UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : LEBBOUZ AMIRA

Thème

Traitement numérique de certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire avec un terme de contrôlabilité

Soutenu publiquement le : 03/07/2023

Devant le jury composé de :

Dr. Hichar Saliha	M.C.B Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Dr. Kasmi Lotfi	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Dr. Lemkeddem Mona	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicace

“

Je dédide ce mémoire Nous marchons sur les chemins de la vie, et celui qui contrôle nos esprits reste sur chaque chemin que nous empruntons. Le propriétaire d'un bon visage et de bonnes actions. Il ne m'a pas gardé toute sa vie

(Mon cher père que Dieu lui fasse miséricorde)

Qui est-ce que je préfère à moi-même et pourquoi pas ? Tu t'es sacrifié pour moi Tu n'épargnes toujours aucun effort pour me rendre heureux

(Ma chère mère Que Dieu bénisse son âme)

A mes trés chéres soeurs et mes fréres , Ilyes, Yassine, Roudayna, Abdelali, yakoub. A mes amies samira, sabah, hinda, somaya.

”

- Amira

Remerciements

En préambule à cette mémoire, je tiens à remercier en premier lieu **ALLAH** qui m'a donné le pouvoir d'effectuer ce modeste travail.

En tout premier lieu, mes profonds remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude l'aide et l'encadrement de **Dr Lemkeddem Mouna**. Je le remercie sincèrement pour ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités.

Je termine avec un remerciement bien particulier à quiconque qui de prés ou de loin a contribué à ma réussite.

Abstract

The fractional differential equations (FDEs) appear as a natural description of observed evolution phenomena in various scientific areas such as physics, engineering, medicine,electrochemistry, control theory, ..etc.These equations in the modeling of many real-world problems motivated a lot of researchers to investigate their quantitative and qualitative aspects.

The aim of this memory is to contribute to the development of the study ofexistence of solutions to fractional differential equations$0 < \alpha < 1$in the spaces of Banach Separable This is using combining the fixed point theory and the resolvent family S_αBy giving suspending conditions which ensure the existence of weak solutions of equations.

We study the equations under non -local conditions with a controllable term. As a result ; We are interested in the study of the method of differential reduced fractional (FRDTM), to resolve fractional differential equations.

Keywords : Fractional differential equation, controllability, fixed point theorem, resolvent family, reduced fractional differential transformation method (FRDTM) .

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle,..etc.Ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de cette mémoire est de contribuer au développement de la théorie d'existence de solutions des équations différentielles fractionnaires $0 < \alpha < 1$ dans les espaces de Banach separable, ceci utilise une technique de combinaison de la théorie du point fixe et la théorie des familles résolvantes S_α en donnant des conditions suffsantes qui assurent l'existence de solutions faibles d'équations.

Nous étudions les équations sous conditions non locales avec un terme de contrôlabilité.En suite ; on s'intéresse à l'étude de la méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (FRDTM), pour résoudre des équations différentielles fractionnaires.

Mots clés :

Equation différentielle d'ordre fractionnaire, contrôlabilité, théorème de point fixe, familles résolvantes, la méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (FRDTM)
.

ملخص

تظهر المعادلات التفاضلية الكسرية بشكل تلقائي في مختلف الميادين العلمية مثل الفيزياء، الكيمياء الكهربائية علوم الهنندسة، الطب، نظرية التحكم،.. إلخ. الفعالية الكبيرة لهذا النوع من المعادلات في نمذجة العديد من الظواهرالطبيعية والفيزيائية شجعت الكثيرمن الباحثن لدراسة جوانبها الكمية والنوعية.

الهدف من هذه المذكرة هو المساهمة في تطوير مجال دراسة وجود حلول المعادلات التفاضلية الكسرية $0 < \alpha < 1$ في فضاءات بناخ قابلة للفصل.

وذلك باستعمال تقنية الجمع بين نظرية النقطة الثابتة ونظرية عائلات الحالات S_α باعطاء الشروط الكافية التي تتضمن وجود حلول ضعيفة لهذه المعادلات

ندرس المعادلات في ظل الظروف غير المحلية مع مصطلح يمكن التحكم فيه. نتيجة لذلك ؛ نحن مهتمون بدراسة طريقة التحويل التفاضلي المنخفض الكسري ، لحل المعادلات التفاضلية الكسرية.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية - قابلية التحكم - نظرية النقطة الثابتة - عائلات الحالات - طريقة التحويل التفاضلي المنخفض الكسري.

Table des matières

Liste des symboles

Γ	*La fonction Gamma.*
β	*La fonction Bêta .*
${}^{R}D^{\alpha}$	*Dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.*
${}^{C}D^{\alpha}$	*Dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.*
	Le plus grand entier inférieur ou égal à α.
$n!$	*Fonction de factorielle*
$L^{p}(\Omega)$	*Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1, +\infty[$intégrables surΩ.*
$AC(\Omega)$	*Espace des fonctions absolûment continues sur Ω.*

Introduction Général

Le concept d'ordre d'intégration non-entier peut être retracé à la genèse du calcul différentiel lui-même, pendant trois siècles la théorie des dérivés fractionnaires s'est développée principalement comme un champ théorique pur de mathématiques utile seulement pour des mathématiciens. Le philosophe et créateur du calcul moderne G.W. Leibniz a fait quelques remarques sur la signification et la possibilité de la dérivée fractionnaire de l'ordre à la fin du 17ème siècle.

Cette mémoire se compose de trois chapitres :

chapitre 1: Le but de ce chapitre et de rappeler quelques notions de base que nous allons utiliser dans les chapitres suivants tels que : les espaces de base, calcul fractionnaire, le théorème du point fixe, familles résolvant,...(et d outils fonctoionnels).

chapitre 2:

La contrôlabilité joue un rôle important dans l'analyse et la conception des systèmes de contrôle. Récemment, les résultats de la contrôlabilité pour l'équation fractionnaire impulsive dans l'espace de Banach[2][18][21][25]. Dans ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions faibles de certaines équations diérentielles fonctionnelles fractionnaires semi-linéaires avec terme Contrôlabilité de la forme :

$$ {}^{c}D_{t_k}^{\alpha} x(t) - Ax(t) = f\left(t, x_t\right) + Bu(t), t \in J_k := \left(t_k, t_{k+1}\right], k = 0, 1, ..m \tag{1} $$

$$ \Delta x \backslash_{x=x_k} = I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right) \quad k = 1, \ldots, m \tag{2} $$

$$ x(t) + g_t(x) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0] \tag{3} $$

Où ${}^{c}D^{\alpha}_{t_k}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de caputo $0 < \alpha < 1, A : D(A) \subset E \to E$ est l'opérateur linéaire borné de famille α-résolvante $S_\alpha(t) : t \geq 0$ est définit sur l'espace de Banach E, $B : U \to E$ est un opérateur linéaire borné et la fonction de contrôle $u(.)$ est donnée sur $L^2[J, U]$, avec U est un espace de Banach.

chapitre 3

Le but de ce chapitre est de proposer méthode numériques méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (FRDTM) . pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle,où la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. La précision et l'efficacité de ces méthode ont été démontrée en les appliquant à de nombreux exemples concrets.

Chapitre 1

Preliminaires

1.1 Les espases de base

Ici on rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

1.1.1 Espace des fonctions sommables $L^p([a,b])$

Soit φ une fonction d´efinie et mesurable sur [a, b] appartenant l'ensemble $L^p([a,b])$, 'ou p est un entier positif. La norme $L^p([a,b])$ est d´efinie par :

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p dx < \infty. \tag{1.1}$$

Propriété 1.1

Si p = 2, alors L^2 ([a,b]) est l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur [a,b].

1.1.2 Espace des fonctions absolument continues AC([a,b])

Définition 1.1

[7]La fonction f est dite absolument continue sur un intervalle [a,b]si pour tout réel ϵ strictement positif,il existe un réel σ strictement positif, tel que pour tout systeme fini d'intervalles disjoints [ak, bk] ∈[a, b],k = 1, 2, .., n on a la relation :

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k < a_k) < \sigma \implies \sum_{k=1}^{n}|(f(b_k - f(a_k))| < \epsilon. \tag{1.2}$$

L'ensemble des fonctions absolument continues sur [a, b] est noté par AC([a, b]).

