République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités et Statistiques

Par :

Haddad Ikram

Titre :

Sur Le Problème De Contrôle Relaxé

Membres du Comité d'Examnen :

SAOULI Mostapha Abdelouahab	MCB	UKM, Ouargla	Président
BEN BRAHIM Radhia	MCB	UKM, Ouargla	Encadreur
MANSOUL Brahim	MAA	UKM, Ouargla	Examinateur

JUIN 2023

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ des MATHEMATIQUES et des SCIENCES de la MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités et Statistiques**

Par :

Haddad Ikram

Titre :

Sur le problème de contrôle relaxé

Membres du Comité d'Examnen :

Dr.	**SAOULI Mostapha Abdelouahab**	UKMO	**Président**
Dr.	**BEN BRAHIM Radhia**	UKMO	**Encadreur**
Dr.	**MANSOUL brahim**	UKMO	**Examinateur**

Juin 2023

Dédicace

Je dédiece modeste travail :

À mon cher pére "$\mathcal{A}hmed$", que Dieu le protége, et à ceux qui m'ont soutenu dans la vie, et à ceux qui ont étaient éveillés et fatigue pour se reposer, au reste de mes yeux et de mon sœur, ma chère mère " $\mathcal{F}ouzia$ ", Dieu allonge sa vie, en fait une tente au-dessus de nos tete.

À mes belles soeurs : Architecte Kaowter , Khadidja et Liliane .

À mes cher fréres : Mohammed laid , Raïd et Iyad .

À mes chéres amies : Samia , Nour , Ilham , Safa et chahrazad

REMERCIEMENTS

*J*e tiens premièrement à me prosterner, remerciant «**Allah**» le tout puissant de m'avoir donné le force et la volonté pour terminer ce travail.

Je tiens à remercies vivement tous mes professeurs.

Je remercie mon encadreur **Dr.BENBRAHIM Radhia** ce projet et pour son encadrement, je le remercie vivement pour son écote, son aide et pour ses conseils.

Ainsi, je remercie les membres du jury **Dr. SAOULI Mostapha Abdelouahab** et **Dr. MANSOUL Ibrahim** qui ont acceptent d'évaluer mon projet, je leurs présent toute mesgratitudes et mes profonds respects.

Je souhaite exprimer enfin ma gratitudes et mes vifs remerciments à toute la famille et mes amis pour leurs soutien

Merci à tout

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et de la sciences et de façon plus générale dans tout les domaines utilisant les applications des mathématiques surtout dans la finance,

Dans ce travail, nous sommes intéressès aux problèmes de contrôle optimal pour les système gouvernées par des équations différentielles stochastiques de type champ moyen.de la forme suivant

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}(\Psi(X_t)), u_t)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}(\Phi(X_t))dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

où W_t un mouvement Brownien défni dans un espace de probabilité$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et b, σ sont des fonctions mesurables.

L'objectif du contrôller est de minimiser le coût $J(u)$ sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles. La fonction de coût est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}(\int_0^T h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t)), u_t)dt) + g(X_T, \mathbb{E}\lambda(X_T)).$$

Ce mémoire est composé à trois chapitres :

Chapitre 1 : Dans le premier chapitre, on donne un petit rappel sur le calcul stochastique : les processus stochastiques,filtation, mesurabilité, espérance conditionnelle, mouvement Brownien, Martingale, intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques, et quelques theorémes et inégalités qui sont nécessaires pour la suite de ce mèmoire

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, on étude un type des équations différentielles stochastiques,

ce type s'appel de champ moyen, on va présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des systèmes gouvernés par des EDS de type champ moyen.
chapitre 3 : Dans le troisième chapitre nous considérons le problème d'existence de contrôle optimal relaxé pour équations différentielles stochastiques de type champ moyen dans le ou l'ensemble des contrôles admissibles n'est pas convexe. La preuve est basée sur des résultats de tension des processus d'éfinissant le problème de controle et le théorème de représentation de Skorokhod.

Chapitre 1

Généralités de calcule stochastique

Dans ce chapitre, nous rappellons les concepts de base de la théorie du calculs stochastique,en suite nous rappellons l'intégrale stochastique et les équation différentielles stochastiques(EDS).

1.1 Tribu

[12], [9]

Définition 1.1.1 *Une tribu sur* Ω *est une famille* $\mathcal{F}$ *de sous ensemble de* Ω *. si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) $\phi \in \mathcal{F}$

ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

en particulier :$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.*de même ,*$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

Remarque 1.1.1 *Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu, on notera* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 1.1.2 *La tribu engendrée par une famille d'ensembles* $\mathcal{A}$ *est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note* $\sigma(\mathcal{A})$ *. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant* $\mathcal{A}$.

1.1.1 Mesurabilité

Définition 1.1.3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ε) *deux espaces mesurables .Une application* f *de* Ω *dans* E *est dite* $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ *mesurable si* $\forall A \in \varepsilon,\ f^{-1}(A) \in \mathcal{F},$ *où*

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / f(\omega) \in A\}$$

1.1.2 Espace de probabilités

Définition 1.1.4 *On appelle un espace de probabilité, tout triple* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où* Ω *est un ensemble ,* $\mathcal{F}$ *est une tribu sur* Ω *et* $\mathbb{P}$ *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*.*

Définition 1.1.5 *L'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est dit complet si* $M \subset \mathcal{F}$*telle que* M *la famille de toute les ensemles négligable de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1.1.3 Variable aléatoire

Définition 1.1.6 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace de mesurable .Une variable aléatoire réele* X *est une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *tel que*

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(A) \in \mathcal{F}; X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

1.2 Processus Stochastique

[9], [13]

Définition 1.2.1 *Une filtration sur un espace mesurable* $(\Omega\ , \mathcal{F})$*, c'est une famille* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *croissante au sens de l'inclusion de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*, c-à-d :*

$$\forall s \leq t \Longrightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

On dit alors que $(\Omega\ , \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé filtré.*

Définition 1.2.2 *Soit t un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par t et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille* $(X_t)_{t\in T}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega\ ,\mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *pour tout* $t\in T, X_t$ *est un variable aléatoire.*

Définition 1.2.3 *Un processus* X *est mesurable si l'application* $(t,\omega)\to X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R}_+\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.2.4 *Un processus* X *est adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $_t$ *est* $\mathcal{F}_t$*–mesurable.*

Définition 1.2.5 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t\to X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω.

Définition 1.2.6 *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.2.7 *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t\geq 0$*, l'application* $(s,\omega)\to X_s(\omega)$ *de* $[0,t]\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0,t])\otimes\ \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.2.1 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Définition 1.2.8 *Un processus stochastique* X *on associe sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^x$*, c'est à dire la famille croissante de tribus* $\mathcal{F}_t^x=\sigma\left\{X_s,s\leq t\right\}$.

Remarque 1.2.1 *Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.*

1.3 Mouvement Brownien

[13]

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},\left\{\mathcal{F}_t\right\}_t,\mathbb{P})$

Définition 1.3.1 *On appelle mouvement brownien un processus stochastique* $(W_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles tel que*

– *Continuité :* $\mathbb{P}$*-p.s la fonction* $t \rightarrow W_t(\omega)$ *est une fonction continue .*

– *Indépendance des accroissement : si* $s \leq t$ *,* $W_t - W_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s = \sigma(W_n; n \leq s)$ *est de la loi gaussienne centrée de variance* $(t-s)$*.*

– $W_0 = 0, \mathbb{P} - \text{p.s.}$

Remarque 1.3.1 *On dit qu'un mouvement brownien est dit "* ***standard*** *" si* $W_0 = 0, \mathbb{P}-$ p.s $\mathbb{E}[W_t] = 0$ *et* $\mathbb{E}[W_t^2] = t$*.*

Dans la suite si on parlera un mouvement brownien standard.

