RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Kasdi Merbah- OUARGLA

Faculté des mathématiques et de sciences de la matière

Département de Mathématique

MASTER

Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par : Ahmed Dokma

Thème

Caractéristiques des quelques espaces non mesurables

Devant le jury composé de:

M. A.Aamara	MCA	Université OUARGLA	Président
M. M.Kouidri	MCA	Université OUARGLA	Examinateur
M. S.Badija	MCA	Université OUARGLA	Encadrant

2022-2023

Remerciement

Tout d'abord, merci à ***Dieu*** *qui ma donné la patience pour finir ce modeste travail, après cela, je remercie très sincèrement mon directeur de travail le professeur* ***"Mr.Salim.Badija"*** *pour la bonne direction et précieux conseils tout au long du travail .*

Je remercie également tous les professeurs du département du mathématiques qui ont donné des leçons de la manière la plus simple tout au long du cours universitaire.

Je remercie ma famille et mes amies qui ont ma aidé pour obtenir des bons résultats, et je remercie tous les personnes qui ont contribué au succès de ce travail proche ou lointain.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail de façon générale à toute ma famille ; À tous mes Enseignants d'université OUARGLA, notamment Mr.Salim.Badija qui ma dirigé la très bonne direction;

je dédie ce travail à mes chères amies.

♡

Table des matières

Table des figures

Introduction générale :

Le concept de mesure $u(A)$ pour un ensemble A est une généralisation naturelle du concept de :

1. La distance $l(\Delta)$ a domaine Δ
2. La surface $S(F)$ Pour une forme plate F
3. La volume $V(G)$ Pour le corps G
4. La croissante $\varphi(b) - \varphi(a)$ pour fonction non décroissante $\varphi(t)$ a demain $[a, b)$

Le concept de mesure est apparu dans la théorie des fonctions d'une variable réel À la suite de l'étude et du développement du concept d'intégration, ce concept s'est ensuite déplacé vers la théorie des probabilités, la théorie de l'animation de phrases, l'analyse fonctionnelle et d'autres sujets mathématiques.

Dans ce mémoire, on va basé sur l'étude de quelque ensembles non mesurables et on choisir l'ensemble de Vitali comme exemple pour notre étude.

Notre travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre c'est un rappel de quelques définitions, propriétés et la théorie des espaces mesurables, (Tribus, Ensembles mesurables, Mesures positives...).

Dans le deuxième chapitre Nous présentons quelques définitions, propriétés, et notions de base consternant les espaces non mesurables,(Cosets de Q,ensemble et fonction non mesurable).

Le troisième chapitre de notre travail, sera consacré à une application de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ à la décomposition de la droite en ensembles superposables, non mesurables et la théorie de Banach-Tarski.

Chapitre 1

Les espaces mesurables

1.1 Tribus

- Dans toute la suite, E est un ensemble non vide.
- $\mathscr{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.
  - $A \subset E$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.
  - $x \in E, \{x\} \subset E, \{x\} \in \mathscr{P}(E)$.
- $\mathscr{A}$ un ensemble de parties de E : $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$.

Définition 1.1.1. (Tribu)

Soit $\mathscr{A}$ une classe de parties de E. On dit que $\mathscr{A}$ est **une tribu** sur E si :

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$;
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathscr{A}$ alors $A^c = E \backslash A \in \mathscr{A}$;
3. $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathscr{A}$ alors $\bigcup_{n \in \mathrm{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E, on dit que $(E, \mathscr{A})$ est **un espace mesurable** et les ensembles de $\mathscr{A}$ sont appelés **ensembles mesurables**.

Propriétés :

1. Une tribu est stable par union finie, par intersection finie, par différence, par différence symétrique, par intersection dénombrable, etc.

$$\bigcap_{n\geq 0} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n^c\right)^c.$$

2. Si $\mathscr{A}$ est une tribu, alors $E \in \mathscr{A}$.

Remarque 1.1.1.

Attention, une tribu est stable par union dénombrable : c'est plus fort que la stabilité par union finie mais cela ne signifie pas que $\mathscr{A}$ est stable par union quelconque.

— L'ensemble $\mathscr{A} = \{A \subset E : A$ est au plus dénombrable ou A^c est au plus dénombrable$\}$ est une tribu sur E mais n'est pas stable par union quelconque si E n'est pas dénombrable.

— Attention, $\mathscr{A} = \{A \subset E : A$ est fini ou A^c est fini $\}$ est stable par union finie mais pas par union dénombrable. Ce n'est pas une tribu.

Définition 1.1.2. (Tribu engendrée)

Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ une classe de parties de E. On appelle **tribu engendrée** par $\mathscr{C}$, notée $\sigma(\mathscr{C})$, la plus petite tribu sur E (au sens de l'inclusion) contenant $\mathscr{C}$.

Propriétés :

1. La définition fait sens car une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

2. $\sigma(\mathscr{C})$ est l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathscr{C}$, l'intersection étant non vide puisque $\mathscr{P}(E)$ est une tribu qui contient $\mathscr{C}$.

3. Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E qui contient $\mathscr{C}$ alors $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.

4. $\sigma(\{A\}) = \{\varnothing, E, A, A^c\}$.

5. Si $\mathscr{A}$ est une tribu, $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

Proposition 1.1.1. (Image réciproque d'une tribu)

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\mathscr{B}$ une tribu sur F. Alors,

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\right\}$$

est une tribu sur E.

— Rappelons que si $A \subset E$ et $B \subset F$,

$$f(A) = \{f(x) : x \in \mathscr{A}\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \overset{\text{not.}}{=} \{f \in B\}$$

— $x \in f^{-1}(B)$ est équivalent à $f(x) \in B$.

— Cette proposition résulte du fait que :

$$f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^c, \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}\left(B_n\right).$$

Proposition 1.1.2. (Image réciproque d'une tribu)

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\mathscr{D}$ une classe de parties de F. Alors,

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{D})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)$$

— **L'image réciproque** de la tribu engendrée par $\mathscr{D}$ est la tribu engendrée par l'image réciproque de $\mathscr{D}$.

Démonstration.

$f^{-1}(\sigma(\mathscr{D}))$ est une tribu qui contient $f^{-1}(\mathscr{D})$; par conséquent, elle contient $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)$:

$\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{D}))$.

On considère :

$$f_*\left(\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)\right)=\left\{B \subset F : f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)\right\}.$$

C'est une tribu qui contient $\mathscr{D}$: elle contient $\sigma(\mathscr{D})$,

i.e.

$$\forall B \in \sigma(\mathscr{D}), \quad f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right).$$

D'où $f^{-1}(\sigma(\mathscr{D})) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)$. $\square$

1.2 Ensembles mesurables.[3]

Un ensemble E est dit **mesurable**, lorsqu'il existe un ensemble ouvert G tel que

$$E \subset G \text{ et } |G-E|<\varepsilon \tag{1.1}$$

Cette condition est analogue, mais elle est essentiellement plus restrictive : il existe en effet des ensembles non mesurables (bien que les ensembles dont on a, au moins jusqu'à présent, affaire en Analyse soient tous mesurables).

La mesure extérieure d'un ensemble mesurable E s'appelle tout court sa mesure et s'écrit $m(E)$ au lieu de $m_e(E)$; nous continuerons cependant d'employer le symbole $|E|$ pour désigner la mesure extérieure aussi bien des ensembles E mesurables que des non mesurables.

La définition des ensembles mesurables montre aussitôt que tous les ensembles. ouverts sont mesurables. De même, on conclut immédiatement que tout ensemble de mesure nulle est mesurable.

Nous allons montrer qu'il en est encore de même des ensembles fermés et que les opérations d'addition et de multiplication des suites (finies ou infinies) d'ensembles ne conduisent pas au delà des ensembles mesurables.

Théoréme 1.2.1.

La somme d'une suite (finie ou dénombrable) d'ensembles mesurables est un ensemble mesurable.

Démonstration.

Soit $\{E_n\}$ une suite d'ensembles mesurables et $E = \sum_n E_n$.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe pour tout n un ensemble ouvert G_n tel que $E_n \subset G_n$ et $|G_n - E_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

En posant $G = \sum_n G_n$, on obtient en conséquence $E \subset G$ et :

$$|G - E| \leqslant \sum_n |G_n - E_n| \leqslant \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que l'ensemble E est mesurable. □

Lemme 1.2.1.

Étant donnés deux ensembles quelconques fermés, bornés et disjoints F_1 et F_2, on a :

$$|F_1 + F_2| = |F_1| + |F_2| . \tag{1.2}$$

Démonstration.

Soit, pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné, **S** une famille finie de rectangles couvrant $F_1 + F_2$ et telle que

$$\sigma(\mathbf{S}) < |F_1 + F_2| + \varepsilon \tag{1.3}$$

Nous pouvons évidemment admettre que tous les rectangles de **S** soient de diamètre inférieur à $p(F_1, F_2)$, donc qu'aucun d'eux n'ait des points communs avec F_1 et F_2 à la fois.

En désignant par $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ les sous-familles de $\mathbf{S}$ dont les rectangles admettent respectivement des points communs avec F_1 et F_2, l'ensemble F_1 se trouvera entièrement couvert par $\mathbf{S}_1$, de même que F_2 par $\mathbf{S}_2$ et on aura $\sigma(\mathbf{S}) \geqslant \sigma(\mathbf{S}_1) + \sigma(\mathbf{S}_2)$.

On a donc $|F_1 + F_2| > \sigma(\mathbf{S}) - \varepsilon \geqslant \sigma(\mathbf{S}_1) + \sigma(\mathbf{S}_2) - \varepsilon \geqslant |F_1| + |F_2| - \varepsilon$, d'où, ε étant arbitraire, $|F_1 + F_2| \geqslant |F_1| + |F_2|$,ce qui donne l'égalité (1.2) □

Théoréme 1.2.2.

Tous les ensembles fermés sont mesurables.

Démonstration.

Tout ensemble fermé non borné situé dans un espace euclidien quelconque se laissant représenter comme somme d'une suite d'ensembles fermés bornés, la démonstration se réduit en raison du théorème 1.2.1 au cas où l'ensemble F donné est borné.

Soit, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, G un ensemble ouvert tel que

$$F \subset G \text{ et } |G| < |F| + \varepsilon \tag{1.4}$$

L'ensemble $H = G - F$ est donc ouvert et il se laisse par conséquent représenter comme somme d'une suite de rectangles $\{K_n\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres.

On peut le faire p. ex. comme suit : $\{\mathbf{P}_n\}$ désignant une suite régulière des réseaux, soient $\{K_n^1\}$ la suite (finie ou dénombrable) des carrés du réseau $\mathbf{P}_i$ qui sont contenus dans H et $\{K_n^i\}$ pour $i = 2, 3, \ldots$ celle des carrés de $\mathbf{P}_i$ qui sont contenus dans H, sans l'être dans aucun carré de $\{K_n^{i-1}\}$.

La somme des carrés de toutes les suites $\{K_n^i\}$ ainsi définies coïncide, comme on le voit aisément, avec l'ensemble H et aucun de ces carrés n'empiète sur un autre.

Pour tout n l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} K_i \cdot F$ est donc vide, d'où, en vertu du lemme précédent et de

(1.4), on a $|\sum_{i=1}^{n} K_i| + |F| = |\sum_{i=1}^{n} K_i + F| < < |G| < |F| + \varepsilon$ et par conséquent $\sum_{i=1}^{n} |K_i| < \varepsilon$, de sorte que $\sum_{i=1}^{c\infty} |K_i| \, \varepsilon_0$ On a donc finalement $|G - F| = |H| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |K_i| \leq \varepsilon$, ce qui prouve en raison de (1.4) que l'ensemble F est mesurable. □

Théoréme 1.2.3.

Le complémentaire d'un ensemble mesurable est un ensemble mesurable.

Démonstration.

Étant donné un ensemble mesurable A, il existe pour tout n naturel un ensemble ouvert G_n tel que $A \subset G_n$ et $|G_n - A| < n^{-1}$. En posant donc $F_n = CG_n$, on obtient une suite $\{F_n\}$ d'ensembles fermés tels que

$$F_n \subset CA \text{ et } |CA - F_n| = |G_n - A| < \frac{1}{n} \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

Par conséquent $|CA - \sum_n F_n| = 0$, de sorte qu'on peut poser

$$CA = H + \sum_n F_n$$

où H est un ensemble de mesure nulle, donc sûrement mesurable. Il en résulte aussitôt en vertu des théorème 1.2.1 et 1.2.2 que l'ensemble C A est mesurable. □

Théoréme 1.2.4.

Pour qu'un ensemble A soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé F tel que

$$F \subset A \text{ et } |A - F| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Démonstration.

En raison du théorème 1.2.3, pour qu'un ensemble A soit mesurable, il faut et il suffit que

CA le soit, c. à d. que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble ouvert G tel qu'on ait les relations $CA \subset G$ et $|G - CA| < \varepsilon$; or, elles sont équivalentes aux relations (1.5) pour l'ensemble. fermé $F = CG$. On remarquera que la propriété (1.5), qui caractérise selon le théorème 1.2.4 les ensembles mesurables, est symétrique à la propriété (1.5), L'une concerne l'approximation des ensembles mesurables du dehors par des ensembles ouverts qui les contiennent et l'autre du dedans par des ensembles fermés qu'ils contiennent. □

Théoréme 1.2.5.

Le produit d'une suite d'ensembles mesurables, de même que la différence de deux ensembles mesurables, est un ensemble mesurable.

Démonstration.

Soit $A = \prod_n A_n$ où les ensembles A_n sont mesurables. On a alors $A = C\sum_n CA_n$ et en appliquant les théorème 1.2.1 et 1.2.3 , on constate tour à tour que $CA_n, \sum_n CA_n$ et enfin A sont des ensembles mesurables.

D'autre part, A et B étant mesurables, l'ensemble $A-B$ l'est également en vertu de l'identité $A - B = A \cdot CB$, lorsqu'on y applique le théorème 1.2.3 et Ia première partie du théorème 1.2.5, qui vient d'être établie. □

Théoréme 1.2.6.

La mesure de la somme d'une suite d'ensembles mesurables disjoints est égale à la somme de leurs mesures.

Démonstration. Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles mesurables disjoints. Il s'agit de montrer que

$$\left|\sum_n A_n\right| = \sum_n |A_n| \tag{1.6}$$

Admettons pour l'instant que (α) chacun des ensembles A_n est borné.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe en vertu du théorème 1.2.4 pour tout n naturel un ensemble fermé F_n tel que $F_n \subset A_n$ et $|A_n - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pour tout m, on a par conséquent :

$|\sum_n A_n| \geqslant |\sum_{n=1}^m F_n| = \sum_{n=1}^m |F_n| \geqslant \sum_{n=1}^m |A_n| - \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon}{2^n}$, ce qui donne à la limite pour $m \to \infty$ l'inégalité $|\sum_n A_n| \geqslant \sum_{n=1}^\infty |A_n| - \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité (1.6)

Ceci établi, nous pouvons supprimer facilement la restriction (α), en représentant chaque A_n où $n = 1, 2, \ldots$ comme somme d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables disjoints et bornés $\{A_n^i\}$. On obtient une telle décomposition, en posant p. ex. $A_n^i = A_n \cdot (K_l - K_{l-1})$, où K_i désigne pour tout i naturel le cercle do rayon i et de centre à l'origine des coordonnées.