Théorème 1.1

[7]Les fonctions absolument continues sur un intervalle [a, b] posséden une dérivée sommable sur [a, b], autrement dit :

$$f \in AC([a,b] \Leftrightarrow \exists\varphi \in L^p([a,b])/\forall x \in [a,b], f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt. \tag{1.3}$$

1.2 Fonction spécifique

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction de base du calcul fractionnaire. Elle généralise le factoriel n ! et lui permet de prendre des valeurs réelles et complexes.

Définition 1.2

[5] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt. \tag{1.4}$$

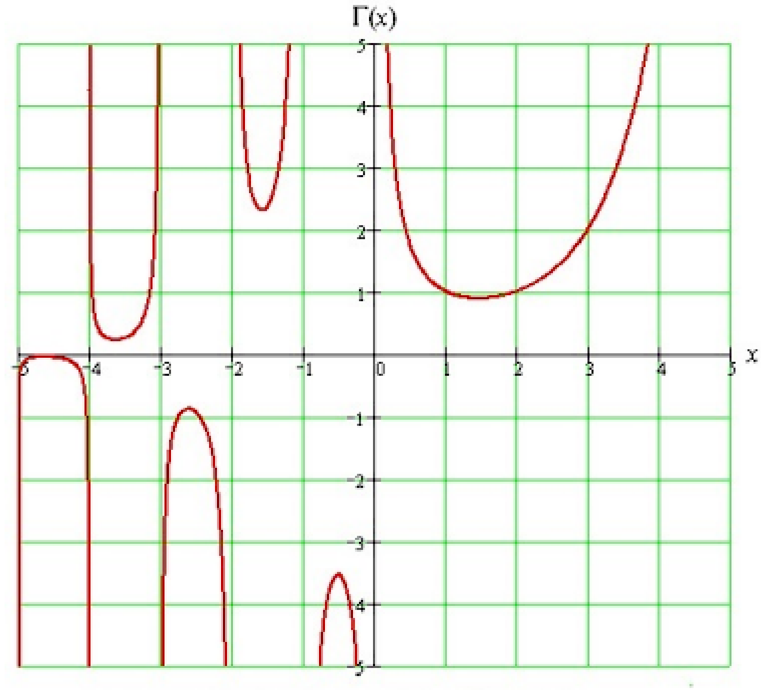

Fig. 1.1 : Courbe représentative de la fonction Gamma

1.2.2 Quelque propriétès de la fonction Gamma(Γ)

La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est donnée par la relation de récurence suivante : [22]

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; qu on peut la démontrer par une intégration par parties.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = [e^{-t}t^z]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-t}dt = z\Gamma(z),$$

2. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$, et aussi
   $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(n+1) = n!$.

5. La fonction Gamma peut être représentée aussi par la la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}. \tag{1.5}$$

où nous supposons que $Re(z) > 0$.

6. qui peut être liée avec la fonction gamma par la relation suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y).}{\Gamma(x+y)}(Re(x) >, Re(y) > 0) \tag{1.6}$$

7. [5] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, (Re(x) >, Re(y) > 0). \tag{1.7}$$

1.3 Intégrales et Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs approches des dérivées fractionnaires en itération. Liste des approches couramment utilisées dans les applications Riemann-Liouville et Caputo.

1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$\mathfrak{I}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds; t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.8}$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.3

L'intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une *fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}\ ou \mathbb{C}, -\infty < a < b < +\infty,$ *est formellement définie par*

$$\mathfrak{I}_{\alpha}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{a-1} f(s) ds, a < t < b. \tag{1.9}$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4

Soit f une fonction intégrable sur [a, t] alors la dérivée fractionnaire d'order α *avec* $(n-1 < \alpha < n)$ *au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$${}^{R}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.10}$$

Example 1.1

1 La dérivée non entiére d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville :

$${}^{R}D^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\alpha)^{-\alpha}.$$

2- la dérivée de $f(t) = (t-\alpha)^p$ *au sens de Riemann-Liouville :*

Soit p non entier et $0 \leq n{-}1 < \alpha < n$ *et* $p > -1$, *alors on a :*

$$D^{\alpha}(t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\Gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^p d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t{-}a)$, *on aura :*

$$D^{\alpha}(t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\Gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\alpha}^{t} (t-a)^{n+p-\alpha} \int_{1}^{s} (1-s)^{n-\alpha-1} s^p ds.$$

$$= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\beta(n-\alpha, p+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{p-\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}.$$

A titre d'exemple :

$$D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Proposition 1.1

Soient $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *alors*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (t-a)^{\alpha-j}, \forall c_1, ...c_n \in \mathbb{R},$$

en particulier, si $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = c(t-a)^{\alpha-1} \forall c \in \mathbb{R}.$$

1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5

[24]

$$ {}_a^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \tag{1.11}$$

avec $m \in \mathbb{N}$ *et* $m = [\alpha] + 1$, *où* $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α.

Remarque 1.1

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

Définition 1.6

***(Dérivée fractionnaire de Caputo à gouche)**[24]*

$$\forall t > a,_a^C D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \tag{1.12}$$

Définition 1.7

***(Dérivée fractionnaire de Caputo à droite)**[24]*

$$\forall t < b,_b^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} (-1)^m \int_b^t (t-\tau)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \tag{1.13}$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ *et* ${}_b^C D_t^\beta f(t)$ *sont définies. Les opérateurs dont l'intégrale porte sur [a, t] (respectivement [t,b]) seront qualifiés d'opérateurs passés (respectivement opérateurs futurs).*

1.3.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.La linéarité

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t). \tag{1.14}$$

Preuve. Par exemple,pour l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α $(k-1 \leq \alpha < k)$

$$D_t^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau) d\tau$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} g(\tau) d\tau$$

$$= \lambda_0 D_t^\alpha f(t) + \mu_0 D_t^\alpha g(t).$$

□

2.Règle de Leibniz

On sait que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée nième du produit de deux fonctions f(t),g(t), ce qui est donné par la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{n-k}(t). \tag{1.15}$$

En remplaçant l'entier n par un paramètre réel p, dans le membre à droite de , on obtient la formule :

$$D^p f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) - R_n^p, n \geq p+1. \tag{1.16}$$

ou :

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-p-1} g(\tau)d\tau \int_{\tau}^{t} f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi \tag{1.17}$$

Tq :

$$\lim_{0 \to +\infty} R(t) = 0$$

Alors on a une généralisation de la règle de Leibniz d'ordre fractionnaire. Si f et g sont continues dans [a ;t] ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t)$$

$D^p = D^\alpha$: c'est à-dire la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville [20]

1.4 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe consistent à transformer un problème donné en un problème du type$f(u) = u$, ainsi ils fournissent des conditions généralement santes pour lesquelles l'équation admet une solution.

Définition 1.8

[9] Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout

point $u \in E$ *tel que*

$$f(u) = u.$$

Principe de contraction de Banach qui assure l'existence d'un point fixe unique La contraction de l'espace métrique complet, qui a lui-même des valeurs, est certainement le plus connu des théorèmes du point fixe. Ce théorème a été prouvé par Stefan en 1922. Banach est essentiellement basé sur les termes carte de Lipschitz et carte de contraction.

Définition 1.9

[17] Soient $(X\,;\,d)$ *un espace métrique complet et* T *une application de* X *dans* X*. On dit que* T *est une application Lipschitizienne síil existe une constante positive* k *telle que líon ait :*

$$\forall x, y \in X : d(T(x); T(y)) \leq kd(x; y). \tag{1.18}$$

Si $k < 1$*,* T *est appelée contraction.*

Théorème 1.2

(Principe de contraction de Banach)

[9] Soit E *un espace métrique complet et soit* $F : E \to E$ *une application contractante, alors* F *possède un point fixe unique.*

1.5 Familles résolvant

[3] Dans cette section, nous introduisons trois types de fonctions d'opérateurs résolvantes fractionnaires définies par des conditions purement algébriques et nous en donnons également diverses propriétés.