1.4 Esperance conditionnelle

[9]

Définition 1.4.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité ,*X *une variable aléatoire réelle intégrable et* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$*.Il existe une unique variable aléatoire réelle* Z*, telle que :*

– Z *est* $\mathcal{G}$*-mesurable .*

– Z *est intégrable .*

– $\mathbb{E}\left[XU\right] = \mathbb{E}\left[ZU\right]$, $\forall$ *v.a* U $\mathcal{G}$*-mesurable et borné*

Z *est noté* $\mathbb{E}\left[X/\mathcal{G}\right]$ *est appellé espérance conditionnelle de* X *par rapport à* $\mathcal{G}$

Définition 1.4.2 *Soit* Y *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, on a :*

$$\mathbb{E}\left[X/Y\right] = \mathbb{E}\left[X/\sigma(Y)\right]$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

- Linéarité si $X, Y \in L^1(\Omega, \mathbb{P}), \forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[aX + bY/G] = a\mathbb{E}[X/G] + b\mathbb{E}[Y/G]$$

- Croissance :

$$X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}[X/G] \leq \mathbb{E}[Y/G]$$

- espérance :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/G]] = \mathbb{E}[X].$$

- Si X est G-mesurable alors :

$$\mathbb{E}[X/G] = X$$

- Si Y est une variable aléatoire G-mesurable alors :

$$\mathbb{E}[XY/G] = Y\mathbb{E}[X/G]$$

- Si X indépendant de G alors :

$$\mathbb{E}[X/G] = \mathbb{E}[X]$$

- Soient G, K deux sous tribus de $\mathcal{F}$, si $K \subset G$, on a :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/G]/K] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/K]/G] = \mathbb{E}[X/K]$$

- Si X variable aléatoire telle que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), p \geq 1$ alors :

$$\|\mathbb{E}[X/G]\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^p}$$

- L'espérance conditionnelle est dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.5 Martingale

[5]

Définition 1.5.1 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique définit sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est intégrable $(\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty)$ et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \forall t \geq 0$ alors :*

– *$(X_t)_{t\geq 0}$ est une **martingale** par rapport à filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s \quad \forall 0 \leq s < t$$

– $(X_t)_{t\geq 0}$ est une **sur-martingale** par rapport à filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s \quad \forall 0 \leq s < t$$

– $(X_t)_{t\geq 0}$ est une **sous-martingale** par rapport à filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s \quad \forall 0 \leq s < t$$

Proposition 1.5.1 – *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est constante ,telle que :*

$$\forall t \geq 0 : \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$$

– Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sur-martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est décroissante.

– Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sus-martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est croissante.

1.6 Temps d'arrêt

[9]

Définition 1.6.1 *Une variable aléatoire τ à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si tout $t \geq 0$ on a '$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$*

Remarque 1.6.1 *On associe à un temps d'arrêt τ une tribu que on note $\mathcal{F}_t$, définite par*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

1.7 Intégrale Stochastique

[15], [10], [13]

Définition 1.7.1 *L'intégrale stochastique est intégrale sur un processus stochastique sous la forme suivante :*

$$\int_0^t X_s dW_s$$

où (W_t) est un Mouvement brownien

Propriétés :

1. Linéairité :$\forall a, b \in \mathbb{R}$ et X, Y deux processuses stochastiques ,alors :

$$\int_0^T (aX_s + bY_s) dW_s = a \int_0^T X_s dW_s + b \int_0^T Y_s dW_s$$

2. Si $\int_0^T \mathbb{E}[X_s^2] dW_s < \infty$ alors $\forall t \leq T$:

$$\mathbb{E}[\int_0^T X_s dW_s] = 0$$

3. Isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}[(\int_0^T X_s dW_s)^2] = \mathbb{E}(\int_0^T X_s^2 ds)$$

4. Additivité pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$:

$$\int_s^u X_s dW_s + \int_u^t X_s dW_s = \int_s^t X_s dW_s$$

5. Propriété du martingale :

$$\mathbb{E}[\int_0^t X_s dW_s|\mathcal{F}_u] = \int_0^u X_s dW_s$$

1.7.1 Processus d'Itô

Définition 1.7.2 *On dit que* (X_t) *est un* $\mathcal{F}_t$ *processus d'Itô à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *si pour tout* $t \geq 0$ *il peut s'écrire*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Et la forme differentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

$(b_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté telle que :

$$\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty$$

$(\sigma_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté telle que :

$$\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < +\infty$$

1.7.2 Formule d'Itô

Définition 1.7.3 *On définie un processus d"Ito* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

1. Si f une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s \qquad \forall t \leq T$$

2 Si $f(t,x)$ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à t, de $\mathcal{C}^2$ par rapport à X alors :

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(s,X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

3 Si X et Y deux processus d'ito,f un fonction dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ alors :

$$\begin{aligned} f(X_t,Y_t) = f(X_0,Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(X_s,Y_s)dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(X_s,Y_s)dX_s \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(X_s,Y_s)dY_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s,Y_s)d\langle X_s, Y_s\rangle \end{aligned}$$

Proposition 1.7.1 ***(Inégration par parties) :*** *Si X et Y deux processus d'Itô , alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + d\langle X, Y\rangle_s$$

1.8 Théorèmes Générales

[13], [3], [1], [4]

Théorème 1.8.1 ***(Bukholder-Davis-Gundy"BDG")***

Soit $p > 0$ un réel . les constant c_p et C_p telles que pour toute martingale continue X ,nulle en 0.

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}]$$

Remarque 1.8.1 *En particulier ,si* $T > 0$ *,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{p/2}]$$

Théorème 1.8.2 ***(Lemme de Gronwall)***

Si f *est une fonction continue, telle que pour tout* $0 \leq t \leq T$ *:*

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)ds \qquad avec \qquad b \geq 0$$

alors :

$$f(T) \leq a(1 + \exp(bt)).$$

Théorème 1.8.3 ***(Inégalité de Young)***

On dit que $p, q \in [1, \infty[$ sont deux exposants conjugués si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}, (ab > 0)$$

Théorème 1.8.4 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz) :*** $\forall(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *on a :*

$$\int_\Omega |f(t)g(t)|\, dt \leq (\int_\Omega (f(t))^2 dt)^{1/2}(\int_\Omega (g(t))^2 dt)^{1/2},$$

où

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Théorème 1.8.5 ***(théorème de Fubini)*** *Soit* f *une fonction continue de deux variable*

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*sur* $[a,b]\times[c,d]$ *à valeurs dans* $\mathbb{D}$

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

Théorème 1.8.6 ***(Inégalité de Doob)*** *Soit* (X_t) *une martingale par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *continue de carré intégrable et telle que* $X_0 = 0$, *alors*

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[\,|X_t|]}{\lambda}, \forall t > 0, \lambda > 0.$$

Chapitre 2

Equation différentielle stochastique de type champ moyen

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'un nouveau type des équations différentielles stochastiques , ce type s'appel **"champ moyen"** [11] [14]

2.1 Formulation du problème et hypotheses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré statisfait aux conditions habituelles ,$W - (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien d-dementionnelle , et on suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t\ )$ est la filtration naturelle du mouvement brownien W.

