$  et peut se prolonger en une application lisse définie sur tout  $X$ . alors  $h$  peut se prolonger en une application lisse définie sur tout  $X$  et transverse à  $Z$ .

# 2

## Théorie du degré

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés de même dimension. Un point  $x \in M$  est dit *point régulier* de  $f$  si la différentielle  $df_x$  est surjective. Si  $x$  est régulier, alors  $f$  applique localement un voisinage de  $x$  dans  $M$  de manière difféomorphique sur un ouvert de  $N$ . Ceci découle du Théorème d'inversion locale. Par ailleurs, un point  $y \in N$  est une *valeur régulière* de  $f$  si l'ensemble  $f^{-1}(y)$  ne contient que des points réguliers.

Dans le cas où  $df_x$  n'est pas surjective, nous appelons  $x$  un *point singulier* de  $f$  et l'image  $f(x)$  est une *valeur singulière*. Ainsi, chaque  $y \in N$  est soit une valeur singulière, soit une valeur régulière selon que  $f^{-1}(y)$  contient ou non un point singulier.

Dans cette partie, nous allons introduire la notion de degré d'une application lisse. Pour cela, nous aurons besoin de la proposition suivante

**Proposition 2.0.1.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés différentielles sans bord de même dimension et supposons que  $M$  est compacte. Alors chaque valeur régulière  $y \in R_f \subset N$  de  $f$  possède un voisinage ouvert  $V \subset R_f$  tel que pour tout*

$z \in V$ , l'image réciproque  $f^{-1}(z)$  est un ensemble fini et l'entier

$$\deg(f, z) := \#f^{-1}(z)$$

dépend uniquement de  $y$ .

*Démonstration.* Pour toute valeur régulière  $y \in N$ , l'ensemble  $f^{-1}(y)$  est fini (éventuellement vide). En effet,  $f^{-1}(y)$  est compact car il est fermé dans l'espace compact  $M$ , et il est discret car, d'après le théorème d'inversion locale,  $f$  est injective dans un voisinage de chaque point  $x \in f^{-1}(y)$ .

Nous allons montrer que  $z \mapsto \deg(f, z)$  est une application localement constante dans  $R_f$  (qui est un ouvert de  $N$ ). Pour cela, nous allons trouver un voisinage  $V$  de  $y$  tel que  $f^{-1}(V)$  soit une union d'ouverts  $U_1, \dots, U_k$  deux à deux disjoints tels que chaque restriction  $f|_{U_k}$  soit un difféomorphisme sur  $V$ .

Soient  $x_1, \dots, x_k$  les points de  $f^{-1}(y)$ . D'après le Théorème d'inversion locale, chaque  $x_i$  possède un voisinage  $U_i$  qui s'envoie difféomorphiquement par  $f$  sur un voisinage  $V_i$  de  $y$ . On peut supposer que les ouverts  $U_1, \dots, U_k$  sont deux à deux disjoints en choisissant des ouverts plus petits si nécessaire (ceci est possible dans tout espace séparé). Nous pouvons alors prendre

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i\right).$$

Pour tout  $z \in V$ , le nombre de points de  $f^{-1}(z)$  est égal à  $k$  car chaque  $z$  admet un unique antécédent dans chaque  $U_i$  et aucun antécédent en dehors des  $U_i$ . Ainsi, la fonction  $\#f^{-1}(z)$  est constante sur  $V$ , ce qui montre que  $z \rightarrow \deg(f, z)$  est localement constante dans  $R_f$ .  $\square$

## 2.1 Degré modulo 2

Considérons une application lisse  $f : X \rightarrow Y$  entre deux variétés différentielles sans bord de même dimension, avec  $X$  compacte et  $Y$  connexe. Si  $y$  est une valeur régulière, le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = y$  est noté  $\#f^{-1}(y)$ . Nous allons montrer que la classe de  $\#f^{-1}(y)$  modulo 2 ne dépend pas du choix de la valeur régulière  $y$ . Cette classe est appelée le degré modulo 2 de  $f$ .

Dans cette partie, nous présenterons les concepts et les techniques essentiels pour comprendre la notion de degré modulo 2 d'une application. Dans la section suivante,

nous généraliserons cette notion aux variétés orientables pour obtenir un outil encore plus précis, le degré de Brouwer, qui prend des valeurs dans  $\mathbb{Z}$  plutôt que  $\{0, 1\}$ .

La définition du degré repose sur le fait suivant :

**Lemme 2.1.1** (Lemme d'homotopie). *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de même dimension, où  $M$  est compacte et sans bord. Soient  $f, g : M \rightarrow N$  deux applications lisses. Supposons que  $f$  et  $g$  soient homotopes de manière lisse. Si  $y \in Y$  est une valeur régulière de  $f$  et de  $g$  à la fois, alors*

$$\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \text{ modulo } 2.$$

*Démonstration.* Soit  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  une homotopie lisse entre  $f$  et  $g$ . Supposons d'abord que  $y$  est une valeur régulière pour  $F$ . Selon le théorème de l'image réciproque avec bord, cela implique que  $F^{-1}(y)$  est une sous-variété à bord de  $M \times [0, 1]$  de dimension  $\dim M \times [0, 1] - \dim N = 1$ , puisque nous avons supposé  $\dim M = \dim N$ . De plus, le bord de  $F^{-1}(y)$  est donné par :