Définition 1.10

pour $\alpha > 0$*. une fonction* $S_\alpha \mathbb{R}_+ \to B(X)$ *est appelée une fonction opérateur* $\alpha - rsolvante$ $(\alpha - ROF$ *en abrégé) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $S_\alpha(\cdot)$ *est fortement continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $S_\alpha(0) = I$.

(b) $S_\alpha(s)S_\alpha(t) = S_\alpha(t)S_\alpha(s)$ *pour tout* $s, t \geq 0$.

(c) l'équation fonctionnelle

$$S_\alpha(s)J_t^\alpha S_\alpha(t) - J_s^\alpha S_\alpha(s)S_\alpha(t) = J_t^\alpha S_\alpha(t) - J_s^\alpha S_\alpha(s), \tag{1.19}$$

tient pour tous $s, t \geq 0$

Le générateur A de S_α est défini par :

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{g_{\alpha+1}(t)} exists\},$$

et

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{g_{\alpha+1}(t)}, x \in D(A).$$

Définition 1.11

une $\alpha - ROF$ S_α *est dit exponentiellement borné s'il existe des constantes* $M \geq 1, \geq 0$ *tel que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq Me^t, t \geq 0. \tag{1.20}$$

Dans ce cas on écrit $(A,S_\alpha) \in C_\alpha(M,)$ *en abrégé, où* A *est le générateur de* S_α.

Proposition 1.2

Soit S_α *un* $\alpha - ROF$ *engendré par l'opérateur* A. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(1)$S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ *et* $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$ *pour tout* $x \in D(A)$ *et* $t \geq 0$

(2) pour tout $x \in X, J_t^\alpha x \in D(A)$ *et*

$$S_\alpha(t)x = x + AJ_t^\alpha S_\alpha(t)x, t \geq 0. \tag{1.21}$$

(3) $x \in D(A)$ et $Ax= y$ Si et seulment si

$$S_\alpha(t)x = x + J_t^\alpha S_\alpha(t)y, t \geq 0 \tag{1.22}$$

(4) A est fermé.

Proposition 1.3

Soit $\alpha > 0$. $A \in C_\alpha(M, \varphi)$ si et seulment si $(\varphi^\alpha, \infty) \subset (A)$ et il existe une fonction fortement continue $S_\alpha : R_+ \to$ B(X) tel que $\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{\varphi t}$ pour tout $t \geq 0$ et

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)xdt = \lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)x, \lambda > \varphi$$

pour tout $x \in X$. De plus, S_α est le $\alpha - ROF$ généré par A.

1.6 Applications des systèmes fractionnaires

Le calccule fractionnaire est utilisé dans de nombreux domaines, par exemple en physique, Acoustique, ingénierie,automatique...ect .

1.6.1 En Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes viscothermiques peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles.[13]

1.6.2 En physique

Une des applications les plus remarquables du calcul fractionnaire en physique était dans le contexte de la mécanique classique. Riewe a montré que le Lagrangien contenant des dérivées temporelles d'ordres fractionnaires conduit à une équation du mouvement avec des forces non conservatives telles que les frottements. Ce résultat est remarquable du fait que les forces de frottement et les forces non conservatives sont essentielles dans le traitement variationnel macroscopique habituel,et par conséquent, dans les méthodes les plus avancéesde la mécanique classique. Riewe a généralisé le calcul des variations habituel au Lagrangien qui dépend des dérivées fractionnaires afin de traiter avec les forces non conservatives habituelles. D'autre part, plusieurs approches ont été développées pour généraliser le principe de moindre action et l'équation d'Euler-Lagrange au cas des dérivées fractionnaires.[9]

1.6.3 En automatique

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande intro- duisant des dérivées fractionnaires. Podlubny a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Il propose une généralisation des contrôleurs traditionnels PID.ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) était proposé par Oustaloup . En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordres fractionnaires, ce régulateur permet d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquence donnée.[9]

Chapitre 2

Contrôlabilité de certaines équations diérentielles fractionnaires semi-linéaires impulsives avec conditions non-locales

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions faibles pour l'équation différentielle semi linéaire fractionnaire de la forme :

$$ {}^{c}D_{t_k}^{\alpha} x(t) - Ax(t) = f\left(t, x_t\right) + Bu(t), t \in J_k := \left(t_k, t_{k+1}\right], k = 0, 1, ..m, \tag{2.1} $$

$$ \Delta x \backslash_{x=x_k} = I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right) \quad k = 1, \ldots, m, \tag{2.2} $$

$$ x(t) + g_t(x) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0]. \tag{2.3} $$

Où ${}^{c}D_{t_k}^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de caputo $0 < \alpha < 1, A : D(A) \subset E \to E$ est l'opérateur linéaire borné de famille α-résolvante $S_\alpha(t) : t \geq 0$ est définit sur l'espace de

Banach E, $B : U \rightarrow E$ est un opérateur linéaire borné et la fonction de contrôle $u(.)$ est donnée sur $L^2[J, U]$, avec U est un espace de Banach,

$I_k : E \rightarrow E, (k = 0, 1, \ldots, m+1), 0 = t_0 < t_1 < \ldots .. < t_m < t_{m+1} = b$,

$\Delta x\backslash_{x=x_k} = x\left(t_k^+\right) - x\left(t_k^-\right)$, ou $x\left(t_k^+\right) = \lim_{h\rightarrow 0^+} x\left(t_k + h\right)$ et $x\left(t_k^-\right) = \lim_{h\rightarrow 0^+} x\left(t_k - h\right)$ représentent les limites droites et gauches de $x(t)$ quand $t = t_k$. respectueusement,

$g_t : PC([-r, b], E) \rightarrow E$ est une fonction donnée, où

$PC = \{x : [-r, b] \rightarrow E; x \in C\left(t_k, t_{k+1}\right], E); k = 0, 1, 2, \ldots, m$ tel que $x\left(t_k^-\right), x\left(t_k^+\right)$existent avec $x\left(t_k^-\right) = x\left(t_k^+\right), k = 1, 2, \ldots, m\big\}$ qui est un espace de Banach avec la norme :

$$\|x\| = \max\left\{\|x_k\|_\infty ; k = 1, 2, .., m\right\},$$

$f : [0, b]D \rightarrow E$ est une fonction donnée : $D = \{\psi : [-r, 0] \longrightarrow E, \psi$ continue partout sauf pour un nombre fini de points où $\psi\left(s^-\right)$et $\psi\left(s^+\right)$existent et $\psi\left(s^-\right) = \psi(s)\}$

Pour $\psi \in D, \|\psi\|_D = \sup\{|\psi\theta(\theta)| : \theta \in [-r, 0]\}$. et pour toute fonction continue x définie sur $[-r, b]\backslash\left\{t_1, \ldots, t_m\right\}$ et tout $t \in J : [0, b]$, on définit l'histoire de l'état de $t - r$ jusqu'à le temps présent par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in [-r, 0].$$

2.2 Résultats

Inspirer par les travaux [14] , on fait l'étude du problème (2.1) - (2.3) La définition de la solution faible du problème est comme suite :

Définition 2.1

La fonction $x \in PC([-r, b], E)$ est appelée une solution faible du problème si $x(t) = \phi(t) - g_t(x)$, pour tout $t \in [-r, 0], \Delta x\backslash_{x=x_k} = I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right), k = 1, 2, \ldots, m$. et tel que y *satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$x(t)=\begin{cases} S_\alpha(t)\left[\phi(0)-g_0(x)\right]+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,x(s))ds+\int_0^t S_\alpha(t-s)Bu(s)ds \quad t\in[0,t_1]\,; \\ S_\alpha\left(t-t_k\right)\prod_{i=1}^k S_\alpha\left(t_i-t_{i-1}\right)\left[\phi(0)-g_0(x)\right]+ \\ \sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha\left(t-t_k\right)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1}-t_j\right)S_\alpha\left(t_i-s\right)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]ds+ \\ \int_{t_k}^t S_\alpha(t-s)[f(s,x(s))+Bu(s)]ds+\sum_{i=1}^k S_\alpha\left(t-t_k\right)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1}-t_j\right)I_i\left(x\left(t_i^-\right)\right) \quad t\in\left(t_k,t_{k+1}\right). \end{cases}$$

Définition 2.2

Le problème est dit contrôlable sur l'intervalle J si pour toute condition non local $\phi\in E$, et $x_1\in E$ il existe un contrôle $u\in L^2(J,U)$ tel que la solution faible $x(t)du$ satisfait $x(b)=x_1$.