On a donc $A_n = \sum_i A_n^i$ pour $n = 1, 2, \ldots$, d'où $\sum_n A_n = \sum_n \sum_i A_n^l$ ce qui donne par l'application du résultat obtenu dans l'hypothèse (a) aux ensembles bornés A_n^i

$$\left|\sum_n A_n\right| = \sum_n \sum_i |A_n^i| = \sum_n \left|\sum_i A_n^i\right| = \sum_n |A_n|$$

c. à d. l'égalité (1.6), q. f. d. □

Théoréme 1.2.7. La mesure de la limite d'une suite monotone d'ensembles mesurables de mesure finie est égale à la limite de la suite de leurs mesures.

Démonstration.

Soit $\{A_n\}$ une suite monotone d'ensembles mesurables et $A = \lim A_n$.

Si la suite $\{A_n\}$ est ascendante, on aura $A = \sum_n A_n = = A_1 + \sum_n (A_{n+1} - A_n)$, d'où, selon le th. 1.2.6, $|A| = |A_1| + \sum_n |A_{n+1} - A_n| = = |A_1| + \sum_n^n (|A_{n+1}| - |A_n|) = \lim_n |A_n|$. Si cette suite est, par contre, descendante, on aura $A_1 = A + \sum_n (A_n - A_{n+1})$, d'où, encore selon le th.1.2.6 , $|A_1| = |A| + \sum_n |A_n - A_{n+1}| = |A| + \sum_n (|A_n| - |A_{n+1}|) = = |A| + |A_1| - \lim_n |A_n|$, donc $|A| = \lim_n |A_n|$, c. q. f. d.

Le th.1.2.7 se laisse étendre (pour les suites ascendantes seulement) aux ensembles arbitraires, c. à d. pas nécessairement mesurables. □

Théoréme 1.2.8.

La mesure extérieure de la somme d'une suite monotone ascendante d'ensembles est égale à la limite de la suite de leurs mesures extérieures.

Démonstration.

$\{A_n\}$ étant une suite ascendante d'ensembles, soit $A = \lim_n A_n = \sum_n A_n$. Il s'agit de prouver que $|A| = \lim |A_n|$, mais en raison de la relation $A^n D A_n$, donc de l'inégalité $|A|^n \geqslant |A_n|$, il suffit de montrer que $|A| \leqslant \lim_n |A_n|$.

Soit à ce but $\{G_n\}$ une suite d'ensembles ouverts tels que

$$A_n \subset G_n \quad et \quad |A_n| \geqslant |G_n| - \frac{1}{n} \tag{1.7}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ Posons $H_n = \prod_{m=n}^{\infty} G_m$. Les ensembles H_n forment une suite ascendante d'ensembles qui sont des G_∂, donc (voir th. 1.2.5) mesurables. Il s'en suit en vertu du th.1.2.7 que

$$\left|\sum_n H_n\right| = \lim_n |H_n|$$

et comme d'après (1.7) on a pour tout n naturel $A_n \subset H_n \subset G_n$, $A \subset \sum_n H_n$ et $|H_n| \geqslant |A_n| \geqslant |H_n| - \frac{1}{n}$, l'égalité qui précède implique par définition de A que $|A| \leqslant |\sum_n H_n| = \lim_n |H_n| = \lim_n |A_n|$, c. q. f. d. □

Théoréme 1.2.9.

Chacune des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit mesurable :

a) il existe un ensemble G_o contenant E et n'en différant que tout au plus par un ensemble de mesure nulle ;

b) il existe un F_c contenu dans E et n'en différant que tout au plus par un ensemble de mesure nulle ;

c) condition de C. Carathéodor : quel que soit l'ensemble A, on a $|A| = |A \cdot E| + |A - E|$.

Démonstration.

Les ensembles F_σ et G_0 étant mesurables (cf. le th. 1.2.1), la condition a) est une conséquence directe de la définition des ensembles mesurables et la condition b) en est une des th. 1.2.5,et 1.2.1 .

Pour établir la nécessité de la condition c), soient : E un ensemble mesurable, A un ensemble quelconque et H un ensemble G_0 contenant A et tel que $|H| = |A|$. En vertu du th.1.2.6, , on a alors $|A| = |H| = |HE| + |H - E| \geqslant \geqslant |A \cdot E| + |A - E|$ et d'autre part, l'inégalité inverse $|A| \leqslant |A \cdot E| + |A - E|$, d'où l'égalité à démontrer.

Enfin, pour montrer que la condition c) est suffisante, admettons que l'ensemble donné E la remplisse et désignons par S_n le cercle de rayon n et de centre situé à l'origine des axes de coordonnées.

il existe pour tout n naturel un ensemble H_n étant un G_δ et satisfaisant aux conditions

$$S_n \cdot E \subset H_n \quad \text{ et } |S_n \cdot E| = |H_n| \tag{1.8}$$

La condition c) entraîne d'autre part, en y posant $A = H_n$, que $|H_n| = |H_n \cdot E| + |H_n - E| \geqslant |S_n \cdot E| + |H_n - E|$. Comme $|H_n| < \infty$, on en tire d'après (1.8) l'égalité $|H_n - E| = 0$.

Posons $H = \sum_n H_n$. On a donc $|H - E| \leqslant \sum_n |H_n - E| = 0$, et ECH. Ainsi H est un ensemble mesurable comme somme d'une suite d'ensembles G_0, il contient E et en diffère par un ensemble mesurable (de mesure nulle). Il en résulte en vertu du th. 1.2.5, que l'ensemble E est mesurable, c. q. f. d

□

Théoréme 1.2.10.

Pour tout ensemble E il existe un ensemble H étant un G_0, contenant E et tel que l'on ait pour tout ensemble mesurable A :

$$|E \cdot A| = |H \cdot A|. \tag{1.9}$$

Démonstration.

Il suffit évidemment d'établir l'existence d'un H mesurable qui remplisse l'égalité (1.9) pour tout ensemble mesurable A. En effet, en vertu du th. 1.2.9, a), un tel ensemble H pourra être à son tour remplacé par un G_δ qui le contient et n'en diffère que par un ensemble de mesure nulle.

L'ensemble E donné peut être de mesure infinie ; nous allons donc le représenter d'abord comme somme d'une suite ascendante $\{E_n\}$ d'ensembles bornés. Ensuite, nous ferons correspondre à tout E_n un ensemble K_n, étant un G_∂, contenant E_n et tel que

$$|E_n| = |K_n|. \tag{1.10}$$

Posons enfin

$$H_n = \prod_{m=n}^{\infty} K_m \;\; et \;\; H = \sum_n H_n. \tag{1.11}$$

Comme produits des suites d'ensembles mesurables, les ensembles H_n sont mesurables. Il en est donc de même de leur somme H.

Reste à montrer que H remplit la condition (1.9) pour tout A mesurable. On a, en effet, d'après (1.11) pour tout n naturel

$$E_n \subset H_n \subset K_n \tag{1.12}$$

ce qui implique d'une part selon (1.10) que

$$|E_n| = |H_n| \tag{1.13}$$

et d'autre part que $|E_n - A| \leqslant |H_n - A|$. Or, les nombres $|E_n|$ et $|H_n|$ étant finis est selon (1.13) égaux, on déduit de la dernière inégalité en vertu du th. 1.2.9) que

$$|E_n \cdot A| = |E_n| - |E_n - A| \geqslant |H_n| - |H_n - A| = |H_n \cdot A|$$

donc, par définition de E, on a conformément au th.1.2.7

$$|E \cdot A| \geqslant \lim_n |E_n \cdot A| \geqslant \lim_n |H_n \cdot A| = |H \cdot A|$$

ce qui entraîne l'égalité (1.9), puisque $E \subset H$. $\square$

1.3 Fonctions mesurables

1.3.1 Définitions, critères de mesurabilité

— Rappel : $f : E \longrightarrow F$ est continue si, pour tout ouvert $V \subset F, f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

— La définition d'une fonction mesurable est analogue.

Définition 1.3.1. (Fonction mesurable)

Soient $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables et f une application de E dans F. On dit que f est **mesurable** par rapport à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ si $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$ c'est à dire :

$$\forall B \in \mathscr{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

Propriétés :

1. L'image réciproque de tout ensemble mesurable est un ensemble mesurable.
2. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas les tribus de départ et d'arrivée.

Lemme 1.3.1.

Soient $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose que $\mathscr{B} = \sigma(D)$. Alors f est mesurable si et seulement si :

$$\forall B \in \mathscr{D}, \quad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Démonstration.

1. La condition est nécessaire.
2. Si la tribu $\mathscr{A}$ contient $f^{-1}(\mathscr{D})$, alors

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{D})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right) \subset \mathscr{A}.$$

□

Corollaire 1.3.1. Soient E et F deux espaces topologiques, $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Alors f est mesurable par rapport aux tribus boréliennes $\mathscr{B}(E)$ et $\mathscr{B}(F)$.

— On dit plus simplement que f est borélienne.

Démonstration.

L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E. Il suffit d'appliquer le lemme (1.3.1) avec $\mathscr{B}(F) = \sigma(\mathscr{O}_F)$. □

Corollaire 1.3.2.

Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une application. f est borélienne si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. pour tout réel $t, \{x \in E : f(x) \leq t\} \in \mathscr{A}$;
2. pour tout réel $t, \{x \in E : f(x) < t\} \in \mathscr{A}$.

Démonstration.

Cela résulte du lemme (1.3.1) et du fait que $\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}) = \sigma(\{[-\infty, t], t \in \mathbf{R}\})$. □

1.3.2 Propriétés de stabilité

Proposition 1.3.1. (Stabilité par composition)

Soient f mesurable de $(E, \mathscr{A})$ dans $(F, \mathscr{B})$ et g mesurable de $(F, \mathscr{B})$ dans $(G, \mathscr{C})$. Alors $g \circ f$ est mesurable de $(E, \mathscr{A})$ dans $(F, \mathscr{C})$.

Démonstration.

$C \in \mathscr{C}, (g \circ f)^{-1} = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) ; g^{-1}(C) \in \mathscr{B}$ car g est mesurable et, comme f est mesurable $f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathscr{A}$. □

Proposition 1.3.2.

Soient $(F_1, \mathscr{B}_1)$ et $(F_2, \mathscr{B}_2)$ deux espaces mesurables et p_1 et p_2 les projections de $F_1 \times F_2$ sur F_1 et F_2 respectivement. On munit $F_1 \times F_2$ de la tribu produit $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$.

1. Les projections p_1 et p_2 sont mesurables ;
2. Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et f une application de E dans $F_1 \times F_2$. Alors f est mesurable si et seulement si les composées $p_1 \circ f : E \to F_1$ et $p_2 \circ f : E \to F_2$ sont mesurables.

— Généralisation immédiate au cas d'un produit de n termes

Démonstration.

Pour tout $B_1 \in \mathscr{B}_1, p_1^{-1}(B_1) = B_1 \times F_2 \in \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$.

— Si f est mesurable alors $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont mesurables.

— Réciproquement, si $B = B_1 \times B_2$ avec $B_1 \in \mathscr{B}_1$ et $B_2 \in \mathscr{B}_2$

$$f^{-1}(B_1 \times B_2) = f^{-1}(B_1 \times F_2 \cap F_1 \times B_2) = (p_1 \circ f)^{-1}(B_1) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(B_2) \in \mathscr{A}$$

f est donc mesurable puisque $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$ est engendré par les pavés mesurables. □

Corollaire 1.3.3.

Une fonction à valeurs complexes est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

— Si f et g sont des fonctions mesurables de $(E, \mathscr{A})$ dans $\mathbf{C}$, alors $f+g, fg, |f|$, etc. sont mesurables.

— Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\overline{\mathbf{R}}$

$$\limsup x_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} x_k, \quad \liminf x_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} x_k$$

— $(x_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\limsup x_n = \liminf x_n$.

— Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbf{R}}$. On note $\limsup f_n$ la fonction $\limsup f_n(x), x \in E$.

Proposition 1.3.3.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathscr{A})$ dans $(\overline{\mathbf{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$. Alors $\sup_{n\geq 0} f_n$, $\inf_{n\geq 0} f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ sont boréliennes.

Démonstration.

Pour $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\left\{x \in E : \sup_{n\geq 0} f_n(x) \leq t\right\} = \bigcap_{n\geq 0} \{x \in E : f_n(x) \leq t\}$$

$$\left\{x \in E : \inf_{n\geq 0} f_n(x) \geq t\right\} = \bigcap_{n\geq 0} \{x \in E : f_n(x) \geq t\}$$

□

Corollaire 1.3.4.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(E,\mathscr{A})$ dans $(\mathbf{C},\mathscr{B}(\mathbf{C}))$. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f. Alors f est mesurable.

Proposition 1.3.4.

Soient f et g deux fonctions mesurables de $(E,\mathscr{A})$ dans $\overline{\mathbf{R}}$. Alors les ensembles $\{x\in E : f(x)<g(x)\}$ et $\{x\in E : f(x)\leq g(x)\}$ sont dans $\mathscr{A}$.

— Attention on ne peut pas écrire $f-g$ dans $\overline{\mathbf{R}}$.

— On écrit :

$$\begin{aligned}\{x\in E : f(x)<g(x)\} &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{x\in E : f(x)<q<g(x)\}\\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{x\in E : f(x)<q\}\cap\{x\in E : q<g(x)\}).\end{aligned}$$

Example 1.

1. Toute application $f:(X,\mathcal{P}(X))\longrightarrow(Y,\mathcal{P}(Y))$ est mesurable.
2. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux tribus sur X alors l'identité sur X

$$id:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(X,\mathcal{M}'),\, id(x)=x$$

   est mesurable si et seulement si $\mathcal{M}'\subset\mathcal{M}$.
3. $Si(X,\mathcal{M})$ et $(Y,\mathcal{N})$ sont deux espaces mesurables et $f:X\longrightarrow Y$ une application constante (c-à-d. il existe $y_0\in Y$ tel que pour tout $x\in X$ on a $f(x)=y_0$) alors f est mesurable.
4. Une fonction étagée f est toujours mesurable.
5. Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable et $A\in\mathcal{M}$. La fonction indicatrice χ_A de l'ensemble A est une application de X dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable

si et seulement si $A \in \mathcal{M}$. Pour cette raison, les éléments de $\mathcal{M}$ sont dits ensembles mesurables.

Démonstration.

On démontre seulement (4) et (5). Pour (4), en effet f est une fonction de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors il existe $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition de X et $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc

$$f^{-1}(B) = \left(\bigcup_{i; a_i \in B} A_i \right) \in \mathcal{M}$$

Ce qui prouve que f est mesurable. Maitenant montrons (5), d'aprés (4) si $A \in \mathcal{M}$ la fonction étagée χ_A est mesurable. Inversement, si χ_A est mesurable, alors

$$A = (\chi_A)^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{M}$$

car $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme un fermé dans $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque 1.3.1. Une application peut être mesurable par rapport à une tribu et ne pas être pour d'autres tribus.

Example 2. soit la tribu

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable } \}$$

l'application identique

$$\mathrm{id} \ : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est évidement mesurable. Cependant

$$\mathrm{id} \ : (\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

n'est pas mesurable d'après (2) dans l'exemple précédent car $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \nsubseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais $[a,b] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1.4 Mesures positives

Dans toute la suite, $(E, \mathscr{A})$ est un espace mesurable.

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1.

Une mesure positive sur $(E, \mathscr{A})$ est une application μ de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$vérifiant :

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathscr{A}$ avec $A_n \cap A_m = \varnothing$ si $n \neq m$ alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(A_n\right).$$

— Si $\mu(E) < +\infty, \mu$ est dite finie ou bornée.

— Si $\mu(E) = 1, \mu$ est une (mesure de) probabilité .

— S' il existe $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ telle que $\cup A_n = E$ et $\mu\left(A_n\right) < +\infty, \mu$ est σ-finie.