Considérons l'équation differentielle stochastique de type champ moyen suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}(\Psi(X_t)))dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}(\Phi(X_t)))dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendant de W telle que

on suppose que :

$(\mathbf{H}_{1.0})$:

$$b : [0, T] \times\ \mathbb{R}^d \times\ \mathbb{R}^d \to \times\ \mathbb{R}^d$$

$$\sigma : [0, T] \times \ \mathbb{R}^d \times \ \mathbb{R}^d \to \times \ \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

$$\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

Sont des fonctions continues et bornées .

2.2 Théorème d'existence et unicité

Établir le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution pour les systèmes équation differentielle stochastique de type champ moyen.nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

$(\mathbf{H}_1)$:En supposant que les fonctions b, σ, Ψet Φ satisfassent à la fois $(\mathbf{H}_{1.0})$et les propriétés suivantes , s'il existe constante $K > 0$ tel que :

$(\mathbf{H}_{1.1})$: pour chaque $t \in [0.T]$,$\forall (x_1, x_2)$et (y_1, y_2) dans $\mathbb{R}^d \times \ \mathbb{R}^d$:

$$|b(t, x_1, y_1) - b(t, x_2, y_2)| \ \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$
$$|\sigma(t, x_1, y_1) - \sigma(t, x_2, y_2)| \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

$$|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)| \leq K(|x_1 - x_2|)$$
$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq K(|x_1 - x_2|)$$

$(\mathbf{H}_{1.2})$: pour chaque $t \in [0.T]$,$\forall$ x et y dans $\mathbb{R}^d \times \ \mathbb{R}^d$:

$$|b(t, x, y)| \leq K(1 + |x| + |y|), \qquad |\sigma(t, x, y)| \leq K(1 + |x| + |y|)$$

$$|\Psi(x)| \leq K(1+|x|), \qquad |\Phi(x)| \leq K(1+|x|)$$

$(\mathbf{H}_{1.3})$: pour chaque $p > 0$:

$$\mathbb{E}[\,|X_t|^p] < +\infty$$

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèse* $(\mathbf{H}_1)$; *l'équation de type champ moyen* (2.1) *admet une unique solution* $(X_t)_{t\in[0.T]}$ *vérifie*

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2] < +\infty.$$

Preuve. Existence : On prouve d'abord l'existence de la solution la condition initiale x est fixée.

Soit X_t est une solution possible du problème(2.1) .en utilisant la méthode d'itération de Picard. Définissons la suite suivante X_t^n telle que $X_t^0 = x$ et X_t^{n+1} est l'unique solution de équations différentielles stochastique de type champ moyen (2.1), définie comme suivant :

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = x + \int\limits_0^t b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n)))ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\ \Phi(X_s^n)))dW_s \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.2}$$

Et tel que les intégrales stochastiques soient bien définies car il est clair par récurrence que pour tout $p > 0$, X_t^{n+1} est continu et adapté, donc le processus $\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\ \Phi(X_s^n))$ est aussi.On prouve d'abord l'existence de solution de équations différentielles stochastique de type champ moyen(2.1),pour $t \in [0,T]$, vérifie d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0,T]$.

$$\mathbb{E}[\,|X_t^n|^2] \leq C_n \tag{2.3}$$

Supposons que $\mathbb{E}[\,|X_t^n|^2] \leq C_n$,et nous montrons que :

$$\mathbb{E}[\,\left|X_t^{n+1}\right|^2] \leq C_n$$

On a :

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq \left|x + \int_0^t b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n)))ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n)))dW_s\right|^2$$

comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, on a

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq 3(|x|^2 + (\int_0^t |b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n)))|\, ds)^2 + (\int_0^t \|\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n)))\|\, dW_s)^2)$$

Par passage a l'espérance ,on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\,\left|X_t^{n+1}\right|^2] &\leq 3(|x|^2 + \mathbb{E}[(\int_0^t |b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n)))|\, ds)^2] \\ &+ \mathbb{E}[(\int_0^t \|\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n)))\|\, dW_s)^2])\end{aligned} \tag{2.4}$$

Appliquant l'isométrie d'Ito, et la condition de croissance linéaire de σ et Φ,on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n)))dW_s)^2] &= \mathbb{E}[\int_0^t \|\sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n)))\|^2\, ds] \\ &\leq \mathbb{E}[\int_0^t k^2(1 + |X_s^n|^2\, ds)] \\ &= \int_0^t k^2(1 + \mathbb{E}[\,|X_s^n|^2])ds\end{aligned} \tag{2.5}$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la croissance linéaire de b et Ψ

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\int_0^t |b(s,X_s^n,\mathbb{E}(\Psi(X_s^n)))|\,ds)^2 &\leq \mathbb{E}[(\int_0^t ds)(\int_0^t |b(s,X_s^n,\mathbb{E}(\Psi(X_s^n)))|^2\,ds)] \\ &\leq T\mathbb{E}[\int_0^t k^2(1+|X_s^n|^2)ds].\end{aligned} \tag{2.6}$$

Remplaçant(2.5)et (2.6) dans (2.4) on trouve:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|X_t^{n+1}\right|^2] &\leq 3(|x|^2+\int_0^t k^2(1+\mathbb{E}[\,|X_s^n|^2])ds + T\mathbb{E}[\int_0^t k^2(1+|X_s^n|^2)ds]) \\ &\leq C + C'\int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s^n|^2]ds\ ;\forall t\in[0,T], C>0.\end{aligned}$$

Ce qui prouve(2.3)

On va majorer par récurrence la quantité

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2]$$

Pour chaque $n>0$,nous avons :

$$\begin{aligned}X_t^{n+1}-X_t^n &= \int_0^t (b(s,X_s^n,\mathbb{E}[\Psi(X_s^n)]) - (b(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}[\Psi(X_s^{n-1})]))ds \\ &+ \int_0^t (\sigma(s,X_s^n,\mathbb{E}[\Phi(X_s^n)]) - (\sigma(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}[\Phi(X_s^{n-1})]))dW_s\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2] \leq 2\mathbb{E}[\left|\int_0^t (b(s,X_s^n,\mathbb{E}[\Psi(X_s^n)])-(b(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}[\Psi(X_s^{n-1})]))ds\right|^2$$
$$+2\mathbb{E}[\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^n,\mathbb{E}[\Phi(X_s^n)])-\sigma(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}[\Phi(X_s^{n-1})]))dW_s\right|^2.$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Buckholders-Davis-Gundy, nous avons :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2] \leq 2T\mathbb{E}[\int_0^t \left|(b(s,X_s^n,\mathbb{E}[\Psi(X_s^n)])-(b(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}[\Psi(X_s^{n-1})]))\right|^2 ds]$$
$$+2\mathbb{E}[\int_0^t \left|(\sigma(s,X_s^n,\mathbb{E}[\Phi(X_s^n)])-\sigma(s,X_s^{n-1},\mathbb{E}[\Phi(X_s^{n-1})]))\right|^2 ds].$$

En appliquant la condition $(\mathbf{H}_{1.1})$, on obtient :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2] \leq 2Tk\int_0^t \mathbb{E}[\ \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2+\left|\mathbb{E}[\Psi(X_s^n)-\Psi(X_s^{n-1})]\right|^2]ds$$
$$+2k\int_0^t \mathbb{E}[\ \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2+\left|\mathbb{E}[\Phi\ (X_s^n)-\Phi(X_s^{n-1})]\right|^2]ds$$
$$\leq 2k(T+1)\int_0^t \mathbb{E}[\ \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2+k\ \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2]ds$$
$$\leq 2k(T+1)(1+k)\int_0^t \mathbb{E}[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2]ds.$$