Notre résultat est basé sur le principe d'application contractante de Banach. Pour prouver la contrôlabilité du système , on introduit les hypothèses suivantes :

(H_1) A engendre un compact α-FOR $\left(S_{\alpha)_{t\geqslant 0}}\right.$ borné de manière exponentielle c'est à dire qu'il existe une constante $M\geqslant 1, w\geqslant 0$ tel que :

$$\|S_\alpha(t)\|\leqslant Me^{wt}\quad t\geqslant 0. \tag{2.4}$$

(H_2) La fonction $f: JD\longrightarrow E$ est continue et il existe une constante $N>0$, tel que :

$$\left\|f\left(t,x_1(t)\right)-f\left(t,x_2(t)\right)\right\|\leqslant N\left\|x_1-x_2\right\|,\ \text{pour tout } x_1,x_2\in D \tag{2.5}$$

(H_3) La fonction f est carathéodory.

(H_4) Les fonctions $I_k: E\longrightarrow E$ sont continues et il existe une constante $L>0$, tel que : $\left\|I_k\left(x_1\right)-I_k\left(x_2\right)\right\|\leqslant L\left\|x_1-x_2\right\|$, pour tout $x_1,x_2\in E,\quad k=1,2,\ldots,m$.

(H_5) La fonction $g_t: PC([-r,b],E)\longrightarrow E$ est continue par rapport à t, et il existe une constante $G>0$, tel que $\left\|g_t\left(x_1\right)-g_t\left(y_2\right)\right\|\leqslant G\left\|x_1-x_2\right\|$, pour tout $x_1,x_2\in PC([-r,b],E)$

(H_6) Les opérateurs linéaires $W_k : L^2([t_k, t_{k+1}), U) \longrightarrow E$ sont définis :

- $t \in [0, t_1]$:

$$W_1 u = \int_0^{t_1} S_\alpha(t-s)Bu(s)ds$$

  W_1 admet un opérateur inversible W_1^{-1} prend des valeurs dans $L^2([0, t_1), E) / K \operatorname{Ker} W_1$ et il existe une constante positive M_1 tel que $\left\|BW_1^{-1}\right\|_{L(E)} \leq M_1$.

- $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$W_{k+1}u = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k) \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i - s) Bu(s)ds + \int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)Bu(s)ds;$$

  W_{k+1} admettent des opérateurs inversibles W_{k+1}^{-1} qui prennent leurs valeurs dans $L^2([t_k, t_{k+1}), E) / \operatorname{Ker} W_{k+1}$ et il existe des constantes positives M_{k+1} tels que

$$\left\|BW_{k+1}^{-1}\right\|_{L(E)} \leq M_{k+1}$$

  Pour la construction de l'opérateur W et son inverse,voir[16]

Lemme 2.1

Le contrôle $u(t)$ est défini par :

$$u(t) = W_1^{-1}\left[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(x)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s) f(s, x(s))ds\right](t),$$

pour $t \in [0, t_1]$ et $Z \in PC(J, E)$.

Preuve. voir [14]page 75 □

Lemme 2.2

Le contrôle $u(t)$ est défini par :

$$u(t)=\left\{\begin{array}{c} W_{k+1}^{-1}\left[Z\left(t_{k+1}\right)-S_{\alpha}\left(t_{k+1}-t_{k}\right)\prod_{i=1}^{k}S_{\alpha}\left(t_{i}-t_{i-1}\right)\left(\phi(0)-g_{0}(x)\right)-\right.\\ \int_{t_{k}}^{t_{k+1}}S_{\alpha}\left(t_{k+1}-s\right)f(s,x(s))ds-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_{i}}S_{\alpha}\left(t_{k+1}-t_{k}\right)\prod_{j=i}^{k-1}S_{\alpha}\left(t_{j+1}-t_{j}\right)S_{\alpha}\left(t_{i}-s\right)\\ \left.f(s,x(s))ds-\sum_{i=1}^{k}S_{\alpha}\left(t_{k+1}-t_{k}\right)\prod_{j=i}^{k-1}S_{\alpha}\left(t_{j+1}-t_{j}\right)I_{i}\left(x\left(t_{i}^{-}\right)\right)\right](t),\end{array}\right.$$

pour $t\in[t_k,t_{k+1}]$ et $Z\in PC(J,E)$.

Preuve. voir [14]page 76 □

Remarque 2.1

on pose pour $t\in[0,t_1]$

$$C(s,x)=BW_1^{-1}\left[Z\left(t_1\right)-S_\alpha\left(t_1\right)\left(\phi(0)-g_0(x)\right)-\int_0^{t_1}S_\alpha\left(t_1-s\right)f(s,x(s))ds\right](s)$$

Depuis nos hypothèses, on a : si $x_1,x_2\in PC[J,E]$:

$$\left\|C\left(s,x_1\right)-C\left(s,x_2\right)\right\|=\left\{\begin{array}{l}\left\|BW_1^{-1}\left[Z\left(t_1\right)-S_\alpha\left(t_1\right)\left(\phi(0)-g_0\left(y_1\right)\right)-\int_0^{t_1}S_\alpha\left(t_1-s\right)f\left(s,x_1(s)\right)ds\right](s)\right.\\ \left.-BW_1^{-1}\left[Z\left(t_1\right)-S_\alpha\left(t_1\right)\left(\phi(0)-g_0\left(x_2\right)\right)-\int_0^{t_1}S_\alpha\left(t_1-s\right)f\left(s,y_2(s)\right)ds\right](s)\right\|\end{array}\right.$$

$$\leq\left\{\begin{array}{l}\left\|BW_1^{-1}\right\|\left(\left\|S_\alpha\left(t_1\right)\right\|\left\|g_0\left(x_1\right)-g_0\left(x_2\right)\right\|+\int_0^{t_1}\left\|S_\alpha\left(t_1-s\right)\right\|\right.\\ \left.\left\|f\left(s,x_2(s)-f\left(s,x_1(s)\right)\right\|ds\right)\end{array}\right.$$

$$\leq M_1\left[Me^{wt_1}G+NM\int_0^{t_1}e^{w(t_1-s)}ds\right]\|x_1-x_2\|$$

$$\leq M_1\left[Me^{wt_1}G+NMe^{wt_1}\int_0^{t_1}e^{-ws}ds\right]\|x_1-x_2\|$$

$$\leq M_1Me^{wt_1}\left(G-\frac{N}{w}\int_0^{t_1}(-w)e^{-ws}ds\right)\|x_1-x_2\|$$

$$\leq M_1Me^{wt_1}\left(G-\frac{N}{w}\left(e^{-wt_1}-1\right)\right)\|x_1-x_2\|$$

alors

$$\left\|C\left(s,x_1\right)-C\left(s,x_2\right)\right\|\leq\theta_1\left\|x_1-x_2\right\|$$

tel que $\theta_1 = M_1 M e^{wt_1}\left(G - \frac{N}{w}\left(e^{-wt_1} - 1\right)\right)$, $\theta_1 > 0$.