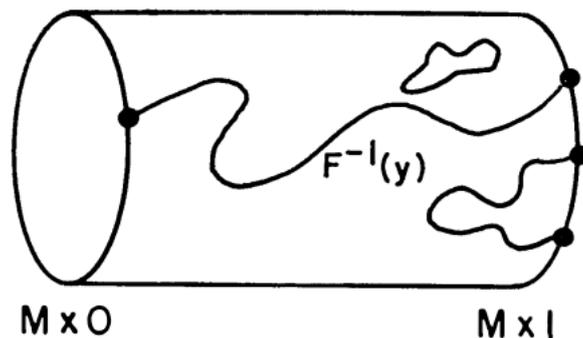
$$\begin{aligned} \partial(F^{-1}(y)) &= F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0, 1]) \\ &= F^{-1}(y) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) \\ &= (F^{-1}(y) \cap M \times \{0\}) \cup (F^{-1}(y) \cap M \times \{1\}) \\ &= (f^{-1}(y) \times \{0\}) \cup (g^{-1}(y) \times \{1\}). \end{aligned}$$

Étant donné que  $M \times [0, 1]$  est compacte, son sous ensemble fermé  $F^{-1}(y)$  est aussi compact. Par le Théorème de classifications des variétés à bord compactes de dimension un (voir [7], Appendice page 55), le bord  $\partial(F^{-1}(y))$  est constitué d'un nombre paire de points. Ainsi,

$$\#\partial(F^{-1}(y)) = \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) \equiv 0 [2],$$

et donc

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) [2].$$



Supposons maintenant que  $y$  n'est pas une valeur régulière de  $F$ . On sait que les fonctions  $z \mapsto \#f^{-1}(z)$  et  $z \mapsto \#g^{-1}(z)$  sont localement constantes sur l'ensemble des valeurs régulières  $z \in N$  de  $f$  et  $g$ , respectivement. Ainsi, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $y$  constitué uniquement de valeurs régulières de  $f$ , tel que  $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(y)$  pour tout  $z \in U$ . De même, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  constitué uniquement de valeurs régulières de  $g$ , tel que  $\#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y)$  pour tout  $z \in V$ . Par le théorème de Sard, il existe une valeur régulière  $z$  de  $F$  dans l'ouvert  $U \cap V$ . Selon le premier cas, nous avons  $\#f^{-1}(z) = \#g^{-1}(z)$  [2] et nous obtenons

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y) \pmod{2}.$$

□

Le résultat suivant peut s'avérer utile.

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $X$  une variété différentielle et  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$  des applications lisses à valeur dans la sphère, telles que pour tout  $x \in X$ ,  $\|f(x) - g(x)\| < 2$ . Alors  $f \sim g$ .*

*Démonstration.* La condition  $\|f(x) - g(x)\| < 2$  signifie que, pour tout  $x \in X$ , les points  $f(x)$  et  $g(x)$  ne sont pas diamétralement opposés sur la sphère par rapport à l'origine. En d'autres termes, ils ne sont pas antipodaux. Plus précisément, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $tg(x) + (1-t)f(x)$  ne s'annulera jamais. Si elle s'annulait, cela signifierait que le segment paramétré par cette expression passerait par l'origine, ce qui ne serait possible que si  $f(x)$  et  $g(x)$  étaient des points antipodaux. Par conséquent, l'application  $F : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$  définie par :

$$F(x, t) = \frac{tg(x) + (1-t)f(x)}{\|tg(x) + (1-t)f(x)\|}$$

est bien définie et à valeurs dans la sphère  $\mathbb{S}^n$ . De plus,  $F$  est une homotopie car  $F(x, 0) = f(x)$  et  $F(x, 1) = g(x)$ . Comme toutes les applications qui composent  $F$  sont lisses,  $F$  l'est également et on a le résultat.  $\square$

**Remarques 2.1.3.** *Toute application lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  est homotope à une application constante  $c$ .*

*Démonstration.* En effet, l'homotopie  $F(x, t) = tf(x) + (1 - t)c$  convient. Une telle application est dite *contractile*. Dans ce cas le résultat est intuitivement évident.  $\square$

**Définition 2.1.4** (Isotopie). *Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  des difféomorphismes. Alors  $f$  et  $g$  sont isotopes de manière lisse si il existe une homotopie lisse  $F$  entre  $f$  et  $g$ , telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  fixé,  $x \mapsto F(x, t)$  soit un difféomorphisme entre  $X$  et  $Y$ .*

**Lemme 2.1.5** (Lemme d'homogénéité). *Soit  $N$  une variété différentielle connexe. Soient  $y, z$  deux points intérieurs  $N$ . Alors il existe un difféomorphisme  $h : N \rightarrow N$  différentiablement isotope à l'identité tel que  $h(y) = z$ .*

*Démonstration.* On considère une fonction lisse  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui s'annule en dehors de la boule unité, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , si  $\|x\| < 1$ , alors  $\varphi(x) > 0$ , et si  $\|x\| \geq 1$ , alors  $\varphi(x) = 0$ . Pour tout vecteur unitaire  $c$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , on étudie les équations différentielles (pour  $i = 1, \dots, n$ ) :

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution  $x = x(t)$  pour ces équations différentielles, définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier et vérifiant la condition initiale  $x(0) = \tilde{x}$ , pour tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ . On note ces solutions par  $x(t) = F_t(\tilde{x})$ , en indiquant ainsi la dépendance de la solution par rapport à la condition initiale  $\tilde{x}$ . On peut montrer que :

- $F_t(\tilde{x})$  est une fonction lisse de  $(t, \tilde{x})$ , définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- $F_0(\tilde{x}) = \tilde{x}$  (par unicité).
- $F_{s+t}(\tilde{x}) = F_s \circ F_t(\tilde{x})$ , autrement dit, le champ de vecteurs engendré par les équations différentielles est autonome.

Nous pouvons observer que les trois points précédents impliquent que les  $F_t$  sont des difféomorphismes  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . De plus, les  $F_t$  sont isotopes à l'identité via une isotopie lisse

qui fixe tous les points en dehors de la boule unité. Enfin, en choisissant judicieusement  $c$  et  $t$ , il est possible d'envoyer l'origine par  $F_t$  sur n'importe quel point de la boule unité.