Alors

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2] \leq C\int_0^t \mathbb{E}[\sup_{0\leq r\leq s}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2 ds]. \tag{2.7}$$

Nous répétons la même méthode, en appliquant l'inégalité de Doob, à $\left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|$ pour obtenir

$$\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 \leq 2T\int_0^s \left|b(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}[\Psi(X_r^{n-1})]) - b(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}[\Psi(X_r^{n-2})])\right|^2 dr.$$

$$+ 2\int_0^s \left|\sigma(r, X_r^{n-1}, \mathbb{E}[\Phi(X_r^{n-1})]) - \sigma(r, X_r^{n-2}, \mathbb{E}[\Phi(X_r^{n-2})])\right|^2 dr.$$

En appliquant la condition $(\mathbf{H}_{1.1})$, on vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\leq r\leq s}\left|X_r^n - X_r^{n-1}\right|^2] &\leq C\int_0^s \mathbb{E}[\left|X_r^{n-1} - X_r^{n-2}\right|^2]dr. \\ &\leq C\int_0^s \mathbb{E}[\sup_{0\leq k\leq r}\left|X_k^{n-1} - X_k^{n-2}\right|^2]dr.\end{aligned} \tag{2.8}$$

remplacement (2.8) dans (2.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2] &\leq C\int_0^t \mathbb{E}[\sup_{0\leq r\leq s}\left|X_r^n - X_r^{n-1}\right|^2]ds. \\ &\leq C^2\int_0^t (\int_0^s \mathbb{E}[\sup_{0\leq k\leq r}\left|X_k^{n-1} - X_k^{n-2}\right|^2]dr)ds. \\ &\leq C^3\int_0^t (\int_0^s (\int_0^r \mathbb{E}[\sup_{0\leq l\leq k}\left|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}\right|^2]dk)dr)ds. \\ &\leq C^3\mathbb{E}[\sup_{0\leq l\leq k}\left|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}\right|^2]\int_0^t (\int_0^s (\int_0^r dk)dr)ds. \\ &\leq C^3\mathbb{E}[\sup_{0\leq l\leq k}\left|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}\right|^2]\int_0^t (\int_0^s r dr)ds \\ &\leq C^3\mathbb{E}[\sup_{0\leq l\leq k}\left|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}\right|^2]\int_0^t \frac{s^2}{2}ds \\ &C^3\frac{t^3}{3!}\mathbb{E}[\sup_{0\leq l\leq k}\left|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}\right|^2] \quad .\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieurs fois, on trouve :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_s^n\right|^2]\leq D\frac{(CT)^n}{n!}$$

où la quantité $D=\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^1\ -X_t^0\ |^2]$. Alors

Il vient que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^1}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\right\|_{L^2}\leq\sqrt{D}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{(CT)^n}{n!}}<\infty$$

Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}-p.s$ et donc, $\mathbb{P}-p.s$, $(X^n)_{n\geq0}$ converge uniformement sur $\mathcal{S}_c^2$ vers un processus X continu. de plus $X\in\mathcal{S}_c^2$.puisque la convergence a lieu dans $\mathcal{S}_c^2$. Il est très facile de vérifier que X_t est une solution de l'EDS (2.1) en passant à la limite dans l'équation (2.2).

Unicité : On suppose X_t et Y_t deux solution de (2.1) et $X_0=Y_0=x$.

$$\begin{aligned}X_t-Y_t&=x+\int_0^t b(s,X_s,\mathbb{E}(\Psi(X_s)))ds+\int_0^t\sigma(s,X_s,\mathbb{E}(\Phi(X_s)))dW_s\\&\quad-(x+\int_0^t b(s,Y_s,\mathbb{E}(\Psi(Y_s)))ds+\int_0^t\sigma(s,Y_s,\mathbb{E}(\Phi(Y_s)))dW_s).\\X_t-Y_t&=\int_0^t[b(s,X_s,\mathbb{E}(\Psi(X_s)))-b(s,Y_s,\mathbb{E}(\Psi(Y_s)))]ds\\&\quad+\int_0^t[\sigma(s,X_s,\mathbb{E}(\Phi(X_s)))-\sigma(s,Y_s,\mathbb{E}(\Phi(Y_s)))]dW_s.\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de young, on obtiant :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &\leq 2\left|\int_0^t [b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s))) - b(s, Y_s, \mathbb{E}(\Psi(Y_s)))]ds\right|^2 \\
&+ 2\left|\int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_s))) - \sigma(s, Y_s, \mathbb{E}(\Phi(Y_s)))]dW_s\right|^2 \\
\mathbb{E}[\,|X_t - Y_t|]^2 &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t [b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s))) - b(s, Y_s, \mathbb{E}(\Psi(Y_s)))]ds\right|^2 \\
&+ 2\mathbb{E}\left|\int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_s))) - \sigma(s, Y_s, \mathbb{E}(\Phi(Y_s)))]dW_s\right|^2
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz et condition lipschitz, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\left|\int_0^t (b(s, X_s, \mathbb{E}[\Psi(X_s)]) - b(s, Y_s, \mathbb{E}[\Psi(Y_s)]))ds\right|^2] \\
&\leq T\mathbb{E}[\int_0^t |b(s, X_s, \mathbb{E}[\Psi(X_s)]) - b(s, Y_s, \mathbb{E}[\Psi(Y_s)])|^2 \, ds] \\
&\leq Tk^2 \int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s - Y_s|^2]ds.
\end{aligned}$$

Par l'isométrie de Itô et condition lipschitz, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s, \mathbb{E}[\Phi(X_s)]) - \sigma(s, Y_s, \mathbb{E}[\Phi(Y_s)]))dW_s\right|^2] \\
&\leq \mathbb{E}[\int_0^t \|\sigma(s, X_s, \mathbb{E}[\Phi(X_s)]) - \sigma(s, Y_s, \mathbb{E}[\Phi(Y_s)])\|^2 \, ds] \\
&\leq k^2 \int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s - Y_s|^2]ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\,|X_t - Y_t|^2] &\leq 2Tk^2 \int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s - Y_s|^2]ds + 2k^2 \int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s - Y_s|^2]ds. \\ &= (2Tk^2 + 2k^2) \int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s - Y_s|^2]ds. \\ &= C \int_0^t \mathbb{E}[\,|X_s - Y_s|^2]ds \text{ où } C = (2Tk^2 + 2k^2).\end{aligned}$$

Utilisant le lemme de Granwall, on trouve :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t|^2] = 0$$

donc $X_t = Y_t$ Ce qui prouve l'unicité. ■

Chapitre 3

Existence de contrôle optimale relaxé pour les EDSs de type champ moyen

Dans ce chapitre, nous établissons l'existence de contrôle optimal relaxé pour les systèmes gouvernés par les équations différentielles stochastiques (EDSs) de type champ moyen. [11] [8]

3.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit (W_t) est une Mouvement brownienne de d-dimension ,définie sur un espace de probabilités$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, doté d'un filtration $(\mathcal{F}_t)$, satisfaisant les conditions usuelles.soit A un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^k$ appelé l'espace d'action ou l'ensemble de contrôle.