Remarque 2.2

on pose pour : $k = 2, 3, \ldots, m$

$$D_{k+1}(s,x) = \begin{cases} BW_{k+1}^{-1}\Big[Z\left(t_{k+1}\right) - S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha\left(t_i - t_{i-1}\right)\left((\phi(0) - g_0(x)\right) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha\left(t_{k+1} - s\right) \\ f(s,x(s))ds - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right) S_\alpha\left(t_i - s\right) f(s,x(s))ds \\ -\sum_{i=1}^{k} S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right) I_i\left(x\left(t_i^-\right)\right)\Big](s) \end{cases}$$

Dés les hypothèses proposées, on a :

$$\left\|D_{k+1}\left(s,x_1\right) - D_{k+1}\left(s,x_2\right)\right\| = \begin{cases} \|BW_{k+1}^{-1}\Big[Z\left(t_{k+1}\right) - S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha\left(t_i - t_{i-1}\right)\left((\phi(0)\right. \\ -g_0\left(x_1\right)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha\left(t_{k+1} - s\right) f\left(s, x_1(s)\right) ds - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right) S_\alpha\left(t_i - s\right) f\left(s, x_1(s)\right) ds - \sum_{i=1}^{k} S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right) I_i\left(x_1\left(t_i^-\right)\right)\Big](s) - \\ BW_{k+1}^{-1}\Big[Z\left(t_{k+1}\right) - S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha\left(t_i - t_{i-1}\right)\left((\phi(0)\right. \\ -g_0\left(x_2\right)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha\left(t_{k+1} - s\right) f\left(s, x_2(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right) S_\alpha\left(t_i - s\right) f\left(s, x_2(s)\right) ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right) I_i\left(x_2\left(t_i^-\right)\right)\Big](s)\| \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \left\|BW_{k+1}^{-1}\right\|\Big(\left\|S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\right\|\prod_{i=1}^{k}\left\|S_\alpha\left(t_i - t_{i-1}\right)\right\|\left\|g_0\left(x_1\right) - g_0\left(x_2\right)\right\| + \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}}\left\|S_\alpha\left(t_{k+1} - s\right)\right\|\left\|f\left(s, x_2(s)\right) - f\left(s, x_1(s)\right)\right\| ds + \\ \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\right\|\prod_{j=i}^{k-1}\left\|S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right)\right\| \\ \left\|S_\alpha\left(t_i - s\right)\right\|\left\|f\left(s, x_2(s)\right) - f\left(s, x_1(s)\right)\right\| ds + \sum_{i=1}^{k}\left\|S_\alpha\left(t_{k+1} - t_k\right)\right\| \\ \prod_{j=i}^{k-1}\left\|S_\alpha\left(t_{j+1} - t_j\right)\right\|\left\|I_i\left(x_2\left(t_i^-\right)\right) - I_i\left(x_1\left(t_i^-\right)\right)\right\|\Big) \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} M_{k+1}\Big(Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\prod_{i=1}^{k}Me^{w(t_i-t_{i-1})}G\left\|x_1-x_2\right\|+\int_{t_k}^{t_{k+1}}Me^{w(t_{k+1}-s)}N \\ \left\|x_1-x_2\right\|ds+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{w(t_{j+1}-t_j)}Me^{w(t_i-s)}N \\ \left\|x_1-x_2\right\|ds+\sum_{i=1}^{k}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{w(t_{j+1}-t_j)}L\left\|x_1-x_2\right\|\Big) \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} M_{k+1}\left(Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\left[Me^{wt_1}\cdot Me^{w(t_2-t_1)}\cdot Me^{w(t_3-t_2)}\ldots\ldots\right.\right. \\ \left.\cdot Me^{w(t_{k-1}-t_{k-2})}\cdot Me^{w(t_k-t_{k-1})}\right]G\left\|x_1-x_2\right\|+ \\ MNe^{wt_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}e^{-ws}ds\left\|x_1-x_2\right\|+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\left[Me^{w(t_{i+1}-t_i)}\right. \\ \left..Me^{w(t_{i+2}-t_{i+1})}\cdot Me^{w(t_{i+3}-t_{i+2})}\ldots.Me^{w(t_{k-1}-t_{k-2})}\cdot Me^{w(t_k-t_{k-1})}\right] \\ Me^{w(t_i-s)}N\left\|x_1-x_2\right\|ds\sum_{i=1}^{k}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\left[Me^{w(t_{i+1}-t_i)}\cdot Me^{w(t_{i+2}-t_{i+1})}\right. \\ \left.\left..Me^{w(t_{i+3}-t_{i+2})}\ldots.Me^{w(t_{k-1}-t_{k-2})}\cdot Me^{w(t_k-t_{k-1})}\right]L\left\|x_1-x_2\right\|\right) \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} M_{k+1}\Big(M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+MNe^{wt_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}e^{-ws}ds+ \\ \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}M^{k-i+2}e^{w(t_{k+1}-s)}Nds+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}L\Big) \\ \left\|x_1-x_2\right\| \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} M_{k+1}\left(M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+MNe^{wt_{k+1}}\left(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}}+\frac{1}{w}e^{-wt_k}\right)+\right. \\ \sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}N\left(\frac{-1}{w}e^{-wt_i}+\frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}}\right)+ \\ \left.\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}L\right)\left\|x_1-x_2\right\| \end{cases}$$

alors

$$\left\|D_{k+1}(s,x_1)-D_{k+1}(s,x_2)\right\|\leq\theta_{k+1}\left\|x_1-x_2\right\|$$

tel que $\theta_{k+1}=M_{k+1}\left(M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+MNe^{wt_{k+1}}\left(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}}+\frac{1}{w}e^{-wt_k}\right)+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}\right.$

$$\left.N\left(\frac{-1}{w}e^{-wt_i}+\frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}}\right)+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}L\right),\quad \theta_{k+1}>1.$$

Théorème 2.1

On suppose que les hypothèses $(H_1) - (H_6)$ sont satisfaites avec

$$\left(Me^{wt_1}G + M\left(N+\theta_1\right)\left(\frac{-1}{w}+\frac{1}{w}e^{wt_1}\right)\right) < 1$$

et

$$\left[M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G + \left(N+\theta_{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}\left(\frac{-1}{w}e^{-wt_i}+\frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}}\right) + \right.$$
$$\left. M\left(N+\theta_{k+1}\right)e^{wt_{k+1}}\left(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}}+\frac{1}{w}e^{-wt_k}\right) + L\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}\right] < 1,$$

alors le système (2.1) - (2.3) est contrôlable sur J.

Preuve. Soit $Z \in PC(J,E)$ une fonction arbitraire, maintenant pour transférer l'équation (2.1) de l'état initial à $Z(t)$, on considère le contrôle

$$u(t) = \begin{cases} W_1^{-1}\left[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(x)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)\,f(s,x(s))ds\right](t), \quad t\in[0,t_1] \\ W_{k+1}^{-1}\left[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})\left((\phi(0)-g_0(x)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)\right.\right. \\ f(s,x(s))ds - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\,S_\alpha(t_i-s)\,f(s,x(s))ds \\ \left.\left. - \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\,I_i\left(x\left(t_i^-\right)\right)\right)\right](t), \quad t\in(t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

on définit une application Ψ à partir $PC([-r,b],E)$ en soi même par :

$$t\in[0,t_1]:$$

$$\Psi x(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)\left[\phi(0)-g_0(x)\right] + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,x(s))ds + \int_0^t S_\alpha(t-s) \\ BW_1^{-1}\left[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(x)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)\,f(s,x(s))ds\right](s)ds. \end{cases}$$

$$t \in (t_k, t_{k+1}):$$

$$\Psi x(t)=\begin{cases} S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})[\phi(0)-g_0(x)]+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) \\ S_\alpha(t_i-s) f(s,x(s))ds+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i-s) \\ BW_{k+1}^{-1}\Big[Z(t_{k+1})-S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(y))- \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s) f(s,x(s))ds-\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) \\ I_i\left(x\left(t_i^-\right)\right)\Big](s)ds+\int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,x(s))ds+\int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)BW_{k+1}^{-1}\left[Z(t_{k+1})-\right. \\ S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(x))-\int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s) f(s,x(s))ds \\ \left.-\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i\left(x\left(t_i^-\right)\right)\right](s)ds+ \\ \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i\left(x\left(t_i^-\right)\right). \end{cases}$$

On note que Ψ est bien défini sur $PC[J,E]$.

