République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités et statistique**

Par :

NADJOUA BENATALLAH

Titre

Équations différentielles stochastiques rétrograde à deux barrières

Membres du Comité d'Examen :

Mansoul Brahim	**M.A.A**	UKM, **Ouargla**	**Président**
Saouli Mostapha abdelouahab	**M.C.B**	UKM, **Ouargla**	**Encadreur**
Benbrahim Radhia	**M.C.B**	UKM, **Ouargla**	**Examinateur**

20 Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chèrs parents en premier.

A mes frères et soeurs et tous les membres de la famille Benattallah.

A tous ceux qui ont veillés sur ma réussite durant les années d étude.

A mes collègues sans exception.

Remerciements

Je tiens remercier tout dabord Allah.

Je tiens a remercier mon encadreur **Dr :Saouil Mostapha abdelouahab,** pour son précieux conseil

et son aide.durant toute la période du travail, malgré les circonstances qu'il traversait, il ma en guidé pendant toute année.

Et je remercie également aux membres du jury qui ont acceptés dévaluer et de juger mon travail.

Je tiens remercie ma famille, notamment mes parents pour tout ce quils ont fait pour moi.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$\mathbb{E}[X]$	:	Espérance mathématique ou le moyenne du v.a X.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
EDSR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.
EDSRR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde reflechié.
$\mathbb{P}$	:	La probabilité.
$\mathbb{P}-p.s$	:	La probabilité presque sûrment .
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$	:	Espace de probabilité filtré.
resp	:	Respectivement.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	:	Ensemble des matrice réelles de dimension $k\times d$.
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathcal{M}^2$	:	Espace formé par les processus progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$.
$\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$	:	L'espace formé par les processus Z progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ telle que $\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2}:=\mathbb{E}\left[\int_0^T\|Z_t\|^2\,dt\right]<\infty,$ où $Z\in\mathbb{R}^{k\times d}$. $\|Z\|^2=\text{trace}\,(ZZ^*)$.

M^2	:	Ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.
L^2	:	Espace des variables aléatoires $\mathcal{F}_1$-mesurables ξ :$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathbb{E}\left(\left\vert\xi\right\vert^2\right)+\infty$.
S^2	:	$\left\{\begin{array}{l}\text{Espace de } \mathcal{F}_t - \text{adaptée continue à droite avec limite gauche (càdlàg en abrégé)} \\ \text{processu } \left(Y_t\right)_{t\leq 1} \text{ avec des valeurs in } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq 1}\left\vert Y_t\right\vert^2\right].<\infty.\end{array}\right.$
$\mathcal{A}^2$	:	$\left\{\begin{array}{l}\text{Espace de processus continu, croissant, } \mathcal{F}_t - \text{adapté } K:[0,1]\times\Omega\longrightarrow[0,+\infty] \text{ avec} \\ K(0)=0 \text{ et } \mathbb{E}\left(K_1\right)^2<+\infty.\end{array}\right.$
S_c^2	:	Le sous-espace de S^2 engendré par les processus continue.
$H^{2,k}$	:	$\left\{\begin{array}{l}\text{Espace de processus } \mathcal{F}_t - \text{progressivement mesurables à valeurs} \\ \text{dans } \mathbb{R}^k \text{ telles que } \mathbb{E}\left[\int_0^1\left\vert Z_s\right\vert^2 ds\right].<\infty.\end{array}\right.$
max	:	Maximum.
MB	:	Mouvement Brownien.
BDG	:	L'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy.
$ess\sup$	:	Supremum essentielle.
C^2	:	Ensemble des fonctions deux fois continuement dérivable.
sup	:	Supérieur.
inf	:	Inférieur.

Table des matières

Introduction

Les équations differentielles stochastiques rétrogrades (**EDSR** en abrégé) est un sujet d'intérêt récent dans le calcul stochastiques développé au cours de la dernière décennie à partir des travaux pionniers de Pardoux et Peng [15] et [16]. L'application de telles équations à la théorie des finances et aux équations aux dérivées partielles non linéaires a motivé de nombreux efforts pour établir l'existence et l'unicité de la solution (voir [2], [10] et [17]).

El karoui et al. [8], ont introduit la notion **EDSR** avec un d'une barrière réfléchie reguliére, dans ce cas la solution est forcée de rester au-dessus d'un obstacle continu donné. De plus, les auteurs ont établi l'existence et l'unicité de la solution via la méthode de pénalisation ainsi qu'une méthode d'itération de Picard. En 2003, Hamadène et Ouknine [11] généralisé ce résultat à une **EDSR** réfléchie par une barrière lorsque le bruit est entrainé par un mouvement brownien et une mesure aléatoire de Poisson qui sont indépendante. Ils ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution si la barrière n'est plus continue (n'est pas regulier) mais juste continue à droit avec une limitée à gauche (càdlàg).

La notion d'une **EDSR** avec deux barrières a été introduite par Civitanic et Karatzas [5] en 1996, où la solution est rester fortement entre deux barrières supérieures et inférieures décrites U et L. IIs ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution si les barrières sont régulières ou satisfont à la condition de Mokobodski,qui se traduit par l'existence d'une différence d'une surmartingale non négative entre L et U.

Dans ce travail, nous souhaitons considérer des équations différentielles stochastiques plus générales qui sont les équations differentielles stochastiques rétrogrades avec deux barrières. Celle-ci peut être formulée comme suit :

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^1 f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^1 Z_s dW_s + \left(K_1^+ - K_t^+\right) - \left(K_1^- - K_t^-\right), \ t \leq 1 \\ \forall t \leq 1, \ L_t \leq Y_t \leq U_t \text{ et } \int_0^1 (Y_t - L_t)\, dK_k^+ = \int_0^1 (U_t - Y_t)\, dK_t^- = 0, \qquad \mathbb{P} - p.s, \end{cases} \tag{1}$$

les obstacles L et U sont donnée, ainsi que la variable aléatoire ξ et le generateur f , et la solution est (Y, Z, K^+, K^-). Notre objectif est de montrer l'existence et l'unicité de la solution (Y, Z, K^+, K^-) pour la **EDSR** avec deux barriéres (1) si la barrière supérieur U est lisse et la barriére inférieur L est seulement continue. Dans la preuve de notre résultat nous utilisons une méthode de pénalisation pour montrer l'existence d'une solution lorsque le générateur f ne dépend pas de la solution puis, dans le cas général, nous construisons une contraction qui a un point fixe dans un espace da Banach qui est le solution de notre **EDSR** avec deux barriéres (1). Ce travail est dévisé en trois chapiter comme suit :

Dans le premiére chapiter on présente des notions de base sur le calcul stochastique (éspérance conditionnelle et leur propriétés, espace de probabilité filtré, calcul d'Itô, l'équation différentielle stochastique rétrograde). Dans le deuxiéme chapitre nous étudions existence et unicité de solution pour equation differentielle stochastique et aussi les EDS rétrograde. Le troisiéme chapiter sont focalisé sur l'étude de l'existence et unicité de solution pour les equations différentielle stochastique rétrograde refléchié dans le cas où le generateur f est lipschitz, nous utilisant deux méthodes qui sont : Itération de picard et la méthode de pénalisation. Finalement dans le chapitre quatriéme nous discutons existence et unicité de solution pour l'équations différentielles stochastiques rétrogrades avec deux barriéres.

Chapitre 1

Des principes importants sur intégral d'itô

1.1 Espérance conditionnelle et leur propriétés

Définition 1.1 ***(Espérance conditionnelle par rapport à une tribu)*** *Soit X une variable aléatoire réelle et intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et ς une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditiionnelle $\mathbb{E}(\mathbb{X} \,|\varsigma)$ de X quand ς est l'unique variable aléatoire telque*

1. $\mathbb{E}(X \;|\varsigma)$ est $\varsigma-$mesurable.
2. $\int_A \mathbb{E}(X\,|\varsigma)\,d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$, $\forall A \in \varsigma$.

Proposition 1.1 *L'espérance conditiionnelle c'est aussi l'unique variable aléatoire $\varsigma-$mesurable telle que*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X\,|\varsigma)\,Y\right] = \mathbb{E}(XY),$$

pour tout variable Y, $\varsigma-$mesurable bornée.

Définition 1.2 ***(Espérance conditionnelle par rapport à une variable)*** *: On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espé-*

rance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\varsigma)$ est caractérisée par :

1. C'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable.
2. $\int_A \mathbb{E}(X|Y)\,d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},\ \ \forall A \in \sigma(Y)$.

Proposition 1.2 ***(propriétés de l'espérance conditionnelle)***

1. **Linéarité** : Soit a et b deux constantes

$$\mathbb{E}(aX + bY|\varsigma) = a\mathbb{E}(X|\varsigma) + b\mathbb{E}(Y|\varsigma).$$

2. **Croissance** : Soit$X$ et Y deux variable aléatoire telles que $X \leq Y$ Alors

$$\mathbb{E}(X|\varsigma) \leq \mathbb{E}(Y|\varsigma).$$

3. Si Y est $\varsigma-$mesurable, $\mathbb{E}(XY|\varsigma) = Y\mathbb{E}(X|\varsigma)$.
4. Si X est $\varsigma-$mesurable,$\mathbb{E}(XY|\varsigma) = X$.
5. Si X est indépendante de ς, $\mathbb{E}(X|\varsigma) = \mathbb{E}(X)$.
6. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\varsigma)] = \mathbb{E}(X)$.
7. Si ς et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \varsigma$, alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = E(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\varsigma) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\varsigma)|\mathcal{H}).$$

1.2 Processus stochastique

Définition 1.3 ***(Processus stochastique)*** *: Un processus stochastique est une famille $X = \{X_t\}_{t\in T}$ de variable aléatoire definit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexée par un ensemble T.*

Remarque 1.1 *1) $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ le processus est indexé par le temps t est dit continu.*

2) $T = \mathbb{N}$ le processus est dit discret.

Remarque 1.2 *Un processus est une fonctionelle dépend de deux paramètres $t \in T$ et $\omega \in \Omega$*

$$\begin{array}{llll} X_t & : & [0,T] \times \omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (t,\omega) & \longrightarrow & X_t(\omega) = X(t,\omega). \end{array} \tag{1.1}$$

1. Pour $t \in T$ fixé: $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour $\omega \in \Omega$ fixé : $X_t(\omega)$ est une trajectoire.

Définition 1.4 ***(Processus mesurable)*** *X est un processus mesurable si l'application (1.1) est mesurable par rapport aux tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 1.3 *Soient $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques :*

1. Y est une modification de X si pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires X_t et Y_t sont egales $\mathbb{P}$-$p.s$: $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$
2. On dit que les processus X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P} - p.s$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c'est à dire :$\mathbb{P}((X_t = Y_t), \forall t \geq 0) = 1$.

Proposition 1.4 *Soient $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques continue alors*

$$X \text{ et } Y \text{ indistinguables} \Longleftrightarrow X \text{ est un modification de } Y$$

Définition 1.5 ***(Filtration)*** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilite, une filtration $(\mathcal{F}_t)$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est à dire $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \forall 0 \leq s \leq t$. On définit $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_t \mathcal{F}_t\}$.*

Définition 1.6 *On dit que une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \underset{\epsilon > 0}{\cup} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ pour tout t.*

Définition 1.7 *On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est continue a droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensemble $\mathbb{P}$ négligeables de $\mathcal{F}$.*

Définition 1.8 ***(Processus continu)*** *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les trajectoires $t \longmapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.9 *(**Processus adapté**) Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.10 *(**Processus progressinement mesurable**) Un processus X est progressivement mesurable par rapport a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$ l'application $(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ de $[0,t]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport a $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Proposition 1.5 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*
On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il posséde une modification progressivement mesurable.

Proposition 1.6 *Si X est un processus stochastique dant les trajectoires sont continues a droite, (ou continue a gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable, s'il est de plus adapté.*

1.2.1 Temps d'arrêt et martingales en temps continu

Définition 1.11 *Soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ une filtration. Un variable aléatoire T à valeurs dans $[0,+\infty]$ est un temps d'arrêt si $\forall t\geq 0$ on a $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$.*

Proposition 1.7 *Soit T et Q deux $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt, alors $T\wedge Q$ et $T\vee Q$ sont des $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt*

Proof. $\{T\wedge Q\leq t\}=\{T\leq t\}\cup\{Q\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ et $\{T\vee Q\leq t\}=\{T\leq t\}\cap\{Q\leq t\}\in\mathcal{F}_t$, puisque Q, T sont deux $(\mathcal{F}_t)-$temps d'arrêt et la tribu $\mathcal{F}_t$ est stable par intersection et réunion. ■

Définition 1.12 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$adapté par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et tel que $\forall t\geq 0,\ X_t\in\mathbb{L}^1$ est appelé :*

1. Martingale si pour $s\leq t:\mathbb{E}\left[X_t\,|\mathcal{F}_s\right]=X_s$.
2. Surmartingale si pour $s\leq t:\mathbb{E}\left[X_t\,|\mathcal{F}_s\right]\leq X_s$.
3. Sous-martingale si pour $s\leq t:\mathbb{E}\left[X_t\,|\mathcal{F}_s\right]\geq X_s$.

Proposition 1.8 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus*

1. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un martingale la fonction $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est constante.
2. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un sur-martingale la fonction $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est décroissante.
3. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un sous-martingale la fonction $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est croissante.