On considère le problème du contrôle stochastique optimal d'un système gouverné par EDSs de type champ moyen non linéaire de la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}(\Psi(X_t))u_t)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}(\Phi(X_t))dW_t \\ X_0 = x \end{cases} . \tag{3.1}$$

La fonction de coût sur l'intervalle de temps$[0, T]$ est donnée par

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t)), u_t)dt + g(X_T, \mathbb{E}\lambda(X_T))\right].$$

Où b, σ, h et g sont des fonctions données. La variable de contrôle u_t est un processus mesurable, $\mathcal{F}_t$-adapté avec des valeurs dans l'espace d'action A.

Supposons les conditions suivantes :

$(\mathbf{H}_1)$: On suppose que :

$$b : [0, T] \times \ \mathbb{R}^d \times \ \mathbb{R}^d \times A \to \times \ \mathbb{R}^d$$

$$\sigma : [0, T] \times \ \mathbb{R}^d \times \ \mathbb{R}^d \times A \to \times \ \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

$$\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

sont des fonctions continues et bornées ,$\exists K > 0$ tel que pour toute paire(x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathbb{R}^d \times \ \mathbb{R}^d$:

$$|b(t, x_1, y_1, u) - b(t, x_2, y_2, u)| \ \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$
$$|\sigma(t, x_1, y_1, u) - \sigma(t, x_2, y_2, u)| \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

$$|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)| \leq K(|x_1 - x_2|)$$
$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq K(|x_1 - x_2|)$$

$(\mathbf{H}_2)$: On suppose que

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times A \to \times \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \times \mathbb{R}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

sont des fonctions continues et bornées et h est K-lipschiz continues dans la variable (x, y), $\exists K > 0$ tel que pour toute paire(x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:

$$|h(t, x_1, y_1, u) - h(t, x_2, y_2, u)| \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

Proposition 3.1.1 *Sous hypothèse* $(\mathbf{H}_1)$*, l'EDS de type champ moyen* (1) *admet une solution forte unique de plus pour chaque* $p > 0$ *on a* $\mathbb{E}(|X_t|^p) < +\infty$.

3.1.1 Le problème de contrôle relaxé

Notre objectif est de minimiser la fonction de coût, sur la classe $\mathcal{U}_{ad}$ des contrôles admissibles,c'est-à-dire des processus adaptés à valeurs dans l'ensemble A ..Un contrôle $\hat{u}$ est dit optimal si il satisfait

$$J(\hat{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u)$$

Le contrôle optimal dans la classe des contrôles admissibles (contrôles stricts) peut ne pas exister en l'absence de la condition de convexité. L'idée serait d'injecter la classe $\mathcal{U}_{ad}$ des contrôles admissibles dans un espace plus large des contrôles relaxés dans lequel le contrôlleur choisit à l'instant t une mesure de probabilité $\mu_t(da)$ au lieu d'un élément $u_t \in A$. C'est-à-dire dans le model relaxé, l'ensemble A des valeurs des processus u_t est remplacé par $\mathbb{P}(A)$ l'ensemble des valeurs du processus μ_t, où $\mathbb{P}(A)$ est l'espace des mesures de probabilités sur A muni de la topologie de la convergence faible.

Cette nouvelle classe de processus est appelée contrôles relaxés qu'est riche par une structure de compacité et de convexité, pour la quelle le problème de contrôle dévient résolvable. Si $\mu(da) = \delta_{u_t}(da)$ est une mesure de Dirac chargement u_t pour chaque t, alors on obtient un contrôle strict comme cas particulier .Ainsi l'ensemble de contrôles stricts peut être identifié comme un sous-ensemble de contrôles relaxés.

Dans ce cas le système est gouverné par EDS de type champ moyen suivante

$$\begin{gathered} X_t = x + \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\mu_s(da).ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_s))dW_s \\ X_0 = x \end{gathered} \tag{3.2}$$

μ_t s'appelle un contrôle relaxé appliqué au moment t , Si μ_t est une mesure de dirac concentreé en un seul point μ_t alors on obtient un contrôle strict comme cas particulier d'un contrôle relxé.

La fonction de coût associée au contrôle relaxé, est definie par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\mu_t(da)dt + g(X_T, \mathbb{E}(\lambda(X_T))\right].$$

3.2 L'espace canonique de l'ensemble des contrôle relaxé

Soit $\mathbb{M}_1(A)$ l'espace des mesures de probabilité sur l'ensemble de contrôle A .soit $\mathbb{V}$ L'espace des transformations mesurables $\mu : [0, T] \to \mathbb{M}_1(A)$, alors μ peut être identifié comme une mesure non négative sur le produite $[0, T] \times A$, en mettant pour $C \in \mathcal{B}([0, T])$ et $D \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$

$$\bar{\mu}(C \times D) = \int_c \mu_t(da)dt$$

$\bar{\mu}$ peut être étendue uniquement à un élément de $\mathbb{M}_+([0,T]\times A)$ l'espace des mesures sur $[0,T]\times A$,muni de la topologie de convergence stable .cette topologie est la topologie la plus faible telle que l'application .

$$\bar{\mu} \rightarrow \int_0^T \int_A \phi(t,a).\bar{\mu}(dt,da)$$

est continue pour toute fonction mesurabe bornée ϕ qui est continue dans a.

Muni de cette topologie, $\mathbb{M}_+([0,T]\times A)$ est un espace compact séparable métrisable.donc $\mathbb{V}$ en tant que sous-espace fermé de $\mathbb{M}_+([0,T]\times A)$ et aussi compact .

Notons que $\mathbb{V}$ l'espace des mesures positives sur $[0,T]\times A$,dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue.

Définition 3.2.1 *Un contrôle à valeur de mesurée sur l'espace de probabilité filtré* $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ *est une variable aléatoire* μ *avec des valeurs dans* $\mathbb{V}$ *telles que* $\mu(\omega,t,da)$ *est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *et telle que pour chaque* t ,$1_{[0,t]}.\mu$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 3.2.2 *Un contrôle strict est un terme* $\alpha=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P},u_t,W_t,X_t)$ *tel que*

1. $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ *est un espace de probabilité muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *vérifiant la condition habituelles.*
2. u_t *est un A-valeure processus , progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$.
3. W_t *est un* $(\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$*- Mouvement Brownien et* (W_t,X_t) *satisfait EDSMF* (3.1). *On note* $\mathcal{U}_{ad}$ *l'espace de contrôle strict.*

Les contrôles tels que définis dans la dernière définition sont appelées contrôles faibles, à cause du changement possible de l'espace de probabilité et de Mouvement Brownien avec u_t.

Définition 3.2.3 *Un contrôle relaxé est un terme* $\alpha=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P},u_t,W_t,X_t)$ *tel que*

1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la condition usuelle.

2) μ est un contrôle à valeur de mesure sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

3) W_t est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$- Mouvement Brownien et (W_t, X_t) satisfait ce qui suit EDSMF(3.2).

On note $\mathcal{R}$ l'espace de contrôle relaxé.

En posant $\tilde{b}(t, X_t, \mathbb{E}(\Psi(X_t), \mu_t) = \int_A b(t, X_t, \mathbb{E}(\Psi(X_t), a)\mu_t(da)$, il s'ensuit que la nouvelle dérive $\tilde{b}$ satisfait la même hypothèse de Lipschitz $(\mathbf{H}_1)$ car b donc l'équation (3.2) a une solution unique telle que pour chaque $p > 0$, on a $\mathbb{E}(\,|X_t|^p) < +\infty$.