Maintenant on montre que Ψ est une application contractante sur $PC(J,E)$: Pour $t \in [0,t_1]$, on a :

$$\|\psi(x_2)-\psi(x_1)\|=$$

$$\|S_\alpha(t)[\phi(0)-g_0(x_2)]+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,x_2(s))ds+\int_0^t S_\alpha(t-s)BW_1^{-1}$$

$$[Z(t_1)-S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(x_2))-\int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)f(s,x_2(s))ds](s)ds$$

$$-S_\alpha(t)[\phi(0)-g_0(x_1)]-\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,x_1(s))ds-\int_0^t S_\alpha(t-s)BW_1^{-1}$$

$$[Z(t_1)-S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(x_1))-\int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)f(s,x_1(s))ds](s)ds.]\|.$$

on a :

$$C(s,x_1)=BW_1^{-1}\left[Z(t_1)-S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(x_1))-\int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s) f(s,x_1(s))ds\right](s)$$

$$C(s,x_2)=BW_1^{-1}\left[Z(t_1)-S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(x_1))-\int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s) f(s,x_2(s))ds\right](s)$$

alors :

$$\|\psi(x_2)-\psi(x_1)\| =$$

$$\|S_\alpha(t)\left(g_0(x_2)-g(x_1)\right)+\int_0^t S_\alpha(t-s)\left(f(s,x_2(s))-f(s,x_1(s))\right)ds+\int_0^t S_\alpha(t-s)\left(c(s,x_1)-c(s,x_2)\right)ds\|$$

$$\|\psi x_2-\psi x_1\| \leq \begin{cases} \|S_\alpha(t)\|\left\|g_0\left(x_2\right)-g_0\left(x_1\right)\right\|+\int_0^t\|S_\alpha(t-s)\|\left\|f\left(s,x_2(s)\right)-f\left(s,x_2(s)\right)\right\|ds+ \\ \int_0^t\|S_\alpha(t-s)\|\left\|C\left(s,x_1\right)-C\left(s,x_2\right)\right\|ds. \end{cases}$$

D'aprés H_1 $\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{wt}, t\geq 0$,

D'aprés $H_5\|g(x_2)-g(x_1)\| \leq G\|x_2-x_1\|$,

D'aprés H_1 $\|S_\alpha(t-s)\| \leq Me^{w(t-s)}, (t-s)\geq 0$,

D'aprés H_2 $\|f(s,x_2(s))-f(s,x_1(s))\| \leq N\|x_2-x_1\|$,

D'aprés la remarque 1

$$\|c(s,x_2)-c(s,x_1)\| \leq \theta_1\|x_2-x_1\|,$$

$$\|\psi x_2-\psi x_1\| \leq Me^{wt}G\left\|x_2-x_1\right\|+\int_0^t Me^{w(t-s)}N\left\|x_2-x_1\right\|ds+\int_0^t Me^{w(t-s)}ds\theta_1\left\|x_2-x_1\right\|,$$

$$\|\psi x_2-\psi x_1\| \leq \left(Me^{wt}G+MNe^{wt}\left(\frac{-1}{w}e^{-wt}+\frac{1}{w}e^{0}\right)+M\theta_1e^{wt}\left(\frac{-1}{w}e^{-wt}+\frac{1}{w}e^{0}\right)\right)\left\|x_2-x_1\right\|,$$

$$\|\psi x_2-\psi x_1\| \leq \left(Me^{wt}G+M\left(N+\theta_1\right)\left(\frac{-1}{w}+\frac{1}{w}e^{wt}\right)\right)\left\|x_2-x_1\right\|,$$

alors pour $t\in[0,t_1]$

$$\|\psi y_2-\psi y_1\| \leq \left(Me^{wt_1}G+M\left(N+\theta_1\right)\left(\frac{-1}{w}+\frac{1}{w}e^{wt_1}\right)\right)\|y_2-y_1\|$$

on prend

$$Me^{wt_1}G+M\left(N+\theta_1\right)\left(\frac{-1}{w}+\frac{1}{w}e^{wt_1}\right)<1 \tag{1}$$

Pour chaque $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on a :

$$\|\psi x_2 - \psi x_1\| \leq \begin{cases} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod_{i=1}^{k} \|S_\alpha(t_i - t_{i-1})\| \|g_0(x_2) - g_0(x_1)\| + \\ \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\| \|S_\alpha(t_i - s)\| \\ \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\| \|S_\alpha(t_i - s)\| \\ \|D_{k+1}(s, x_2) - D_{k+1}(s, x_1)\| ds + \int_{t_k}^{t} \|S_\alpha(t-s)\| \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds + \\ \int_{t_k}^{t} \|S_\alpha(t-s)\| \|D_{k+1}(s, x_2) - D_{k+1}(s, x_1)\| ds + \sum_{i=1}^{k} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\| \\ \left\|I_i\left(x_2\left(t_i^-\right)\right) - I_i\left(x_1\left(t_i^-\right)\right)\right\| \end{cases}$$

$$\|\psi x_2 - \psi x_1\| \leq \begin{cases} Me^{w(t-t_k)} \prod_{i=1}^{k} Me^{w(t_i - t_{i-1})} G \|x_2 - x_1\| + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{w(t-t_k)} \\ \prod_{j=i}^{k-1} Me^{w(t_{j+1}-t_j)} Me^{w(t_1 - s)} ds N \|x_2 - x_1\| + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{w(t-t_k)} \\ \prod_{j=i}^{k-1} Me^{w(t_{j+1}-t_j)} Me^{w(t_1 - s)} ds \theta_{k+1} \|x_2 - x_1\| + \\ \int_{t_k}^{t} Me^{w(t-s)} ds N \|x_2 - x_1\| + \int_{t_k}^{t} Me^{w(t-s)} ds \theta_{k+1} \|x_2 - x_1\| + \\ \sum_{i=1}^{k} Me^{w(t-t_k)} \prod_{j=i}^{k-1} Me^{w(t_{j+1}-t_j)} L \|x_2 - x_1\| \end{cases}$$

$$\|\psi x_2 - \psi x_1\| \leq \begin{cases} \Big[M^{k+1} e^{wt} G + (N + \theta_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2} e^{wt} \left(\frac{-1}{w} e^{-wt_1} + \frac{1}{w} e^{-wt_{1-1}} \right) + \\ M(N + \theta_{k+1}) e^{wt} \left(\frac{-1}{w} e^{-wt} + \frac{1}{w} e^{-wt_k} \right) + L \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(t-t_i)} \Big] \|x_2 - x_1\| \end{cases}$$

alors pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\|\psi x_2 - \psi x_1\| \leq \begin{cases} \Big[M^{k+1} e^{wt_{k+1}} G + (N + \theta_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2} e^{wt_{k+1}} \left(\frac{-1}{w} e^{-wt_i} + \frac{1}{w} e^{-wt_{i-1}} \right) + \\ M(N + \theta_{k+1}) e^{wt_{k+1}} \left(\frac{-1}{w} e^{-wt_{k+1}} + \frac{1}{w} e^{-wt_k} \right) + L \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(t_{k+1}-t_i)} \Big] \|x_2 - x_1\| \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} &\Bigg[M^{k+1} e^{wt_{k+1}} G + (N + \theta_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2} e^{wt_{k+1}} \left(\frac{-1}{w} e^{-wt_i} + \frac{1}{w} e^{-wt_{i-1}} \right) + \\ &M(N + \theta_{k+1}) e^{wt_{k+1}} \left(\frac{-1}{w} e^{-wt_{k+1}} + \frac{1}{w} e^{-wt_k} \right) + L \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(t_{k+1}-t_i)} \Bigg] < 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Puisque et sont satisfaites, Par conséquent Ψ est une application contractante.

Donc, Ψ admet un point fixe unique x tel que $\Psi x(t) = x(t)$. Alors ce point fixe est alors une solution du système (2.1) - (2.3), et clairement $x(b) = Z(b)$, ce qui implique que le système est contrôlable sur J, ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Chapitre 3

l'existence de solution des équations d'ordre fractionnaire temporelle par la méthode FRDTM

3.1 Introduction

La méthode de transformation différentielle réduite (FRDTM) a été proposée pour la première fois par le mathématicien turc Yildir Keskin,en 2009. Cette méthode est applicable à une large classe de problèmes non-linéaires avec des approximations qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe . Dans ce paragraphe, nous présentons la méthodologie de la méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (FRDTM) . Considérons une fonction de deux variables$u(x,t)$ qui est analytique et k$-$fois continuellement différentiable par rapport à la variable d'espace x et au temps t, supposons qu'elle peut être représentée comme un produit de deux fonctions variable unique c'est-à-dire$u(x,t) = f(x).g(t)$, puis à partir des propriétés de la méthode de transformation différentielle unidimensionnelle, la fonction peut être représentée comme suit :

$$u(x,t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G(j)t^j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} U(i,j)x^i t^j m$$

où $U(i,j) = F(i)G(j)$est appelée le spectre de $u(x,t)$.[13]