Théoréme 1.1 *(**Inégalité dans** $\mathbb{L}^p$) Soit $p \geq 1$ et X une martingale réelle continue telle que $X_t \in \mathbb{L}^p$ $\forall t \geq 0$, alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} |X_s|^p\right] \leq q^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right],$$

où q est le nombre conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.3 *Par l'inégalité de Markov, on deduit de théorème précédente que si $X_t \in \mathbb{L}^p$ pour tout $t \geq 0$, alors*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} |X_s| \geq \lambda\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} |X_s|^p \geq \lambda^p\right] \leq \frac{q^p}{\lambda^p}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right].$$

1.2.2 Mouvement Brownien

Définition 1.13 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{\ t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration. Un mouvement Brownien (standard) est un processus $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifié les conditions suivants :*

1. W est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$adapté.
2. $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$
3. W est continu en $\mathbb{P} - p.s$, c'est à dire $t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.
4. Pour tous $(t, s) \in [0, T]^2$ tels que $s \leq t$, les accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, 0 \leq u \leq s)$.
5. Pour tous $(t, s) \in [0, T]^2$ tels que $s \leq t$, le variable aléatoire $W_t - W_s$ suit la loi gaussiens c-à-d, $W_t - W_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t - s)$.

Proposition 1.9 *Soit* $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{\ t\in\mathbb{R}_+}$ *−mouvement Brownien, alors* $\forall 0 \leq s \leq t$, $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(iu(W_t - W_s)\right)\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\exp iu\left(W_t - W_s\right)\right) = \exp(-u^{2(t-s)/2}).$$

Proposition 1.10 *Soit* $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement Brownien standard, alors*

- $\forall s > 0$ $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma\{W_u, u \leq s\}$.
- $-W$ est un mouvement Brownien.
- $\forall c > 0$, $\left\{cW_{t/c^2}\right\}_{t\geq 0}$est un mouvement Brownien.
- Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement Brownien.

Définition 1.14 *On appelle mouvement Brownien standard à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, un vecteur* $W = \left(W^1, ..., W^d\right)$ *où les* W^i *sont des mouvement Brownien réels indépendants.*

Proposition 1.11 *Soit* W *un mouvement Brownien, la filtration* $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ *vérifie les conditions habituelles, alors* W *est une* $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ *−mouvement Brownien.*

1.3 Calcul d'Itô

1.3.1 L'intégrale stochastique

L'objectif de ce paragraphe est de définir $\int_0^t D_s dW_s$. Ceci n'est pas évident car comme les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue-StieIjes.

Définition 1.15 *On appelle processus élémentaire* $D = (D_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus de la forme*

$$D_t = \phi_0 1_0\left(t\right) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i 1_{]t_{i-1},t_i]}\left(t\right),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T$, ϕ_0 *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*−mesurable bornée et, pour* $i = 1,....,p$, ϕ_i *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*− mesurable et bornée. Pour un tel processus,* *on peut défini l'intergale stochastique par rapport à W comme étant le processus continu $\{I(D)_t\}_{0\leq t\leq T}$ défini par*

$$I(D)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \left(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}\right),$$

si $t \in \left]t_k, t_{k+1}\right]$,

$$I(D) = \sum_{i=1}^{k} \phi_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1}\left(W_t - W_{t_k}\right).$$

Notation 1 *On note $\int_0^t D_s dW_s$ pour $I(D)_t$. On obtient alors directement à l'aide de cette définition le résultat suivant :*

Proposition 1.12 *Si D est un processus élémentaire, alors $\left(\int_0^t D_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -martingale continue telle que*

$$\forall t \in [0,T], \ \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t D_s dW_s\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t D_s^2 ds\right).$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus de processus D. Pour la première extension, on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}^2$.

On désigne par $\mathcal{H}^2$ l'espace vectoriel des martingales bornée dans $\mathbb{L}^2$, le sous-espace de $\mathcal{H}^2$ formé par les martingales nulles en 0 qui sont continues est noté $\mathcal{H}_c^2$. On munit $\mathcal{H}^2$de la norme définie par $\|M\|_{\mathcal{H}^2} = \mathbb{E}\left[|M_T|^2\right]^{1/2}$ qui en fait un espace de Hilbert. L'inégalité de Doob montre que cette norme est équivalente à la norme $\mathbb{E}\left[\sup_t |M_T|^2\right]^{1/2}$, par suite, $\mathcal{H}_c^2$ est un sous -espace fermé de $\mathcal{H}^2$ qui est ausssi fermé.

Théoréme 1.2 *Il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{M}^2$ dans $\mathcal{H}_c^2$ telle que :*

– Si D est un processus élémentaire, alors $I(D)$ et $J(D)$ sont indistinguables.
– $\forall t$, $\mathbb{E}\left[J(D)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t D_s^2 ds\right]$.

Théoréme 1.3 *L'unicité signifie que si J et $J\prime$sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes, alors $J(D)$ et $J'(D)$ sont indistinguables. On note $\int_0^t D_s dW_s$ pour $J(D)_t$.*

Remarque 1.4 *Notons M^2 l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2$. M^2 est un espace de Hilbert.*

L'intégrale stochastique est alors une isométrie de M^2 dans $\mathcal{H}_c^2$.

Proposition 1.13 *Soit $D \in \mathcal{M}^2$. on a*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t D_s dW_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^T D_s^2 ds\right],$$

et si τ est un temps d'arrêt ,

$$\int_0^\tau D_s dW_s = \int_0^T 1_{s\leq\tau} D_s dW_s,\ \mathbb{P}-p.s.$$

La dernière extension de l' intégrale stochastique dont nous aurons besoin consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur D. On introduit pour cela

$$\mathcal{M}_{loc}^2 = \left\{(D_t)_{0\leq t\leq T},\ \textit{progressivement mesurable},\ \mathbb{E}\left[\int_0^T D_s^2 ds\right] < \infty\ \mathbb{P}-p.s.\right\}.$$

Proposition 1.14 *Il existe une unique application linéaire J/de $\mathcal{M}_{loc}^2$ dans l'ensemble des martingales locales continues telle que :*

1. Si D est un processus élémentaire alore $J'(D)$ et $I(D)$ sont indistinguables.
2. Si $(D_n)_n$ est une suite de processus de $\mathcal{M}_{loc}^2$ telle que $\int_0^T D_s^{n^2} ds$ tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{0\leq t\leq T}\left|J'(D^n)_t\right|$ tend vers 0 en probabilité.

Définition 1.16 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô un processus $(X\ _t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs réelles tel que : $\mathbb{P}-p.s$, $\forall 0\leq t\leq T$,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable, vérifiant

$$\int_0^T |b|\, ds < \infty \qquad et \qquad \int_0^T |\sigma_s|^2\, ds < \infty,\ \mathbb{P}-p.s,$$

le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Remarque 1.5 *La décomposition d'un processus d'Itô est unique, c'est à dire si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s = X_0' + \int_0^t b_s' ds + \int_0^t \sigma_s' dW_s,$$

alors

$$X_0 = X_0', \qquad \sigma_t' = \sigma_t, \qquad b_t = b_t'.$$

Théoréme 1.4 ***(Premiére formule d'Itô)*** *Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors*

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t g'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Théoréme 1.5 ***(Deuxiéme formule d'Itô)*** *Soient $(t,x) \longrightarrow g(t,x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x, on a*

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t g_t'(s, X_s)\, ds + \int_0^t g_x'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_{xx}''(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Théoréme 1.6 ***(Troixième formule d'Itô)*** *Soient X^1et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp b^2), de coefficient de diffusion σ^1 (resp σ^2) et portées respectivement par deux Browniens W^1 et W^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\left(\mathcal{F}_t^{W_i}\right)$-adaptés.*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornée. On a

$$\begin{aligned} f\left(X_t^1, X_t^2\right) &= f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^1 + \int_0^t f_2'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left\{ f_{11}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^1\right)^2 + 2\rho f_{12}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(X_s^1, X_s^2\right)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{22}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^1\right)^2 \right\} ds, \end{aligned}$$

où f_i' désigne la dérivée par rapport à x_i et f_{ij}'' la déerivée seconde par rapport à x_j puis $x\ _i$,

$i, j = 1, 2$. En différentiel, la troisième formule d'Itô peut prendre une forme sommatoire :

$$df\left(X_t^1, X_t^2\right) = \sum_{i=1,2} f_i'\left(X_t^1, X_t^2\right) dX_t^i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1,2} c_{ij} f_{ij}''\left(X_t^1, X_t^2\right) \sigma_t^i \sigma_t^j\right) dt,$$

avec $c_{ij} = 1$ si $i = j$ et $c_{ij} = \rho$ si $i \neq j$.

Proposition 1.15 ***(Intégration par partie)*** *Soient X et Y deux processus d'Itô tel que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dW_s \ \textit{et}\ Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_s' ds + \int_0^t \beta_s' dW_s,$$

alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t .$$

Chapitre 2

Equation différentielle stochastique rétrograde

2.1 Equation différentielle stochastique

2.1.1 Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W(t))_{t\geq 0}$ désigne un mouvement Brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et x une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Soient n et m des entiers positif et soient aussi b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \qquad \sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times m},$$

où $\mathbb{M}^{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$

Notre objective est de résoudre l'équation differentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), & 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

La solution de l'équation (2.1) est un processus X continue $\mathcal{F}_t$-adapté telle que les deux integrales suivantes :$\int_0^t b(s, X(s))ds$, et $\int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$ ont une sens et l'égalité

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

est satisfaite $\forall t \quad \mathbb{P}.p.s.$

Quelle sont les conditions doit on appliquer sur le drift b et le diffusion σ pour trouver une solution de l'équation (2.1) et de plus cette solution est unique.

Maintenant on donne le théoreme qui permet davoir l'existence et unicité d'une solution de (2.1) .

2.1.2 Théoreme d'existence et d'unicité

[19] Conditions : On suppose que

$(\mathbf{H}_1)$ Les deux fonctions b et σ sont continues.

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe un constante strictement positive C telle que $\forall t \in [0, T]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} (i) \;\; |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C|x-y|, \\ (ii) \;\; |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C(1+|x|^2). \end{cases}$$

$(\mathbf{H}_3)$ la condition initiale $X\,(0) = x$ est indépendante de $(W(t))_{t\geq 0}$ et de carré intégrable i.e: $\mathbb{E}\left[X^2(0)\right] < +\infty$.

Théoréme 2.1 *Sous l'hypothése* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$, *l'équatios* (2.1) *posséde une unique solution à trajectoire continue pour tout* $t \leq T$. *De plus cette solution verifier* $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^2) < +\infty$.

Proof. L'existence : Pour obtenir l'existence d'solution il y'a deux méthode (itération de Picart et théorem de point fixe).

Nous avons décidé d'utiliser la méthode d'approximation de Picard dans la preuve.

En définissant la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ telleque $X^0 = x$ et $(X^{n+1})_{n\geq 0}$ est la solution du système de l'équations differentielle stochastique suivantes :

$$X^{n+1}(t) = x + \int_0^t b(s, X^n(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X^n(s))dW(s). \tag{2.2}$$

Vérifiant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left|X^n(t)\right|^2 \leq C_n.$$

Supposons que $\mathbf{E}\left[\left|X^n(t)\right|^2\right] \leq C_n$. et nous montrons que $\mathbf{E}\left|X^{n+1}(t)\right|^2 \leq C_{n+1}$. On a

$$\left|X^{n+1}(t)\right|^2 = \left|x + \int_0^t b(s, X^n(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X^n(s))\,dW(s)\right|^2.$$

Par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, on trouver l'estimation suivante :

$$\left|X^{n+1}(t)\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \left|\int_0^t b(s, X^n(s))\,ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma(s, X^n(s))\,dW(s)\right|^2\right).$$

Par passage a l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}\left|X^{n+1}(t)\right|^2 \leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |b(s, X^n(s))|\,ds\right)^2\right]\right) + \mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma(s, X^n(s))\,dW(s)\right|\right)^2\right]. \tag{2.3}$$

Par l'isometrie d'Itô et l'hypothése $(H_2)(ii)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma(s, X^n(s))\,dW(s)\right|\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s, X^n(s))|^2\,ds\right], \\
&\leq C^2\mathbb{E}\left[\int_0^t (1 + X^n(s))\,ds\right], \qquad (2.4)\\
&= C^2\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left[|X^n(s)|^2\right]\right)ds.
\end{aligned}$$

Et par l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b\left(s, X^n(s)\right) ds\right)^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t ds\right)\left(\int_0^t \left|b\left(s, X^n(s)\right)\right|^2 ds\right)\right], \\
&\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X^n(s)\right)\right|^2 ds\right], \\
&\leq TC^2\left[\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left|X^n(s)\right|^2\right) ds\right]. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Retour à l'équation (2.3) et en substituant les deux estimations (2.4) et (2.5) dans (2.3), et comme x est un variable aléatoire de carré intégrable alors on trouve estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X^{n+1}(t)\right|^2\right] &\leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + TC^2\left[\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left|X^n(s)\right|^2\right) ds\right] + C^2\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left|X^n(s)\right|^2\right) ds\right), \\
&\leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + C^2(T+1)\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left|X^n(s)\right|^2\right) ds\right), \\
&\leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + C^2(T+1)T(1+C_n)\right) = C_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve

$$\mathbb{E}\left|X_t^{n+1}\right|^2 < \infty.$$

Maintenat on va majorer par recurrence la quantité suivante : $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,t]}\left|X^{n+1}(t) - X^n(t)\right|^2\right]$.
En utilisant de l'équation (2.2) on obtient

$$\begin{aligned}
X^{n+1}(t) - X^n(t) &= \int_0^t \left(b\left(s, X^n(s)\right) - b\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) ds \\
&+ \int_0^t \left(\sigma\left(s, X^n(s)\right) - \sigma\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) dW(s).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inegalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s) - X^n(s)\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left|b\left(s, X^n(s)\right) - b\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right| ds\right)^2\right] \\
&+2\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma\left|\left(s, X^n(s)\right) - \sigma\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