3.3 Approximation du modèle relaxé

Lemme 3.3.1

i) Soit (μ_t) un contrôle relaxé.alors il existe une suite de processus adaptés $(u^n(t))$ à valeurs dans A. telle que la suite de mesures aléatoires $(\delta_{u_t^n}(da)dt)$ converge en $\mathbb{V}$ vers $\mu_t(da)dt$, $\mathbb{P}$-a.s.

ii) Pour tout g continu dans $[0, T] \times \mathbb{M}_1(A)$ tel que $g(t, .)$ soit linéaire , on a $\mathbb{P}$-a.s.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t g(s, \delta_{u_s^n})ds = \int_0^t g(s, \mu_s)ds \quad \text{uniformément dans} \quad t \in [0, T]$$

Proposition 3.3.1 *1. Soit X_t, X_t^n les solutions de l'équation d'état* (3) *correspondant à μ et u^n où μ et u^n sont définis comme dans le dernier lemme . alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - X_t^n|^2] = 0.$$

2. Soit $J(u^n)$ et $J(\mu)$ les coûts espérés correspondant respectivement à u^n et μ alors il existe une sous-suite (u^{n_k}) de(u^n) telle que $J\ (u^{n_k})$ converge vers $J(\mu)$.

Preuve. Soit μ un contrôle relaxé et $(\delta_{u_t^n}(da))$ la séquence de mesures atomiques associée à la séquence de contrôles stricts (u^n),comme dans le dernier lemme. let X_t, X_t^n l'état correspondant traite. alors

$$\begin{aligned}
|X_t - X_t^n| &= \bigg| x + \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\mu_s(da).ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_s))dWs \\
&\quad - (x + \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)\delta_{u_s^n}(da)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))dWs) \bigg| \\
&= \bigg| \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\mu_s(da)ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)\delta_{u_s^n}(da)ds \\
&\quad + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t))dW_s - \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))dWs \bigg|
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|X_t - X_t^n|^2 &\leq \bigg| \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\mu_s(da)ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)\delta_{u_s^n}(da)ds \bigg|^2 \\
&\quad + \bigg| \int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))]dWs \bigg|^2 \\
&\leq \bigg| \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\mu_s(da)ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\delta_{u_s^n}(da)ds \\
&\quad + \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a)\delta_{u_s^n}(da)ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)\delta_{u_s^n}(da)ds \bigg|^2 \\
&\quad + \bigg| \int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))]dWs \bigg|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|X_t - X_t^n|^2 \leq & \left| \int_0^t \int_A [b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a) - b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)] \delta_{u_s^n}(da) ds \right|^2 \\
& + \left| \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a) \mu_s(da) ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a) \delta_{u_s^n}(da) ds \right| \\
& + \left| \int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))] dW s \right|^2 \\
& \leq \left| \int_0^t \int_A [b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a) - b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)] \delta_{u_s^n}(da) ds \right|^2 \\
& + \left| \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a) \mu_s(da) ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a) \delta_{u_s^n}(da) ds \right| \\
& + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))] dW s \right|^2
\end{aligned}
$$

Par passage de l'espérance

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\,|X_t - X_t^n|^2] \leq \mathbb{E}[& \left| \int_0^t \int_A [b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a) - b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)] \delta_{u_s^n}(da) ds \right. \\
& \left. + \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}(\Psi(X_s), a) \delta_{u_s^n}(da) ds - \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a) \delta_{u_s^n}(da) ds \right|^2 \\
& + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))] dW s \right|^2]
\end{aligned}
$$

Puis en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))] dW s \right|^2] \\
& \leq k \mathbb{E}[\int_0^t [\sigma(s, X_s, \mathbb{E}(\Phi(X_t)) - \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))]^2 ds]
\end{aligned}
$$

Puisque σ et Φ sont lipschitz .alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t[\sigma(s,X_s,\mathbb{E}(\Phi(X_t))-\sigma(s,X_s^n,\mathbb{E}(\Phi(X_s^n))]dWs\right|^2]\\
&\leq c\mathbb{E}[\int_0^t k[|X_s-X_s^n|^2+|\Phi(X_s)-\Phi(X_s^n)|^2]ds\\
&\leq K\mathbb{E}[\int_0^t|X_s-X_s^n|^2\,ds\\
&\leq K\int_0^T\mathbb{E}[\sup_{s\leq t}|X_s-X_s^n|^2\,dt
\end{aligned}$$

On applique cauchy-schwartez et que b et Ψ sont lipschitz .alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\int_A[b(s,X_s,\mathbb{E}(\Psi(X_s),a)-b(s,X_s^n,\mathbb{E}(\Psi(X_s^n),a)]\delta_{u_s^n}(da)ds\;\right|]\\
&\leq\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\int_A\left|[b(s,X_s,\mathbb{E}(\Psi(X_s),a)-b(s,X_s^n,\mathbb{E}(\Psi(X_s^n),a)]\delta_{u_s^n}(da)ds\;\right|^2\\
&\leq K\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t|X_s-X_s^n|^2\,ds]\\
&\leq K\int_0^T\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\;|X_s-X_s^n|^2\,dt]
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t|X_t-X_t^n|]\leq K[\int_0^T\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}\;|X_s-X_s^n|^2)dt]+\varepsilon_n]$$

où K est une constante non négative et

$$\varepsilon_n=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\int_A b(s,X_s,\mathbb{E}(\Psi(X_t),a)\mu_s(da).ds-\int_0^t\int_A b(s,X_s,\mathbb{E}(\Psi(X_s),a)\delta_{u_s^n}(da).ds\right|\right]$$

En utilisant le lemme (3.3.1)(ii) et lethéorème de convergence dominée,on conclut que

$lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ on conclut en utilisant le lemme de Gronwall.

$$\begin{aligned}
|J(u^{n_k}) \ - J(\mu)| &= \Big|\mathbb{E}[\int_0^T \int_A h(t, X_t^{n_k}, \mathbb{E}(\varphi(X_t^n), a)\delta_{u_t^{n_k}}(da).dt + g(X_T^{n_k}, \mathbb{E}(\lambda(X_T^{n_k}))] \\
&- \mathbb{E}[\int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\mu_t(da).dt - g(X_T, \mathbb{E}(\lambda(X_T))]\Big| \\
&= \Big|\mathbb{E}[\int_0^T \int_A h(t, X_t^{n_k}, \mathbb{E}(\varphi(X_t^n), a)\delta_{u_t^{n_k}}(da).dt \ - \int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\delta_{u_t^{n_k}}(da).dt] \\
&+ \mathbb{E}[\int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\delta_{u_t^{n_k}}(da).dt - \int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\mu_t(da).dt] \\
&+ \mathbb{E}[g(X_T^{n_k}, \mathbb{E}(\lambda(X_T^{n_k})) - g(X_T, \mathbb{E}(\lambda(X_T))]| \\
&\leq \mathbb{E}[\int_0^T \int_A |h(t, X_t^{n_k}, \mathbb{E}(\varphi(X_t^n), a) - h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)| \, \delta_{u_t^{n_k}}(da).dt] \\
&+ \mathbb{E}[\ \Big|\int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\delta_{u_t^{n_k}}(da).dt - \int_0^T \int_A h(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t), a)\mu_t(da).dt\Big| \\
&+ \mathbb{E}[\,|g(X_T^{n_k}, \mathbb{E}(\lambda(X_T^{n_k})) - g(X_T, \mathbb{E}(\lambda(X_T))|].
\end{aligned}$$

