

UNIVERSITE KASDI MERBAH-OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

Département De Mathématiques

Année : 2022/2023



N d'enregistrement :

/ / / / /

THESE

Pour l'obtention du Diplome de Doctorat en Mathématiques

Filiere: **Modélisation et analyse numérique**

*Etude Théorique et Numérique de Quelques
Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables
avec Adhésion et Endommagement*

Présentée et soutenue publiquement

Par :

Maiza Laid

Devant le jury composé de :

Mr. Mabrouk Meflah	Professeur	U.K.M.Ouargla	Président
Mr. Tedjani Hadj Ammar	Professeur	U. El Oued	Encadreur
Mr. Abdallah Bensayah	M C A	U.K.M.Ouargla	Co-encadreur
Mr. Ismail Merabet	Professeur	U.K.M.Ouargla	Examineur
Mr. Azeb Ahmed Abdelaziz	M C A	U. El Oued	Examineur
Mr. Abderrezak Ghezal	M C A	U.K.M.Ouargla	Examineur

Dédicaces

Nous dédions ce travail à . . .

A le père cher.

A la mère chère.

A les frères et surs

A tous la famille.

Remerciements et Gratitude

*Je remerciez **Dieu** Tout-Puissant qui ma permis de terminer ce travail.*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon encadreur **Pr, Hadj Ammar Tedjani** de m'avoir beaucoup appris lors de son encadrement de ma thèse de doctorat. Son enthousiasme et sa compétence m'ont encouragé à mes travaux de recherche sous sa direction.*

*Je suis très honorée que Monsieur le **Professeur Meflah Mabrouk** a accepté de présider le jury de ma soutenance de ma thèse.*

Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et appréciations aux membres du jure Messieurs Dr. Abdallah Bensayah, Pr. Ismail Merabet, Dr. Abderrezak Ghezal et Dr. Azeb Ahmed Abdelaziz.

À tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux, de près ou de loin, nous remercions et appréciations beaucoup.

Il est important pour moi de remercier tous les enseignants de l'Université Kasdi Merbah Ouargla et l'Université Echahid Hamma Lakhdar El Oued

Table des matières

Introduction	vi
Notations générales	xi
I Modélisation et Outils Mathématiques	xiv
1 Modélisation	1
1.1 Cadre physique	1
1.2 Lois des comportements	6
1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques	6
1.2.2 Loi de comportement piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement	7
1.2.3 Loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne	9
1.3 Conditions aux limites	11
1.3.1 La condition aux limites de déplacement	11
1.3.2 La condition aux limites de traction.	11
1.3.3 Les conditions aux limites électriques.	11
1.3.4 Conditions continue aux limites de contact.	11
1.3.5 Condition dans le plan tangent	16
2 Outils Mathématiques	18
2.1 Contraction	18
2.2 Espaces de Hilbert	19

2.3	Les espaces $L^p(\Omega^\ell)$	20
2.4	Espaces de Sobolev	21
2.5	Espaces fonctionnels	23
2.6	Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	26
2.6.1	Opérateur fortement monotone	26
2.6.2	Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution	27
2.6.3	Sous différentiabilité	29
2.6.4	Équation différentielle ordinaire	29
2.6.5	Équation aux dérivées partielles d'évolution	30
2.6.6	Inégalités variationnelle paraboliques	30
2.7	Lemme de Gronwall	31
2.8	Discrétisation et éléments de contact	32
2.9	Approximation variationnelle approchée	34

II Problème de Contact entre deux corps Piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement 35

3 Problème de Contact entre deux corps Piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement 36

3.1	Formulation du problème	37
3.2	Formulation Variationnelle	41
3.3	Existence et Unicité Résultat	50
3.4	Approximation numérique d'un problème Piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement.	63
3.4.1	La discrétisation complète	63
3.4.2	Formulation variationnelle approchée	64
3.4.3	L'estimation d'erreur du problème approché	65