Considérons maintenant une variété connexe  $N$ . Nous définissons une relation d'équivalence sur  $N$  comme suit : deux points  $x$  et  $y$  appartenant à  $N$  sont dits *isotopes* s'il existe une isotopie lisse qui envoie l'un sur l'autre. Cette relation est bien une relation d'équivalence. Soit  $y$  un point intérieur de  $N$ . Par définition, il existe un voisinage  $U$  de  $y$  dans  $N$  qui est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, d'après l'observation précédente, il existe également un voisinage  $U_0$  de  $y$  dans  $N$  tel que tout point de  $U_0$  est isotope à  $y$ . Ainsi, les classes d'isotopie qui partitionnent  $N$  sont des ensembles ouverts. Puisque  $N$  est connexe, il ne peut y avoir qu'une seule classe d'isotopie, ce qui termine la démonstration.  $\square$

Nous allons maintenant énoncer et prouver le résultat suivant. Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés différentielles. Supposons que  $M$  est compacte et sans bord, et que  $N$  est connexe. Nous avons alors :

**Théorème 2.1.6.** *Soient  $y, z \in N$  des valeurs régulières de  $f$ . Alors*

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}.$$

*Démonstration.* La démonstration de ce résultat fait appel aux deux lemmes précédents (homotopie et isotopie). Par le lemme d'isotopie, il existe un difféomorphisme isotope à l'identité  $h : N \rightarrow N$  tel que  $h(y) = z$ . Clairement,  $z$  est une valeur régulière de la composition  $h \circ f$ . De plus,

$$h \circ f \sim f.$$

En effet,  $f \sim \text{Id}$ , d'où  $h \circ f \sim \text{Id} \circ f = f$ . Ainsi, d'après le lemme d'homotopie

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(z) [2].$$

De plus, comme  $h$  est en particulier une bijection,

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y).$$

On a donc égalité des cardinaux :

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(y),$$

et donc

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) [2],$$

ce qui achève la preuve. □

On appelle cet entier, qui ne dépend pas du choix de la valeur régulière de  $f$ , le *degré modulo 2* de  $f$  et on le note  $\deg_2(f)$ .

**Proposition 2.1.7.**  $\deg_2(f)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ .

*Démonstration.* Supposons que  $g$  soit homotope à  $f$ . Le Théorème de Sard affirme l'existence d'un  $y \in N$  qui est une valeur régulière à la fois pour  $f$  et pour  $g$ . Le lemme d'homotopie implique que le nombre de points pré-images de  $y$  pour  $f$  et  $g$  sont égaux modulo 2. Autrement dit :

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) [2].$$

En se référant à ce qui précède, on peut conclure que :

$$\deg_2(f) \equiv \#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \equiv \deg_2(g) [2].$$

□

En résumé, le degré modulo 2 ne dépend pas de la valeur régulière choisie, et c'est un invariant homotopique.

**Remarques 2.1.8.** *L'application identité  $\text{Id} : M \rightarrow M$  d'une variété compacte connexe et sans bord est de degré 1. Elle n'est pas homotope à une application constante puisque cette dernière est de degré 0. Cependant, si la variété  $M$  n'est pas compacte, cela n'est plus vrai. En effet, on a vu que toutes applications  $f, g$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (ou tout autre espace contractile) sont homotopes.*

## 2.2 Degré orienté

Dans cette section, nous allons généraliser le concept de degré modulo 2 en introduisant une notion qui permet d'associer un entier à une application lisse entre variétés différentielles. Cette généralisation est intuitive et est basée sur l'idée que cet entier reste inchangé lorsque l'application est continûment déformée, (formellement, si on regarde une application qui lui est homotope). Cet invariant puissant est un outil de classification et possède de nombreuses applications en géométrie différentielle.

## Orientation des espaces vectoriels

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases ordonnées de  $E$  comme suit : si  $(e_i)$  et  $(e'_i)$ , avec  $i = 1, \dots, n$  sont deux bases ordonnées de  $E$ , alors elles sont équivalentes si et seulement si la matrice de passage entre ces deux bases a un déterminant positif. Cette relation partitionne l'ensemble des bases ordonnées de  $E$  en deux classes d'équivalence.

On appelle orientation sur un espace vectoriel (réel) le choix d'une de ces deux classes, et on appelle espace vectoriel orienté un couple  $(E, e)$  où  $E$  est un espace vectoriel, et  $e$  est un représentant d'une classe d'équivalence de bases ordonnées. On dit que  $[e]$  est l'orientation de  $E$ . La base canonique dans  $\mathbb{R}^n$ , par exemple, induit une orientation qu'on appellera orientation canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

Il est essentiel de ne considérer que des bases ordonnées, car l'orientation déterminée par une base donnée dépend fortement de l'ordre des vecteurs qui la composent.

**Définition 2.2.1.** Soient  $(E, e)$  et  $(E', e')$  deux espaces vectoriels orientés de même dimension, et soit  $f : E \rightarrow E'$  un isomorphisme. On dit que  $f$  préserve l'orientation si  $f(e) = e'$ . La cas échéant, on dit que  $f$  renverse l'orientation.

## Orientation des variétés

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . Soient  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $(U_j, \varphi_j)$  deux cartes locale de  $M$  telles que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . On considère le difféomorphisme de transition

$$\begin{aligned} \tau_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ z &\mapsto \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z). \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un difféomorphisme entre des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Une variété  $M$  est dite *orientable* si un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  peut être construit sur  $M$ , de sorte que tous les difféomorphismes de transition de cet atlas ont un jacobien positif en tout point. Cet atlas est appelé atlas positif. Un atlas positif est dit maximal s'il est impossible de l'élargir en lui ajoutant une carte compatible. Si un atlas positif existe, on peut toujours construire un atlas maximal positif en prenant l'union de tous les atlas positifs.