— Si μ est une mesure positive sur $(E, \mathscr{A})$, le triplet $(E, \mathscr{A}, \mu)$ s'appelle un espace mesuré.

Proposition 1.4.1. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = \mu\left(A_1\right) + \ldots + \mu\left(A_n\right)$$

2. Soient A et B deux parties de $\mathscr{A}$. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. De plus, si $\mu(A) < +\infty$,

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

3. Si A et B sont dans $\mathscr{A}$, $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

— Attention, si $A \subset B$ sont deux éléments de $\mathscr{A}$, on peut toujours écrire $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$ mais $\mu(B) - \mu(A)$ n'a de sens que si $\mu(A) < +\infty$.

Démonstration.

— C'est la définition avec $A_0 = \varnothing$ et $A_i = \varnothing$ pour $i > n$.

— On a $B = A \cup (B \backslash A)$ avec A et $(B \backslash A)$ disjoints. D'où,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A) \text{ puisque } \mu(B \backslash A) \geq 0$$

Si $\mu(A) < +\infty, \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

— Si $\mu(A \cap B) = +\infty$, alors la formule est vraie : les quatre termes valent $+\infty$. Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, on considère la partition suivante de $A \cup B$

$$A \cup B = A \backslash (A \cap B) \bigcup B \backslash (A \cap B) \bigcup (A \cap B)$$

et d'après le point précédent

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \backslash (A \cap B)) + \mu(B \backslash (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Définition 1.4.2.

Un ensemble $N \subset E$ est **négligeable** pour μ si il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

— Attention, un ensemble peut être négligeable et ne pas être vide. Par exemple, $[2, +\infty[$ est négligeable pour δ_0.

— Attention, un ensemble peut être négligeable et ne pas appartenir à $\mathscr{A}$.

1.4.2 Propriétés des mesures positives

Proposition 1.4.2. Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(B_n)_{\mathbf{N}} \subset \mathscr{A}$. Alors,

1.
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu\left(B_n\right)$$

2. Si $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout n,
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \sup_{n\geq 0} \mu\left(B_n\right)$$

3. Si $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout n et s'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mu\left(B_{n_0}\right) < +\infty$,
$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \inf_{n\geq 0} \mu\left(B_n\right).$$

4. Attention, la propriété 3 est fausse sans l'hypothèse $\mu\left(B_{n_0}\right) < +\infty$. Par exemple, si γ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ et si B_n est l'ensemble des entiers supérieurs à $n, \mu\left(B_n\right) = +\infty$ et $\cap B_n = \varnothing$.

5. Le point 2 permet de donner une définition équivalente de mesure positive.

Démonstration.

— La proposition résulte de la construction suivante. On pose : $A_0 = B_0$ et pour $n \geq 1$,

$A_n = B_n \backslash \cup_{k<n} B_k$. Alors, les ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ sont deux à deux disjoints avec

$$A_n \subset B_n, \quad \bigcup_{0\leq i\leq n} A_i = \bigcup_{0\leq i\leq n} B_i, \quad \bigcup_{n\geq 0} A_n = \bigcup_{n\geq 0} B_n, \quad n \geq 0$$

— Pour le point 1

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu\left(B_n\right)$$

— Pour le point 2 ,

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{k\geq 0} \mu\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{0\leq k\leq n} A_k\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{0\leq k\leq n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right)$$

— Pour le point 3 , on considère, pour $n \geq n_0, A_n = B_{n_0} \backslash B_n$ et on applique le point 2 .

— En fait, la 2^e propriété est caractéristique des mesures :

$\square$

Proposition 1.4.3.

Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et μ une application de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. Alors μ est une mesure positive si et seulement si :

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. Pour A et B dans $\mathscr{A}$ disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. Pour $(B_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ croissante, $\mu\left(\cup_{n\geq 0} B_n\right) = \lim_{n\geq 0} \mu\left(B_n\right)$.

Démonstration.

Nous avons déjà vu que la condition était nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de $\mathscr{A}$ deux à deux disjointes. On obtient, posant $B_n = \cup_{0\leq k\leq n} A_k$, via les points 3 puis 2,

$$\mu\left(\bigcup A_k\right) = \mu\left(\bigcup B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(A_n\right)$$

$\square$

Corollaire 1.4.1. (Lemme de Borel-Cantelli).

Soit $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ telle que $\sum_{n\geq n_0} \mu(A_n) < +\infty$. Alors $\mu(\limsup A_n) = 0$

i.e. $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 0} \cup_{k\geq n} A_k$ est un ensemble négligeable.

Démonstration.

On a, pour tout n,

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k)$$

C'est le reste d'une série convergente.

— Dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, on fait la convention $0 \times +\infty = 0$.

— On rappelle que si $(a_{k,n})_{k\geq 0, n\geq 0} \subset \overline{\mathbf{R}}_+$,

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} a_{k,n} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{k,n}$$

□

Proposition 1.4.4.

Soient $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures positives sur $(E, \mathscr{A})$ et $(\alpha_k)_{k\geq 0} \subset \overline{\mathbf{R}}_+$. Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k(A)$$

Alors μ est une mesure positives sur $(E, \mathscr{A})$.

Proposition 1.4.5.

Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable, $(F, \mathscr{B})$ un espace mesuré et $f : E \to F$ une application mesurable. Pour tout $B \in \mathscr{B}$, on pose

$$f_*(\mu)(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

Alors $f_*(\mu)$ est une mesure positive sur $(F, \mathscr{B})$ appelée mesure image de μ par f.

— $f_*(\mu)$ est notée suivant les auteurs $f_\#(\mu), \mu_f$ ou encore $\mu \circ f^{-1}$.

— En fait, on peut définir $f_*(\mu)$ sur la tribu

$$f_*(\mathscr{A}) = \left\{B \subset F : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\right\}$$

Démonstration.

Si $(B_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{B}$ sont 2 à 2 disjoints, il en va de même de $(f^{-1}(B_n))_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$. Par suite,

$$f_*(\mu)\left(\bigcup B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup f^{-1}(B_n)\right) = \sum \mu\left(f^{-1}(B_n)\right) = \sum f_*(\mu)(B_n).$$

□

1.4.3 Exemples de mesure positives

Mesure de Lebesgue

— La mesure de Lebesgue généralise la notion de longueur en dimension un, de volume en dimension supérieure

— La construction est assez délicate ; nous l'admettrons.

Théoréme 1.4.1. (Mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$).

Il existe une unique mesure positive, λ, sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ telle que, pour tous réels a et b avec $a < b : \lambda(]a, b]) = b - a$

Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Propriétés 1.4.1.

— On voit facilement que, pour tout réel $x, \lambda(\{x\}) = 0$. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$\{x\} \subset]x - 1/n, x], \quad \text{et} \quad \lambda(\{x\}) \leq \lambda(]x - 1/n, x]) = 1/n$$

— Par conséquent, pour tous réels a et b avec $a < b$,

$$\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$$

— On peut remarquer que pour tous réels a, b, x avec $a \leq b$

$$\lambda(x + [a, b]) = \lambda([a, b])$$

— Cette propriété se généralise à tous les boréliens B : $\lambda(x + B) = \lambda(B)$.

— C'est en fait une propriété caractéristique de la mesure de Lebesgue.

Théoréme 1.4.2.

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ vérifiant $\mu([0, 1]) = 1$ et invariante par translation : pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}), \mu(x + B) = \mu(B)$.

Alors μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Démonstration.

— On montre d'abord que $\mu(\{0\}) = 0$. En effet, pour tout $n \geq 1$, par invariance par translation,

$$1 = \mu([0, 1]) \geq \mu(\{k/n, 1 \leq k \leq n\}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{k/n\}) = n\mu(\{0\})$$

— On montre ensuite que $\mu([0,1/n]) = 1/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On écrit

$$]0,1] = \bigcup_{1 \leq k \leq n}](k-1)/n, k/n], \quad \mu([0,1]) = \sum_{k=1}^{n} \mu(1(k-1)/n, k/n])$$

et par invariance par translation

$$1 = \mu([0,1]) = n\mu([0,1/n])$$

— Pour tous rationnels $q < r, \mu(]q,r]) = \mu([0,r-q]) = r-q$. En effet, $q-r = m/n$ avec m et n deux entiers strictement positifs et, comme $]0,m/n] = \bigcup_{1 \leq k \leq m}](k-1)/n, k/n]$,

$$\mu([0,m/n]) = \sum_{k=1}^{m} \mu([(k-1)/n, k/n]) = m\mu(]0,1/n]) = m/n = q-r.$$

— Pour tous réels $a < b, \mu(]a,b]) = \mu([0,b-a]) = b-a$. En effet, comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, on peut choisir deux suite de rationnels $(q_n)_{n \geq 0}$ et $(r_n)_{n \geq 0}$ qui convergent vers $b-a$ telles que $q_n \leq b-a \leq r_n$. Par exemple, $q_n = 2^{-n}\left[2^n(b-a)\right]$ et $r_n = 2^{-n}\left(\left[2^n(b-a)\right]+1\right)$. On a alors $]0,q_n] \subset]0,b-a] \subset]0,r_n]$ et, pour tout n,

$$q_n = \mu\left(10,q_n]\right) \leq \mu([0,b-a]) \leq \mu\left(00,r_n]\right) = r_n$$

Il suffit de passer à la limite quand $n \to \infty$.

— L'unicité de la mesure de Lebesgue vient d'un résultat général

□

Théoréme 1.4.3. (Unicité de deux mesures).

Soit μ et v deux mesures sur $(E, \mathscr{A})$. On suppose qu'il existe $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, stable par intersection finie, telle que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$ et

$$\forall C \in \mathscr{C}, \quad \mu(C) = v(C)$$

Alors $\mu = v$ sur$(E, \mathscr{A})$ c'est d dire.

$$\forall A \in A, \quad \mu(A) = v(A)$$

Propriétés 1.4.2. Dans les deux cas suivants :

1. $\mu(E) = v(E) < +\infty$;
2. il existe $(C_n)_{n\,0} \subset \mathscr{C}$ telle que $\cup C_n = E$ et $\mu(C_n) = v(C_n) < +\infty$ pour tout n :

— Notons qu'on peut toujours supposer que $\varnothing \in \mathscr{C}$.

— Les classes $\mathscr{C}$ les plus utilisées sont :

$\{[-\infty, t] : t \in \mathbf{R}\}, \{]a, b] : -\infty < a < b < +\infty\},$

$\{[a, b[: -\infty < a < b < +\infty\}, \{[a, b] : -\infty < a \leq b < +\infty\},$

les compacts de R. ceux de R^d, sur $\mathrm{R}^d\{ka, b[\times]c, d[: a < b, c < d\}$, etc.

— Deux mesures finies sur les compacts de $\mathbf{R}$ qui coïncident sur les intervalles bornés sont égales sur $\mathscr{B}(\mathbf{R})$:

— Leur mesures de probabilité sont égales si et seulement si

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_\mu(t) := \mu(] - \infty, t]) = v(l - \infty, t]) =: F_v(t)$$

— La construction de la mestre de Lebesgue s'étend en dimension quelconque

Théoréme 1.4.4.

Il existe un unique mesure positive, λ_d, sur $\left(\mathrm{R}^d, \mathscr{B}\left(\mathrm{R}^d\right)\right)$, telle que :

$$\lambda_d\left([a_1, b_1] \times \ldots \times] \, a_d, b_d]\right) = (b_1 - a_1) \ldots (b_d - a_d), \quad \forall a_i < b_i, i = 1, \ldots, d$$

Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{\mathrm{d}}$

Propriétés 1.4.3.

— On montre facilement que

$$\lambda_d\left([a_1,b_1]\times\ldots\times[a_d,b_d]\right)=\lambda_d\left(]a_1,b_1[\times\ldots\times]a_d,b_d[\right)=(b_1-a_1)\ldots(b_d-a_d)$$

— λ_d est l'unique mesure positive invariante par translation telle que $\lambda_d\left([0,1]^d\right)=1$.

— Plus généralement, λ_{d} est invariante par isométrie : si f est isométrie de R^d et B un ensemble borélien, $\lambda_{\mathrm{d}}(f(B))=\lambda_{\mathrm{d}}(B)$.

Chapitre 2

Ensembles non mesurables

Dans ces notes, nous examinerons la structure algébrique de R par rapport au rationnel nombres Q, qui a très peu à voir avec la structure géométrique et topologique habituelle En utilisant cette structure, nous serons en mesure de prouver certains très contre-intuitif les résultats concernant R, y compris l'existence de sous-ensembles non mesurables.

2.1 Cosets de Q [10, 9, 4]

Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Un Cosets de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est un ensemble quelconque de la forme $x + \mathbb{Q} = \{x + q \backslash q \in \mathbb{Q}\}$ où $x \in \mathbb{R}$. Il est facile de voir que les Cosets de $\mathbb{Q}$ forment une partition de $\mathbb{R}$. En particulier :

1. Si $x; y \in \mathbb{R}$ et $y - x \in \mathbb{Q}$, puis $x + \mathbb{Q} = y + \mathbb{Q}$.

2. Si $x; y \in \mathbb{R}$ et $y - x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + \mathbb{Q}$ et $y + \mathbb{Q}$ sont disjoints.

Notez également que chaque Cosets $x + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que tout intervalle ouvert $(a; b)$ dans $\mathbb{R}$ contient un point de $x + \mathbb{Q}$.

La collection de tous les Cosets de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est généralement notée $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Notez qu'il y a existe une surjection $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ Défini par :

$$p(x) = x + \mathbb{Q} \quad \text{pour tous} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction p est connue sous le nom de surjection canonique.

Les Cosets de $\mathbb{Q}$ sont intéressants car la partition correspondante de $\mathbb{R}$ est presque Entièrement séparé de la géométrie et de la topologie de la droite réelle. En utilisant ces Cosets, nous pouvons créer beaucoup d'autres structures sur $\mathbb{R}$ qui violent notre intuition géométrique. En tant que Exemple simple de cette technique, nous donnons une preuve rapide de la proposition suivante.

Proposition 2.1.1.

Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que l'image de chaque intervalle ouvert $(a; b)$ est tout de $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Notez d'abord que $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Q})| = |\mathbb{R}/\mathbb{Q}|$

La première bijection devrait être évidente, tandis que la seconde est un exemple de la fait que $|C \times S| = |S|$ pour tout ensemble dénombrable C et tout ensemble infinité. S. Il existe donc une bijection $g : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ soit le canonique surjection, et soit $f = g \circ p$. Alors pour chaque $y \in \mathbb{R}$, La pré image $f^{-1}(y)$ est un Cosets de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, donc tout intervalle ouvert $(a; b)$ contient un point dans $f^{-1}(y)$ Notez que le graphique

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \backslash x \in \mathbb{R}\}$$

de la fonction f construite dans le dernier exemple est dense dans $\mathbb{R}^2$, au sens où chaque disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$ contient un point du graphique. Géométriquement, cela signifie que Le graphique n'est qu'un brouillard » qui lls le plan. L'intersection de ce brouillard avec chaque

La ligne verticale est un point unique (puisque c'est le graphe d'une fonction), et l'intersection de ce brouillard avec chaque ligne horizontale est dense sur le lin. □

2.2 Un ensemble non mesurable [13, 11, 14]

Nous pouvons utiliser les Cosets de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ décrits dans la dernière section pour construire un Cosets de $\mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable par Lebesgue. L'exemple que nous donnons ici a été décrit pour la première fois par Giuseppe Vitali en 1905.