L'inégalité de **Cauchy-Schwartz** donne estimation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|b\left(s,X^{n}(s)\right)-b\left(s,X^{n-1}(s)\right)\right|^{2}ds\right]\\ &+2\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,X^{n}(s)\right)-\sigma\left(s,X^{n-1}(s)\right)\right|^{2}ds\right],\end{aligned}$$

D'aprés l'hypothése $(H_2)(i)$, on obtient pour tout $s\in[0,t]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\right]\leq 2(T+1)C^{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|X^{n}(s)-X^{n-1}(s)\right|^{2}ds\right].$$

Par conséquance on trouver :

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\leq\underbrace{2(T+1)C^{2}}_{=C}\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s}\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}\right]ds,\qquad(2.6)$$

Nous réappliquons la même téchnique une autre fois, en appliquant l'inégalité de Doob, à $\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq u\leq s}\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}\leq C\int_0^s\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right]dr.\qquad(2.7)$$

en substituant l'estimation (2.6) à l'inégalité(2.7), on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\right] &\leq C\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s}\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}\right)ds,\\ &\leq C\int_0^t\left(C\int_0^s\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right]dr\right)ds,\\ &\leq C^{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right]\int_0^t\left(\int_0^s dr\right)ds,\\ &\leq\frac{C^{2}T^{2}}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right],\end{aligned}$$

Nous réappliquons la même téchnique plusieur fois, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\right] &\leq \frac{C^{n}T^{n}}{n!}\sup_{0\leq s\leq T}\left[\left|X^{1}(s)-X^{0}(s)\right|^{2}\right],\\ &\leq A\times\frac{C^{n}T^{n}}{n!}.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}>\frac{1}{2^{n+1}}\right]\leq\frac{A\times\frac{(CT)^{n}}{n!}}{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2}}=4A\times\frac{(4CT)^{n}}{n!}.$$

Il vient donc que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}>\frac{1}{2^{n+1}}\right]\leq 4A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4CT)^{n}}{n!}=4A.\exp(4CT)<\infty.$$

Donc d'aprés le lemme de **Borel-Cantelli**, on trouver l'égalité suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}>\frac{1}{2^{n+1}}\right]=0,$$

utilisant l'égalité $\mathbb{P}(A^{c})=1-\mathbb{P}(A)$ on obtient l'égalité suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}}\right]=1.$$

Donc,

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}},\qquad\forall n\geq n_{0},\qquad\text{et } n_{0}\in\mathbb{N}.$$

En remarquant que la suite $(X^{n})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans un espace de Banach, donc elle converge dans le méme espace de Banach. Alors il existe un processus continu $(X(t))_{0\leq t\leq T}$, telque :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X^{n+1}(t)-X^{n}(t)\right|\longrightarrow 0,\qquad\text{quand}\qquad n\longrightarrow\infty.$$

Donc, $\mathbb{P}-p.s$, $(X^{n})_{n\geq 0}$ converge vers processus continu $X(t)$.

L'unicité : Supposons que $(X(t))_{t\geq 0}$ et $(Y(t))_{t\geq 0}$ deux solutions de équation (2.1) pour tout $t\in[0,T]$:

$$X(t)-Y(t)=\int_0^t\left[b\left(s,X(s)\right)-b\left(s,Y(s)\right)\right]ds+\int_0^t\left[\sigma\left(s,X(s)\right)-\sigma\left(s,Y(s)\right)\right]dW(s).$$

D'aprés l'inégalité $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right]\leq 2\mathbb{E}&\left[\left|\int_0^t\left(b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(s,Y\left(s\right)\right)\right)ds\right|^2\right]\\&+2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,Y\left(s\right)\right)dW(s)\right)\right|^2\right].\end{aligned}\tag{2.8}$$

Utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** et l'hypothése $(H_2)\,(i)$ on trouver l'estimation suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\left(b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(s,Y\left(s\right)\right)\right)ds\right|^2\right]&\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(s,Y\left(s\right)\right)\right|^2ds\right],\\&\leq TC^2\int_0^t\mathbb{E}\left(\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right)ds.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Maintenant par utilisation la propriété d'isometrie d'Itô et la condition $(H_2)\,(i)$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,Y\left(s\right)\right)dW(s)\right)\right|^2\right]&\leq\mathbb{E}\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,Y\left(s\right)\right)\right|^2ds\right],\\&\leq C^2\int_0^t\mathbb{E}\left[\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right]ds.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Retour à l'équation (2.8) et en substituant les deux estimations (2.9) et (2.10) dans (2.8), on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right] &\leq 2TC^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right]ds + 2C^2\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right]ds,\\ &\leq 2\left(TC^2+C^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right]ds.\end{aligned}$$

Finalement en utilisant le **lemme de Granwall**, on trouve :

$$\mathbb{E}\left(|X(t)-Y(t)|^2\right)=0.$$

■

2.2 Equation différentielle stochastique rétrograde non linéaire

On consédère sur un espace de probabilités filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et une variable aléatoire ξ $\mathcal{F}_T-$mesurable.

Premiérement on veut résoudre l'equation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\frac{dY_t}{dt} = f(Y_t), \ \forall t \in [0,T], \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.11}$$

En imposont que $\forall t$, Y_t ne dépend pas du futur après t, c'est à dire que le processus Y est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$adapté.

Prenons l'exemple le plus simple $f \equiv 0$. La solution de l'équation (2.11) est$Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ est aléatoire.

Alors pour rendre Y_t adapté il faut projecté Y_t sur un espace qui contient les éléments $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$adapté, la meilleure approximation est le martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \,|\mathcal{F}_t)$. Si on utilise la filtration naturelle du mouvement Brownien, le théorème de représentation des martingales Browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$adapté telle que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \,|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Ce qui implique

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s,$$

ceci equivalent de écrire

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Le seconde processus inconnue Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Par conséquent, comme une seconde variable apparait, pour on obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = -f(t, Y_t, Z_t) - Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.12}$$

avec la fonction f s'appelle le génératour de l'**EDSR** et ξ la condition terminale.

Remarque 2.1 *L'inconnu de l'équation (2.12) est le couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$.*

Définition 2.1 [4] *Une solution de l'**EDSR** (2.12) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.
2. $\int_0^T \left\{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\right\} dr < \infty$, $\mathbb{P}-p.s.$
3. $Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r dW_r$, $0 \leq t \leq T$, $\mathbb{P} - p.s.$

Existence et unicité de solution

Le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR** dans le cas où le générateur est non-linéaire initialisé par E.Pardoux et S.Peng en 1990.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

(C) Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\mathbb{P} - p.s.$

1. Condition de Lipschitz en (y, z) :

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \|z - z'\|).$$

2. Condition d'intégrabillité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 \, dr\right] < \infty.$$

Premiérement nous commençons par la cas simple où le générateur f ne dépend ni de Y ni de Z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de **l'EDSR**

$$\begin{cases} Y_t = -F_t dt + Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.13}$$

Proposition 2.1 *Soient $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_t)$ et $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'équation différentielle stochastique rétrograde (2.13) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Proof. Nous connencons par l'existence : Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr \,|\mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc$Y$ à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Comme F est progressivement mesurable, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$ est de carré intégrable et $\left(\int_t^T F_r dr\right)_{t \in [0,T]}$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$, $\forall t \in [0, T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \middle| \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr \equiv M_t - \int_0^t F_r dr.$$

avec M_t est une martingale de carré integrable. D'après la théorème de représentation des martingale Brownien il existe un processus prévisible $Z \in M^2$ telle que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifiant que (Y, Z) est une solution de **l'EDSR** comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned}
Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - (M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr) \\
&= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_{r.}, \\
&\Longleftrightarrow \\
Y_t &= \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.
\end{aligned}$$

Maintenant en passe à l'unicité : Supposons que (Y_t^1, Z_t^1) et (Y_t^2, Z_t^2) sont deux solutions. En suite on veut applique la formule d'Itô pour $|Y_1(t) - Y_2(t)|^2$ de $s = t$ à $s = T$, alors

$$\begin{aligned}
|Y_1(1) - Y_2(1)|^2 = {} & |Y_1(t) - Y_2(t)|^2 + 2\int_t^T |Y_1(s) - Y_2(s)|\, d(Y_1(s) - Y_2(s)) \\
& + \int_t^T d\langle Y_1 - Y_2, Y_1 - Y_2\rangle_s,
\end{aligned}$$

ceci équivalent à

$$\begin{aligned}
|Y_1(t) - Y_2(t)|^2 = {} & |Y_1(T) - Y_2(T)|^2 - 2\int_t^T |Y_1(s) - Y_2(s)|\, d(Y_1(s) - Y_2(s)) \\
& - \int_t^T d\langle Y_1 - Y_2, Y_1 - Y_2\rangle_s,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

puisque on a

$$Y_1(t) - Y_2(t) = \int_t^T (Z_1(s) - Z_2(s))\, dW_s.$$

Donc

$$d(Y_1 - Y_2)(t) = (Z_1(t) - Z_2(t))\, dW_t, \tag{2.15}$$

d'aprés (2.14) et (2.15) en trouve

$$|Y_1(t)-Y_2(t)|^2 = -2\int_t^T (Y_1(s)-Y_2(s))(Z_1(s)-Z_2(s))\,dW_s$$
$$-\int_t^T |Z_1(s)-Z_2(s)|^2\,ds,$$

donc

$$|Y_1(t)-Y_2(t)|^2+\int_t^T |Z_1(s)-Z_2(s)|^2\,ds = -2\int_t^T (X_1(s)-X_2(s))(Y_1(s)-Y_2(s))\,dW_s.$$

Par passage à esperience on obtient :

$$\mathbb{E}\,|Y_1(t)-Y_2(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^T |Z_1(s)-Z_2(s)|^2\,ds = 0$$

alors

$$Y_1(t) = Y_1(t) \text{ et } Z_1(t) = Z_1(t)\,,\ \mathbb{P}-p.s.$$

■

Théoréme 2.2 ***(Pardoux-Peng 1990)*** *Sous l'hypothèse (C), l'**EDSR** (2.12) une solution unique (Y,Z) telle que $Z\in M^2$.*

Proof. On utilise la méthode de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant avec un application $\Psi\in\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y;Z)\in\mathcal{B}^2$ est solution de **l'EDSR** (2.12) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ on définit $(Y;Z)=\Psi(U'',V'')$ pour tout (U'',V'') élément de B^2 comme étant la solution de **EDSR** $0\le t\le T$,

$$Y_t = \xi+\int_t^T f(r,U_r'',V_r'')dr-\int_t^T Z_r dW_r.$$

On remarque cette **EDSR** possédé une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$, par conséquence $\mathcal{F}_t = f\left(r,U_r'',V_r''\right)$ ce processus appartient à M^2 puis que, f étant Lipschitz.

$$|\mathcal{F}_r|\le |f(r,0,0)|+\lambda\,|U_r''|+\lambda\,\|V_r''\|\,.$$

Ces trois derniers processus sont carré intégrable alors (Y,Z) est une solution unique telle que $Z \in M^2$, $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$ l'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la prposition, Y appartient à S_c^2, soient (U'',V'') et (G,h) deux élément de $\mathcal{B}^2$ et $(Y,Z) = \Psi(U'',V'')$, $(Y',Z') = \Psi(G,h)$, notons $y = Y - \acute{Y}$ et $z = Z - \acute{Z}$. On a $y_T = 0$

$$dy_t = -\left\{ f\left(t, U_t'', V_t''\right) - f\left(t, G_t, h_t\right) \right\} dt + z_t dW_t.$$

on applique la formule de Itô à $\exp^{\alpha t} |y_t|^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} & d\left(\exp^{\alpha t} |y_t|^2\right) \\ & = \alpha \exp^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2\exp^{\alpha t} y_t \left\{ f\left(t, U_t'', V_t''\right) - f\left(t, G_t, h_t\right) \right\} dt \\ & + 2\exp^{\alpha t} y_{t.} z_t dW_t + \exp^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T

$$\begin{aligned} & \exp^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_0^T \exp^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \\ & = \int_t^T \exp^{\alpha r}(-\alpha |y_r|^2 + 2y_t \left\{ f\left(t, U_t'', V_t''\right) - f\left(t, G_t, h_t\right) \right\})dr \\ & - \int_t^T 2\exp^{\alpha r} y_r z_r dW_r. \end{aligned}$$

Comme f est Lipschitzienne, on trouver

$$\begin{aligned} & \exp^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T \exp^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \\ & \leq \int_t^T \exp^{\alpha r} \left(-\alpha |y_r|^2 + 2\lambda |y_r| \left|u_r'\right| + 2\lambda |y_r| \left\|v_r'\right\|\right) dr - \int_t^T 2\exp^{\alpha r} y_r z_r dW_{r.} \end{aligned}$$

avec $u' = U'' - G\prime$ et $v' = V'' - \acute{h}$ respectivement.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalite $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, et donc

$$\begin{aligned}
&\exp^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T \exp^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \\
&\leq \int_t^T \exp^{\alpha r} \left(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon} \right) \left| y_r^2 \right| dr - \int_t^T 2 \exp^{\alpha r} y_r z_r dW_r \\
&+ \varepsilon \int_t^T \exp^{\alpha r} \left(\left| U_r'' \right|^2 + \left\| V_r' \right\|^2 \right) dr.,
\end{aligned}$$

et premant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, on obtient

$$\forall t \in [0,T], \qquad \exp^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T \exp^{\alpha r} \|z_t\|^2 \, dr \leq A_\varepsilon - 2 \int_t^T \exp^{\alpha r} y_r z_r dW_r, \tag{2.16}$$

avec $A_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T \exp^{\alpha r} \left(|U_r''|^2 + \left\| V_r'' \right\|^2 \right) dr.$

D'aprés (2.16) la martingale locale $\left\{ \int_0^t \exp^{\alpha r} y_r z_r dW_r \right\}_{t \in [0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $(Y, Y') \in S_c^2$ et $(Z, Z') \in M^2$.

On obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \exp^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \right) \leq \mathbb{E} \left(A_\varepsilon \right). \tag{2.17}$$

Revenant à l'inégalité (2.16), l'intégralité **BDG** fournit avec C universelle

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \exp^{\alpha t} |y_t|^2 \right) &\leq \mathbb{E} \left[A_\varepsilon \right] + C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \exp^{2\alpha r} |y_r|^2 \|z_r\|^2 \, dr \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[A_\varepsilon \right] + C \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \exp^{\alpha t/2} |y_t| \left(\int_0^T \exp^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \right)^{1/2} \right],
\end{aligned}$$

Puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \exp^{\alpha t} |y_t|^2 \right) \leq \mathbb{E} \left(A_\varepsilon \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \exp^{\alpha t} |y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T \exp^{\alpha r} \|z_r\|^2 \, dr \right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.17), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\exp^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T\exp^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2dr\right)\leq\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(A_\varepsilon\right),$$

Par suite

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\exp^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T\exp^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2dr]\\&\leq\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\exp^{\alpha t}\left|u_t'\right|^2\pi+\int_t^T\exp^{\alpha r}\left\|v_r'\right\|^2dr],\end{aligned}$$

prenons ε telle que $\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de norme

$$\left\|(U'',V'')\right\|_\alpha=\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\exp^{\alpha t}\left|U_t''\right|^2+\int_t^T\exp^{\alpha r}\left\|V_r''\right\|^2dr\right)^{1/2}.$$

Cette norme est équivalente à la norme usuelle pour $\alpha=0$. Donc l'application Ψ posséde donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de **L'EDSR** (**2.12**)dans $\mathcal{B}^2$. ■

Chapitre 3

Equation différentielle stochastique rétrograde réfléchie

3.1 Existence et unicité d'une solution pour l'EDSRR par la méthode d'itération de Picard

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W(t))_{t\geq 0}$ désigne un mouvement Brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et ξ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons maintenant l'equation differetielle stochastique rétrograde reflichié comme suit :

$$\begin{cases} -dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) + \left(K_T - K_t\right) - Z_t dW_t, \qquad Y_T = \xi. \\ Y_t \geq S_t, \ 0 \leq t \leq T. \\ \{K_t\} \text{ est un precessus continue et croissante avec } K_0 = 0 \text{ et } \int_0^T \left(Y_t - S_t\right) dK_t = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Supposons que f ne dépend pas de (Y, Z) c'est-à-dire qu'il s'agit d'un fonction dépend de t progressivement mesurable satisfaisant :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f\left(t\right)^2 dt\right) < \infty. \tag{3.2}$$

Assumptions : On suppose les hypothéses suivante :

i) $\xi \in \mathbb{L}^2$.

ii) $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ f(.,y,z) \in \mathbb{H}^2$.

iii) $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right) < \infty$.

i') Pour certains $\theta > 0$ et pour tout $y, y' \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in \mathbb{R}^d$, le générateur f satisfait la condition de Lipschitz c'est à dire

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \theta\left(|y-y'| + |z-z'|\right).$$

v) $Z \in \mathbb{H}^2$, en particulier $\mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_t|^2\, dt\right) < \infty$.

Une solution de **EDSR reflichié** est un triplet (Y,Z,K) qui satisfait $v)$ et le systéme (3.1) avec f ne dépend pas de (Y,Z) c'est à dire l'équation (3.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t)\,dt + K_T - K_t - Z_t dW_t, \qquad Y_T = \xi,\ 0 \leq t \leq T,. \\ Y_t \geq S_t,\ 0 \leq t \leq T. \\ \{K_t\} \text{ est un precessus continue et croissante avec } K_0 = 0 \text{ et } \int_0^T (Y_t - S_t)\,dK_t = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

En supposant que $K_0 = 0$, nous en déduire que

$$Y_t + \int_0^t f(s)\,ds = Y_0 - K_t + \int_0^t (Z_s, dW_s), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Donc $\left\{Y_t + \int_0^t f(s)\,ds,\ 0 \leq t \leq T\right\}$ est une sur-martingale, et comme $Y_t \geq S_t$, ce surmartingale est domine le processus $\left\{S_t + \int_0^t f(s)\,ds,\ 0 \leq t \leq T\right\}$. Nous élablissons maintenant la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soit* $\{(Y_t, Z_t, K_t),\ 0 \leq t \leq T\}$ *un sollution du* ***EDSRR*** (3.3) *satisfaisant la condition* $v)$. *Alors pour chaque* $t \in [0,T]$,

$$Y_t = ess\sup_{v\in\tau_t} \mathbb{E}\left[\int_t^v f(s,Y_s,Z_s)\,ds + S_v 1_{\{v<T\}} + \xi 1_{\{v=T\}} |\mathcal{F}_t\right],$$

où τ_t est l'ensemble de tous les temps d'arrêt dominés par T, et $\tau_t = \{v \in \tau;\ t \leq v \leq T\}$.

Proposition 3.2 *Sous les hypothèse (i), ii) et iii), l'équation (3.3) admet une unique solution $\{(Y_t, Z_t, K_t)\,; 0 \leq t \leq T\}$.*

Proof. (L'unicité) Voir le resultat [8]. Nous prouvons maintenant l'existence. A partir de la proposition 3.1, introduisons le processus $\{Y_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ défini par

$$Y_t = ess \sup_{u \in \tau_t} \mathbb{E}\left[\int_t^v f(s)\,ds + S_u 1_{\{v<T\}} + \xi 1_{\{v=T\}}\,|\mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Le processus $Y_t + \int_0^t f(s)\,ds$ est la fonction valeur d'un problème de temps d'arrêt optimal avec gain :

$$H_t = \int_0^t f(s)\,ds + S_t 1_{\{t<T\}} + \xi 1_{\{t=T\}}.$$

Par la théorie des enveloppes de snell, c'est aussi la plus petite surmaringale continue qui domine H_t. la continuite de $\{Y_t\}$ découle de celle de $\{H_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$, H à l'instant T est positif. Nous avons de plus que

$$|Y_t| \leq \mathbb{E}\left[|\xi| + \int_0^T |f(t)|\,dt + \sup_{0\leq t\leq T} |S_t|\,|\mathcal{F}_t\right].$$

Ainsi, par l'inégalités **BDG,** on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2\right) \leq c\mathbb{E}\left(\xi^2 + \int_0^T f^2(t)\,dt + \sup_{0\leq t\leq T} S_t^2\right).$$

Notons D_t le temps d'arrêt

$$D_t = \inf\{t \leq u \leq T;\quad Y_u \leq S_u\} \wedge T.$$

Alors D_t est oplimal, en ce sens que

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\int_t^{D_t} f(s)\,ds + S_{D_t} 1_{\{D_t<T\}} + \xi 1_{\{D_t=T\}}\,|\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.4a}$$

Introduisons maintenant la décomposition de Doob-Meyer pour le surmartingale continue $Y_t + \int_0^t f(s)\,ds$, il existe un processus croissant adapté $\{K_t\}$ une martingale continue uniformément intégrable $\{M_t\}$ telle que

$$Y_t = M_t - \int_0^t f(s)\,ds - K_t,$$

avec $K_0 = 0$ et $K_t = K_{D_t}$. En effet, par la condition $\forall t \in [0,T]$, $Y_t \geq S_t$, on a que

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\int_t^{D_t} f(s)\,ds + S_{D_t} 1_{\{D_t < T\}} + \xi 1_{\{D_t = T\}} + K_{D_t} - K_t \,|\mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq T$$

Il résult alors à partir de (3.4a) que

$$\mathbb{E}\left[K_{D_t} - K_t \,|\mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Donc $K_{D_t} = K_t$, ou de manière équivalente

$$\int_0^T (Y_t - S_t)\,dK_t = 0.$$

Il reste à démontrer l'intégrablité de K_t.

Puisque $\left\{Y_t + \int_0^t f(s)\,ds,\ 0 \leq t \leq T\right\}$ est une surmartingale de carré intégrable qui domine la martingale de carré-intégrable $\left\{\mathbb{E}\left(\int_0^T f(s)\,ds + \xi \,|\mathcal{F}_t\right),\ 0 \leq t \leq T\right\}$, K_T est carré-intégrable.

D'où la martingale

$$M_t = \mathbb{E}(M_t \,|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T f(s)\,ds - K_T \,|\mathcal{F}_t\right),$$

est aussi de carré intégrable. Enfin, puisque $\mathcal{F}_t$ est une filtration Brownienne, alors en peut écrire $M_t = \int_0^t Z_s dW_s$, où $\mathbb{E}\int_0^T |Z_t|^2\,dt < \infty$. En fait, on peut montrer que $\mathbb{E}\int_0^T |Z_t|^2\,dt < \infty$, ce qui équivaut à $\mathbb{E}\left(K_T^2\right) < \infty$. En effet, soit $v \leq T$ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}\left(K_v^2\right)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(K_v^2\right) &= 2\mathbb{E}\int_0^v \left(K_v - K_t\right) dK_t, \\
&= 2\mathbb{E}\int_0^v \mathbb{E}\left(K_v - K_t \left|\mathcal{F}_t\right.\right) dK_t, \\
&= 2\mathbb{E}\int_0^v \mathbb{E}\left(Y_t - Y_v - \int_t^v f(s)\, ds \left|\mathcal{F}_t\right.\right) dK_t, \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(2 \sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| + \int_0^T |f(s)|\, ds\right) K_v\right], \\
&\leq 2\left[\mathbb{E}\left(2 \sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| + \int_0^T |f(s)|\, ds\right)^2\right]^{1/2} \left[\mathbb{E}K_v^2\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

En prenant la limite comme $v \to T$, en obtient le résultat demandé. ∎

Proposition 3.3 *Soit* $\{(Y_t, Z_t, K_t),\ 0 \leq t \leq T\}$ *une solution de la* ***EDSRR*** (3.3)*. Alors il existe une constante* C *telle que*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2 + \int_0^T |Z_t|^2\, dt + K_T^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(\xi^2 + \int_0^T f^2(t,0,0)\, dt + \sup_{0\leq t\leq T} \left(S_t^+\right)^2\right).$$

Proof. Voir le resultat [8]. ∎

Proposition 3.4 *Soit* (ξ, f, S) *et* (ξ', f', S') *soit deux triiplets vérifiant les hypothèses ci-dessus, en particulier i), ii), í) et iii). Supposons que* (Y, Z, K) *soit une solution de la* ***EDSRR*** (3.3) *associe à* (ξ, f, S) *et que* (Y', Z', K') *soit une solution de la* ***EDSRR*** (3.3) *associe à* (ξ', f', S')*. Définir*

$$\begin{aligned}
&\triangle\xi = \xi - \xi', \qquad \triangle f = f - f', \qquad \triangle S = S - \acute{S}, \\
&\triangle Y = Y - Y', \qquad \triangle Z = Z - Z', \qquad \triangle K = K - K'.
\end{aligned}$$

Alors il existe une constante c telle que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\triangle Y_t\right|^2+\int_0^T\left|\triangle Z_t\right|^2dt+\left|\triangle K_T\right|^2\right)$$
$$\leq c\mathbb{E}\left(\left|\triangle\xi\right|^2+\int_0^T\left|\triangle f\left(t,Y_t,Z_t\right)\right|^2dt\right)+c\left[\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\triangle S_t\right|^2\right)\right]^{1/2}\Psi_T^{1/2},$$

où $\Psi_T=\mathbb{E}\left[\xi^2+\int_0^T f^2\left(t,0,0\right)dt+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2+\xi'^2+\int_0^T f'^2\left(t,0,0\right)dt+\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t'^+\right)^2\right].$

Proof. Voir Le resultat [8]. ■

On peut maintenant établir le théorème suivant.

Théoréme 3.1 *Sous les hypothèses ci-dessus,en particulier* $i)$, $ii)$, $i\prime)$, $iii)$ *et* $v)$ *la* ***EDSRR*** (3.1) *admit une solution unique* (Y,Z,K) .