III Problème de Contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état

interne	78
4 Problème de Contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne	79
4.1 Formulation du problème	80
4.2 Formulation Variationnelle	82
4.3 Existence et unicité de la solution	92
4.4 Approximation numérique d'un problème thermo-électro-Viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne.	104
4.4.1 La discrétisation complète	105
4.4.2 Formulation variationnelle approchée	105
4.4.3 L'estimation d'erreur du problème approché	107
Conclusion générale	116
général Summary	117

Introduction générale

Les phénomènes de contact entre deux corps déformable ou entre un corps déformable et une base rigide ou non interviennent de multiples façons au sien bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours. Le contact du piston avec la chemise, de la roue avec le rail et d'un pneu avec la chaussée ne représentent que trois exemples parmi bien d'autres. Compte tenu de l'importance de ces phénomènes, la mécanique du contact est vaste et aborde autant de sujets différents qui sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'application numérique des problèmes de contact, ils ont été intensivement étudiés depuis longue date et la littérature relevant des sciences de l'ingénieur qui leur est dédié est assez riche.

Les processus d'adhésion sont importants dans de nombreux montages industriels ou les éléments habituellement non métalliques sont collés ensemble. Récemment des matériaux composites faits de couches de matériaux simples prennent un grand intérêt car ils sont très résistants et légers, et ainsi d'une grande importance en aviation, en exploration spatiale et dans l'industrie automobile. Cependant, sous les contraintes, les matériaux composites des différentes couches se décolent et se déplacent l'une par rapport à l'autre. C'est l'une des raisons de l'importance des processus d'adhésion dans les applications industrielles.

L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'inciseuse de l'endommagement interne du matériau ont été investi mathématiquement. Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [21, 22] à partir du principe de la puissance virtuelle. Dans cette thèse la relation

utilisée pour modéliser l'évolution du champ d'endommagement est la suivante

$$\dot{\beta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \beta^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\beta^\ell) \ni \mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \beta^\ell),$$

où K^ℓ est l'ensemble des fonctions tests admissibles d'endommagement, \mathbf{S}^ℓ étant la fonction source de l'endommagement.

Le champ de température est obtenu à l'aide de l'équation de chaleur classique, ou l'effet du champ de déformation est inclus dans le modèle suivant [1]. De plus, des effets thermiques apparaissent dans la loi de comportement viscoélastique selon [17, 29].

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnels au déformatin engendré. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconate, titanate) qui sont les plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nano-manipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice-versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustiques, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indispensables [7, 8].

La théorie thermo-piézoélectrique a été proposée pour la première fois par Mindlin

[41], plus tard il a dérivé les équations gouvernantes d'une plaque thermo-piézoélectrique [40]. Les lois physiques des matériaux thermo-piézoélectriques ont été discutées par [43]. Chandrasekhariah [9] a présenté la théorie généralisée de la thermo-piézoélectricité en prenant en compte la vitesse finie de propagation de la perturbation thermique. Yang et Battra [54] ont étudié l'effet de la conduction thermique sur le déplacement des fréquences d'un corps piézoélectrique linéaire à vibration libre à l'aide de méthodes de perturbation. Sharma et Pal [45] ont discuté de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque thermo-piézoélectrique transversalement isotrope. Sharma et coll. [46] à étudié l'analyse des vibrations libres d'un panneau cylindrique thermo-piézoélectrique homogène, transversalement isotrope, basé sur un thermo-piézoélectrique tridimensionnel. Sharma et Walia [47] ont présenté la propagation d'ondes droites et circulaires à crête dans des matériaux thermo-piézoélectriques généralisés.

Une étude complète des phénomènes de contact comprend généralement les étapes suivantes : la modélisation, l'analyse variationnelle et numérique des modèles et la mise en oeuvre numérique.