Définition 2.2.1. (Vitali ensemble)

Un sous-ensemble $V \subseteq [0; 1]$ est appelé **un ensemble de Vitali** si V contient un seul point de chaque Cosets de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Il est facile de construire un ensemble de Vitali en utilisant l'axiome du choix, simplement en choisissant un élément de $(x+\mathbb{Q})\cap[0; 1]$ pour chaque sous-ensemble $x+\mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Bien sûr, cette « construction » est décile pour décrire algorithmiquement, puisque nous rendons un nombre incalculable d'arbitraires Choix. En effet, l'axiome du choix est requis pour la construction d'un ensemble de Vitali, comme nous le verrons ci dessous.

Nous passons maintenant à la preuve que les ensembles Vitali ne sont pas mesurables. Compte tenu de tout $S \subseteq \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ soit : $t + S = \{t + s \mid s \in S\}$. Autrement dit, $t + S$ est la translation de S obtenue en déplaçant chaque point t unités vers le droit sur la ligne réelle. Il est facile de prouver que :

$$m^*(t + S) = m^*(S)$$

pour tous les $S \subseteq \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $t+$ E est mesurable pour chaque mesurable ensemble E $\subseteq \mathbb{R}$.

Notre but est de démontrer le théorème suivant.

Théoréme 2.2.1.

Si $V \subseteq [0;1]$ est un ensemble de Vitali, alors V n'est pas mesurable par Lebesgue.

Nous commençons par quelques lemmes.

Lemme 2.2.1.

Soit $V \subseteq [0;1]$ un ensemble de Vitali. Puis les décors $\{q + V \mid q \in \mathbb{Q}\}$ sont disjoints par paires, et

$$\mathbb{R} = \biguplus_{q \in \mathbb{Q}} (q + V)$$

Démonstration.

Supposons d'abord que $x \in (q + V) \cap (\dot{q} + V)$ pour certains $q, q \in \mathbb{Q}$. Alors $x = q + v$ et $x = \dot{q} + \dot{v}$ pour certains $v, \dot{v} \in V$. Alors $v = x + (-q)$ et $\dot{v} = x + (\dot{q})$

Ainsi v et les deux se trouvent dans $x + \mathbb{Q}$. Mais V n'a qu'un point de chaque Cosets de $\mathbb{Q}$, Nous concluons donc cela $v = \dot{v}$, et donc $q = \dot{q}$. Cela prouve que les ensembles $\{q + V \mid q \in \mathbb{Q}\}$ sont par paires disjoint.

Ensuite, observez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un point $v \in V$ Et alors $v \in x + \mathbb{Q}$.

Alors $v = x + q$ pour certains $q \in \mathbb{Q}$, ainsi $x = (-q) + v$, et donc $x \in (-q) + V$.

II suit cela :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + V)$$

□

Lemme 2.2.2. Soit $V \subseteq [0,1]$ un ensemble de Vitali, Soit $C = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, et Soit

$$U = \biguplus_{q \in C} (q + V)$$

Alors :

$$[0,1] \subseteq U \subseteq [-1,2]$$

Démonstration.

Premier, depuis $V \subseteq [0,1]$, Nous savons que $q+V \subseteq [-1,2]$ pour tous $q \in [-1,1]$ et donc $U \subseteq [-1,2]$. Pour prouver que $[0,1] \subseteq U$,soit $x \in [0,1]$. Depuis V est un ensemble de Vitali, il existe $v \in V$ et alors $v \in x+\mathbb{Q}$. alors $v = x+q$ pour certains $q \in \mathbb{Q}$. Mais v et x les deux se trouvent dans $[0,1]$, Il s'ensuit donc que $q = v-x$ se trouve dans l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi $q \in C$ et $x \in q+V$, ce qui prouve que $x \in U$. □

Démonstration. (du Théorème 2.2.1)

Soit V être un ensemble Vitali, et supposons au contraire que V est mesurable. Soit $C = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, et soit

$$U = \biguplus_{q \in C} | \, (q+V)$$

Alors U est un union dénombrable d'ensembles mesurables, et est donc mesurable.

Par le Lemme 2.2.1, nous sachez

$$[0,1] \subseteq U \subseteq [-1,2].$$

Et donc $1 \leq m(U) \leq 3$. Mais

$$m(U) = m\left(\biguplus_{q \in C} (q+V)\right) = \sum_{q \in C} m(q+V) = \sum_{q \in C} m(V).$$

Si $m(V) = 0$, Il s'ensuit alors que $m(U) = 0$, et si $m(V) > 0$, il s'ensuit alors que $m(U) = \infty$, qui contredisent tous deux l'affirmation selon laquelle $1 \leq m(U) \leq 3$

Il résulte de ce théorème que mesure extérieure de Lebesgue m^* n'est même pas fini additif.

En particulier, rappelez-vous des devoirs que tout ensemble $E \subseteq [0,1]$ satisfaisante

$$m^*(E) + m^*([0,1] - E) = 1$$

est mesurable par Lebesgue. Il s'ensuit que

$$m^*(V) + m^*([0,1] - V) \neq 1$$

pour tout ensemble Vitali V.

Comme nous l'avons vu précédemment, un ensemble V de mesure extérieure nille est mesurable si et seulement si $m_*(V) = m^*(V)$, où m_* est la mesure intérieure de Lebesgue. Depuis un ensemble Vitali V n'est pas mesurable, Ces deux quantités doivent en effet être différentes. Ce qui suit La proposition clarifie la situation. $\square$

Propriétés 2.2.1.

Si V est un ensemble de Vitali, alors $m_*(V) = 0$ et $m^*(V) > 0$.

Démonstration.

Soit $\vee$ un ensemble de Vitali, Soit $C = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, et soit

$$U = \biguplus_{q \in C} (q + V)$$

Par Lemme 2.2.1 , nous savons que

$$[0,1] \subseteq U \subseteq [-1,2]$$

Ainsi

$$1 \leq m_*(U) \leq m^*(U) \leq 3$$

Mais

$$m^*(U) \leq \sum_{q \in C} m^*(q+V) = \sum_{q \in C} m^*(V)$$

et il s'ensuit que $m^*(V) > 0$. En cette qui concerne la mesure intérieure, rappelons que m est dénombrablement superadditif, c'est-à-dire

$$m_* \left(\biguplus S_n \right) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} m_* \left(S_n \right)$$

pour n'importe quelle séquence $\{S$ s. $\}$ de sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que

$$m_*(U) \geq \sum_{q \in C} m_*(q+V) = \sum_{q \in C} m_*(V)$$

et donc $m_*(V) = 0$. Bien sûr, cette proposition ne nous dit pas ce que mesure extérieure. $m^*(V) d'un$ ensemble Vitali V lest réellement. Il s'avère que cela dépend de l'ensemble Vitali : bien que Nous ne le prouverons pas ici, on sait que pour tout $\mathbf{F} \in [0,1]$ il existe un ensemble de Vitali $[\subseteq [0,1]$ de telle sorte que $m^*(V) = r$. Comme mentionné précédemment, notre construction d'un ensemble non mesurable dépend de critères Cally sur l'axiome du choix. En effet, Robert Solovay a prouvé en 1970 qu'il est impossible de construire un ensemble non mesurable sans l'axiome du choix. C'est-à-dire Solovay prouvé que l'énoncé chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est mesurable par Lebesgue est cohérent avec les axiomes ZF (Zermelo-Fraenkel) de la théorie des ensembles, c'est-àdiretous les axiomes de ZFC moinslaxiome du choix. Ainsi, laxiome du choix est requis pour la construction de tout $\mathbb{R}$ Ensemble non mesurable. $\square$

$\mathbb{R}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$

La partition de $\mathbb{R}$ en sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ que nous avons exploitée est essentiellement un manifestation du fait que les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont un sous-groupe additif de la nombres réels $\mathbb{R}$. Dans cette section, nous montrons comment augmenter la puissance de cette technique en voyant $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

2.3 fonction non mesurable

Soit $\boldsymbol{R}$ l'espace des nombres réels.

Définition 2.3.1.

On dit qu'une fonction $f : R \to R$ mesurable (L) (au sens de Lebesgue) est **non dégénérée** [non dégénérée positivement] au point $x_0 \in R$ lorsque la densité supérieure [la densité inférieure] de l'ensemble $f^{-1}(U)$ au point x_0 est positive, quel que soit l'ensemble ouvert U contenant $f(x_0)$.

Définition 2.3.2.

On dit qu'une fonction $f : R \to R$ a **la proprieté de Denjoy** lorsque, quels que soient les ensembles ouverts U et V tels que $f^{-1}(U) \cap V \neq \varnothing$, la mesure de Lebesgue $m\left[f^{-1}(U) \cap V\right]$ de l'ensemble $f^{-1}(U) \cap V$ est positive.

Pour une fonction quelconque $F : R \times R \to R$ posons $F_x(t) = F(x,t)$ et $F^v(t) = F(t,y)$ (les coupes de F). Soit $A(f)[B(f)]$ l'ensemble des points (x,y) tels que F_x n'est pas non dégénérée positivement [n'est pas non dégénérée] au point y ou bien F^ν n'est pas non dégénérée au point x. Désignons par m_2 la mesure plane de Lebesgue.

Théoréme 2.3.1.

Soit $F : R \times R \to R$ une fonction telle que toutes ses coupes F_x et F^w sont mesurables (L). Pour que la fonction F soit mesurable (L) il faut et il suffit que $m_2(A(f)) = 0$.

soit le problème suivant (Problème 1) : Soit $F : R \times R \to R$ une fonction telle que toutes ses coupes F_x et F^n sont mesurables (L). Est-ce que la condition $m_2(B(f)) = 0$ est suffisante pour que F soit mesurable (L)^q

En démontre (en admettant l'hypothèse du continu) que la réponse à cette question est négative et en outre en montre (encore moyennant l'hypothèse du continu) qu'il existe une fonction $F : R \times R \to R$ non mesurable (L) et telle que toutes ses coupes F_x sont mesurables (L) et ont la propriété de Denjoy et que toutes ses coupes F^ν sont approximativement continues.

Lemme 2.3.1.

Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites disjointes de nombres réls. Il existe une fonction $f : R \to R$ mesurable (L), non dégénérée on tout point $x \in R$ et telle que $f(x_n) = 0, f(y_n) = 1(n = 1, 2, \ldots)$ et $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ pour tout $x \in R$.

Démonstration.

Soient A_1 et B_1 deux ensembles fermés, non denses et tels que la densité supérieure $D_g(x_1, A_1)$ de l'ensemble A_1 au point x_1 est positive,

$$D_o(y_1, B_1) > 0, \quad A_1 \cap B_1 = \varnothing, \quad A_1 \cap \{y_n\} = \varnothing \quad \text{et} \quad B_1 \cap \{x_n\} = \varnothing$$

Supposons que tous les ensembles fermés, non denses A_i et B^i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ soient déjà définis de manière que

$$D_o(x_i, A_i) > 0, \quad D_o(y_i, B_i) > 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$A_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{pour } i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$A_i \cap \{y_n\} = \varnothing \quad \text{et} \quad B_i \cap \{x_n\} = \varnothing \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k$$

Soient U et V deux intervalles ouverts contenant respectivement x_{k+1} et y_{k+1} et tels que.

$$U \cap V = \varnothing, \quad U \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \varnothing \quad \text{et} \quad V \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \varnothing$$

Les ensembles $U - \{y_n\}$ et $V - \{x_n\}$ étant du type G_d et $m(\{y_n\} \cup \{x_n\}) = 0$, il existe deux ensembles fermés, non denses $A_{k+1} \subset U - \{y_n\}$ et $B_{k+1} \subset V - \{x_n\}$ tels que

$$D_g(x_{k+1}, A_{k+1}) > 0 \quad \text{et} \quad D_g(y_{k+1}, B_{k+1}) > 0.$$

Posons, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$C_n = \{x \in A_n : D_g(x, A_n) > 0\} \quad \text{et} \quad D_n = \{x \in B_n : D_g(x, B_n) > 0\}.$$

Remarquons que $x_n \in C_n, y_n \in D_n$ et $D_0(x, C_n) > 0$ et $D_g(y, D_n) > 0$, quels que soient les points $x \in C_n$ et $y \in D_n$. Soient

$$E = R - \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cup D_n), \quad F = \{x \in E : D_o(x, E) > 0\}$$

et

$$G = \left\{ x \in E - F : D_o\left(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) > 0 \right\}$$

Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in F \cup G \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \\ 1 & \text{pour } x \in (E - F - G) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \end{cases}$$

et remarquons que la fonction f satisfait aux conditions du lemme. □

Corollaire 2.3.1.

Il existe une fonction $f : R \to R$ mesurable (L), partout discontinue et non dégénérée en chaque point.

Remarque 2.3.1.

Cependant toute fonction $f : R \to R$ mesurable (L) et non dégénérée positivement en tout point $x \in R$ est ponctuellement discontinue ([1], Théorème 2; elle a même la propriété (G) introduite dans le travail [1]).

Théoréme 2.3.2.

Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F : R \times R \to R$ non mesurable (L) et telle que toutes ses coupes F_x et F^w sont mesurables (L) et non dégénérées en tout point

$x \in R$.

Démonstration.

Rangeons tous les nombres réels en une suite transfinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_a, \ldots$$

($\alpha < \Omega$, où Ω désigne le premier nombre ordinal indénombrable) telle que $a_a \neq a_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$. Soit $A \subset R \times R$ l'ensemble non mesurable (L) tel que la mesure intérieure de son complémentaire est égale à zéro et qui a au plus deux points communs avec toute droite [2]. Soient

$$f_1 : R \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\} \quad \text{et} \quad g_1 : R \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\}$$

deux fonctions mesurables (L), non dégénérées en tout point $x \in R$ et telles que

$$g_1\left(\{a_1\} \cup A_{a_1}\right) = f_1\left(\{a_1\} \cup A^{a_1}\right) = \{0\}$$

($A_{a_1} = \{t \in R : (a_1, t) \in A\}$ et $A^{a_1} = \{t \in R : (t, a_1) \in A\}$). Fixons un nombre $a < \Omega$ et supposons que, quel que soit le nombre ordinal $\beta < \alpha$, on ait déjà défini deux fonctions mesurables (L) et non dégénérées

$$f_\beta : R \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\} \quad \text{et} \quad g_\beta : R \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\}$$

de manière que

$$f_\beta\left(a_\beta \cup A^{a_\beta}\right) = g_\beta\left(a_\beta \cup A_{a_\beta}\right) = \{0\}, \quad f_\beta\left(a_\gamma\right) = g_\gamma\left(a_\beta\right)$$

pour $\gamma < \beta$ et $g_\beta\left(a_\gamma\right) = f_\gamma\left(a_\beta\right) (\gamma < \beta)$. L'ensemble $\{\beta : \beta < \alpha\}$ étant dénombrable, il existe, d'après le lemme, deux fonctions

$$f_a : R \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\} \quad \text{et} \quad g_a : R \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\}$$

mesurables (L), non dégénérées en tout point $x \in R$ et telles que, pour $\beta < \alpha$, $f_a\left(a_a \cup A^{a_\alpha}\right) = g_a\left(a_a \cup A_{a_\alpha}\right) = \{0\}$, $\quad f_a\left(a_\beta\right) = g_\beta\left(a_\alpha\right) \quad$ et $\quad g_a\left(a_\beta\right) = f_\beta\left(a_\alpha\right)$. Posons

$$F(x,y) = f_a(x) \quad \text{lorsque } y = a_\alpha$$

Remarquons que $F_x(y) = g_a(y)$ lorsque $x = a_\alpha$. Les coupes F_x et F^ν sont donc mesurables (L) et non dégénérées en tout point $x \in \boldsymbol{R}$. La fonction $\boldsymbol{F}$ est non mesurable (L), comme l'ensemble $B = \boldsymbol{F}^{-1}(1)$ est contenu dans $(R \times R) - \boldsymbol{A}$ et toutes les coupes

$$B_x = \{t \in R : (x,t) \in B\} \quad \text{et} \quad B^{\boldsymbol{y}} = \{t \in R : (t,y) \in \boldsymbol{B}\}$$

sont de mesure lebesguienne positive. □

Théoréme 2.3.3.

Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ non mesurable (L) et telle que toutes les coupes $\boldsymbol{F}_x$ sont de deuxième classe de Baire et ont la propriété de Denjoy et toutes les coupes F^n sont approximativement continues.

Démonstration.

Soit $A \subset R$ un ensemble fermé, non dense et de mesure lebesguienne positive. Rangeons tous les points de l'ensemble $\boldsymbol{A}$ en une suite transfinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots \quad (a < \Omega)$$

telle que $a_a \neq a_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$ et tous les points de l'espace $\boldsymbol{R}$ en une suite transfinie

$$b_1, b_2, \ldots, b_a, \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

telle que $b_a \neq b_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$. Fixons un nombre $\alpha < \Omega$ et désignons par A_a l'ensemble $\{b_\gamma : \gamma < \alpha\}$. L'ensemble A_a étant dénombrable, il existe un ensemble B_a du type G_0 et de mesure lebesguienne zéro qui contient.

$\square$

Chapitre 3

Application

3.1 Application

3.1.1 Introduction :

Nous allons présenter un exemple d'ensemble non mesurable de la droite réelle, découvert par **Giuseppe Vitali en 1905**. Cet exemple s'appuie fortement sur l'axiome du choix.

On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

On rappelle que la classe d'équivalence d'un réel x est définie par :

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x - y \in \mathbb{Q}\}$$

On note $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ (ou par abus $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$) l'ensemble quotient définit par :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{\bar{x}, x \in \mathbb{R}\}$$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la partie fractionnaire de x : $y = x - E(x) \in \bar{x}$ avec $0 \leqslant y < 1$ car : $x - y = E(x) \in \mathbb{Q}$ et par définition de la partie entière $E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x - E(x) < 1$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \bar{x} \cap [0, 1] \neq \emptyset$$

3.1.2 Axiome du choix :

Énonçons maintenant l'axiome du choix :

Étant donné un ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction f définie sur X, qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.0

Autrement dit on « choisit » dans chaque ensemble un élément. Appliquons ceci à $X = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, et pour chacune d'entre elles on choisit un représentant unique dans $[0, 1]$. On note V l'ensemble de ces représentants, qu'on appelle ensemble de Vitali.

Supposons maintenant V mesurable. Puisque V est borné sa mesure de Lebesgue est finie.

Considérons la réunion dénombrable suivante :

$$A = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leqslant r \leqslant 1}} (V + r)$$

De plus les ensembles $V + r_i = \{v + r_i, v \in V\}$ sont disjoints, car pour $i \neq j$ s'il existait $v, w \in V$ tels que $v + r_i = w + r_j$ alors $v - w \in \mathbb{Q}$ i.e $\bar{v} = \bar{w}$ contradictoire car v et w sont des représentants de classes distinctes. On a donc (sachant que $\mu(V + r) = \mu(V)$) :

$$\mu(A) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leqslant r \leqslant 1}} \mu(V)$$

Si $\mu(V) = 0$ alors $\mu(A) = 0$ sinon si $\mu(V) > 0$ alors $\mu(A) = +\infty$. Distinguons les cas :

$$\mu(V) = 0$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ on a vu grâce à l'axiome du choix qu'il existe $y \in V$ tel que $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Comme $y \in [0, 1]$ on a $-1 \leqslant x - y \leqslant 1$. Par ailleurs x appartient à $V + (x - y)$(car $y + (x - y) = x$ avec $y \in V$) qui est lui-même élément de A. On a donc montré que :

$$[0, 1] \subset A \Longrightarrow 1 = \mu([0, 1]) \leqslant \mu(A) = 0$$

D'où la contradiction.

$$\mu(V) > 0$$

Comme $V \subset [0,1]$ alors les $V + r \subset [-1,2]$ car $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

Donc leur réunion A est aussi incluse dans $[-1,2]$, or A est de mesure infinie, absurde.

Dans tous les cas on obtient une contradiction, donc on en déduit que :

V est non mesurable

3.2 Une application de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ à la décomposition de la droite en ensembles superposables, non mesurables.[1, 2, 6, 12]

Nous prouverons dans cette Note une propriété fort simple de la fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{3.1}$$

propriété qui nous permettra de décomposer la droite en $\mathfrak{m}$ ensembles superposables, partout denses, disjoints, non mesurables (L), m étant un nombre cardinal quelconque, satisfaisant aux inégalités : $x_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{N_0})$. Soit $f(x)$ une fonction définie pour tous les x réels et satisfaisant à l'équation (3.1). Posons, pour a réels.

$$E_n = \mathrm{E}\left[f(x) = a\right]$$

On dit que si les ensembles E_a et E_b ne sont pas vides, ils sont superposables.

Supposons, en effet, $E_a \neq \phi$ et $E_b \neq \phi$: il existe donc un x_1 tel que $x_1 \in E_a$, donc $f\left(x_1\right) = a$, et un x_2 tel que $x_2 \in E_b$, donc $f\left(x_2\right) = b$.

Posons $d = x_2 \quad x_1$ et soit x un élément quelconque de l'ensemble E_a : nous aurons :

$f(x)=a$, donc, d'après (3.1) :

$$f(x+d)=f\left(x+r_2-x_1\right)=f(x)+f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=a+b-a=b$$

ce qui prouve que $x+d$ est un élément de l'ensemble E_b. Or. soit $y \in E_b$: nous aurons $f(y)=b$, donc, d'après (3.1) :

$f(y-d)=f\left(y-x_2+x_1\right)=f(y)-f\left(x_2\right)+f\left(x_1\right)=b-b+a=a$, ce qui prouve que $y-d$ appartient à E_a. Les ensembles E_a et E_b sont donc superposables par une translation de longueur d.

Remarquons que lorsque l'ensemble E_a contient plus qu'un point. il est dense dans tout intervalle. En effet, il résulte sans peine de (1) que $f(r.x)=rf(x)$ pour tout x réel et tout r rationnel.

Supposons maintenant que E_a contient plus qu'un point : il existe donc un x_1 et un $x_2 \neq x_1$. tels que $f\left(x_1\right)=a$ et $f\left(x_2\right)=a$: nous avons donc, pour r rationnel :

$$f\left(x_1+r\left(x_2-x_1\right)\right)=f\left(x_1\right)+rf\left(x_2-x_1\right)=a+r(a-a)=a;$$

l'ensemble de tous les nombres $x_1+r\left(x_2-x_1\right)$, où r est un nombre rationnel, étant partout dense (pour $x_2 \neq x_1$), il en résulte que l'ensemble E_a est partout dense, c. q. f d.

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal satisfaisant aux inégalités :

$$N_0 \leqslant m \leqslant 2^{N_0}$$

Désignons par B une base de M. Hamel, non mesurable (L). Toute base Hamelienne ayant la puissance 2^{N_0}, il existe une décomposition $B=-M_1+N_1$, telle que M_1 et N_1 sont des ensembles disjoints tous deux de puissance 2^{N_0}. L'ensemble B étant non mesurable, ou au moins des ensembles M_1, N_1, soit N_1, est non mesurable. En extrayant de M_1 un ensemble borné M

de puissance $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ et en posant $N = N_1 + (M_1 - M)$, nous obtenons une décomposition

$$B = M + N,$$

telle que M est un ensemble borné de puissance $\mathfrak{m}$, $MN = 0$ et $m_{\mathrm{q}}(N) > 0$.

Posons

$$f(x) = x \text{ pour } x \in M.$$

$$f(x) = 0 \text{ pour } x \in N.$$

la fonction $f(x)$ sera ainsi définie pour tous les nombres x de la buse B. Pour les autres r réels définissons la fonction $f(x)$ comme le fait M. Hamel pour obtenir une solution de l'équation fonctionnelle (3.1), c'est à-dire posons

$$f(x) = r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) + \ldots + r_n f(x_n)$$

pour

$$x = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n.$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont des nombres rationnels et, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres de la buse B.

La fonction $f(x)$ sera ainsi définie pour tous les x réels, et on voit sans peine que l'ensemble V de toutes les valeurs différentes de la fonction $f(x)$ a la puissance m. La fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation (3.1), les ensembles $E_a = \mathbf{E}[f(x) = a]$ qui correspondent aux nombres a de V sont, comme nous savons, tous superposables. Or il est bien évident que l'ensemble $\dot{X}$ de tous les nombres réels est une somme disjointe de tous les ensembles E_a ; la sommation s'étendant à tous les nombres a de l'ensemble V.

D'après (3.1), nous avons $f(0) = 0$, donc $0 \in V$; les ensembles E_a (où $a \in V$) étant superposables, il suffira, pour démontrer qu'ils sont tous non mesurables (L), de prouver que l'ensemble E_0 est non mesurable (L)

Exemple : $E_0 = E[f(x) = 0] = Ker(f)$

D'après la définition de la fonction $f(x)$ nous avons $f(x) = 0$ pour $x \in N$ et $m_s(N) > 0$: il existe donc un nombre $t \neq 0$, tel que $f(t) = 0$, et nous pouvons supposer $t > 0$, puisque. d'après (3.1) : $f(-t) = -f(t)$

Désignons par G la portion de E_0 contenu dans l'intervalle $0 \leqslant x < t$, et par $G(d)$ l'ensemble qu'on obtient par une translation de l'ensemble G de longueur d. Nous prouverons que l'ensemble G est non mesurable (L).

Remarquons d'abord que si $d \in E_0, G(d)$ est la portion de l'ensemble E_0 contenue dans l'intervalle $d \leqslant x < d + t$. En effet, si $d \leqslant x < d + t, d \in E_0, x \in G(d)$, on a $(x - d) \in G \subset E_0$, donc $f(d) = 0$, $f(x - d) = 0$, et, d'après (3.1) : $f(x) = f(d) + f(x - d) = 0$, ce qui donne $x \in E_0$. Or, soit $d \leqslant x < d + t, d \in E_0, x \in E_0$; nous aurons $0 \leqslant x - d < t$ et, d'après (3.1) : $f(x - d) = f(x) - f(d) = 0$, donc $(x - d) \in G$ or par suite $x \in G(d)$.

Il en résulte, d'après $t \in E_0$ et $f(kt) = kf(t) = 0$ pour k entiers, $E_0 = \Sigma G(kt)$, la sommation s'étendant à tous les nombres entiers k. Les ensembles $G(kt)(k = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$ étant superposables, nous en concluons, d'après $E_0 \supset N$ et m$(N) > 0$, que l'ensemble $G = G(0)$ ne peut être de mesure nulle.

Il résulte de la définition de la fonction $f(x)$ que $f(d_1) \neq f(d_2)$ pour $d_1 \in M, d_2 \in M, d_1 \neq d_2$. Il s'ensuit que $G(d_1) . G(d_2) = 0$ pour $d_1 \in M, d_2 \in M, d_1 \neq d_2$ En effet, soit x un nombre, tel que $x \in G(d_1)$ et $x \in G(d_2)$. On aurait donc $(x - d_1) \in G$ et $(x - d_2) \in G$, donc $f(x - d_1) = 0$ et $f(x - d_2) = 0$, donc, d'après (3.1) : $f(d_1) = f(d_2)$. ce qui est impossible. Les ensembles $G(d)$ sont donc sans points communs. deux a deux lorsque d parcourt les nombres de M. Or, G et M étant bornés : les ensembles $G(d)$, pour $d \in M$, sont bornés dans leur ensemble. L'ensemble M étant infini, il en résulte que les ensembles $G(d)$ (tous superposables) ne peuvent être de mesure positive.

Nous avons donc démontré que l'ensemble G est non mesurable (L). Donc aussi E_0 est un ensemble non mesurable (L), et la décomposition de la droite en ensembles E_a (où a appartient à V) jouit de toutes les propriétés désirées.

3.3 Autour du paradoxe de Banach-Tarski

3.3.1 Introduction :

Le but de ce travail est de comprendre le paradoxe de Banach-Tarski, après avoir introduit les notions nécessaires à sa formulation. Par la suite, nous aborderons l'existence de "mesures universelles".

3.3.2 Définitions

Dans cette section G désigne un groupe agissant sur un ensemble E.

Définition 3.3.1. (Ensembles équidécomposables)

Soient A et B deux parties de E. On dit que A et B sont **finiment G-équidécomposables** s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que :

— il existe deux partitions $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ et $B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$;

— il existe $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que $\forall k \in [1, n], g_k(A_k) = B_k$

Si ces deux conditions sont réunies, on écrit :

$$A \equiv_G B,$$

ou plus précisément $A \overset{k}{\equiv}_G B$.

Pour ne pas alourdir le vocabulaire, on omettra dans la suite le terme "finiment".

Remarque 3.3.1.

G est un groupe, il admet donc un élément neutre e. Ainsi, si A est une partie de E, alors A est équidécomposable à elle-même : $A \overset{1}{\equiv}_G A$. En effet, $A = e.A$.

Définition 3.3.2. (Ensemble paradoxal)

On dit que E est **G-paradoxal** (ou **paradoxal sous l'action de** G) s'il existe A et B deux parties disjointes de E telles que $A \equiv_G E$ et $B \equiv_G E$. Autrement dit, E est G-paradoxal s'il contient deux sous-ensembles disjoints G-équidécomposables à E tout entier.

Remarque 3.3.2.

On peut avoir $A \overset{n}{\equiv} G$ et $B \overset{m}{\equiv}_G E$ avec $n \neq m$. On peut également remarquer que les parties A et B sont disjointes, mais ne forment pas nécessairement une partition de E. On peut en fait donner une autre définition d'un ensemble paradoxal, équivalente à la première.

Définition 3.3.3. (Ensemble dédoublable)

On dit que E est **dédoublable** sous l'action de G s'il existe une partition $A \sqcup B$ de E telles que $A \equiv_G E$ et $B \equiv_G E$. Autrement dit, E est **dédoublable sous l'action de** G s'il admet deux sous-ensembles complémentaires G-équidécomposables à E tout entier.

La G-dédoublabilité implique bien sur la G-paradoxalité. La démonstration de la réciproque utilise un puissant théorème, qui n'est pas sans rappeler le théorème de Cantor-Bernstein.

Théoréme 3.3.1. (Banach, 1924)

Soient C et D deux parties de E. On suppose que :

— C est G-équidécomposable à une partie de D ;

— D est G-équidécomposable à une partie de C.

Alors C et D sont G-équidécomposables.