D'aprés (H_2) on a :

$$|J(u^{n_k}) \ - J(\mu)| \leq K'\mathbb{E}[\int_0^T |X_t^{n_k} - X_t| \, dt] + \varepsilon_n'$$

D'aprés (3.3.1) on a :

$$|J(u^{n_k}) \ - J(\mu)| \leq K'T\mathbb{E}\, |X_t^{n_k} - X_t| \, dt] + \varepsilon_n'$$

D'aprés lemme $(3.3.1)(ii)$ et que h est continue et bornée, on utilise le théorème de convergence on a :

$$\lim_{n_k\to 0} \varepsilon_n' = 0$$

et comme

$$\lim_{n\to 0} \mathbb{E}[\,|X_t^{n_k} - X_t|] = 0$$

Alors

$$\lim_{n_k \to 0} |J(u^{n_k}) \ - J(\mu)| = 0$$

■

Remarque 3.3.1 *En conséquence de la proposition* (3.3.1)(2), *on considère que les fonctions de valeur pour les problèmes de contrôles strict et relaxé sont les mêmes*

Notation 3.3.1 *dans la suite on note* $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ *l'espace des fonctions continues de* $[0,T]$ *dans* $\mathbb{R}^d$, *muni de la topologie de convergence uniforme.*

3.4 Résultat principal

Théorème 3.4.1 *Sous hypothèses* $(H_1),(H_2)$ *le problème de contrôle relaxé a une solution optimale.*

La preuve est basée sur quelques résultats auxiliaires liés à la rigueur des processus considérés et à l'identification de leurs limites .

Soit $(\mu^n)_{n\geq 0}$ une séquence minimisante , c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} J(\mu^n) = \inf_{q\in\mathcal{R}} J(\mu)$ et soit (W^n, X^n) soit l'unique solution de notre EDSs champ moyen :

$$\begin{gathered} X_t^n = x + \int_0^t \int_A b(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Psi(X_s^n), a)\mu_s^n(da).ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, \mathbb{E}(\Phi(X_s^n))dW_s^n \\ X_0^n = x \end{gathered} \tag{3.3}$$

La preuve du résultat principal consiste à prouver que la suite des distributions des processus (μ^n, W^n, X^n) est tendus pour une certaine topologie sur l'espace d'états et ensuite montrer que l'on peut extraire une sous-suite qui converge en lois vers un processus $(\hat{q}, \hat{W}, \hat{X})$, qui satisfait le même EDSs champ moyen . pour parvenir à la preuver , nous montrons que sous certaines conditions de régularité.la suite des fonctionnelles de coût$(J(\mu^n))_n$ converge vers $J(\hat{\mu})$ qui est égale à $\inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu)$ et alors$(\hat{\mu}, \hat{W}, \hat{X})$ est optimale.

Lemme 3.4.1 *La suite des distributions des contrôles relaxés* $(\mu^n)_n$ *est relativement compacte dans* $\mathbb{V}$ *.*

Preuve. les contrôles relaxé μ^n sont des variables aléatoires sur l'espace $\mathbb{V}$ qui est compact .Puis en appliquant le théorème de Prohorov on obtient que la famille de distributions associée à $(\mu^n)_{n\geq 0}$ est tendue alors elle est relativement compacte. ∎

Lemme 3.4.2 *Soit* (W_t^n, X_t^n) *la solution du EDSs champ moyen* (4) *la suite* $\mathbb{P}_{(W^n,X^n)}$ *des distributions de* (W^n, X^n) *est relativement compacte sur l'espace* $C([0,T],\mathbb{R}^d)\times C([0,T];\mathbb{R}^d)$, *où* $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ *est muni par la topologie de convergence uniforme.*

Preuve. Pour prouver que la suite $(\mathbb{P}_{(W^n,X^n)})$ est relativement compacte dans $C([0,T],\mathbb{R}^d)\times C([0,T];\mathbb{R}^d)$,il suffit de prouver que $\mathbb{P}_{W^n}$ et $\mathbb{P}_{X^n}$ sont relativement compacte dans $C([0,T],\mathbb{R}^d)\times C([0,T];\mathbb{R}^d)$ d'après le théorème de Kolmogrov (Ikeda et Watanabe,1981,page18) il faut vérifier que :

a) $\lim_{A\to+\infty}\inf_n \mathbb{P}^n(\|x(0)\|\leq A)=0.$

b) $\lim_{\delta\to 0}\limsup \mathbb{P}^n(\sup_{\substack{0\leq s\leq t\leq T\\ t-s<\delta}}\|x(t)-x(s)\|\geq\gamma)=0.$

la condition a est une conséquence immédiate du fait que $W^n(0)=x$ et $X^n(0)=x$. Pour prouver $b)$ il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}(||W_t^n - W_s^n||^4)\leq C_1\left|t-s\right|^2$$
$$\mathbb{E}(||X_t^n - X_s^n||^4)\leq C_2\left|t-s\right|^2.$$

Pour certaines constantes C_1 et C_2 indépendantes de n.

La première inégalité est évidente.Vérifions la seconde on a

$$\mathbb{E}(||X_t^n - X_s^n||^4)\leq M.\mathbb{E}(\left|\left|\int_s^t\int_A b(u,X_u^n,\mathbb{E}(\Psi(X_u^n),a)\mu_u^n(da).du\right|\right|^4$$
$$+\left|\left|\int_s^t\sigma(u,X_u^n,\mathbb{E}(\Phi(X_u^n))dW_u^n\right|\right|^4)$$

Où M est une constante positive. en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy à la martingale partie et le fait que b et σ sont les fonctions bornées donnent le résultat souhaité. ■

Prouve de théorème(3.4.1) :

En utilisant les lemmes (3.4.1)et (3.4.2) , on considère que la séquence de processus (μ^n, W^n, X^n) est tendue dans $\mathbb{V}\times C([0,T],\mathbb{R}^d)^2$. par le théorème de représentation de Skorokhod, il existe un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$,une séquence $\bar{\gamma}^n = (\bar{\mu}^n, \bar{W}^n, \bar{X}^n)$ et $\bar{\gamma} = (\bar{q}, \bar{W}, \bar{X})$ définies sur cet espace tel que :

(i) pour chaque $n \in \mathbb{N}, lois(\bar{\gamma}^n) = lois(\bar{\gamma})$,

(ii) il existe une sous-suite $(\bar{\gamma}^{n_k})$ de $(\bar{\gamma}^n)$, encore notée $(\bar{\gamma}^n)$,qui converge vers $\bar{\gamma}$, $\bar{\mathbb{P}}$-a.s sur l'espace Γ.

Cela signifie en particulier que la suite de contrôles relaxés$(\bar{\mu}^n)$ converge dans la topologie stable vers $\bar{\mu}$, $\bar{\mathbb{P}}$-a.s et $(\bar{W}^n, \bar{X}^n)$ converge uniformément vers $(\bar{W}, \bar{X}\ )$,$\bar{\mathbb{P}}$-a.s.