3.2 FRDTM pour la résolution des équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle

On considère l'équation aux dérivées partielles non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$$^cD_t^{n\alpha}u(x,t) + Au(x,t) + Bu(x,t) = f(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$\frac{\partial u^i(x,0)}{\partial t^i} = ui(x), i = 0,1,2,...,n{-}1, \tag{3.2}$$

où $^cD_t^{n\alpha} = \underbrace{^cD_t^{\alpha c}D_t^{\alpha}...^cD_t^{\alpha}}_{n-fois}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $n\alpha, on{-}1 < n\alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$, A est un opérateur linéaire, B est un opérateur non-linéaire et f(x, t) est le terme source. En appliquant FRDTM à l'équation , nous obtenons la formule de relation de récurrence suivante :

$$U_{k+n}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+n\alpha+1)}[F_k(x){-}AU_k(x){-}BU_k(x)], n \geq 1, \tag{3.3}$$

où $U_{k+n}(x), AU_k(x), BU_k(x)$ et $F_k(x)$ sont les transformations des termes $^cD_t^{n\alpha}$ t u(x, t), Au(x, t), Bu(x, t) et f(x, t) respectivement. Maintenant, en utilisant FRDTM sur les conditions initiales , nous obtenons :

$$U_0(x) = u_0(x), U_1(x) = u_1(x), ..., U_{n-1}(x) = u_{n-1}(x). \tag{3.4}$$

Définition 3.1

la solution approximation est définie par :

$$\widetilde{U}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) t^{k\alpha}. \tag{3.5}$$

Par conséquent, la solution exacte du problème est donnée par :

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{U}_n(x,t). \tag{3.6}$$

3.3 Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaires

Définition 3.2

Si $u(x,t)$ est analytique et continuellement différentiable par rapport à la variable d'espace x et au temps t, alors la transformée différentielle réduite fractionnaire de u(x, t) est donnée par :

$$U_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x,t) \right]_{t=t_0} \tag{3.7}$$

où α est un paramètre décrivant l'ordre de la dérivée fractionnaire temporelle.

Définition 3.3

La transformée différentielle réduite fractionnaire inverse de $U_k(x)$ est définie par :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)(t-t_0)^{k\alpha}. \tag{3.8}$$

En combinant les équations et, nous avons :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x,t)\right]_{t=t_0} (t-t_0)^{k\alpha}. \tag{3.9}$$

En particulier, pour $t_0 = 0$, l'équation devient :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x,t)\right]_{t=t_0} t^{k\alpha}. \tag{3.10}$$

3.4 Les opérations fondamentales du FRDTM

[12] Soit $U_k(X), V_k(X)$ et $W_k(X)$ être la transformée différentielle réduite fonctionnelle de la fonction u(X,t),v(X,t) et w(X,t), respectivement alors :

1 si w(X,t)= $\lambda u(X,t) + \nu v(X,t)$,

alors

$W_k(X) = \lambda U_k(X) + \nu V_k(X), \lambda, \nu \in \mathbb{R}$.

2 si w(X,t)=$u(X,t)v(X,t)$.

alors

$W_k(X) = \sum_{r=0}^{k} U_r(X) V_{k-r}(X)$.

3 si w(X,t) =$u^1(X,t)u^2(X,t)...u^n(X,t)$

$$W_k(X) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} ... \sum_{k_2=0}^{k3} \sum_{k_1=0}^{k2} U^1_{k_1}(X) U^2_{k_2-k_1}(X)$$
$$x...x U^{n-1}_{k_{n-1}-k_{n-2}}(X) U^n_{k-k_{n-1}}(X).$$

4 si w(X,t)=$\frac{\partial^n}{\partial x^n} u(X,t)$,

alors

w(X,t)=$\frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}} u_k(X,t)$, *5 si w(X,t)=*$\frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}}u(X,t)$*,*

alors

$$W_k(X) = \frac{\Gamma(k\alpha + n\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+n}(X), n = 1, 2, ...$$

Exemple 3.1

Considérons l'équation de Harry Dym d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$$^{c}D_t^{n\alpha} u(x,t) = u^3(x,t) + u_{xxx}(x,t), 0 < \alpha \leq 1, t > 0. \tag{3.11}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2x}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3.12}$$

où a et b sont des constantes. La solution exacte de l'équation avec la condition initiale est donnée par :

$$u(x,0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}(x + bt)\right)^{\frac{3}{2}}$$

Nous appliquons la méthode FRDTM à l'équation avec la condition initiale est donnée par :

$$U_{k+1}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)} \left[\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}\sum_{i=0}^{s} u_i(x)u_{s-i}(x)U_{r-s}(x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)\right]. \tag{3.13}$$

Notons que

$$U_0(x) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3.14}$$

L'application de la méthode FRDTM

$$U_1(x) = \frac{-\Gamma(\alpha)b^{3/2}}{\Gamma(\alpha+1)\left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{1/3}}$$

$$U_2(x) = \frac{-\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)b^3}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{4/3}}$$

$$U_3(x) = \frac{2^{4/3}b^{9/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha)(15\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+1)-32\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+1))}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)(2\alpha-3\sqrt{bx})^{7/3}}$$

En prenant la transformation différentielle réduite fractionnaire inverse de $\{U_k(x)\}_{k=0}^{n}$ nous obtenons la solusion approximative do léquuation suivante :

$$u_(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{u}_n(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k(x)t^{k\alpha}$$

$$= \left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\Gamma(\alpha)b^{3/2}}{\Gamma(\alpha+1)\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{1/3}}t^{\alpha}$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)b^3}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{4/3}}t^{2\alpha}$$

$$+\frac{2^{4/3}b^{9/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha)(15\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+1)-32\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+1))}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)(2\alpha-3\sqrt{bx})^{7/3}}t^{3\alpha} + \dots$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$,$a = 4, b = 1$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^{k/2}$$

$$u(x,t) = \left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{3/2} - 2\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{-1/3} t^{1/2} - \left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{-4/3} t$$

$$-2^{\frac{10}{3}}\left(2a-3\sqrt{b}x\right)^{\frac{-7}{3}} t^{3/2} + \dots = \left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}(x+bt)\right)^{3/2}$$

$$u(x,t) = \left(4-\frac{2}{3}x\right)^{3/2} - 2\left(4-\frac{2}{3}x\right)^{-1/3} t^{1/2} - \left(4-\frac{2}{3}x\right)^{4/3} t$$

$$-2^{10/3}(8-3x)^{-7/3}t^{3/2}+\cdots=\left(4-\frac{2}{3}(x+t)\right)^{3/2}$$

Pour $\alpha=\frac{4}{5}$,$a=4,b=1$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)t^{4k/5}$$

$$u(x,t)=\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{3/2}-\frac{5}{4}\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{-1/3}t^{4/5}-\frac{25}{64}\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{-4/3}t^{8/5}$$

$$-2^{4/3}\frac{125}{192}\left(2a-3\sqrt{b}x\right)^{\frac{-7}{3}}t^{12/5}+\cdots=\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}(x+bt)\right)^{3/2}$$

$$u(x,t)=\left(4-\frac{3}{2}x\right)^{3/2}-\frac{5}{4}\left(4-\frac{3}{2}x\right)^{-1/3}t^{4/5}-\frac{25}{64}\left(4-\frac{3}{2}x\right)^{-4/3}t^{8/5}$$

$$-2^{4/3}\frac{125}{192}\left(8-3x\right)^{\frac{-7}{3}}t^{12/5}+\cdots=\left(4-\frac{3}{2}(x+t)\right)^{3/2}$$

Pour $\alpha=1$,$a=4,b=1$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)t^{k\alpha}$$

$$u(x,t)=\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{3/2}-b^{3/2}\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{-1/3}t-\frac{b^3}{4}\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{-4/3}t^2$$

$$-\frac{b^{9/2}}{6}\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}x\right)^{\frac{-7}{3}}t^3+\cdots=\left(a-\frac{3\sqrt{b}}{2}(x+bt)\right)^{3/2}$$

$$u(x,t)=\left(4-\frac{3}{2}x\right)^{3/2}-\left(4-\frac{3}{2}x\right)^{-1/3}t-\frac{1}{4}\left(4-\frac{3}{2}x\right)^{-4/3}t^2$$

$$-\frac{1}{6}\left(4-\frac{3}{2}x\right)t^3+\cdots=\left(4-\frac{3}{2}(x+t)\right)^{3/2}$$