Démonstration. (du théorème 3.3.1)

Il existe une bijection $g : C \to D_1$ telle que $\forall \widetilde{C} \subset C, \widetilde{C} \equiv g(\widetilde{C})$. En effet, $C \equiv D_1$ donc on peut écrire $C = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k, D_1 = \bigsqcup_{k=1}^{n} D_{1,k}$ avec $C_i = g_i D_{1,i}$. Alors g est la bijection de C dans D_1 qui coïncide avec $\widehat{g}_i : C_i \to D_{1,i}$ $(\widehat{g}_i(x) = g_i x)$ pour tout i. On a de même une bijection $h : D \to C_1$ telle que $\forall \widetilde{D} \subset D, \widetilde{D} \equiv h(\widetilde{D})$. On a alors une injection $g : C \to D$. On pose

$A_0 = C \backslash C_1, A_{n+1} = h^{-1}(g(A_n))$ et $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. On montre alors que $h(C \backslash A) = D \backslash g(A)$. Alors comme $C \backslash A \subset C_1$ on a $C \backslash A \equiv h(C \backslash A)$ i.e. $C \backslash A \equiv D \backslash g(A)$, et comme $A \subset C$ on a $A \equiv g(A)$. D'où $A \sqcup (C \backslash A) \equiv g(A) \sqcup (D \backslash g(A))$ i.e. $C \equiv D$. □

Démonstration. (paradoxal ⇒ dédoublable)

Soit E un ensemble G-paradoxal ; on peut donc trouver deux parties A et B de E disjointes toutes deux G équidécomposables à E. On définit $\widetilde{A} := E \backslash B$: les parties $\widetilde{A}$ et B forment une partition de E. On sait déjà que B est équidécomposable à E. De plus :

— comme $\widetilde{A} \subset G$, $\widetilde{A}$ est trivialement équidécomposable à une partie de G($\widetilde{A}$ est G-équidécomposable à elle-même d'après une remarque précédente) ;

— comme $A \subset \widetilde{A}$ et que par hypothèse G est G-équidécomposable à A, G est donc G-équidécomposable à une partie de $\widetilde{A}$.

D'après le théorème précédent, $\tilde{A}$ et G sont donc G-équidécomposables. Finalement, on a montré que E est dédoublable sous l'action de G ! □

Pour finir avec toutes ces définitions, en voici une dernière que nous n'utiliserons qu'à la fin de ce document.

Définition 3.3.4. (Mesure universelle finiment additive)

Une mesure universelle finiment additive sur E est une application $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ telle que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toutes parties $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ parties disjointes de E.

3.4 Le cas du groupe libre à deux éléments

On rappelle que le groupe libre à deux éléments peut être vu comme le groupe $F = \langle a, b \rangle$, ensemble des mots réduits en a et b muni de la loi naturelle "." de mise bout-à-bout suivi de la réduction. Comme F est un groupe, F agit sur lui-même par translation à gauche ; dans toute cette section, ce sera de cette action dont il sera question pour les notions d'équidécomposabilité et de paradoxalité. On peut représenter F à l'aide **d'un graphe de Cayley** :

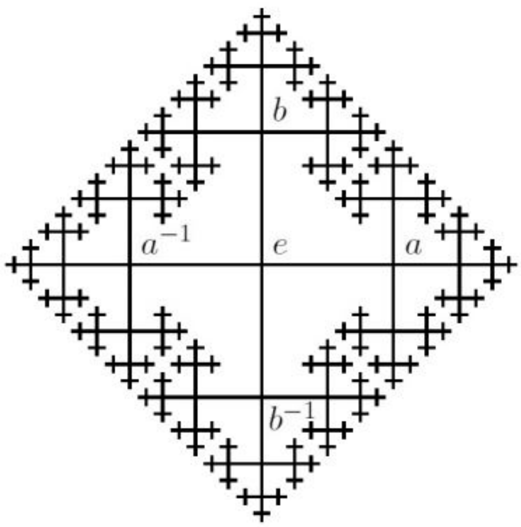

FIG. 3.1 : L'ensemble F est paradoxal.

Théoréme 3.4.1.

L'ensemble F est paradoxal

Nous avons besoin de deux petits résultats avant de montrer ce théorème.

Proposition 3.4.1.

Soit A l'ensemble des mots de F commençant par an avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors $A \overset{2}{\equiv} F$

Démonstration.

On considère la partition de A formée des ensembles A_+et A_-, où A_+(respectivement A_-) est l'ensemble des mots de A commençant par une puissance strictement positive (respectivement

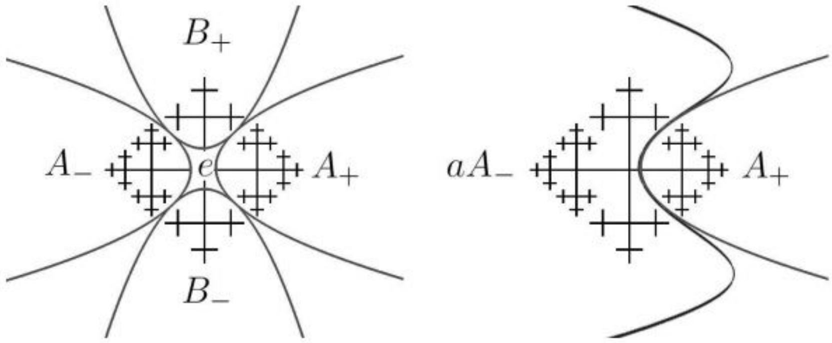

FIG. 3.2 : L'ensemble des mots de A .

strictement négative) de A. On a donc $A = A_+ \sqcup A_-$; on a également $F = A_+ \sqcup (F \backslash A_+)$. Si $m \in F$ est un mot réduit qui ne commence pas par une puissance strictement positive de a, alors $m' = a^{-1}$.m est dans A_-et on a $m = a.m'$. Finalement, $A_+ = e.A_+$et $F \backslash A_+ = a.A_-$d'où le résultat annoncé. On peut illustrer la preuve par le dessin suivant : □

Proposition 3.4.2.

Soit B l'ensemble des mots de F commençant par b^m avec $m \in \mathbb{Z}^*$. Alors $B \overset{2}{=} F$.

Démonstration.

C'est une démonstration analogue à celle du lemme précédent. □

Démonstration. (du theoreme 3.3.1) Avec les notations des deux propositions ci avant, on a $A \sqcup B \subset F$ avec $A \equiv F$ et $B \equiv F$. Donc F est paradoxal !

On peut désormais s'attaquer au vif du sujet. □

3.5 Le cas de la sphère unité $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$

Dans cette section, l'action de groupe dont il est question est l'action naturelle de $SO(3)$ sur $\mathbb{S}$ par isométries.

3.5.1 À un nombre dénombrable de points près

Théoréme 3.5.1. (Paradoxe de Hausdorff)

Il existe un sous-ensemble dénombrable D de $\mathbb{S}$ tel que $\mathbb{S} \backslash D$ est paradoxal.

La démonstration de ce théorème nécessite un lemme préliminaire, qui va permettre d'utiliser le résultat de la section précédente sur le groupe libre à deux éléments.

Lemme 3.5.1.

Le groupe $SO(3)$ contient un sous-groupe isomorphe à F, le groupe libre à deux éléments.

Démonstration.

Il suffit en fait d'exhiber un tel sous-groupe, ce qui revient à trouver deux générateurs u et v. Posons :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce sont en fait les matrices dans des bases bien choisies des rotations respectives d'angle π et $\frac{2\pi}{3}$ dont les axes forment un angle de $\frac{\pi}{4}$. On a donc $a^2 = b^3 = I_3$, et ainsi $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On va démontrer que a et b engendrent un groupe isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: il suffit de démontrer que tout mot réduit en a et b de longueur non nulle est non trivial.

Tout d'abord, on peut démontrer par récurrence que pour tout entier $k > 0$, pour tous $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, il existe des entiers pairs $p_1, \ldots, p_5$ et des entiers impairs $i_1, \ldots, i_4$ tels que :

$$2^k m_k := 2^k b^{\varepsilon_1} a b^{\varepsilon_2} a \dots b^{\varepsilon_k} a = \begin{pmatrix} p_1 & i_1\sqrt{3} & i_2 \\ p_2\sqrt{3} & i_3 & i_4\sqrt{3} \\ p_3 & p_4\sqrt{3} & p_5 \end{pmatrix}.$$

Comme i_1 est impair, on a en particulier $i_1 \neq 0$ donc $m_k \notin \{I_3, a\}$ d'où $m_k \neq I_3$. Dans la suite, on désignera par $(*)$ la forme du mot m_k.

Il reste alors trois types de mots réduits à traiter :

— si m est de la forme $a \dots b^{\varepsilon}$, alors m^{-1} est de la forme $(*)$ et donc $m^{-1} \neq I_3$ puis $m \neq I_3$.

— si m est de la forme $a \dots a$, alors am est de la forme $(*)$ donc $am \neq a$ puis $m \neq I_3$;

— si m est de la forme $b^{\varepsilon_1} \dots b^{\varepsilon_2}$, alors ma est de la forme (*) donc $ma \neq a$ puis $m \neq I_3$.

On pose maintenant $u = bab$ et $v = aua$. On a par récurrence $\forall n \in \mathbb{Z}, u^n = b\left(ab^{-1}\right)^{n-1} ab$ et $v^n = au^n a$: ainsi pour $n \in \mathbb{Z}^*, u^n$ est un mot réduit non trivial de la forme $b \dots b$ et donc v^n est un mot réduit non trivial de la forme $a \dots a$. Il n'y a donc aucune simplification possible entre u et v : u et v engendrent un groupe libre à deux générateurs $L(u, v)$, qui est donc isomorphe à F ! On a en résumé :

$$F \simeq L(bab, ababa) \subset \langle a, b \rangle \subset SO(3)$$

ce qui démontre le lemme. On peut maintenant démontrer le paradoxe de Hausdorff. □

Démonstration du paradoxe de Hausdorff.

Recherche de la partie $\boldsymbol{D}$. D'après le lemme, on sait que $SO(3)$ possède un sous-groupe libre à deux générateurs : on note (abusivement) F un tel sous-groupe. Soit $D \subset \mathbb{S}$ l'ensemble des points laissés fixes par un élément de F différent de l'identité : $D = \bigcup_{r \in F \backslash \mathrm{Id}} \{$ points fixes de $r\}$. Chaque $r \in D$ est une rotation d'axe passant par l'origine, elle donc exactement deux points fixes ; F étant dénombrable [1], on en déduit que D l'est aussi. Reste à montrer que $\mathbb{S} \backslash D$ est paradoxal.

F agit librement sur $\mathbb{S}\backslash D$. Si x est un point de $\mathbb{S}\backslash D$, alors x n'est pas un point fixe d'une rotation $r \in F\backslash$ Id donc $F.x$ reste dans $\mathbb{S}\backslash D$. En effet, s'il existe $f \in F$ tel que $f.x \in D$, alors $\exists r \in F\backslash \text{Id}, r.(f.x) = f.x$. Or, $r \cdot (f \cdot x) = rf.x$ et on a donc $f^{-1}rf.x = x$ ce qui est contradictoire avec $x \notin D$ (car $r \neq \text{Id}$ donc $f^{-1}rf \neq \text{Id}$). Finalement, $\mathbb{S}\backslash D$ est stable par F, et on récupère donc une action de F sur $\mathbb{S}\backslash D$ (c'est l'action induite par $SO(3)$ restreint à F sur $\mathbb{S}\backslash D$).

Soit $x \in \mathbb{S}\backslash D$ et soit $r \in F$ tel que $r.x = x.x$ est alors un point fixe d'un élément de F, donc comme $x \notin D$ on a (par construction de D) $r = \text{Id}$. L'action de F sur $\mathbb{S}\backslash D$ est libre !

$\mathbb{S}\backslash \boldsymbol{D}$ est paradoxal. Soit V une partie de $\mathbb{S}\backslash D$ qui contient exactement un élément de chaque orbite de l'action de F sur $\mathbb{S}\backslash D$. On reprend nos deux parties A et B de F ; on rappelle qu'en particulier ces deux parties sont disjointes. On va montrer que AV et BV sont deux parties disjointes équidécomposables à $FV = \mathbb{S}\backslash D$.

— (Les parties AV et BV sont disjointes.) Supposons que $AV \cap BV \neq \emptyset$: soit $x \in AV \cap BV.x$ s'écrit $x = a.v_1 = b.v_2$ avec $a \in A, b \in B, v_i \in V$. On a donc $b^{-1}a \cdot v_1 = v_2(1)$: v_1 et v_2 sont alors dans la même orbite, donc $v_1 = v_2$ (par définition de V). L'égalité (1) se réécrit alors $b^{-1}a \cdot v_1 = v_1$, et par liberté de l'action on conclut que $b^{-1}a = e$ i.e. $a = b$ ce qui est impossible car A et B sont disjoints !

— (AV et BV sont équidécomposables à FV.) On a démontré dans la section précédente qu'on a une décomposition $A = A_+ \sqcup A_-$avec $F = A_+ \sqcup a \cdot A_-$. Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que $AV = A_+V \sqcup A_-V$ avec $FV = A_+V \sqcup a.(A_-V)$, donc AV est équidécomposable à FV. De même, BV est équidécomposable à FV.

$-(FV = \mathbb{S}\backslash D.)$ Soit $x \in \mathbb{S}\backslash D$; on note $\bar{x} \in V$ le représentant de l'orbite de x. On a par définition $x = f.\bar{x}$ pour un certain $f \in F$,

1. En notant F_n le sous-ensemble de F constitué des mots de longueurs exactement $n \geqslant 1$, il est facile de constater que $|F_n| = 4 \cdot 3^{n-1}$; comme $F = \{e\} \cup \cup_{n \geqslant 1} F_n, F$ est donc dénombrable. donc $x \in FV$. L'autre inclusion a déjà été prouvée : c'est la stabilité de

$\mathbb{S}\backslash D$ par F.

Finalement, on a trouvé deux parties disjointes de $\mathbb{S}\backslash D$ équidécomposables à $\mathbb{S}\backslash D$ tout entier : ce dernier est donc paradoxal.

Remarque 3.5.1.

Étant donné que l'ensemble des orbites est non dénombrable et que l'on ne dispose d'aucun procédé pour choisir un point particulier dans une orbite, on utilise l'axiome du choix pour créer l'ensemble V.

3.5.2 La sphère $\mathbb{S}$ est paradoxale

On peut faire en sorte de se débarrasser de la partie dénombrable D précédente : il suffit en fait de démontrer que $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}\backslash D$. En effet, si $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}\backslash D$ alors comme la relation d'équidécomposabilité est transitive (c'est même une relation d'équivalence) et que $\mathbb{S}\backslash D$ est paradoxal, alors $\mathbb{S}\backslash D \supset A \sqcup B$ avec $A \equiv \mathbb{S}\backslash D$ et $B \equiv \mathbb{S}\backslash D$ donc on aura $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}\backslash D \equiv A$ et $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}\backslash D \equiv B$, i.e. $\mathbb{S} \equiv A$ et $\mathbb{S} \equiv B$ avec $\mathbb{S} \supset A \sqcup B$, i.e. $\mathbb{S}$ est paradoxale.

Théoréme 3.5.2.

La sphère $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ est paradoxale.

Idée de la démonstration. On reprend les notations de la démonstration de paradoxe de Hausdorff. L'ensemble $\mathbb{S}\backslash D$ est non vide, donc on peut y trouver un point x_0. Par construction $D = -D$ donc $-x_0$ est aussi dans $\mathbb{S}\backslash D$. On considère $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des angles de $[0, 2\pi[$ des rotations r d'axe (Ox_0) telles que r^n envoie un élément de D sur un autre élément de D et on pose $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{A}_n$. D étant dénombrable, $\mathcal{A}_n$ l'est aussi et donc $\mathcal{A}$ l'est également : on peut donc trouver α dans $[0, 2\pi[\backslash\mathcal{A}$. En notant r la rotation d'axe (Ox_0) d'angle α, on considère $\widetilde{D} = D \sqcup \bigsqcup_{n\geqslant 1} (r^n.D)$ (l'union est bien disjointe par choix de α). Le deuxième ensemble du membre de droite est égal à r. $\widetilde{D}$, et on a donc $\mathbb{S} = (\mathbb{S}\backslash\widetilde{D}) \sqcup D \sqcup (r.\widetilde{D})$. On a alors $\mathbb{S}\backslash D = (\mathbb{S}\backslash\widetilde{D}) \sqcup (r.\widetilde{D})$: or, on a par définition $\widetilde{D} \overset{1}{\equiv} (r.\widetilde{D})$ et finalement,

$$\mathbb{S}\backslash D = (\mathbb{S}\backslash \widetilde{D}) \sqcup (r.\widetilde{D}) \equiv (\mathbb{S}\backslash \widetilde{D}) \sqcup \widetilde{D} = \mathbb{S}$$

D'où $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}\backslash D$ et donc $\mathbb{S}$ est paradoxale.