Proof. Soit Δ l'espace des $\{(Y_t,Z_t)\,;0\leq t\leq T\}$ progressivement mesurables avec des valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. Nous définissons une application Φ de dans Δ lui-même comme suit : Etant donné $(U,V)\in\Phi$, soit $(Y,Z)=\Phi\left(U,V\right)$ dont l'unique élément de Δ tel que, si l'on définit le processus

$$K_t=Y_t-Y_0-\int_0^t f\left(s,U_s,V_s\right)ds+\int_0^t\left(Z_s,dW_s\right),\ 0\leq t\leq T,$$

alors le triple (Y,Z,K) résout le **EDSRR** (3.1) associé à $f\left(s\right)=f\left(s,U_s,V_s\right).$ Autrement dit, le couple (Y,Z) est l'unique solution d'un même **EDSRR** (3.1). Soit (U',V') un autre élément de Δ, et définissons $(Y',Z')=\Phi\left(U',V'\right)$

$$\overline{U}=U-U',\quad\overline{V}=V-V',\quad\overline{Y}=Y-Y',\quad\overline{Z}=Z-Z'.$$

Par la formule d'itô on obtient, pour tout $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\exp^{\beta t}\mathbb{E}\left(\overline{Y}_t^2\right) + \mathbb{E}\int_t^T \exp^{\beta s}\left[\beta\overline{Y}_s^2 + \left|\overline{Z}_s\right|^2\right] ds \\
&= 2\mathbb{E}\int_t^T \exp^{\beta s}\overline{Y_s}\left[f\left(s, U_s, V_s\right) - f\left(s, U_s', V_s'\right)\right] ds, \\
&\leq 4K^2\mathbb{E}\int_t^T \exp^{\beta s}\overline{Y}_s^2 ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \exp^{bs}\left[\overline{U}_s^2 + \left|\overline{V}_s\right|^2\right] ds,
\end{aligned}$$

On choisit $\beta = 4K^2 + 1$, on en déduit

$$\mathbb{E}\int_0^T \exp^{\beta t}\left[\overline{Y}_t^2 + \left|\overline{Z}_t\right|^2\right] dt \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \exp^{\beta t}\left[\overline{U}_t^2 + \left|\overline{V}_t\right|^2\right] dt.$$

Ainsi l'application Φ est une contraction stricte sur Δ engendré par la norme

$$\|(Y, Z)\|_\beta = \left(\mathbb{E}\int_0^T \exp^{\beta t}\left(Y_t^2 + |Z_t|^2\right) dt\right)^{1/2},$$

et il possède un unique point fixe, qui est l'unique solution de la **EDSRR** (3.1). ■

3.2 Existence d'une solution du EDSRR par la méthode de pénalisation

Dans cette section, nous donnerons une autre preuve du théorème 3.1, basée sur l'approximation par pénalisation. Premiérement nous annoncer la theorem de comparission suivante.

Théoréme 3.2 *Soit (ξ, f, S) et (ξ', f', S') soit deux ensembles de données chacun satisfaisant toutes les hypothèses suivabtes*

(i") $\xi \leq \xi'$ *p.s.,*

(ii") $f(t, y, z) \leq f'(t, y, z)\, dP \times dt$ *p.s.,* $\forall (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

(iii") $S_t \leq S_t'$, $0 \leq t \leq T$, *p.s.*

Et (iii) [à l'exception que la condition de Lipschitz (i') pourrait être satisfaite soit par f soit par f'seulement]. Soit (Y, Z, K) une solution de la ***EDSRR*** *(3.1) de donnée (ξ, f, S) et (Y', Z', K') une solution de la* ***EDSRR*** *(3.1) de donnée (ξ', f', S') . Alors*

$$Y_t \leq Y'_t,\ 0 \leq t \leq T \qquad p.s.$$

Proof. Voir le travail de Karoui et al [8]. ■

Remarque 3.1 *Dans la suite c désingera une constante dont la valeur peut varier d'une linge à l'autre.*

Lemme 3.1

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|(Y_t^n - S_t)^-\right|^2\right) \longrightarrow 0,\ si\ n \longrightarrow \infty.$$

Proof. Puisque $Y_t^n \geq Y_t^0$, on peut w.l.o.g. remplacer S_t par $S_t \vee Y_t^0$; autrement dit, nous pouvons supposer que $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} S_t^2\right) < \infty$. Nous voulons d'abord comparer $p.s$,Y_t et S_t pour tout $t \in [O, T]$, alors qu' on ne sait pas encore que$Y$ est $p.s.$ Continu, D'après le théorème de comparaison pour les **EDSR**, nous avons que $p.s.$ $Y_t^n \geq \tilde{Y}_t^n$, $0 \leq t \leq T$, $n \in \mathbb{N}$, où $\left\{\left(\tilde{Y}_t^n, \tilde{Z}_t^n\right);\ 0 \leq t \leq T\right\}$ l'unique solution du **EDSR**

$$\tilde{Y}_v^n = \xi + \int_t^T f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds + n\int_v^T (S_s - \tilde{Y}_s^n) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s^n dW_s.$$

Soit v un temps d'arrêt tel que $0 \leq v \leq T$. Alors

$$\tilde{Y}_v^n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_v}\left[\exp^{-n(T-v)}\xi + \int_v^T \exp^{-n(s-v)} f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds + n\int_v^T \exp^{-n(s-v)} S_s ds\right].$$

On voit facilement que

$$\exp^{-n(T-v)}\xi + n\int_v^T \exp^{-n(s-v)} S_s ds \longrightarrow \xi 1_{\{v=T\}} + S_v 1_{\{v<T\}}$$

Comme et dans $L^2(\Omega)$,et l'espérance conditionnelle converge aussi dans $L^2(\Omega)$. De plus,

$$\left|\int_0^T \exp^{-n(s-v)} f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\int_0^T f^2\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds\right)^{1/2},$$

Donc $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_v} \int_v^T \exp^{-n(s-v)} f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) ds \longrightarrow 0$ en $L^2(\Omega)$, si $n \longrightarrow \infty$.

Par conséquent $\tilde{Y}_v^n \longrightarrow \xi 1_{\{v=T\}} + S_v 1_{\{v<T\}}$ en carré moyen, et $Y_v \geq S_v$ comme. De ceci et du théorème de section dans Dellacherie et Meyer [[6]], il s'ensuit que $p.s.$

$$Y_t \geq S_v, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Donc $\left(Y_t^n - S_t\right)^- \downarrow 0$, $0 \leq t \leq T$, $p.s$, et d'après le théorème de Dini's la convergence est uniforme en t. Le résultat s'ensuit finalement par convergence dominée, puisque $\left(Y_t^n - S_t\right)^- \leq \left(S_t - Y_t^0\right)^+ \leq |S_t| + |Y_t^0|$. ■

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\left\{\left(Y_t^n, Z_t^n\right);\ 0 \leq t \leq T\right\}$ désigne un paire de processus progressivement mesurable avec des valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ satisfaisant

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_t^n|^2 dt\right) < \infty,$$

et

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) ds + n\int_t^T \left(Y_s^n - S_s\right)^- ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \tag{3.5}$$

où ξ et f satisfont les hypothèses énoncées précédement, nous définissons l'égalité suivante :

$$K_t^n = n\int_0^t (Y_s^n - S_s)^- ds, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

A partir la théorie des equation differentielle stochastique retrograde que pour chaque n, on a estimation suivante :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n|^2\right) < \infty.$$

Nous établissons maintenant des estimations a priori, uniformes en n, sur la triplet (Y^n, Z^n, K^n).

Par la formule d'itô, on trouver

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|Y_t^n\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^n\right|^2 ds &= \mathbb{E}\left|\xi\right|^2+2\mathbb{E}\int_t^T f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)Y_s^n ds+2\mathbb{E}\int_t^T Y_s^n dK_s^n, \\
&\leq \mathbb{E}\left|\xi\right|^2+2\mathbb{E}\int_t^T\left(f\left(s,0,0\right)+\theta\left|Y_s^n\right|+\theta\left|Z_s^n\right|\right)\left|Y_s^n\right| ds+2\mathbb{E}\int_t^T S_s dK_s^n, \\
&\leq c\left(1+\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^n\right|^2 ds\right)+\frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^n\right|^2 ds \\
&+\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(S_t^+\right)^2\right]+\alpha\mathbb{E}\left[\left(K_T^n-K_t^n\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Comme

$$K_T^n-K_t^n=Y_t^n-\xi-\int_t^T f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)ds+\int_t^T\left(Z_s^n,dW_s\right),$$

alors, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\left(K_T^n-K_t^n\right)^2\right)\leq c\left\{\mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\xi^2\right)+1+\int_t^T\left(\left|Y_s^n\right|^2+\left|Z_s^n\right|^2\right)ds\right\}.$$

En choisissant $\alpha=\frac{1}{3}c$, on trouve

$$\frac{2}{3}\mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right)+\frac{1}{3}\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^n\right|^2 ds\leq c\left(1+\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^n\right|^2 ds\right).$$

Par l'utilisation du lemme de Gronwall, on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\int_0^T\left|Z_t^n\right|^2 dt+\mathbb{E}\left[\left(K_T^n\right)^2\right]\leq c,\qquad\forall n\in\mathbb{N}.$$

En utilisant autre fois l'équation (3.5) et l'inéglites de **Burkholder -Davis-Gundy**, on en déduit que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_t^n\right|^2+\int_0^T\left|Z_t^n\right|^2 dt+\left(K_T^n\right)^2)\leq c,\qquad\forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.6a}$$

Notez que si nous définissons

$$f_n\left(t,y,z\right)=f\left(t,y,z\right)+n\left(y-S_t\right)^-,\qquad f_n\left(t,y,z\right)\leq f_{n+1}\left(t,y,z\right),$$

et il découle de la théorème de comparaison (3.2), que $Y_t^n \leq Y_t^{n+1}$, $0 \leq t \leq T$, $p.s.$ Donc

$$Y_t^n \uparrow Y_t,\ 0 \leq t \leq T, \qquad p.s.$$

Et à partir l'estimation (3.6a) et du lemme de Fatou, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} Y_t^2\right) \leq c.$$

Il s'ensuit alors par théoréme de convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T (Y_t - Y_t^n)^2\, dt\right) \longrightarrow 0 \text{ si } n \longrightarrow \infty. \tag{3.7}$$

Or il découle de la formule d'Itô que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(|Y_t^n - Y_t^p|^2\right) + \mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\, ds \\
&= 2\mathbb{E}\int_t^T \left[f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(Y_s^p, Z_s^p\right)\right]\left(Y_s^n - Y_s^p\right) ds + 2\mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right) d\left(K_s^n - K_s^p\right), \\
&\leq 2K\mathbb{E}\int_t^T \left(|Y_s^n - Y_s^p|^2 + |Y_s^n - Y_s^p| \times |Z_s^n - Z_s^p|\right) ds \\
&+ 2\mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^n - S_s\right)^- dK_s^p + 2\mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^p - S_s\right)^- dK_s^n.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit l'existence d'une constante c telle que

$$\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2\, ds \leq c\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^n - Y_s^p|^2\, ds + 4\mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^n - S_s\right)^- dK_s^p + 4\mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^p - S_s\right)^- dK_s^n. \tag{3.8}$$

Maintentant par la Lemme (3.1), on a la convergence suivante

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^n - S_t\right)^- dK_t^p + \mathbb{E}\int_t^T \left(Y_t^p - S_t\right)^- dK_t^n \longrightarrow 0, \text{ si } n,\ p \longrightarrow \infty,$$

Donc de (3.7) et (3.8) :

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_t^n - Y_t^p|^2 + |Z_t^n - Z_t^p|^2\right) dt \longrightarrow 0, \text{ si } n,\ p \longrightarrow \infty.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&|Y_t^n - Y_t^p|^2 + \int_t^T |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds \\
&= 2\int_t^T \left[f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(Y_s^p, Z_s^p\right)\right]\left(Y_s^n - Y_s^p\right) ds \\
&+ 2\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right) d\left(K_s^n - K_s^p\right) - 2\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(Z_s^n - Z_s^p\right) dW_s,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n - Y_t^p|^2 \leq 2\int_t^T &\left|f\left(Y_s^n, Z_s^n\right) - f\left(Y_s^p, Z_s^p\right)\right| \times |Y_s^n - Y_s^p| \, ds \\
&+ 2\int_0^T \left(Y_s^n - S_s\right)^- dK_s^p + 2\int_0^T \left(Y_s^p - S_s\right)^- dK_s^n \\
&+ 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T \left(Y_s^n - Y_s^p\right)\left(Z_s^n - Z_s^p\right) dW_s\right|,
\end{aligned}$$

et de l'inégalites de **Burkholder-Davis-Gundy**,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n - Y_t^p|^2) \leq c\mathbb{E}&\int_0^T (|Y_t^n - Y_t^p|^2 + |Z_t^n - Z_t^p|^2) ds \\
&+ 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^n - S_t\right)^- dK_t^p + 2\mathbb{E}\int_0^T \left(Y_t^p - S_t\right)^- dK_t^n \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n - Y_t^p|^2\right) + c\mathbb{E}\int_0^T |Z_t^n - Z_t^p|^2 \, ds.
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\left(\sup_t |Y_t^n - Y_t^p|^2\right) \longrightarrow 0$, si n et $p \longrightarrow \infty$, par conséquent de (3.5), on trouve

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |K_t^n - K_t^p|^2\right) \longrightarrow 0 \text{ si } n,\ p \longrightarrow \infty. \tag{3.9}$$

Par conséquent il existe un couple (Z, K) de processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_t - Z_t^n|^2 \, dt + \sup_{0 \leq t \leq T} \left(|K_t - K_t^n|^2\right)\right) \longrightarrow 0.$$

Si $n \longrightarrow \infty$, le triplet (Y, Z, K) satisfait la conditions $v)$ et EDSRR (3.1) , la condition $Y_t \geq S_t$ découle du lemme 3.1. Alors il reste à vérifier que $\{K_t\}$ est un precessus continue et croissante avec $K_0 = 0$ et $\int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t = 0$.