L'orientation d'une variété différentielle  $M$  correspond au choix d'un atlas maximal positif. Ainsi, la donnée d'une variété différentielle et d'un atlas maximal positif forme une variété orientée. L'atlas sera souvent omis lorsqu'on parlera de variété orientée.

**Définition 2.2.2.** Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentielles orientées de même dimension, et soit  $f : M \rightarrow N$  un difféomorphisme. On dit que  $f$  préserve l'orientation si pour tout  $x \in M$ , la différentielle  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  préserve l'orientation (au sens des espaces vectoriels orientés).

## Orientation du bord

Si  $M$  est une variété différentielle à bord, on peut distinguer trois types de vecteurs dans l'espace tangent  $T_x M$  en un point  $x$  du bord  $\partial M$  :

1. Les vecteurs tangents au bord  $\partial M$ , formant un sous-espace de dimension  $(n - 1)$ ,  
 $T_x(\partial M) \subset T_x M$ .
2. Les vecteurs « sortants », formant une demi-espace ouvert borné par  $T_x \partial M$ .
3. Les vecteurs « entrants » formant un demi-espace complémentaire.

Chaque orientation de  $M$  détermine une orientation de son bord  $\partial M$  comme suit : Pour  $x$  appartenant à  $\partial M$ , choisir une base positivement orientée  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $T_x M$  de telle sorte que  $v_2, \dots, v_n$  soient tangents à la frontière (en supposant que  $n \geq 2$ ) et que  $v_1$  soit un vecteur « sortant ». Alors,  $(v_2, \dots, v_n)$  détermine l'orientation requise pour  $\partial M$  en  $x$ .

Si  $M$  est de dimension 1, alors chaque point  $x$  du bord se voit attribuer une orientation  $-1$  ou  $+1$  selon que le vecteur orienté positivement en  $x$  pointe vers l'intérieur ou l'extérieur.

## Degré d'une application lisse

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de dimension  $n$ , sans bord, et orientables. On suppose  $M$  compacte et  $N$  est connexe. Soit également  $f : M \rightarrow N$  une application lisse. Soit  $x \in M$  tel que  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  soit un isomorphisme entre espace vectoriels de dimension  $n$  (i.e.  $x$  est un point régulier). On définit le signe de  $df_x$  (noté  $\text{sgn}$ ) comme étant égal à 1 si  $df_x$  préserve l'orientation et  $-1$  sinon. Alors pour toute valeur régulière  $y \in N$ , on pose :

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x),$$

qui est le degré de Brouwer de l'application  $f$  au point  $y$ . Nous avons montré que  $\#f^{-1}(y)$  est localement constante sur les valeurs régulières, donc  $\deg(f, y)$  l'est aussi.

Les deux principaux résultats qui rendent cet outil particulièrement intéressant sont les suivants :

- le degré  $\deg(f, y)$  d'une application  $f$  ne dépend pas de la valeur régulière  $y$  choisie. On utilisera donc simplement le terme degré  $\deg(f)$  pour désigner cette quantité.
- De plus, le degré d'une application est invariant par homotopie lisse, ce qui signifie que si deux applications  $f$  et  $g$  sont lisses et homotopes, alors elles ont le même degré.

Pour prouver ces résultats on a besoin d'un certain nombre de lemmes.

**Lemme 2.2.3.** *Supposons que  $M$  soit le bord d'une variété compacte et orientable  $X$ , et considérons une application lisse  $f : M \rightarrow N$ . Si nous pouvons trouver une application lisse  $F : X \rightarrow N$  telle que sa restriction à  $M$  soit égale à  $f$ , alors pour toute valeur régulière  $y \in N$ , le degré de  $f$  par rapport à  $y$  est nul, c'est-à-dire  $\deg(f, y) = 0$ .*

*Démonstration.* Fixons une orientation de  $X$ , induisant ainsi une orientation sur le bord  $M = \partial X$ . Supposons que  $y$  soit une valeur régulière de  $F$  et de  $f = F|_M$ . La pré-image  $F^{-1}(y)$  est une variété à bord de dimension 1. D'après le théorème de classification, elle est composée d'une union d'arcs et de cercles. De plus, les cercles sont inclus dans  $X \setminus M$ , tandis que les extrémités des arcs sont dans  $M$ . Soit  $A$  un tel arc, et notons  $\partial A = \{a, b\}$ . Nous allons montrer que

$$\operatorname{sgn}(df_a) + \operatorname{sgn}(df_b) = 0,$$

et donc (en faisant la somme sur tous ces arcs) que  $\deg(f, y) = 0$ .

Pour tout  $x \in A$ , nous avons

$$T_x A = \ker(dF_x),$$

où  $dF_x : T_x X \rightarrow T_y N$  est la différentielle de  $F$  en  $x$ , puisque  $A$  est une composante connexe, donc un ouvert de la sous-variété  $F^{-1}(y)$ . Les orientations pour  $X$  et  $N$  déterminent une orientation pour  $A$  comme suit : Soit  $x \in A$ , et soit  $(v_1, \dots, v_{n+1})$  une base positivement orientée pour  $T_x X$  avec  $v_1$  tangent à  $A$  en  $x$ . Alors le vecteur  $v_1$  détermine l'orientation requise pour  $T_x A$  si et seulement si  $dF_x$  envoie  $(v_2, \dots, v_{n+1})$  en une base positivement orientée pour  $T_y N$ .