3.6 Le cas de la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^3$: le paradoxe de Banach-Tarski

En remplaçant chaque point $M \in \mathbb{S}$ par le rayon $]OM]$, on démontre le résultat suivant directement à partir du théorème précédent.

Théoréme 3.6.1.

La boule épointée $\mathbb{B}\backslash\{0\}$ est paradoxale sous l'action naturelle du groupe $SO(3)$. On a alors envie de dire que $\mathbb{B}$ est également $SO(3)$-paradoxale pour l'action naturelle de $SO(3)$ sur $\mathbb{B}$!

Proposition 3.6.1.

La boule $\mathbb{B}$ n'est pas paradoxale pour l'action naturelle de $SO(3)$.

Démonstration.

On suppose que c'est le cas ; on a donc $\mathbb{B} \supset C \sqcup D$ avec $C \equiv \mathbb{B} \equiv D$. Cela se traduit par :

$$\begin{cases} C = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n \\ \mathbb{B} = B_1^c \sqcup \ldots \sqcup B_n^c \end{cases} \quad \text{avec } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, B_i^c = c_i \cdot C_i, c_i \in SO(3)$$

$$\begin{cases} D = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_m \\ \mathbb{B} = B_1^d \sqcup \ldots \sqcup B_m^d \end{cases} \quad \text{avec } \forall j \in \{1, \ldots, m\}, B_j^d = d_j \cdot D_j, d_j \in SO(3).$$

Quitte à réindexer, on peut supposer que $0 \in B_1^c$ et que $0 \in B_1^d$. On a donc $C_1 = c_1^{-1} \cdot B_1$ et $D_1 = d_1^{-1} \cdot B_1$: comme chaque élément de $SO(3)$ fixe 0 , on en déduit que $0 \in C_1$ et que $0 \in D_1$. Finalement, $0 \in C$ et $0 \in D$ ce qui contredit le fait que ces deux ensembles sont disjoints.

Cependant, on peut sauver les meubles : on trouve le paradoxe tant attendu. □

Théoréme 3.6.2. (Paradoxe de Banach-Tarski). La boule $\mathbb{B}$ est paradoxale sous l'action *du* groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 3.6.1.

Les déplacements de $\mathbb{R}^3$ sont les isométries directes : ce sont les composées de rotations, éléments de $SO(3)$, et de translations. Par la suite, on notera cet ensemble $\mathcal{D}(3)$.

Idée de la démonstration. C'est le même principe que dans la démonstration du théorème . On considère la rotation r de centre I et d'angle θ où I est un point à distance $\frac{1}{2}$ de l'origine et θ un multiple irrationnel de π, puis enfin l'ensemble $\mathcal{A} = \{r^n(O)/n \in \mathbb{N}\}$. On a $\mathcal{A} = \{0\} \sqcup r(\mathcal{A}); \mathbb{B} = (\mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) \sqcup \mathcal{A}$ donc $\mathbb{B}\backslash\{0\} = (\mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) \sqcup r(\mathcal{A}) \equiv (\mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) \sqcup \mathcal{A} = \mathbb{B}$. La boule et la boule épointée sont donc bien $\mathcal{D}(3)$-équidécomposables (on a $r = t\tilde{r}t^{-1}$ où $\tilde{r} \in SO(3)$ est la rotation d'angle θ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ donc $r \in \mathcal{D}(3)$).

Corollaire 3.6.1.

On peut découper la sphère $\mathbb{B}$ en un nombre fini de morceaux puis reconstituer avec ces morceaux à l'aide de déplacements deux sphères identiques à $\mathbb{B}$, à une translation près .

Ce corollaire est en fait une simple réécriture du fait que $\mathbb{B}$ est paradoxale. On remarque ce cela ne coûte pas plus cher de ne plus supposer la sphère initiale centrée et normée : il suffit de se ramener à $\mathbb{B}$ par une translation et une homothétie. On peut donc trouver deux parties disjointes C et D de $\mathbb{B}$ qui sont toutes les deux $\mathcal{D}$ (3)-équidécomposables à $\mathbb{B}$. Par définition on peut partitionner C en un nombre fini de morceaux (disjoints) $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis reconstituer $\mathbb{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i^c$ avec des déplacements (pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, B_i = c_iC_i$ avec $c_i \in \mathcal{D}(3)$). On a la même chose pour $D = \bigsqcup_{j=1}^{m} D_j$.

Corollaire 3.6.2.

Avec les notations précédentes, il existe au moins deux morceaux C_i ou deux morceaux D_j qui ne sont pas mesurables pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

On suppose dans un premier temps que tous les C_i et tous les D_j sont Lebesgue-mesurables. La partie $C = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$ est donc Lebesguemesurable, et on a $\lambda(C) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(C_i)$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $B_i^c = c_i.C_i$: comme la mesure de Lebesgue est invariante par les déplacements de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que les B_i^c sont mesurables et $\lambda(B_i^c) = \lambda(C_i)$ pour tous les indices i. On a donc $\lambda(C) = \lambda(\mathbb{B})$; de même, on a $\lambda(D) = \lambda(\mathbb{B})$. Or, $C \sqcup D \subset B$ donc $\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \lambda(\mathbb{B})$ d'où $2\lambda(\mathbb{B}) = \lambda(\mathbb{B})$. C'est absurde car $\lambda(\mathbb{B}) = \frac{4\pi}{3} \notin \{0, +\infty\}$!

Il existe donc au moins un C_i ou un D_j qui est non mesurable ; on en déduit alors le résultat annoncé. □

3.7 Le cas d'ensembles bornés d'intérieurs non vides

Dans cette section, l'action de groupe dont il est question est l'action naturelle de $\mathcal{D}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ par isométries. À l'aide des résultats de la section précédente , on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 3.7.1.

Deux boules fermées de $\mathbb{R}^3$ de rayons strictement positifs sont équidécomposables.

On récupère alors le théorème suivant.

Théoréme 3.7.1.

Deux ensembles bornés et d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables.

Démonstration.

Soient E et F de tels ensembles. Ces deux ensembles sont bornés, il sont donc contenus dans une grosse boule fermée B. De plus, E est d'intérieur non vide donc on peut y coincer une petite boule ouverte de rayon strictement positif ; en considérant la boule fermée B_E de rayon moitié, on a $B_E \subset E$. D'après la proposition énoncée ci-avant, les deux boules B et B_E sont équidécomposables. Ainsi E est équidécomposable à $E \subset B$ et B est équidécomposable à $B_E \subset E$. D'après le théorème 4 , on peut conclure que E et B sont équidécomposables. De même, on montre que F et B sont équidécomposables. Finalement, E et F sont équidécomposables ! □

3.8 Mesures universelles

3.8.1 Lien avec le paradoxe de Banach-Tarski

Le paradoxe de Banach-Tarski nous sert sur un plateau le théorème suivant.

Théoréme 3.8.1.

Il n'y a pas de mesure universelle finiment additive sur $\mathbb{R}^3$ qui soit invariante sous l'action de $\mathcal{D}(3)$ et normalisée sur le cube unité.

Démonstration.

Soit μ une telle mesure. En coupant le cube unité $C := [0, 1]^3$ en deux parties (par exemple par le plan $x = \frac{1}{2}$), ces deux parties disjointes sont des bornés d'intérieurs non vides donc toutes deux $\mathcal{D}(3)$ équidécomposables à C. Donc C est $\mathcal{D}(3)$-paradoxal ; par le même raisonnement que dans la preuve du corollaire , on trouve que $2\mu(C) \leqslant \mu(C)$ ce qui est absurde puisque $\mu(C) = 1$. □

Théoréme 3.8.2.

Pour $n \geqslant 3$, il n'y a pas de mesure universelle finiment additive sur $\mathbb{R}^n$ qui soit invariante sous l'action de $\mathcal{D}(n)$ et normalisée sur le cube unité.

Remarque 3.8.1.

L'ensemble $\mathcal{D}(n)$ désigne l'ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des isométries affines qui ont une partie linéaire de déterminant (strictement) positif.

Démonstration.

Soit μ est une telle mesure ; on considère l'application $\nu : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$ définie par $\nu(A) = \mu\left(A \times [0,1]^{n-3}\right)$. Alors ν est une mesure universelle finiment additive invariante sous l'action de $\mathcal{D}(3)$ et normalisée sur le cube unité $[0,1]^3$, ce qui est absurde d'après le théorème précédent. $\square$

3.9 En dimensions 1 et 2

Le paradoxe de Banach-Tarski cesse d'être valable dès que l'on passe en dessous de la dimension 3. La chose qui a changé par rapport à la dimension 3 est que $SO(2)$ ne contient pas de sous-groupe libre à 2 générateurs : en effet, $SO(2)$ est commutatif. L'ingrédient essentiel de la preuve du paradoxe de Hausdorff n'est donc plus utilisable ! Ainsi, on peut montrer le résultat suivant.

Théoréme 3.9.1.

Il existe une mesure universelle finiment additive sur $\mathbb{R}^2$ invariante par les isométries et normalisée sur le carré unité.

On a les même résultats en dimension 1 car $SO(1)$ est bien sur également commutatif (c'est même le groupe trivial).

3.10 Le théorème de Banach-Tarski [5, 7, 8]

3.10.1 Le paradoxe de la sphère de Hausdorff

Pour parvenir à montrer qu'une boule est dédoublable, nous allons commencer par montrer qu'il existe des éléments indépendants dans le groupe des isométries de l'espace. Ce seront en fait des rotations. Rappelons brièvement qu'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui conserve les distances. Nous noterons SO_3 le groupe spécial orthogonal de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire le groupe des rotations de centre l'origine de $\mathbb{R}^3$. Ce sont des applications linéaires de déterminant $+1$.

Théoréme 3.10.1.

Le groupe SO_3 contient deux éléments indépendants.

Démonstration.

Considérons l'angle $\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Appelons alors r (resp. s) la rotation d'angle θ autour de l'axe des z (resp. autour de l'axe des x).

Comme $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$, on voit que $\sin(\theta)=\frac{4}{5}$.

Les matrices A et B des rotations r et s, ainsi que leurs inverses, s'écrivent alors :

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant une rotation w représentée par un mot réduit non vide par rapport aux quatre "lettres" r, s, r^{-1}, s^{-1}. Il s'agit de montrer que $w \neq 1$ où 1 est l'identité de $\mathbb{R}^3$.

Supposons que le mot représentant w (toujours supposé non vide) se termine par r ou par r^{-1}. Appelons k la longueur du mot représentant w. Montrons alors que $w(1,0,0)$ est de la forme $\left(\frac{a}{5^k}, \frac{b}{5^k}, \frac{c}{5^k}\right)$ où a, b, c sont des entiers et où b n'est pas divisible par 5 .

Si $k=1$, alors $w=r$ ou $w=r^{-1}$ et on voit que $w(1,0,0)=\left(\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, 0\right)$ et donc $w \neq 1$.

Procédons par récurrence : supposons le résultat vérifié pour toutes les rotations v représentées par des mots réduits, non vides, se terminant par r ou r^{-1} et de longueur inférieure à k.

Soit alors w une rotation représentée par un mot du même genre mais de longueur $k+1$. Alors w est de la forme $r^{\pm1}w'$ ou $s^{\pm1}w'$ où w' est représentée par un mot réduit de longueur k

et se terminant par r ou r^{-1}. Par hypothèse, $w'(1,0,0)$ est de la forme $\left(\frac{a'}{5^k}, \frac{b'}{5^k}, \frac{c'}{5^k}\right)$ où a', b', c' sont des entiers et où b' n'est pas divisible par 5. Alors, en écrivant $w(1,0,0) = r^{\pm 1}w'(1,0,0)$ de façon matricielle, on a :

$$w(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \mp\frac{4}{5} & 0 \\ \pm\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a'}{5^k} \\ \frac{b'}{5^k} \\ \frac{c'}{5^k} \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{k+1}} \begin{pmatrix} 3a' \mp 4b' \\ \pm 4a' + 3b' \\ 5c' \end{pmatrix}$$

de sorte que $w(1,0,0) = \frac{1}{5^{k+1}}(a,b,c)$ avec $a = 3a' \mp 4b', b = \pm 4a' + 3b'$ et $c = 5c'$.

Si $w = s^{\pm 1}w'$, un calcul analogue donne $a = 5a', b = 3b' \mp 4c'$ et $c = 3c' \pm 4b'$.

On voit facilement que a, b et c sont des entiers. Il ne reste plus qu'à démontrer que b n'est pas divisible par 5 sachant que b' ne l'est pas non plus. Pour cela, remarquons qu'on peut écrire $w' = r^{\pm 1}w''$ ou $w' = s^{\pm 1}w''$, où w'' est représentée par un mot de longueur $k-1$, éventuellement vide, mais se terminant par r ou par r^{-1} s'il ne l'est pas. On a donc quatre cas à étudier :

$$w = r^{\pm 1}s^{\pm 1}w'' \quad w = s^{\pm 1}r^{\pm 1}w''$$
$$w = r^{\pm 1}r^{\pm 1}w'' \quad w = s^{\pm 1}s^{\pm 1}w''$$

Dans les deux premiers cas, les exposants \pm 1 affectés à r et à s sont indépendants. Par contre, dans les deux derniers cas, on peut les supposer égaux, soit à +1 soit à -1 , car le mot complet représentant w est réduit. Ces quatre cas deviennent donc :

$$w = r^{\epsilon}s^{\eta}w'' \quad w = s^{\epsilon}r^{\eta}w''$$
$$w = r^{\epsilon}r^{\epsilon}w'' \quad w = s^{\epsilon}s^{\epsilon}w''$$

où $\epsilon \in \{+1, -1\}$ et $\eta \in \{+1, -1\}$. Dans ce cas, les formules trouvées plus haut pour a, b et c

peuvent être réécrites :

$$a = 3a' - 4\epsilon b' \quad b = 3b' + 4\epsilon a' \quad c = 5c' \quad \text{ si } w = r^{\epsilon} w'$$

$$a = 5a' \quad b = 3b' - 4\epsilon c' \quad c = 3c' + 4\epsilon b' \quad \text{ si } w = s^{\epsilon} w'$$

Si le mot qui représente w'' n'est pas vide, on peut alors lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et dans ce cas $w''(1,0,0) = \left(\frac{a''}{5^{k-1}}, \frac{b''}{5^{k-1}}, \frac{c''}{5^{k-1}}\right)$. S'il est vide, $w'' = 1$ et on a alors simplement $a'' = 1, b'' = c'' = 0$.

Dans les deux cas, a'', b'' et c'' sont des entiers, mais on ne peut généralement pas dire que b'' n'est pas divisible par 5 . Toutefois, nous avons :

$$a' = 3a'' - 4\eta b'' \quad b' = 3b'' + 4\eta a'' \quad c' = 5c'' \quad \text{ si } w' = r^{\eta} w''$$

$$a' = 5a'' \quad b' = 3b'' - 4\eta c'' \quad c' = 3c'' + 4\eta b'' \quad \text{ si } w' = s^{\eta} w''$$

Supposons d'abord que $w = r^{\epsilon} s^{\eta} w''$. Comme $a' = 5a''$ et $b = 3b' + 4\epsilon a' = 3b' + 20\epsilon a''$, b ne peut pas être un multiple de 5 puisque b' n'en est pas un.