Clairement, le processus $\{K_t\}$ est croissant. De plus, nous venons de voir que $(Y^n, K^n) \to (Y, K)$ uniformément en t en probabilité. Alors la mesure $dK^n \to dK$ faiblement en probabilité, par le resultat de [20], on obtient

$$\int_0^T (Y_t^n - S_t) \, dK_t^n \longrightarrow \int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t,$$

en probabilité, si $n \longrightarrow \infty$. On déduit du même preuve utilisé pour prouvé la lemme 3.1 que

$$\int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t \geq 0.$$

D'autre part,

$$\int_0^T (Y_t^n - S_t) \, dK_t^n \leq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$\int_0^T (Y_t - S_t) \, dK_t = 0, \qquad p.s,$$

Et finalement nous avons prouvé que (Y, Z, K) résoudre le **EDSRR** (3.1).

Chapitre 4

EDSR avec deux barriéres

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W(t))_{t\geq 0}$ désigne un mouvement Brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et ξ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Introduisons maintenant notre **EDSR** avec deux barrières (en abrégé, **EDSRDB**).

Définition 4.1 *Le processus $\left(Y_t,\ Z_t,\ K_t^+,\ K_t^-\right)_{t\leq 1}$, à valeur en $\mathbb{R}^{1+d}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, est appelé un solution pour **l'EDSR** avec deux barriéres si*

$$\begin{cases} (i)\ \ Y\in S^2,\ \ Z\in H^{2.d}\,;\ \ et\ \ K^{\pm}\in\mathcal{A}^2. \\ (ii)\ \ Y_t=\xi+\int_t^1 f\left(s,Y_s,Z_s\right)ds-\int_t^1 Z_s dW_s+\left(K_1^+-K_t^+\right)-\left(K_1^--K_t^-\right),\ \ t\leq 1 \\ (ii)\ \ \forall t\leq 1,\ \ L_t\leq Y_t\leq U_t \quad et \\ \int_0^1\left(Y_t-L_t\right)dK_t^+=\int_0^1\left(U_t-Y_t\right)dK_t^-=0, \qquad \mathbb{P}-p.s. \end{cases} \tag{4.1}$$

L'objectif principal de cet travail est de montrer que l'équation (4.1) a une solution unique. Pour commencer, nous supposons que le générateur f ne dépend pas de (Y, Z) c'est-à-dire, $\mathbb{P}-p.s,\ f\left(t,\omega,y,z\right)\equiv f\left(t,\omega\right)$, pour tout $t,\ y,\ z$.

4.1 Le cas le générateur f est indépendant et (y, z)

Nous allons montrer l'existence et l'unicité, sous les hypothèses suivants sur f, ξ, L et U. Soit ξ une variable aléatoire donnée dans $\mathbb{L}^2$, et une application $f:\Omega\times[0,1]\times\mathbb{R}^{1+d}\to\mathbb{R}$, qui est mesurable et satisfait :

(i) $(f(t,0,0))_{t\leq 1}$appartient à $L^2(\Omega\times[0,1], d\mathbb{P}\times dt)$ c'est-à-dire, $\mathbb{E}\left(\int_0^1 (f(t,0,0))^2\,dt\right) < +\infty$.

(ii) f est uniformément Lipschitz par rapport à (y,z), c'est-à-dire, qu'il existe une constante $k\geq 0$ telle que pour tout $y, y\prime, z, z\prime \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\text{−}p.s.,\qquad |f(\omega,t,y,z) - f(\omega,t,y',z')| \leq k\left(|y-y'| + |z-z'|\right).$$

Considérons aussi deux barrière réflétant L, U, qui sont des processus à valeurs réelles et $\mathcal{P}$-mesurables satisfaisant :

(j) $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq 1}\left\{\left(U_t^-\right)^2 + \left(L_t^+\right)^2\right\}\right] < +\infty,\ L_t^+ := \max\{L_t,\ 0\},\ U_t^- := \max\{-U_t,\ 0\}.$

(jj) $L_t \leq U_t,\ \forall 0\leq t\leq 1,\ L_1\leq \xi\leq U_1,\ \mathbb{P}-p.s.$

(jjj) $\{U_t,\ 0\leq t\leq 1\}$ est suffisamment régulier, c'est-à-dire, qu'il satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{IL existe une suite de processus } (U^n)_{n\geq 0} \text{ telle que} \\ (1)\qquad \forall t\leq 1.\ U_t^n \geq U_t^{n+1} \text{ et } \lim_{n\to\infty} U_t^n = U_t,\ \ \mathbb{P}-p.s \\ (2)\qquad \forall n\geq 0 \text{ et } t\leq 1,\ U_t^n = U_0^n + \int_0^t u_s^n ds + \int_0^t v_s^n dW_s \\ \text{Où les processus } u_n, v_n, \text{ sont } \mathcal{F}_t - \text{adaptés tels que} \\ \sup_{n\geq 0}\sup_{0\leq t\leq 1}|u_t^n| \leq M,\ \mathbb{E}\left\{\int_0^1 |v_s^n|^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,\quad \forall n\geq 1. \end{cases}$$

De la solution **EDSRDB** suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s)\,ds - \int_t^1 Z_s dW_s + \left(K_1^+ - K_t^+\right) - \left(K_1^- - K_t^-\right) \tag{4.2}$$

Le résultat principal d'cette section est le suivant :

Théoréme 4.1 *L'**EDSRDB** (4.2) admet une unique solution* (Y,Z,K^+,K^-). *Soit* $(Y^n, Z^n, K^{+,n})$ *la solution du **EDSR** à un seul barrière associé à* $\left(f(s) - n(y-U_s)^+, \xi, L\right)$:

$$Y_t^n = \xi + \int_t^1 f(s)\,ds - \int_t^1 Z_s^n dW_s + \left(K_1^{+,n} - K_t^{+,n}\right) - n\int_t^1 (Y_s^n - U_s)^+ ds$$

Nous avons divisé la preuve du théorème en $6-$*étaps*

La premiére étap : Pour tout $n \geq 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left(n \left(Y_t^n - U_t \right)^+ \right) \leq M, \qquad \mathbb{P}\text{−}p.s.$$

Proof. Pour chaque $n \geq 0$ et $k \geq 0$, soit $\left(Y^{n,k}, Z^{n,k} \right)$ la solution du **EDSR** suivant, $\forall t \leq 1$

$$\begin{aligned} Y_t^{n,k} &= \xi + \int_t^1 f(s)\, ds - \int_t^1 Z_s^{n,k} dW_s - n \int_t^1 \left(Y_s^{n,k} - U_s \right)^+ ds \\ &\quad + k \int_t^1 \left(Y_s^{n,k} - L_s \right)^- ds. \end{aligned}$$

Poser $\overline{Y}^{n,k} := Y^{n,k} - U^k$, puis

$$\begin{aligned} \overline{Y}_t^{n,k} &= \xi - U_1^k + \int_t^1 u_s^k ds + \int_t^1 f(s)\, ds - \int_t^1 \left(Z_s^{n,k} - v_s^k \right) dW_s \\ &\quad - n \int_t^1 \left(\overline{Y}_s^{n,k} - \left(U_s - U_s^k \right) \right)^+ ds + k \int_t^1 \left(\overline{Y}_s^{n,k} - \left(L_s - U_s^k \right) \right)^- ds. \end{aligned}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{D}^n$ la classe des processus $\mathcal{P}$-mesurables $\nu : [0,1] \times \Omega \longrightarrow [0,n]$. Soit $\nu \in \mathcal{D}^n$, puis en appliquant la formul d'Itô au produit $\overline{Y}^{n,k}$ et $\exp\left(- \int_0 \left(\mu(r) + \nu(r) \right) dr \right)$ et en utilisant les mêmes arguments que dans Cvitanic et Karatzas [5], on peut montrer que

$$\begin{aligned} \overline{Y}_t^{n,k} &= ess \sup_{\mu \in \mathcal{D}^k} ess \inf_{\nu \in \mathcal{D}^n} \mathbb{E} \Bigg\{ \left(\xi - U_1^k \right) \exp\left(- \int_t^1 \left(\mu(r) + \nu(r) \right) dr \right) \\ &\quad + \int_t^1 \exp\left(- \int_t^s \left(\mu(r) + \nu(r) \right) dr \right) (u_s^k + f(s) + \nu(s) \left(U_s - U_s^k \right) + \mu(s) \left(L_s - U_s^k \right) \Big) ds \,| \mathcal{F}_s \Bigg\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \overline{Y}_t^{n,k} &= es \sup_{\mu \in \mathcal{D}^k} es \sin_{\nu \in \mathcal{D}^n} f \; \mathbb{E} \left\{ \int_t^1 \exp\left(- \int_t^s \left(\mu(r) + \nu(r) \right) dr \right) \left| u_s^k \right| / \mathcal{F}_s \right\} \\ &\leq es \sup_{\mu \in \mathcal{D}^k} \mathbb{E} \left\{ \int_t^1 \exp\left(- \int_t^s \left(\mu(r) + n \right) dr \right) | / \mathcal{F}_s \right\} \leq \frac{M}{n}, \end{aligned}$$

le premiére étap est prouvé. ■

La deuxiéme étap : Il existe deux processus Y et K^+ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Y_s^n - Y_s|^2 \, ds\right] = 0,$$
$$\lim_{n\to+1} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq 1} \left|K_s^{+,n} - K_s^+\right|^2\right] = 0.$$

Proof. Soit $\left(\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{K}\right)$ la solution de la **EDSR** suivant associé à $f(t) - M$, ξ, L

$$\overline{Y}_t = \xi + \int_t^1 f(s)\, ds - \int_t^1 \overline{Z}_s dW_s + \overline{K}_1 - \overline{K}_t - \int_t^1 M ds, \qquad \forall t \leq 1.$$

Le théorème de comparaison pour **EDSR** implique que $(Y^n)_{n\geq 1}$(resp. $(dK^n)_{n\geq 1}$) est une suite de processus non croissant (resp. non décroissante) de processus et. $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}-p.s.$, $Y^n \geq \bar{Y}$ (resp $dK^n \leq d\bar{k}$). Ainsi, il existe des processus $\mathcal{P}$-mesurables Y et K^+ tels que $\mathbb{P}-p.s$. $\forall t \leq 1$, $Y_t^n \searrow Y_t$ et $K_t^n \nearrow K_t$ ponctuellement $n \longrightarrow +\infty$. On a d'après [[8]]

$$\mathbb{E}\left(\left(K_1^+\right)^2 + \left(\overline{K}_1\right)^2 + \int_0^1 \left(\left|Z_s^1\right|^2 + \left|\overline{Z}_s\right|^2\right) ds + \sup_{0\leq t\leq 1}\left(\left(Y_t^1\right)^2 + \overline{Y}_t^2\right)\right) < +\infty. \tag{4.3a}$$

Puisque $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}-p.s$, $Y^1 \geq \overline{Y}$, par théorème de convergence dominée. On obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Y_s^n - Y_s|^2 \, ds\right] = 0.$$

Par théorème de Dini's, puisque le processus K^+ est continu, on obtient aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq\leq t\leq 1} \left|K_s^{+,n} - K_s^+\right|^2\right] = 0.$$

Le deuxiéme étap est prouvé. ■

La troisiéme étap : II existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq 1}|Y_t^n|^2 + \left(K_1^{+,n}\right)^2 + \int_0^1 |Z_t^n|^2\,dt\right] \leq C, \qquad \forall n \geq 1.$$

Proof. Puisque, pour tout $n \geq 1$,$\mathbb{P}-p.s.$, $Y^1 \geq Y^n \geq \overline{Y}_t$ et $K_1^{+1} \leq K_1^{+n} \leq \overline{K}$, et grâce à l'inégalité (4.3a), On obtient que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq 1}|Y_t^n|^2 + \left(K_1^{+n}\right)^2\right] \leq C, \qquad \forall n \geq 1.$$

Or, il découle de la formule d'Itô que

$$\begin{aligned} Y_t^{n^2} + \int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds \quad &= \xi^2 + 2\int_{]t,1]} Y_s^n f(s)\,ds + 2\int_{]t,1]} Y_s^n dK_s^{+n} \\ &+2\int_{]t,1]} nY_s^n\left(Y_s^n - U_s\right)^+ ds \\ &-2\int_{]t,1]} Y_{s-}^n Z_s^n dW_s, \quad t \leq 1. \end{aligned}$$