Soit  $v_1(x)$  le vecteur unitaire tangent à  $A$  en  $x$ , orienté positivement. Il est clair que  $v_1$  définit un champ de vecteurs, et que  $v_1(x)$  pointe vers l'extérieur en un point de la

frontière (disons  $b$ ) et vers l'intérieur en l'autre point de la frontière,  $a$ . Il en découle immédiatement que

$$\operatorname{sgn}(df_a) = -1, \operatorname{sgn}(df_b) = +1,$$

avec une somme nulle. En ajoutant tous les arcs  $A$  correspondants, nous obtenons

$$\operatorname{deg}(f, y) = 0.$$

Plus généralement, supposons que  $y_0$  soit une valeur régulière pour  $f$ , mais pas pour  $F$ . La fonction  $\operatorname{deg}(f, y)$  est constante dans un certain voisinage  $U$  de  $y_0$ . D'après le Théorème de Sard, nous pouvons choisir une valeur régulière  $y$  pour  $F$  dans  $U$  et constater que

$$\operatorname{deg}(f, y_0) = \operatorname{deg}(f, y) = 0.$$

Ceci prouve le lemme. □

Considérons maintenant une homotopie lisse  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  entre deux applications :  $f(x) = F(x, 0)$  et  $g(x) = F(x, 1)$ .

**Lemme 2.2.4.** *Le degré  $\operatorname{deg}(g, y)$  est égal au degré  $\operatorname{deg}(f, y)$  pour toute valeur régulière  $y$  commune.*

*Démonstration.* Considérons la variété à bord produit  $M \times [0, 1]$ . Alors

$$\partial(M \times [0, 1]) = (M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\}).$$

Nous pouvons supposer que  $M \times \{0\}$  est positivement orientée, tandis que  $M \times \{1\}$  est munie de l'orientation opposée. D'après le lemme précédent, si  $y$  est une valeur régulière de  $h = F|_{\partial(M \times [0, 1])}$  alors

$$0 = \operatorname{deg}(h, y) = \operatorname{deg}(g, y) - \operatorname{deg}(f, y),$$

et le résultat s'en suit. □

**Théorème 2.2.5.** *L'entier  $\operatorname{deg}(f, y)$  ne dépend pas du choix de la valeur régulière  $y$ .*

*Démonstration.* On raisonne comme dans le cas de degré modulo 2 : soient  $y, z$  deux valeurs régulières pour  $f : M \rightarrow N$ . Alors il existe un difféomorphisme  $h : N \rightarrow N$  isotope à l'identité tel que  $h(y) = z$ . Comme l'identité préserve l'orientation, par le lemme précédent  $h$  doit la préserver aussi. En particulier il n'influence pas le degré :

$$\operatorname{deg}(f, y) = \operatorname{deg}(h \circ f, h(y)).$$

Cependant on a  $f \sim h \circ f$  et  $h(y) = z$  donc par le lemme précédent

$$\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z).$$

Ainsi,

$$\deg(f, y) = \deg(f, z),$$

et on a le résultat. □

Ceci implique en outre le résultat suivant.

**Théorème 2.2.6.** *Si  $f \sim g$ , alors  $\deg(f) = \deg(g)$ .*

*Démonstration.* Par le lemme qui précède, si  $f \sim g$ , on a  $\deg(g, y) = \deg(f, y)$  pour toute valeur régulière commune  $y$ . Mais le théorème précédent nous donne que  $\deg(f, y)$  et  $\deg(g, y)$  ne dépendent pas de  $y$  d'où  $\deg(g) = \deg(f)$ . □

L'indépendance vis-à-vis du choix de la valeur régulière rend la manipulation du degré bien souple. Cela conduit, par exemple, au résultat suivant.

**Proposition 2.2.7.**  $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ .

*Démonstration.* Notons que l'application  $\text{sgn}$  est multiplicative, elle dépend en fait du déterminant qui est lui-même multiplicatif. On a alors

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(y)} \text{sgn}(d(g \circ f)_x) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(y))} \text{sgn}(dg_{f(x)} \circ df_x) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(y))} \text{sgn}(dg_{f(x)}) \text{sgn}(df_x) \\ &= \sum_{z \in g^{-1}(y)} \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{sgn}(dg_{f(x)}) \text{sgn}(df_x) \\ &= \sum_{z \in g^{-1}(y)} \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{sgn}(dg_z) \text{sgn}(df_x) \\ &= \sum_{z \in g^{-1}(y)} \text{sgn}(dg_z) \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{sgn}(df_x) \end{aligned}$$

Le passage entre les deux dernières lignes étant dû au fait que le degré ne dépend pas de la valeur régulière choisie. □

**Remarques 2.2.8.** *Pour un difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés, le degré sera toujours égal à  $+1$  ou  $-1$ , car il s'agit d'une bijection. Le signe du degré dépendra de la préservation ou du changement d'orientation induit par  $f$ . En conséquence, un difféomorphisme entre deux variétés différentielles sans bord qui change l'orientation ne pourra jamais être homotope à l'identité. Cela est dû au fait que le degré est invariant par homotopie.*

**Exemples 2.2.9.**

1. La réflexion  $r_i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  donnée par

$$r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$$

est un difféomorphisme de degré  $-1$ .

2. L'application antipodale  $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  donnée par

$$a(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

peut-être réécrite comme la composée de  $n + 1$  réflexions

$$a = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1}.$$

En particulier, la proposition précédente nous donne

$$\deg(a) = \prod_{i=1}^{n+1} \deg(r_i) = (-1)^{n+1}.$$

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 2.2.10.** *Si  $n$  est un entier pair, alors l'application antipodale  $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  n'est pas homotope à l'identité.*

*Démonstration.* Si  $n$  est pair, alors

$$\deg(a) = (-1)^{2k+1} = -1,$$

mais  $\deg(\text{Id}) = 1$  et comme le degré est invariant par homotopie on déduit alors le résultat.  $\square$

L'utilisation de l'application antipodale se révèle d'une grande richesse. Un exemple de cela est donné par le théorème du point fixe suivant (à comparer avec le Théorème de Brouwer).