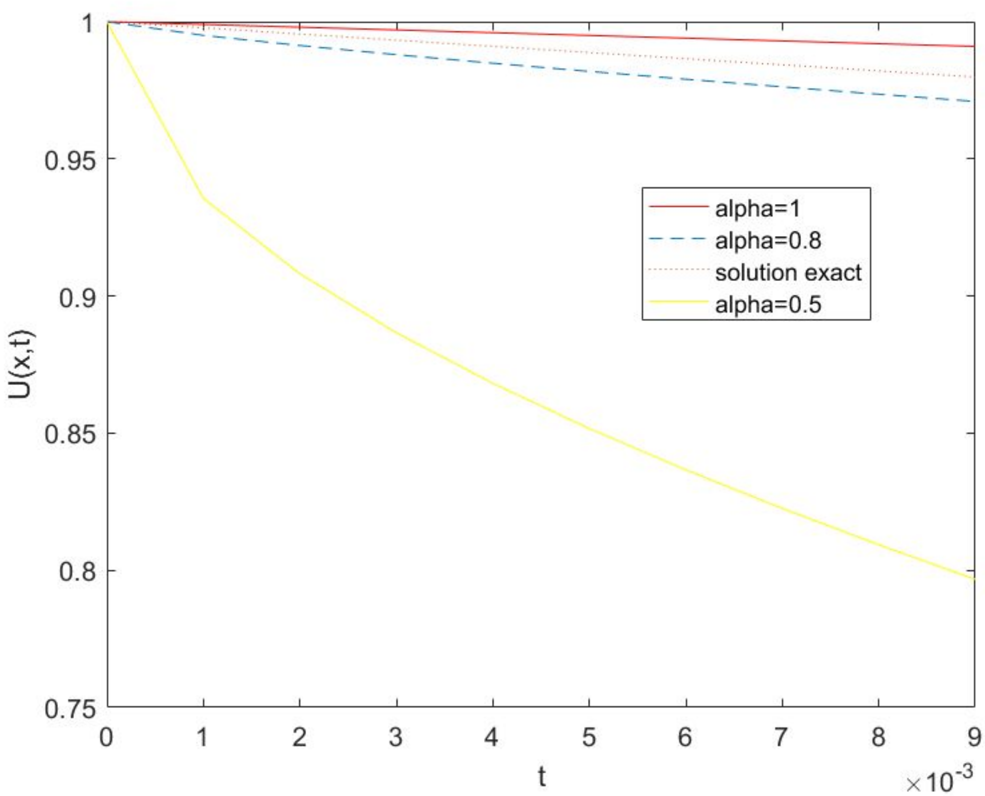

FIG. 3.1 : – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM de l'équation avec a = 4, b = 1 et x = 2.

t	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.5$	Solution exacte
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.001	0.9990	0.9950	0.9356	0.9978
0.002	0.9980	0.9913	0.9081	0.9955
0.003	0.9970	0.9880	0.8866	0.9933
0.004	0.9960	0.9849	0.8682	0.9910
0.005	0.9950	0.9819	0.8517	0.9888
0.006	0.9940	0.9790	0.8366	0.9865
0.007	0.9930	0.9763	0.8225	0.9843
0.008	0.9920	0.9736	0.8093	0.9821
0.009	0.9910	0.9709	0.7967	0.9798

TAB. 3.1 : – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation avec a = 4, b = 1 et x = 2.

Conclusion

Chapitre I : Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notions de base que nous allons utiliser dans les chapitres pour la bonne compréhension et relatif à notre théme .
Chapitre II : Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions faibles d'équation diérentielle fractionnaire semi-linéaires impulsives avec conditions non-locales, et avec terme de de contrôlabilité à l'utilisation du principe d'application contractante de Banach.

Chapitre III : Le dernier chapitre représentate l'existence de solution des équations d'ordre fractionnaire temporelle par la méthode transformation différentielle réduit fractionnaire(FRDTM).

Bibliographie

[1] Khalida Aissani and Mouffak Benchohra. Controllability of impulsive fractional differential equations with infinite delay. *Libertas Mathematica*, 33(2) :47–65, 2013.

[2] Krishnan Balachandran and Rathinasamy Sakthivel. Controllability of semilinear functional integrodifferential systems in banach spaces. *Kybernetika*, 36(4) :465–476, 2000.

[3] Chuang Chen and Miao Li. On fractional resolvent operator functions. In *Semigroup Forum*, volume 80, pages 121–142. Springer, 2010.

[4] Fouzia CHITA. *Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire*. PhD thesis, Université d'Oran1-Ahmed Ben Bella, 2011.

[5] Madjda Djaballah. *Approximations des équations différentielles d'ordre fractionnaires*. PhD thesis, UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF-M'SILA-FACULTE MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE, 2019.

[6] Hacene DJEDDI, Abdeldjalil SLAMA, et al. *Sur la solution numérique d'équations différentielles d'ordre fractionnaire*. PhD thesis, universite Ahmed Draia-ADRAR, 2020.

[7] Meriem Guechi. Résolution de l'équation de fitzhugh-nagumo d'ordre fractionnaire moyennant la méthode d'expansion de riccati. 2020.

[8] Hadda Hammouche, Mouna Lemkeddem, Kaddour Guerbati, and Khalil Ezzinbi. Existence results for some impulsive partial functional fractional differential equations. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(04) :2050074, 2020.

[9] Medjekal Hamza. *Existence et unicité de la solution d'une équation diffentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans espace de banach.* PhD thesis, Université Badji Mokhtar, 2015.

[10] Belgacem Herissi. *Identification et commande des systèmes basés sur les équations d'ordre fractionnaire.* PhD thesis, 2021.

[11] Lotfi KASMI. *Contribution à l'étude de quelques problèmes fractionnaires àvec des conditions non locales.* PhD thesis, Université Kasdi Merbah Ouargla.

[12] A Khalouta and A Kadem. A new representation of exact solutions for nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 19(2) :319–330, 2019.

[13] Ali Khalouta. *Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques : extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire.* PhD thesis, 2019.

[14] Mouna Lemkeddem. *Sur l'existence de solutions de certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.* PhD thesis, Université de mohamed kheider biskra, 2021.

[15] Adjimi Lobna. Traitement numériques des équations différentielles d'ordre fractionnelle. 2018.

[16] MD Quinn and N Carmichael. An approach to non-linear control problems using fixed-point methods, degree theory and pseudo-inverses. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 7(2-3) :197–219, 1985.

[17] HAROUN RAMDANI. Processus stochastique d'ordre fractionnaire : Existence, unicité et contrôlabilité. 2020.

[18] Chokkalingam Ravichandran and Dumitru Baleanu. On the controllability of fractional functional integro-differential systems with an infinite delay in banach spaces. *Advances in Difference Equations*, 2013:1–13, 2013.

[19] Mahmoud S Rawashdeh. A reliable method for the space-time fractional burgers and time-fractional cahn-allen equations via the frdtm. *Advances in Difference Equations*, 2017:1–14, 2017.

[20] CHibani Saidou. *Résolution numérique de quelques équations Différentielles d'ordre non entier*. PhD thesis, Université Kasdi Merbah Ouargla.

[21] R Sakthivel and QH Choi. A study on controllability of semilinear integrodiferential systems in banach spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 47(4-5) :519–527, 2004.

[22] Amar Si Ammour. *Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire*. PhD thesis, Université Mouloud Mammeri, 2011.

[23] Brajesh K Singh and Vineet K Srivastava. Approximate series solution of multi-dimensional, time fractional-order (heat-like) diffusion equations using frdtm. *Royal Society Open Science*, 2(4) :140511, 2015.

[24] Brahim Tellab. Résolution des équations différentielles fractionnaires. 2018.

[25] Nutan Kumar Tomar and JAYDEV Dabas. Controllability of impulsive fractional order semilinear evolution equations with nonlocal conditions. *Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications*, 5(2012) :57–67, 2012.