Depuis $\int_0 Y_{s-}^n Z_s^n dW_s$ est une martingale, et par utilisation de l'inégalité de yong, On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{]t,1]} (Y_s^n)^2\,ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_{]t,1]} (f(s))^2\,ds\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq 1}(Y_s^n)^2\right] \\ + \mathbb{E}\left[\left(K_1^{+n}\right)^2\right] + \alpha^2\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq 1}(Y_s^n)^2\right] + \frac{1}{\alpha^2}\mathbb{E}\left[\int_{]t,1]} n\left(Y_s^n - U_s\right)^+ ds\right]^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Mais

$$n\int_0^1 \left(Y_s^n - I_s\right)^+ ds = \xi + K_1^{+n} - Y_0^n + \int_0^1 f(s)\,ds - \int_0^1 Z_s^n dW_s.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 n\left(Y_s^n - U_s\right)^+ ds\right]^2 \leq C\left(1 + \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z_s^n|^2\,ds\right]\right).$$

Revenant à l'inégalité (4.4) et en choisissant $\alpha^2 = 2C$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z_t^n|^2\,dt\right] \leq C, \qquad \forall n \geq 1.$$

Le troisiéme étap est prouvé. ■

La quatriéme étap :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq 1}\left|\left(Y_t^n - U_t\right)^+\right|^2\right] = 0$$

Proof. Soit $\left(\hat{Y}_t^n, \hat{Z}_t^n, \hat{K}_t^n\right)_{t\leq 1}$ la solution du **EDSR** suivant associé à $(f(t) - n(y - U_t), \xi, L)$

$$\hat{Y}_t^n = \xi + \int_t^1 \left\{f(s) - n\left(\hat{Y}_s^n - U_s\right)\right\} ds - \int_t^1 \hat{Z}_s^n dW_s + \hat{K}_1^n - \hat{K}_t^n.$$

Par théorème de comparaison, voir[[8]], on a $\mathbb{P}-p.s$,$\forall t \leq 1, Y^n \leq \hat{Y}^n$ et $d\hat{K}^n \leq dK^{+,n} \leq d\hat{K}$.

Soit τ maintenant un $\mathcal{F}_t-$ temps d'arrêt tel que $\tau \leq 1$. Alors

$$\hat{Y}_\tau^n = \mathbb{E}\left[\xi \exp -n(1-\tau) + \int_\tau^1 (f(s) + nU_s)\exp -n(s-\tau)\,ds + \int_r^1 \exp\left[-n(s-\tau)\right] d\hat{K}_t^n \,|\mathcal{F}_\tau\right].$$

Comme U est régulier et $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq 1}|U_t|^2\right] < +\infty$. On obtient

$$\xi \exp\left[-n(1-\tau)\right] + n\int_\tau^1 U_s \exp\left[-n(s-\tau)\right] ds \longrightarrow \xi 1_{\tau=1} + U_\tau 1_{[\tau<1]} \quad \text{comme} \quad n \longrightarrow \infty.$$

$\mathbb{P}-p.s.$, et en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Désormais, on a aussi la convergence de l'espérance conditionnelle en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. De plus

$$\left|\int_\tau^1 f(s)\exp\left\{-n(s-\tau)\right\} ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_\tau^1 f^2(s)\,ds\right)^{1/2}$$

Alors

$$\int_\tau^1 f(s)\exp -n(s-\tau)\,ds \longrightarrow 0 \ \text{ en } L^2(\Omega, \mathbb{P}), \quad \text{comme} \ \ n \longrightarrow \infty.$$

Depuis

$$0 \leq \int_\tau^1 \exp\left[-n(s-\tau)\right] d\hat{K}_t^n \leq \int_\tau^1 \exp\left[-n(s-\tau)\right] dK_t^{+n} \leq \int_\tau^1 \exp\left[-n(s-\tau)\right] d\overline{K}_t \longrightarrow 0,$$

en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, si $\quad n \longrightarrow +\infty$, on a

$$\hat{Y}_\tau^n \longrightarrow \xi 1_{[\tau=1]} + U_\tau 1_{[\tau<1]} \quad \text{en} \quad L^1(\Omega, \mathbb{P}) \quad \text{comme} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Donc $Y_\tau \leq U_\tau \;\; \mathbb{P}-p.s.$ Par utilisation de la théoreme de section voir [7], on en déduit que $Y_t \leq U_t$, $\forall t \leq 1$, $\mathbb{P}-p.s.$ et puis $(Y_t^n - U_t)^+ \searrow 0$, $\forall t \leq 1$, $\mathbb{P}-p.s.$

Finalement par la théorème de Dini's [7], on en déduit que $\sup_{t\leq 1}(Y_t^n - U_t)^+ \searrow 0 \; \mathbb{P}-p.s.$ Si $n \longrightarrow \infty$. Par conséquent, le théorème de convergence dominé implique

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq 1}\left|(Y_t^n - U_t)^+\right|^2\right] \longrightarrow 0 \quad p.s. \text{ Si} \quad n \longrightarrow \infty$$

puisque pour tout $n \leq 0$, $(Y_t^n - U_t)^+ \leq |Y_t^0| + |U_t|$. La quatriéme étap est prouvé.

L'ensemble

$$K_t^{-n} := \int_0^t n(Y_s^n - U_s)^+ ds$$

■

<u>La cinqiéme étap</u> : Il existe des processus $\mathcal{F}_t-$adaptés $Z = (Z_t)_{t\leq 1}$, $K^- = \left(K_t^-\right)_{t\leq 1}$ $\left(K^- \text{ non décroissant et } K_0^- = 0\right)$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z_s^n - Z_s|^2 ds + \sup_{t\leq 1}\left|K_t^{-,n} - K_t^-\right|^2\right] \longrightarrow 0 \quad \text{Si} \;\; n \longrightarrow \infty.$$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq 1}|Y_t^n - Y_t|^2\right] = 0.$$

Proof. En utilisant la formule d'Itô, on a pour tout $p \geq n \geq 0 \quad \text{et} \quad t \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
(Y_t^n - Y_t^p)^2 + \int_t^1 |Z_s^n - Z_s^p|^2 \, ds = 2 \int_t^1 (Y_s^n - Y_s^p) \left(dK_s^{+,n} - dK_s^{+p} \right) \\
- 2 \int_t^1 (Y_s^n - Y_s^p) \left(dK_s^{-,n} - dK_s^{-p} \right) \\
- 2 \int_t^1 \left(Y_{s-}^n - Y_{s-}^p \right) (Z_s^n - Z_s^p) \, dW_s \\
\leq 2 \int_t^1 (Y_s^n - Y_s^p) \left(n \, (Y_s^n - U_s)^+ - p \, (Y_s^p - U_s)^+ \right) \\
- 2 \int_t^1 \left(y_{s-}^n - Y_{s-}^p \right) (Z_s^n - Z_s^p) \, dW_s.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Depuis que $\mathbb{P}-p.s.$, $\int_t^1 (Y_s^n - Y_s^p) \left(dK_s^{+,n} - dK_s^{+p} \right) \leq 0$. Donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\int_t^1 |Z_s^n - Z_s^p| \, ds \right] &\leq 2\mathbb{E} \left[\int_t^1 (Y_s^p - U_s)^+ \, n \, (Y_s^n - U_s) + ds \right] \\
&+ 2\mathbb{E} \left[\int_t^1 (Y_s^n - U_s) + p \left(Y_s^p - U_s)^+ \right) ds \right] \\
&\leq \left\{ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left[Y_s^p - U_s)^+ \right]^2 \right\}^{1/2} \left(\mathbb{E} \left\{ \int_t^1 n \, (Y_s^n - U_s)^+ \, ds \right\}^2 \right)^{1/2} \\
&+ \left\{ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left[Y_s^n - U_s)^+ \right]^2 \right\}^{1/2} \left(\mathbb{E} \left\{ \int_t^1 p \, (Y_s^p - U_s)^+ \, ds \right\}^2 \right)^{1/2} .
\end{aligned}
$$

En utilisant l'étap précédent et le fait que pour tout $n \geq 1$ $\mathbb{E} \left\{ \int_t^1 n \, (Y_s^n - U_s)^+ \, ds \right\}^2 < +\infty$, on obtient

$$
\mathbb{E} \left[\int_0^1 |Z_s^n - Z_s|^2 \, ds \right] \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty.
$$

Il s'ensuit que $(Z^n)_{n \geq 0}$ est un suite de Cauchy dans un espace complet alors il existe un processus Z , $\mathcal{F}_t-$ progressivement mesurable et $\mathcal{P} \otimes u-$mesurable tels que les suites $(Z^n)_{n \leq 0}$ convergent, vers Z dans $\mathbb{L}^2 (d \, \mathbb{P} \otimes dt)$. Maintenant, revenons à l'égalité (4.5) en prenant d'abord le supremum, puis le espérance, et en utilisant l'inégalité du **BDG** voir [7] donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\le s\le 1}\left(Y_s^n-Y_s^p\right)^2+\int_t^1\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2 ds\right]\\
&\le\left\{\mathbb{E}\sup_{0\le t\le 1}\left[Y_s^p-U_s)^+\right]^2\right\}^{1/2}\left(\mathbb{E}\left\{\int_t^1 n\left(Y_s^n-U_s\right)^+ ds\right\}^2\right)^{1/2}\\
&+\left\{\mathbb{E}\sup_{0\le t\le 1}\left[Y_s^n-U_s)^+\right]^2\right\}^{1/2}\left(\mathbb{E}\left\{\int_t^1 p\left(Y_s^p-U_s\right)^+ ds\right\}^2\right)^{1/2}\\
&+\alpha\mathbb{E}\left[\sup_{t\le s\le 1}\left(Y_s^n-Y_s^p\right)^2\right]+\alpha^{-1}\mathbb{E}\left[\int_t^1\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2 ds\right],\ t\le 1.
\end{aligned}$$

Où α est une constante réelle non régative universelle, Dorènavant, choisir $\alpha<\frac{1}{2}$ implique que $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le 1}\left(Y_s^n-Y_s^p\right)^2\right]\longrightarrow 0$, lorsque $p,\ n\longrightarrow\infty$, et puis $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le 1}\left(Y_s^n-Y_s\right)^2\right]\longrightarrow 0$ lorsque $n\longrightarrow\infty$ de plus, $Y=\left(Y_t\right)_{t\le 1}$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté

$$K_t^-=Y_t-Y_0+\int_0^t f(s)\,ds+K_t^+-K_0^+-\int_0^t Z_s dW_s,$$

On peut montrer facilement, au moins pour une sous-suite (que l'on note encore n), que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_t^1 n\left(Y_s^n-U_s\right)^+ ds-K_t^-\right|^2\right]\longrightarrow 0,\ \text{si } n\longrightarrow+\infty. \tag{4.6}$$

La cinqiéme étap est prouvé. ■

La sixième étap : Il reste à prouver que le processus (Y,Z,K^+,K^-) est une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde avec deux barrières. Évidemment, le processus (Y,Z,K) satisfait, $\forall t\le 1$

$$\begin{aligned}
Y_t=\xi&+\int_t^1 f(s)\,ds+\left(K_1^+-K_t^+\right)-\left(K_1^--K_t^-\right)\\
&-\int_t^1 Z_s dW_s,
\end{aligned}$$

puisque $Y_t^n\le L_t$ et $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\le 1}\left(\left(Y_t^n-U_t\right)^+\right)^2\right]=0$ alors $\mathbb{P}-p.s.$, $\forall t\le 1$, $L_t\le Y_t\le$

U_t. Soit $\int_0^1 (Y_s - L_s)\, dK_s^+ = \int_0^1 (U_s - Y_s)\, dK_s^- = 0$, $\mathbb{P}-p.s.$ On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (Y_s - L_s)\, dK_s^+ &= \int_0^1 (Y_s - Y_s^n)\, dK_s^+ + \int_0^1 (Y_s^n - L_s)\, dK_s^+ \\ &= \int_0^1 (Y_s - Y_s^n)\, dK_s^+ + \int_0^1 (Y_s^n - L_s) \left(dK_s^+ - dK_s^{+n}\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 (Y_s - L_s)\, dK_s^+ = 0.$$

De plus, grâce à la cinqiéme étap et l'estimation (4.6) et au lemme de Saisho voir [20] pour une sous-suite, on obtient

$$n \int_0^1 (U_s - Y_s^n)\,(Y_s - U_s)^+\, ds \longrightarrow \int_0^1 (U_s - Y_s)\, dK_s^-,$$