**Théorème 2.2.11.** *Soit  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application lisse. Si  $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ , alors  $f$  admet un point fixe.*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $f$  n'admette pas de point fixe. Notons  $a$  l'application antipodale  $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ . On a, pour tout  $x \in \mathbb{S}^n$

$$\|f(x) - a(x)\| = \|f(x) + x\| < 2.$$

En effet si ça n'était pas le cas, il existerait un  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  tel que

$$\|f(x_0) - (-x_0)\| = 2,$$

ce qui revient à dire que  $f(x_0) = x_0$  car seul les points antipodaux ont cette propriété. ceci contredit l'hypothèse selon laquelle  $f$  n'a pas de point fixe. Ainsi  $f$  et  $a$  sont homotopes.

En particulier

$$\deg(f) = \deg(a) = (-1)^{n+1}.$$

□

Nous avons également cette proposition qui présente une démonstration particulièrement instructive.

**Proposition 2.2.12.** *Soit  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application lisse de degré impair. Alors  $f$  envoie une paire de points antipodaux sur une autre paire de points antipodaux, autrement dit il existe  $x \in \mathbb{S}^n$  tel que*

$$f(x) = -f(-x).$$

*Démonstration.* On montre la contraposée. Supposons qu'aucune paire antipodale n'est envoyée sur une autre paire antipodale, i.e.  $f(x) \neq -f(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^n$ . Clairement

$$\|f(x) - f(-x)\| < 2$$

et on a vu que ceci impliquait l'existence d'une homotopie lisse entre  $f(x)$  et  $f(-x)$  de la forme

$$F(x, t) = \frac{tf(x) + (1-t)f(-x)}{\|tf(x) + (1-t)f(-x)\|}$$

On remarque de plus qu'en  $t = 1/2$ , on a

$$F(x, 1/2) = \frac{f(x) + f(-x)}{\|f(x) + f(-x)\|} = g(x).$$

Soit  $y$  une valeur régulière de  $g$ . Par symétrie, si  $x \in g^{-1}(y)$ , alors  $-x \in g^{-1}(y)$ . Ainsi les points réguliers de  $g$  viennent par paires. On a alors que

$$\deg(g, y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(dg_x) \equiv 0 [2].$$

En effet le cardinal de  $g^{-1}(y)$  sera pair, et sommer un nombre pair de  $+1$  et de  $-1$  donnera un nombre pair, d'où  $\deg(g) \equiv 0 [2]$ . En particulier, comme

$$f \sim g \sim f \circ a,$$

on a  $\deg(f) = \deg(g)$  et  $f$  est de degré pair.

### Théorème de la boule chevelue

Une conséquence directe de cette théorie est la démonstration d'une version simplifiée du *théorème de la boule chevelue*. Cette version énonce que la sphère  $\mathbb{S}^n$  possède un champ de vecteurs tangents lisse et non nul si et seulement si  $n$  est un nombre impair (dans le résultat classique, seule la continuité du champ est requise). Un champ de vecteurs sur une sous variété  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est une fonction lisse  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui associe à chaque point  $x \in M$  un vecteur  $v(x) \in T_x M$ . Dans notre cas, cette condition équivaut à la propriété suivante pour tout  $x \in \mathbb{S}^n$  :

$$\forall x \in \mathbb{S}^n, \langle v(x), x \rangle = 0.$$

Si  $v(x)$  est non nul pour tous les  $x \in \mathbb{S}^n$ , alors nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que

$$\langle v(x), v(x) \rangle = \|v(x)\|^2 = 1.$$

En effet, nous aurions toujours pu choisir un champ de vecteurs  $\tilde{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  qui satisfait également les conditions requises.

Considérons maintenant  $v$  comme une fonction lisse de  $\mathbb{S}^n$  sur elle-même. Définissons l'application  $F : \mathbb{S}^n \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$  comme suit

$$F(x, \theta) = \cos \theta x + \sin \theta v(x)$$

Il est clair que  $F(x, 0) = x$  et  $F(x, \pi) = -x$ . De plus,

$$\begin{aligned} \langle F(x, \theta), F(x, \theta) \rangle &= \langle \cos \theta x + \sin \theta v(x), \cos \theta x + \sin \theta v(x) \rangle \\ &= \cos^2 \theta \|x\|^2 + 2 \cos \theta \sin \theta \langle x, v(x) \rangle + \sin^2 \theta \|v(x)\|^2 \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi construit une homotopie entre l'application antipodale  $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  et l'identité. Cependant, nous avons vu que cela est impossible pour  $n$  pair, donc un champ de vecteurs  $v$  satisfaisant ces conditions ne peut pas exister.

Inversement, si  $n = 2k - 1$  est impair, nous pouvons expliciter un tel champ de vecteurs. En effet, pour  $x = (x_1, \dots, x_{2k})$ ,

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

satisfait les conditions requises. Il est facile de vérifier que

$$\langle v(x), x \rangle = x_2x_1 - x_1x_2 + x_4x_3 - x_3x_4 + \dots + x_{2k}x_{2k-1} - x_{2k-1}x_{2k} = 0.$$

Étant donné que  $(x_1, \dots, x_{2k})$  appartient à  $\mathbb{S}^n$ ,

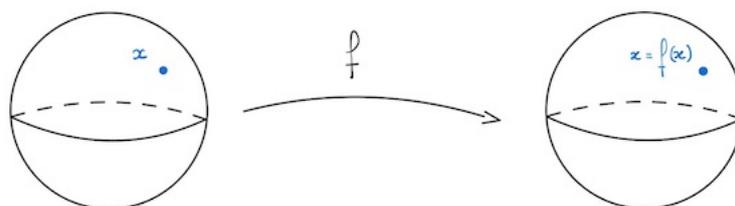
$$\langle v(x), v(x) \rangle = \sum_{i=1}^{2k} x_i^2 = 1.$$

Ce qui achève la preuve. □

# 3

## Théorème de point fixe de Brouwer

Dans cette partie, nous étudions le Théorème du point fixe de Brouwer et sa démonstration. Le théorème affirme que toute application continue d'une boule fermée euclidienne dans elle-même possède au moins un point fixe.