D'après la propriété **(i)** **,**on obtient

$$\begin{cases} \bar{X}_t^n = x + \int_0^t \int_A b(s, \bar{X}_s^n, \mathbb{E}(\Psi(\bar{X}_s^n), a)\bar{\mu}_s^n(da)ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s^n, \mathbb{E}(\Phi(\bar{X}_s^n))d\bar{W}_s^n. \\ \bar{X}_0^n = x \end{cases}$$

les coefficients b, σ, Ψ et Φ étant Lipschitz continus dans (x, y),puis selon la propriété **(ii)** et use des arguments similaires à ceux de Skorokhod(1965)page 32 il s'avère que

$$\int_0^t \int_A b(s, \bar{X}_s^n, \mathbb{E}(\Psi(\bar{X}_s^n), a)\bar{\mu}_s^n(da)ds$$

converge en probabilité vers

$$\int_0^t \int_K b(s, \bar{X}_s, \mathbb{E}(\Psi(\bar{X}_s), a)\bar{\mu}_s(da)ds$$

et

$$\int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s^n, \mathbb{E}(\Phi(\bar{X}_s^n))d\bar{W}_s^n$$

converge en probabilité vers

$$\int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s, \mathbb{E}(\Phi(\bar{X}_s))d\bar{W}_s$$

Donc $\bar{X}$ satisfait le EDS champ moyen

$$\begin{aligned}
&\bar{X}_t = x + \int_0^t \int_K b(s, \bar{X}_s, \mathbb{E}(\Psi(\bar{X}_s), a)\bar{\mu}_s(da)ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s, \mathbb{E}(\Phi(\bar{X}_s))d\bar{W}_s \\
&\bar{X}_0^n = x
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve du théorème (3.4.1) , il reste à vérifier que $\bar{\mu}$ est un contrôle optimal.

Selon la propriété ci-dessus **(i)-(ii)** et l'hypothèse(H_2) nous avons

$$\begin{aligned}
\inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu) &= \lim_{n\to\infty} J(\mu^n), \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int_0^T \int_A h(t, X_t^n, \mathbb{E}(\varphi(X_t^n), a)\mu_t^n(da)dt - g(X_T^n, \mathbb{E}\lambda(X_T^n))] \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{E}}[\int_0^T \int_A h(t, \bar{X}_t^n, \mathbb{E}(\varphi(\bar{X}_t^n), a)\bar{\mu}_t^n(da)dt - g(\bar{X}_T^n, \mathbb{E}\lambda(\bar{X}_T^n))] \\
&= \overline{\mathbb{E}}[\int_0^T \int_A h(t, \bar{X}_t, \mathbb{E}(\varphi(\bar{X}_t), a)\bar{\mu}_t(da)dt - g(\bar{X}_T, \mathbb{E}\lambda(\bar{X}_T))]
\end{aligned}$$

Alors $\bar{\mu}_t$ est un contrôle relaxé optimal.

Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons prouvé l'existence de solutions optimales d'un problème de contrôle relaxé optimal. En particulier, les problèmes sont gouvernés par des équations différentielles stochastiques non linéaires de type champ moyen, où le coefficient de diffusion n'est pas contrôlés. L'idée de prouve est basé sur des arguments de tension des lois associées aux processus en question et le théoréme de selection de Skorokhod sur l'epace des processus càdlàg.

Bibliographie

[1] Chapitre 9, Intégrales de fonction de plusieurs variables.

[2] D. Foata & A. Fuchs, calcul des probabilités, Masson. Dunod, Paris (1998).

[3] D.Lamberton & B.Lapeyre, Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

[4] Hervé Guiol, Calcul Stochastique Avancé, TIMB/TIMC-IMAG,2006.

[5] Jean-Christophe Breton.processus stochastiques M2 Mathématiques université de rennes1. Septembre/Octobre 2022.

[6] J. Jacques Ruch et M. Line Chabanol . RAPPELS de PROBABILITÉ (2013-2014).

[7] J.M.Bismut, Théorie probabilité du contrôle des diffusions.Mem.Amer. Math .Soc.176 ,Providence,RhodeIsland (1973)..

[8] K. Bahlali ,M. Mezerdi et B. Mezerdi, Exisence of optimal controls for systems governed by mean field stochastic differentiel equations, Afrika Statistika, Vol.9 (2014), No 1, 627-645 ;

[9] M.Jeanblanc, Cours de calcul stochastique.DESS IM EVRY .Option Finance ,septembre 2002.

[10] M.Jeanblanc,Thomas Simon, ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE ,septembre 2005.

[11] Meriem Mezerdi, Contrôle optimal des équations différentielles stochastique de type champ moyen, thèse doctorat en mathématiques, univ de Biskra (2015).

[12] O.Lévérique,EPFL, Cours de probabilites et calcul stochastique.semestre d'hiver 2004-2005.

[13] P.Briand, Cours équations différentielles stochastiques rétrogrades.Mars 2001.

[14] Radhia Ben brahim, Some contributions on stochastic optimal control for FBSDEs, thèse final doctorat en mathématiques , univ de Biskra (2019)

[15] R.ELIE & I.KHARROUBI, Calcul stochastique appliqué à la finance..

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	Filtration
Ω	Un ensemble
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré
W_t	Mouvement Brownien.
$\mathbb{E}[X]$	L'espérance mathématique ou moyenne du $v.a.X$
$\mathbb{E}$	L$'$espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$
$\mathbb{E}[\diagdown]$	L$\prime$espérance conditionnelle
exp	Exponentiel.
EDS	Equation différentielle stochastique
L^2	l'espace des fonctions de carré intégrable
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Tribu borélienne de $\mathbb{R}$
$\mathbb{P}-$p.s	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$s \wedge t$	min(s,t)

$\Vert . \Vert$	la norme
$J(.)$	La fonction de coût minimiser.
$\mathcal{U}$	Ensemble des contrôles admissibles
$\bar{\mu}$	Contrôle optimal
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension$d$

Résumé:

Nous considérons des problèmes de contrôle stochastique pour un système d'équations différentielles stochastiques de type champ moyen non linéaires dans lesquelles les coefficients du système dépendent non seulement du processus d'état, mais aussi de la distribution de l'état. De plus, la fonction de coût est également de type champ moyen.
Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS non linéaire de type champs moyen, ensuite nous intéressons au l'existence de contrôle relaxé optimal pour ce type de EDS à diffusion non contrôlée.

Mots-clés **:** équations différentielles stochastiques, champ moyen, contrôle optimal, contrôle relaxé , intégrale d'Ito, mouvement brownien, processus stochastique, existence, unicité, fonction de coût,…

Abstract :

we consider stochastic control problems for a system of nonlinear mean-field stochastic differential equations in which the coefficients of the system depend not only on the state process, but also on the state distribution. Moreover, the cost function is also of mean field type.

We prove the existence and the unicity of the solution of the nonlinear EDS of mean field type, then we are interested in the existence of optimal relaxed control for this type of EDS with uncontrolled diffusion.

Key Words : Stochastic differential equation, mean field, optimal control, relaxed control, Ito integral, Brownian motion, random process, existence ,unity ,Cost function,…

ملخص :

نعتبر مشاكل التحكم العشوائية لنظام المعادلات التفاضلية العشوائية غير الخطية من نوع الحقل المتوسط التي تعتمد فيها معاملات النظام ليس فقط على عملية العشوائية المجهولة ، ولكن أيضًا على توزيعها. علاوة على ذلك ، فإن دالة التكلفة هي أيضًا من نوع الحقل المتوسط .

نثبت اولا وجود ووحدانية الحل من اجل المعادلات التفاضلية العشوائية غير الخطية من نوع الحقل المتوسط كما نهتم ايضا بوجود تحكم مريح مثالي لهذا النوع من المعادلات مع انتشار غير متحكم فيه

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوائية، المجال المتوسطة ، التحكم المثالي، التحكم المريح ، تكامل ايتو ، الحركة البراونية، العملية العشوائية، الوجود، الوحدانية،دالة التكلفة،**...**