Supposons maintenant que $w = s^{\epsilon} r^{\eta} w''$. Alors $c' = 5c''$ et $b = 3b' - 4\epsilon c' = 3b' - 20\epsilon c''$ et donc b ne peut pas être un multiple de 5 car b' n'en est pas un.

Dans le cas où $w = r^{\epsilon} r^{\epsilon} w''$, on a $b = 3b' + 4\epsilon a'$ et $a' = 3a'' - 4\epsilon b''$, d'où :

$$b = 3b' + 4\epsilon\left(3a'' - 4\epsilon b''\right) = 3b' + 12\epsilon a'' - 16b'' = 3b' + 9b'' + 12\epsilon a'' - 25b'' = 6b' - 25b''$$

et alors b n'est pas divisible par 5 puisque b' ne l'est pas.

Enfin, si $w = s^{\epsilon} s^{\epsilon} w''$, on a $b = 3b' - 4\epsilon c'$ et $c' = 3c'' + 4\epsilon b''$, d'où :

$$b = 3b' - 4\epsilon\left(3c'' + 4\epsilon b''\right) = 3b' - 12\epsilon c'' - 16b'' = 3b' + 9b'' - 12\epsilon c'' - 25b'' = 6b' - 25b''$$

et on a la même conclusion.

On a donc démontré que si w s'écrit comme un mot non vide, réduit et se terminant par r ou r^{-1}, alors $w \neq 1$

Si au contraire w s'écrit comme un mot réduit, non vide, terminé par s ou s^{-1}, posons alors $w' = rwr^{-1}$ si w commence par r^{-1} et $w' = r^{-1}wr$ si w commence par r. Par construction, w' est représenté par un mot réduit, non vide et se terminant par r ou r^{-1}. D'après le raisonnement précédent, on a $w' \neq 1$ et il en résulte facilement que $w \neq 1$ □

Ainsi, les rotations r et s définies plus tôt engendrent un groupe libre L de rang 2 , qui est dédoublable . On arrive donc enfin au paradoxe de la sphère.

3.10.2 Paradoxe de Hausdorff (AC).

Dans la sphère unité S_2 de l'espace, il existe un ensemble dénombrable D tel que $S_2 \backslash D$ soit dédoublable sous l'action du groupe des rotations SO_3 ou sous celle du groupe des isométries.

Démonstration.

Il est évident que le groupe L défini plus haut opère dans S_2 : si $w \in L$ et si $x \in S_2$, alors $w(x) \in S_2$. On voit également assez facilement que L est dénombrable. En effet, tout élément w de L est défini par un mot par rapport à quatre lettres, et l'ensemble de tous ces mots est dénombrable.

Remarquons maintenant que tout élément w de L différent de 1 a deux points fixes dans S_2 : les points d'intersection de son axe avec S_2. Si on désigne alors par D l'ensemble des points d'intersection de S_2 avec les axes de toutes les rotations $w \in L$, on obtient un ensemble dénombrable. Il s'agit maintenant de montrer que L opère librement dans $S_2 \backslash D$

Pour cela, montrons que L opère dans $S_2 \backslash D$, c'est-à-dire que si $w \in L$ et si $x \in S_2 \backslash D$, alors $w(x) \in S_2 \backslash D$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $w(x) \in D$. Par définition de $D, w(x)$ serait alors sur l'axe d'une rotation $v \in L$ autre que 1 . On aurait alors $v(w(x)) = w(x)$, c'est-à-dire $\left(w^{-1}vw\right)(x) = x$. Comme $w^{-1}vw \in L$, cette relation, qui exprime que x est un point fixe de $w^{-1}vw$, n'est possible que si $w^{-1}vw = 1$ (sinon, x serait un élément de D). On a donc $vw = w$ d'où $v = 1$, ce qui est absurde. Cela montré, il est évident que L opère librement sur $S_2 \backslash D$.

l'ensemble $S_2 \backslash D$ est dédoublable sous l'action de L. Comme L opère aussi dans $\mathbb{R}^3$, on peut dire aussi que $S_2 \backslash D$ est dédoublable dans $\mathbb{R}^3$ sous l'action de groupes plus vastes comme SO_3 ou le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$. □

Ainsi on peut donc partager $S_2 \backslash D$ en deux parties complémentaires A et B telles que chacune d'elles soit équidécomposable à $S_2 \backslash D$. Tout le génie de Banach et Tarski a été d'éliminer l'ensemble D. Voyons comment.

3.11 Le paradoxe de Banach-Tarski, version faible

Théoréme 3.11.1.

La sphère toute entière est dédoublable sous l'action du groupe S_3 des rotations de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

En premier lieu, observons que S_2 a la puissance du continu, alors que D (un sous-ensemble dénombrable de S_2 tel que $S_2 \backslash D$ soit dédoublable) et $-D$ (l'ensemble des points symétriques de ceux de D par rapport à O) sont dénombrables. Comme $D \cup (-D)$ est dénombrable, il existe au moins un point de S_2 n'appartenant pas à cet ensemble. Cela signifie également que la droite d joignant O au point de S_2 en question ne rencontre pas l'ensemble D.

Considérons maintenant pour tout $a \in \mathbb{R}$ la rotation r_a d'axe d et d'angle a. Si x et y sont deux points de D, appelons $A(x, y)$ l'ensemble des "angles" $a \in \mathbb{R}$ tels que la rotation r_a transforme x en y. Pour qu'une telle rotation existe, il faut et il suffit que le plan perpendiculaire à d passant par x passe aussi par y. Comme $x \in D, x$ ne peut être sur l'axe d et par suite le plan perpendiculaire en question coupe l'axe en un point ω intérieur à la sphère. Si la rotation cherchée existe, elle est unique et son angle est donné, à $2k\pi$ près, par $\widehat{x\omega y}$.

L'ensemble $A(x,y)$ est donc ou vide ou infini dénombrable. En conséquence, la réunion A des $A(x,y)$ quand x et y parcourent D est dénombrable.

Plus généralement, si n est un entier non nul, l'ensemble A_n des nombres a tels que $na \in A$ est aussi dénombrable. Il en est donc de même de leur réunion.

Désignons alors par α un nombre réel n'appartenant pas à cette réunion (on peut le faire, puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable). Si $r = r_\alpha$, alors les ensembles D et $r^n D$ sont disjoints pour tout entier n non nul. En effet, s'il existait un point dans la réunion de ces deux ensembles, on aurait $y = r^n(x)$ pour deux points x et y de D. Comme $r^n = r_\alpha^n = r_{n\alpha}$, cela voudrait dire que $n\alpha \in A(x,y)$, donc que $\alpha \in A_n$, contrairement à la définition de α. Posons alors $\bar{D} = \bigcup_{i=0}^{\infty} r^i(D)$. Comme D ne rencontre aucun des ensembles $r^n(D)$ pour $n > 0$, D ne rencontre pas leur réunion. Mais cette réunion est égale à $r(\bar{D})$, et on a donc :

$$S_2 = \left(S_2 \backslash \bar{D}\right) \cup D \cup r(\bar{D})$$

où les trois ensembles sont deux à deux disjoints. D'où :

$$S_2 \backslash D = \left(S_2 \backslash \bar{D}\right) \cup r(\bar{D})$$

Comme $r(\bar{D})$ est congruent à $\bar{D}$, on voit que $\left(S_2 \backslash \bar{D}\right) \cup r(\bar{D})$ est équidécomposable à $\left(S_2 \backslash \bar{D}\right) \cup \bar{D}$, c'est-à-dire que $S_2 \backslash D$ est équidécomposable à S_2.

$S_2 \backslash D$ étant dédoublable, on a que S_2 est dédoublable. □

On approche du but. Encore un petit résultat intermédiaire :

Théoréme 3.11.2.

La boule unité de $\mathbb{R}^3$ privée de l'origine est un ensemble dédoublable sous l'action du groupe SO_3 des rotations de l'espace.

Démonstration.

Appelons E cet ensemble.

A tout point x de la sphère S_2, associons le segment $]0, x]$, privé de O, joignant O à x, et à tout ensemble A inclus dans S_2, associons l'ensemble A' égal à la réunion des segments $]0, x]$ lorsque x parcourt A.

On vérifie facilement que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$, que $A' \cap B' = \emptyset$ si $A \cap B = \emptyset$ et que pour toute rotation $g \in SO_3$, on a $B' = g\left(A'\right)$ si $B = g(A)$.

On en déduit facilement que si A et B sont des ensembles équidécomposables dans S_2, A' et B' sont des ensembles équidécomposables dans E pour SO_3.

En conséquence, si A est une partie dédoublable de S_2, A' est une partie dédoublable de E.

En particulier, puisque S_2 est dédoublable, S_2' est dédoublable. Il suffit alors de voir que $S_2' = E$ pour achever la démonstration. $\square$

On en déduit finalement la version faible du paradoxe de Banach-Tarski :

Paradoxe de Banach-Tarski (Version faible - AC).

La boule unité B de l'espace $\mathbb{R}^3$ est dédoublable sous l'action du groupe G_3 des isométries de l'espace.

Démonstration.

On sait déjà que $E = B \backslash \{O\}$ est dédoublable pour SO_3, donc a fortiori pour G_3. Il reste donc à montrer que E et B sont des ensembles équidécomposables sous l'action de G_3.

Considérons un axe d quelconque passant par O, une rotation r d'axe d et d'ordre infini (d'angle $2\pi\alpha$, où α est irrationnel) et un point $a \neq O$ de B situé dans le plan perpendiculaire en O à la droite d. Alors les points $a, r(a), r^2(a), \ldots$ sont tous distincts et forment un ensemble A inclus dans E tel que $r(A) = A \backslash \{a\}$. Partageons la boule unité en trois ensembles deux à deux disjoints : $E \backslash A, A$ et $\{O\}$. Remplaçons alors A par $r(A)$ et $\{O\}$ par $\{a\}$. On obtient ainsi trois ensembles deux à deux disjoints, congruents aux trois ensembles initiaux et dont la réunion est E. Cela prouve que B est équidécomposable à E. Le théorème 2.1.3 permet alors de conclure. $\square$

Corollaire 3.11.1.

Il est possible de découper la boule unité en un nombre fini de morceaux et de rassembler ces morceaux sans les déformer pour obtenir n boules disjointes de rayon 1 .

Démonstration.

C'est une conséquence du théorème 3.11.2. $\square$

Corollaire 3.11.2.

Il est possible de découper une boule fermée quelconque en un nombre fini de morceaux, puis de rassembler ces morceaux sans les déformer pour obtenir soit deux boules fermées disjointes de même rayon, soit davantage.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer une homothétie à la boule unité et aux différents morceaux permettant le dédoublement, puis de translater.

$\square$

3.12 Le paradoxe de Banach-Tarski, version forte

Nous avons démontré la version du paradoxe de Banach-Tarski la plus courante. Il faut encore quelques lemmes pour aboutir à sa version forte, mais celle que nous avons démontrée est déjà très parlante. Continuons toutefois sur notre lancée.

Théoréme 3.12.1.

Soit G un groupe opérant dans un ensemble X et soient A et B deux parties de X. Si $A \sim B$, il existe une bijection $g : A \longrightarrow B$ telle que $C \sim g(C)$ pour tout sous-ensemble C de A.

Conclusion :

Dans ce travail nous avons fourni quelques notions de base sur la mesure afin de pouvoir étudier certains ensembles non mesurables. En raison de la difficulté de ce domaine, nous nous sommes limités à étudier quelques fonction non mesurables et modèles sur les ensembles non mesurables(les ensembles de Vitali et Paradoxe de Tariski), Ce travail pourrait être un noyau pour d'autres recherches, en particulier le paradoxe de Tariski. Car comment pouvons-nous diviser un ensemble en deux parties ou plus et garder toutes ces parties sur la même mesure, cela est donc utilisé en particulier pour préserver l'énergie des corps après la fission ou l'apparition de tout autre phénomènes physiques.

Bibliographie

[1] C. Burstin dans les notes : $_{\text{Lie Spaltung}}$ des Kontinuums in x_1 iberall dichte Mengen"

[2] Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss, nichtmessbare Mengen" (ibidem, Bd. 125(1916))

[3] C. Car a théodory en rapport avec sa théorie générale (abstraite) de la mesure, comme définition des ensembles mesurables .

[4] Herrlich, Horst (2006). Axiom of Choix Ǵ. Springer. p. 120 ISBN 9783540309895.

[5] Marc Guinot, « Le paradoxe de Banach-Tarski », ALEAS Editeur, 1991;

[6] N. Lusin et W. Siorpinski dans la note $_n$ Sur une décomposition du continu en une infinité non dénombrabie d'ensembles non mesurables" (C. R. t. 165) ;

[7] Pierre de la Harpe, « Mesures finiment additives et paradoxes ». Article issu de Autour du centenaire de Lebesgue, Société Mathématique de France, 2004

[8] Stan Wagon, « The Banach-Tarski Paradox », Cambridge University Press ;

[9] Solovay, Robert M. (1970), "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", Annals of Mathematics, Second

[10] Vitali, Giuseppe (1905). "Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta". Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani.

[11] W. Sierpinski, Sur un probleme concernant les ensembles mesurables superfioiellement, Fundamenta Mathematicae 32 (1920), p. 112-115.

[12] W sierpiński : Bull. de l'Acad. des Sciencos de Crucovie 1918, p. 150.

[13] Z. Grande, La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$, Dissertationes Mathematiose 159(1978).

[14] Z. Zahorski, Sur la premiďre dérivée, Transactions of the Amerioan Mathematioal Society 69 (1950), p. 1-54.

الملخص

تتناول هذه المذكرة المفاهيم المتعلقة بالمجموعات والتوابع قابلة للقياس، مستكشفًا خصائصها. من خلال دراسة عملية، تسلط الضوء على بناء مجموعة فيتالي Vitali وخصائصها المميزة، مع إثبات عدم قابليتها للقياس. بالاضافة إلى ذلك، يفحص أمثلة للتوابع غير قابلة للقياس ويقدم مقدمة لفهم مفارقة باناخ- تارسكي -Tarski Banach .تساهم هذه الدراسة في فهم أعمق للخصائص الغريبة التي يمكن أن تظهر في عالم الرياضيات.

الكلمات المفتاحية : المجموعات قابلة للقياس، التوابع قابلة للقياس، مجموعة فيتالي، عدم القابلية للقياس، مفارقة باناخ-تارسكي.

Abstract

This dissertation discusses the concepts related to measurable sets and functions, exploring their properties. Through a practical study, it highlights the construction of the Vitali set and its distinctive properties, providing a proof of its nonmeasurability. Additionally, it examines examples of non-measurable functions and provides an introduction to understanding the Banach-Tarski paradox. This study contributes to a deeper understanding of the peculiarities that can arise in the realm of mathematics.

Keywords : measurable sets, measurable functions, Vitali set, non-measurability, Banach-Tarski paradox.

Résumé

Ce mémoire aborde les concepts liés aux ensembles mesurables et aux fonctions, en explorant leurs propriétés. À travers une étude pratique, il met en évidence la construction de l'ensemble de Vitali et ses propriétés distinctives, fournissant une preuve de sa non-mesurabilité. De plus, il examine des exemples de fonctions non mesurables et propose une introduction à la compréhension du paradoxe de Banach-Tarski. Cette étude contribue à une compréhension plus approfondie des particularités qui peuvent survenir dans le domaine des mathématiques.

Mots-clés : ensembles mesurables, fonctions mesurables, ensemble de Vitali, nonmesurabilité, paradoxe de Banach-Tarski.