La démonstration repose sur le « Lemme de non rétraction » dans le cas lisse. Pour traiter le cas continu, nous le ramenons au cas lisse en utilisant le « Théorème d'approximation de Weierstrass ».

**Lemme 3.0.1** (Lemme de non contraction). *Soit  $X$  une variété compacte à bord. Alors il n'existe aucune application lisse  $f : X \rightarrow \partial X$  qui fixe point par point le bord  $\partial X$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une telle application  $f$ . Soit  $y \in \partial X$  une valeur régulière pour  $f$ . Puisque  $y$  est certainement une valeur régulière pour l'application identité  $f|_{\partial X}$  également, il s'ensuit que  $f^{-1}(y)$  est une variété différentielle de dimension 1, avec une frontière constituée d'un unique point

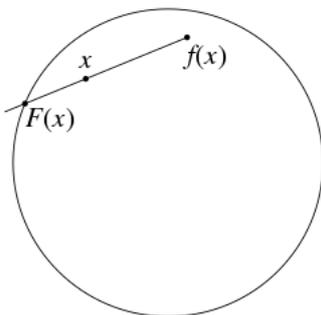
$$f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}.$$

Mais  $f^{-1}(y)$  est aussi compact, et les seules variétés compactes de dimension 1 sont des unions disjointes finies de cercles et de segments, de sorte que  $f^{-1}(y)$  doit être constitué d'un nombre pair de points. Cette contradiction établit le lemme.  $\square$

Ce lemme est également vrai avec l'hypothèse  $f$  continue uniquement.

**Théorème 3.0.2** (Théorème du point fixe de Brouwer). *Soit  $\bar{B}$  la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$  est une fonction continue, alors  $f$  possède un point fixe.*

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe aucun point fixe pour une application lisse  $f : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ . Cela signifie que pour chaque point  $x$  de la boule, les points  $x$  et  $f(x)$  sont distincts. On peut construire une demi-droite unique à partir de  $f(x)$  qui passe par  $x$ . Cette demi-droite intersecte la frontière  $\mathbb{S}^{n-1}$  en un seul point, noté  $F(x)$ . Ainsi, nous définissons une application  $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  qui associe chaque point de la boule à son point d'intersection correspondant sur la frontière. Si  $x$  se trouve déjà sur la frontière, alors le point d'intersection  $F(x)$  doit être égal à  $x$ . Par conséquent,  $F$  est une rétraction lisse.



On peut calculer explicitement l'expression de  $F$  et montrer que c'est une rétraction lisse. Pour cela, posons  $u(x) = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ . L'application  $F$  peut être exprimée sous la forme  $F(x) = f(x) + \lambda(x)u(x)$ , où  $\lambda(x) \geq 0$  et  $\|F(x)\| = 1$ . L'équation  $\|f(x) + \lambda(x)u(x)\|^2 = 1$  admet deux solutions. Nous ne nous intéressons qu'à la solution  $\lambda(x) \geq 0$  qui est donnée

par :

$$\lambda(x) = -\langle f(x), u(x) \rangle + \sqrt{1 - \|f(x)\|^2 + \langle f(x), u(x) \rangle^2}.$$

Ainsi  $F(x) = f(x) + \lambda(x)u(x)$  est lisse et vérifie  $F|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , ce qui conduit à une contradiction avec le lemme de non-rétraction.

Une rétraction de ce type doit avoir une valeur régulière, selon le Théorème de Sard, et elle est également régulière pour la restriction à la frontière (qui est simplement l'identité). Par conséquent, l'image inverse de cette rétraction serait une variété compacte à bord de dimension 1. Cependant, cela entraînerait que la frontière de la boule contienne un nombre pair de points, ce qui est impossible pour une rétraction.

Supposons maintenant que  $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  est continue et qu'elle n'a aucun point fixe. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, nous pouvons approximer  $f$  par une application polynomiale  $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Plus précisément, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé et pour chaque point  $x$  de la boule, nous avons :

$$\|P_1(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Nous remplaçons ensuite  $P_1$  par  $P = \frac{1}{1+\varepsilon}P_1$  afin que la nouvelle application polynomiale normalisée envoie la boule fermée sur elle-même. Ainsi, pour  $\varepsilon < \mu = \min_{x \in \overline{B}} \|f(x) - x\|$ , l'application lisse  $P$  ainsi construite ne possède aucun point fixe. Mais ceci contredit le théorème de Brouwer dans le cas lisse.  $\square$

### 3.1 Exemples et généralisations

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $v : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue sur la boule unité fermée telle que, pour tout  $x \in \partial\overline{B}$ ,  $\langle v(x), x \rangle < 0$ . Alors,  $v$  s'annule.*

*Démonstration.* Supposons que  $v$  ne s'annule pas sur  $B$ . Définissons la fonction  $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  comme suit :

$$f(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}.$$

Selon le théorème de Brouwer,  $f$  possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe  $x_0 \in \overline{B}$  tel que  $f(x_0) = x_0$ , ce qui implique que  $x_0 \in \partial\overline{B}$ . Par conséquent,

$$\|v(x_0)\| = \langle v(x_0), x_0 \rangle < 0$$

ce qui est impossible. Ainsi, on en déduit que  $v$  s'annule.  $\square$

Un théorème préservé par homéomorphisme

**Théorème 3.1.2** (de Brouwer généralisé). *Soit  $X$  un espace homéomorphe à la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  pour un entier  $n$  quelconque. Alors toute application continue de  $X$  dans lui-même admet un point fixe.*