$\mathbb{P}-p.s.$, si $n \longrightarrow +\infty$. Donc, $\int_0^1 (U_s - Y_s)\, dK_s^- \leq 0$. Mais, puisque $Y \leq U$, $\mathbb{P}-p.s$, $\int_0^1 (U_s - Y_s)\, dK_s^- = 0$. Les autres propriétés sont satisffaites par la construction des processus (Y, Z, K^+, K^-) et la preuve est terminée. Prouvons maintenant l'unicité de la solution. Si $\left(Y', Z', K^{+'}, K^{-'}\right)$ est une autre solution, alors en utilisant la formule d'Itô, on obtient que

$$\begin{aligned}&|Y_t - Y_t'|^2 + \int_t^1 |Z_s - Z_s'|^2\, ds \\ &= 2\int_t^1 (Y_s - Y_s')\left(dK_s^+ - dK_s^{+\prime}\right) - 2\int_t^1 (Y_s - Y_s')\left(dK_s^- - dK_s^{-1}\right) \\ &- 2\int_t^1 (Y_s - Y_s')\,(Z_s - Z_s')\, dW_s,\end{aligned}$$

comme, $\int_t^1 (Y_s - Y_s')\,(Z_s - Z_s')\, dW_s$ de une martingale et $\int_t^1 (Y_s - Y_s')\,(dK_s^+ - dK_s^{+\prime}) \leq 0$ et $\int_t^1 (Y_s - Y_s')\,(dK_s^+ - dK_s^{+\prime}) \geq 0$, alors

$$|Y_t - Y_t'|^2 + \int_t^1 |Z_s - Z_s'|^2\, ds \leq 0.$$

Posons $K = K^+ - K^-$ et $K\prime = K^{+'} - K^{-'}$, on obtient $Y = Y$', $Z = Z$', $K = K$'. Enfin, montrons que $K^+ = K^{+'}$et $K^- = K^{-\prime}$. Ona $\forall t \leq 1$,

$$\int_0^1 (L_s - Y_s)\, dK_s = \int_0^t (L_s - Y_s)\, dK'_s.$$

Mais,

$$\int_0^t (L_s - Y_s)\, dK_s = -\int_0^t (L_s - Y_s)\, dK_s^- = -\int_0^t (U_s - L_s)\, dK_s^-.$$

De la même façon,

$$\int_0^t (L_s - Y_s)\, dK'_s = -\int_0^t (U_s - L_s)\, dK^{-'},$$

et puis $\int_0^t (U_s - L_s)\, dK_s^- = \int_0^t (U_s - L_s)\, dK_s^{-\prime}$. Depuis $K_0^+ = K_0^{+'}$et $L_t < U_t$, on obtient $K^- = K^{-\prime}$. De la même façon, on obtient aussi que $K^+ = K^{+'}$. Nous prouvons l'existence et l'unicité du solution pour **EDSRDB** suivant associé à $(f(t,y,z), \xi, L, U)$

$$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s)\,, ds - \int_t^1 Z_s dW_s + \left(K_1^+ - K_t^+\right) - \left(K_1^- - K_t^-\right).$$

4.2 Le cas general

Dans la preuve de notre résultat. Nous construisons une contraction qui a un point fixe, qui est la solution de notre **EDSRDB** (4.1).

Théoréme 4.2 *L'**EDSR** réfléchie (4.1) associés à (f, ξ, L, U) admet une unique solution* (Y, Z, K^+, K^-).

Proof. Il reste à montrer l'existence que l'on obtiendra via la théorie de point fixe de la contraction de la fonction ϕ définie comme suit : Soit $\mathfrak{D} := S^2 \times H^{2,d} \times L^2$ l'espace des processus $\mathcal{P}-$mesurable (Y, Z) doté de la norme

$$\|(Y,Z)\|_\alpha = \left\{\mathbb{E}\left[\int_0^1 e^{\alpha s}\left(|Y_s|^2 + |Z_s|^2\right) ds\right]\right\}^{1/2};\ \alpha > 0.$$

Soit Φ la carte de $\mathfrak{D}$ en lui-même, qui à (Y,Z) associe $\Phi(Y,Z) = \left(\tilde{Y}, \tilde{Z}\right)$, où $\left(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{K}^+, \tilde{K}^-\right)$ est la solution de la refléte **EDSRD** associé à $(f(t,y,z), \xi, L, U)$. Soit (Y', Z') un autre triplet de $\mathfrak{D}$ et $\phi(Y', Z') = \left(\tilde{Y}', \tilde{Z}'\right)$, puis en utilisant la formule d'Itô, on obtient, pour tout $t \leq 1$,

$$\begin{aligned}
&\exp^{\alpha t}\left(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}'_t\right)^2 + \alpha\int_t^1 \exp^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)^2 ds + \int_t^1 \exp^{\alpha s}\left|\tilde{Z}_s - \tilde{Z}'_s\right|^2 ds \\
&= (M_1 - M_t) + 2\int_t^1 \exp^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)\left(d\tilde{K}^+_s - d\tilde{K}^{+'}_s\right) \\
&- 2\int_t^1 \exp^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)\left(d\tilde{K}^-_s - d\tilde{K}^{-'}_s\right) \\
&+ 2\int_t^1 \exp^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))ds
\end{aligned}$$

Où $(M_t)_{t\leq 1}$ est une martingale. Mais

$$\int_t^1 e^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)\left(d\tilde{K}^+_s - d\tilde{K}^{+'}_s\right) \leq 0 \text{ et } \int_t^1 e^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)\left(d\tilde{K}^-_s d\tilde{K}^{-"}_s\right) \geq 0,$$

alors pour tout $\varepsilon < 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha\mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left|\tilde{Z}_s - \tilde{Z}'_s\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))\,ds\right] \\
&\leq k\epsilon\mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)^2 ds\right] + \frac{k}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left|Y_s - Y'_s\right|^2 + \left|Z_s - Z'_s\right|^2\right].
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
&(\alpha - k\epsilon)\,\mathbb{E}\left[\int_t^1 \acute{e}^{\alpha s}\left(\tilde{Y}_s - \tilde{Y}'_s\right)^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left(\tilde{Z}_s - \tilde{Z}'_s\right)^2 ds\right] \\
&\leq \frac{k}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{\alpha s}\left\{\left|Y_s - Y'_s\right|^2 + \left|Z_s - Z'_s\right|^2\right\} ds\right].
\end{aligned}$$

Or si α assez grand et ϵ tel que $k < \epsilon < \frac{\alpha-1}{k}$, alors Φ est un contraction sur $\mathfrak{D}$ et il a un unique point fixe sur $\mathfrak{D}$, qui est, avec K^+et K^-, l'unique solution de **EDSRDB** associé à $(f, \xi L, U)$. ■

Remarque 4.1 *(__Régularité des processus K^-et K^+__) Soit $(Y^n, Z^n, K^{+,n})$ la solution du*

EDSRDB *mono-barrière associé à* $\left(f\left(s\right)-n\left(y-U_s\right)^{+},\xi,L\right)$. *D'après la troisiéme étap, on obtient que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1\left(Y_s^n-U_s\right)^{+2}ds\right]\leq\frac{C}{n^2}.$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left[\left\|K^{-,n}\right\|_{H^1\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)}\right]<\infty,$$

où $K_t^{-,n}=n\int_0^t\left(Y_s^n-U_s\right)^{+}ds,\ t\leq1,$ *et* $H^1\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)$ *est l'espace de Sobolev usuel constitué de toutes les fonctions absolument continues de dérivée dans* $L^2\left(0,1\right)$. *Ainsi, la suite* $\left(K^{-,n}\right)_n$ *est bornée dans la espace de Hilbert* $L^2\left(\Omega;H^1\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\right)$ *et alors il existe une sous-suite de* $\left(K^{-,n}\right)_n$ *,qui converge faiblement. le processus limite, qui est en fait* K^-, *appartient à* $L^2\left(\Omega;H^1\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)\right)$ *et puis* $\mathbb{P}-p.s.,\ k^-\left(\omega\right)\in H^1\left(0,1;\mathbb{R}^d\right)$, *c'est-à-dire,* K^-*que est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dt. Si l'on suppose, de plus, que la barrière inférieure* L *est lisse, on peut montrer que le processus* K^+ *est aussi absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Conclusion

Dans ce travail, nous étudions une classe d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (**EDSR**). Nous avons traité l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades à deux barrières lorsque le générateur f satisfait la condition Lipschitz. De plus, on obtient un résultat d'existence et d'unicité de la solution de l'équation précédente lorsque, $L = +\infty$ c'est-à-dire $K^+ = 0$ par les mêmes conditions sur le générateur f.

Bibliographie

[1] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2), 384-404.

[2] Bahlali, K. (2001). Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 333(5), 481-486.

[3] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[4] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars.

[5] Cvitanic, J, & Karatzas, I. (1996). Backward stochastic differential equations with reflexion and Dynkin games. the Annals of Probability, 2024–2056.

[6] Dellacherie, C, & Meyer, P. A. (1975). Probabilit et Potentiel,Volume I et IV. Hermann,Paris.

[7] Dellacherie, C, & Meyer, P. A. (1980). Probabilités et Potentiel,Chap.Va VIII.

[8] El Karoui, N, Kapoudjian, c, Pardoux, E, Peng, S, & Quenez, M. C. (1997) .Reflected solutions of backward SDE's,and related obstacle problems for PDE's.the Annals of Probability,25(2),702-737.

[9] Hamadene, S., & Lepeltier, J. P. (1995).Backward equations, stochastic control and zero-sum stochastic differential games.Stochastics :An International Joumal of Probability and Stochastic Processes,54(3-4),221–231.

[10] Hamadène, S. (1996). Equations differentielles stochastiques retrogrades :le cas localement lipschitzien, In Annales de I'IHP Probabilités et statistiques (VOl. 32, No. 5, pp. 645-659).

[11] Hamadène, S., & Ouknine, Y. (2003). Reflected backward stochastic differential equation with jumps and random obstacle.

[12] Jeanblanc, M, & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique.IRBID, septembre .

[13] Jeanblanc, M. (2006).Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY.Lecture Notes,University of Évry.Available at http ://WWW.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc.

[14] Ma, J., &.Cvitanic, J. (2001). Reflected forward-backward SDE's and obstacles problems with boundary conditions. Journal of Applied Mathematics and, Stochastic Analysis,14(2),113–138.

[15] Pardoux, E., & Peng. S.(1990).Adapted solution of a backward stochastic differential equation. System &Control Letters, 14(1),55–61.

[16] Pardoux, E. ,& Peng.S. (1992).Backward SDEs and quasilinear PDEs,Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications. Lecture Notes in Control and inform .Sci,176,200–217.

[17] Pardoux, É. (1999). BSDE's, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs. Nonlineqr analysis, differential equations and Control, 503–549.

[18] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol.61). Berlin :Springer.

[19] Popier, A. (2016). Calcul stochastique,applications en finance. Notes de cours, le Mans. Université, 2017.

[20] Saisho, Y. (1987). Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. Probability Theory and Related Fields, 74(3), 455-477.

Annexe : Quelques notion importants

Définition 4.2 ***(Espace de Banach) :*** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Théoréme 4.3 ***(Lemme de Gronwall) :*** *Soit* $g : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que, pour tout* t,

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g ds, \qquad a \in \mathbb{R},\ b \geq 0.$$

Alors, $\forall t$

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théoréme 4.4 ***(Inégalités B-D-G)*** *: Soit* $p > 0$ *un réel, Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale locale continue* X*, nulle en zéro, on a*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 4.2 *En particulier ,si* $T \geq t$*, on a*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Lemme 4.1 ***(Lemme de Fatou)*** *: Pour tout suite* (g_n) *dans* $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et toute sous-tribu* ς *de* $\mathcal{F}$

$$\mathbb{E}\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf g_n \,|\varsigma\right) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \mathbb{E}(g_n \,|\varsigma)$$

Théoréme 4.5 *(**Décomposition de Doob-Meyer**) : Soit X une sous-martingale relativement à $\mathcal{F}_t$ telle que la famille $\{X_T,\ (\mathcal{F}_t) - \text{temps d'arrêt borné}\}$ est uniformément intégrable il existe une $(\mathcal{F}_t)$-martingale M et un processus A croissant $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que*

$$X_t = M_t + A_t,$$

pour tout $t \geq 0$. De plus, M et A sont uniques.

Lemme 4.2 *(l**Lemme de Saisho**) : Soit $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de fonction de variation continues et bornées de $[0,1]$ à $\mathbb{R}^d$,telle que*

1. $\sup_n var\,(K^n) \leq C < +\infty$.
2. $\lim_{n\longrightarrow\infty} K^n = K$ uniforméntent sur $[0,1]$.
3. Soit $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de fonctions càdlàg de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}^d$, telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f^n = f$ uniformément sur $[0,1]$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \langle f^n\,(s)\,, dk^n\,(s)\rangle = \int_0^t \langle f\,(s)\,, dk\,(s)\rangle\,.$$

Abstract

Our work is focused on the existence and uniqueness results for adapted solutions of backward stochastic differential equations (BSDE's) with two reflecting barriers, this work generalizing the reflected solutions of one-dimensional backward stochastic differential equations. Existence is proved by using a penalization as well as a fixed point methods.

Key words : Double barrier backward stochastic differential equations; Fixed point theory; Penalization method.

Résumé

Notre travail est focalisé sur des résultats d'existence et d'unicité pour des solutions adaptées d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (BSDE) à deux barrières, ce travail généralisant les solutions réfléchies d'équations différentielles stochastiques rétrogrades. L'existence est prouvée en utilisant une pénalisation ainsi qu'une méthode de point fixe.

Mots clés : Equations différentielles stochastiques rétrograde à deux barrières ; Théorie du point fixe, Méthode de pénalisation.

الملخص

يتمحور عملنا على وجود وتفرد الحلول الملائمة للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ذات حاجزين، وهذا العمل يعمم حلول المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ذات حاجز وحيد. تم إثبات الوجود باستخدام أساليب العقوبة و كذلك أساليب النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ذات حاجزين ، نظرية النقطة الصامدة ، طريقة الإقصاء.