*Démonstration.* Soient  $f : X \rightarrow X$  une application continue et  $\varphi : X \rightarrow \overline{B}$  un homéomorphisme. Alors, par le Théorème de Brouwer l'application continue  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  admet un point fixe,  $x_0 \in \overline{B}$ , Cela implique que  $f$  admet également un point fixe, puisque

$$f(\varphi^{-1}(x_0)) = \varphi^{-1}(x_0).$$

Ainsi, le théorème est démontré. □

# Appendice

## Théorème de Sard

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de dimensions respectives  $m$  et  $n$ , et soit  $f$  une application lisse de  $M$  dans  $N$ . Alors, l'ensemble des valeurs singulières de  $f$ , est de mesure nulle dans  $N$ . Plus précisément, si

$$C = \{x \in M, \text{rang } df_x < n\}$$

alors son image  $f(C) \subset N$  est de mesure nulle dans  $N$ .

Étant donné qu'un ensemble de mesure nulle ne peut contenir aucun ensemble ouvert non vide, il en résulte que le complémentaire  $N \setminus f(C)$ , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs régulières, doit être partout dense dans  $N$ . En particulier, une application lisse possède toujours une valeur régulière.

Pour une preuve de ce théorème voir [7].

## Théorème d'approximation de Weierstrass

Le théorème d'approximation de Weierstrass énonce que toute fonction continue définie sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  peut être approximée aussi précisément que désiré par un polynôme. Ce théorème s'étend aux applications continues à valeurs vectorielles.

Soit  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction continue. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $P$  tel que

$$\|f(x) - P(x)\| < \varepsilon, \text{ pour tout } x \text{ dans } K.$$

Pour une preuve, voir [2].

## Classification des 1-variétés compactes

Toute variété différentielle connexe de dimension 1 est difféomorphe soit au cercle  $\mathbb{S}^1$ , soit à un intervalle (qui n'est pas réduit à un point) de  $\mathbb{R}$ . Ce théorème, démontré dans [7], établit que toute variété différentielle compacte de dimension 1 est difféomorphe à une union disjointe finie de cercles et d'intervalles (fermés et bornés) de  $\mathbb{R}$ . En effet, en raison de sa compacité, la variété possède un nombre fini de composantes connexes, et chacune d'entre elles est compacte et donc difféomorphe soit à un cercle, soit à un intervalle fermé et borné.

# Conclusion

Je suis ravie de partager ma conclusion pour mon mémoire de master sur la preuve du Théorème du point fixe de Brouwer. Ce fut une expérience enrichissante pour moi, qui m'a permis de développer mes compétences et de découvrir de nouveaux domaines passionnants de mathématiques.

En utilisant la notion de degré orienté, j'ai pu établir de manière rigoureuse le célèbre théorème de Brouwer sur l'existence d'un point fixe de toute application continue de la boule fermée euclidienne dans elle-même. Cette approche m'a permis une nouvelle compréhension de ce théorème fondamental et m'a montré comment la notion de degré peut être utilisée pour résoudre des problèmes mathématiques complexes.

En plus de démontrer le théorème du point fixe de Brouwer, ce travail m'a également permis d'explorer les applications de la théorie de degré orienté à d'autres problèmes de géométrie. Ces résultats m'ont ouvert de nouvelles perspectives pour la recherche future dans ce domaine passionnant de la géométrie.

En conclusion, ce mémoire a démontré l'importance de la notion de degré orienté dans la résolution de problèmes mathématiques complexes, en particulier en topologie et en géométrie différentielle. J'espère que mon travail inspirera d'autres étudiants de Master pour explorer ces belles mathématiques.

# Bibliographie

- [1] K. Burns & M. Gidea, *Differential Geometry and Topology : With a View to Dynamical Systems*. Chapman and Hall/CRC (2005).
- [2] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse : Tome 1, Fondements de l'analyse moderne*. Jacques Gabay (2003).
- [3] V. Guillemin & A. Pollack, *Differential Topology*. Prentice Hall (1974).
- [4] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer (2013).
- [5] I. H. Madsen & J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology : De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. CRC (1997).
- [6] J. W. Milnor, *Analytic Proofs of the “Hairy Ball Theorem” and the Brouwer Fixed Point Theorem*, *American Mathematical Monthly* 84, 521-524 (1978).
- [7] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable view point*. Princeton (1997).
- [8] E. Outerelo & J. M. Ruiz, *Mapping degree theory* . AMS (2009).

## Brouwer fixed point theorem and applications

### ABSTRACT

We propose a proof of Brouwer's fixed point theorem using the concept of oriented degree. This theorem is a fundamental result in topology, stating that any continuous mapping from a closed Euclidean ball to itself has at least one fixed point.

**Keywords :** oriented degree, non-retraction lemma, fixed point.

---

## Théorème du point fixe de Brouwer et applications

### RÉSUMÉ

Nous proposons une preuve du théorème du point fixe de Brouwer en utilisant le concept de degré orienté. Ce théorème est un résultat fondamental en topologie, affirmant qu'une application continue d'une boule fermée euclidienne sur elle-même possède au moins un point fixe.

**Mots-clés :** degré orienté, lemme de non-rétraction, point fixe.

---

## نظرية النقطة الثابتة لبراور و تطبيقاتها

### ملخص

نقترح برهاناً لنظرية النقطة الثابتة لبراور باستخدام مفهوم الدرجة الموجهة. هذه النظرية هي نتيجة أساسية في الطوبولوجيا، حيث تؤكد أن أي تطبيق مستمر من كرة مغلقة إقليدية على نفسها يحتوي على الأقل على نقطة ثابتة.

**الكلمات المفتاحية:** الدرجة الموجهة، توطئة عدم الانكماش، نقطة ثابتة.