L'approche numérique des problèmes aux limites est un domaine mathématique qui, historiquement, a fait l'objet de nombreuses recherches et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la biologie etc. Il est essentiel de construire des méthodes numériques de résolution de ces problèmes qui soient à la fois simples, peu coûteux et efficaces. Les méthodes modernes sont basées sur une " discrétisation " des équations et inéquations dont l'idée est d'approcher de la solution. Pour les cas quasistatiques, on distingue deux types de discrétisation : complète et incomplète. La première consiste à discrétiser seul l'espace ; cependant la deuxième est basée sur la discrétisation de l'espace ainsi que l'intervalle de temps. En fait, ces approches, dans le cas des inéquations variationnelles ont fait l'objet de plusieurs études telles que [11] dans le cas d'un problème viscoélastique et [28] pour des problèmes viscoplastiques.

Les problèmes sont complexes et dans les applications, les méthodes numériques sont nécessaires pour trouver des approximations pour les solutions des problèmes. Cette thèse porte sur l'étude de schémas d'approximation entièrement discrets où les variables spatiales et temporelles sont discrétisées. La méthode des éléments finis est

utilisée pour discrétiser le domaine spatial et les différences finies sont utilisées pour les dérivées temporelles

La méthode de discrétisation par élément fini est la plus couramment utilisée pour la résolution des problèmes de mécanique du solide déformable. Nous renvoyons aux livres d'Ern [18] pour une présentation générale de la méthode des éléments. Nis, ainsi que. aux livres de Zienkiewicz [55] et de Belytschko [4] pour des présentations orientées plus spéc Quement vers les applications de la mécanique des milieux continus et des problèmes non linéaires.

Dans les situations quasi statiques et élastiques, le variable temps ne joue aucun rôle. La discrétisation temporelle pourra donc y être choisie de manière arbitraire, éventuellement de manière à bien représenter les évolutions de conditions aux limites. Par contre, dans les situations quasi-statiques visco-élastiques ou visco-plastiques, le temps intervient dans la loi de comportement.

Dans le cadre des simulations numériques, il est devenu de plus en plus fréquent de chercher à représenter et modéliser des phénomènes et structure qui interagissent. C'est le cas dans des domaines aussi variés que la simulation du frottement d'ailes d'avion, de résistance de ponts au vent. Ces nombreux exemples ont en commun qu'une simulation découplée de chacune des physiques est inadaptée à la situation.

Cette thèse représente une contribution à l'étude de l'existence, l'unicité et l'approximation numérique des solutions de quelques problèmes de contact avec ou sans adhésion entre deux corps déformables, en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus quasistatiques et dynamiques pour des matériaux piézoélectriques-élasto-viscoplastique et thermo-électro-viscoélastiques. Les conditions aux limites sont du type de compliance normale avec adhésion pour les autres cas. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution et l'approximation numérique.

Cette thèse est composé trois parties (quatre chapitres) est structurée de la manière suivante :

Dans la première partie, nous introduisons les outils nécessaires pour une bonne

compréhension de l'ouvrage, cette partie et contiens deux chapitres.

Dans la première chapitrée, on commence par définir les cadres physiques, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique des problèmes a étudié.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, est dédié aux définitions élémentaires des notions d'analyses. nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les espaces fonctionnels, les opérateurs fortement monotones et Lipschitz, les équations et les "inéquations variationnelles d'évolution paraboliques, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et qu'ils sont illustres de façons intéressantes de certaines manipulations que l'on peut faire sur notre formulation qui caractérise ce qui nous décrivons dans notre thèse.

Dans la deuxième partie (troisième chapitre), nous étudions le problème de de Contact entre deux corps Piézoélectriques élasto viscoplastique avec endommagement ; nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant les techniques de point fixe et de monotonie, puis pour l'analyse des estimations d'erreur, on adopte l'approximation variationnelle complète où on discrétise la variable spatiale et la variable temporelle, le contenu de cette partie est accepté pour publication [37].

Dans la troisième partie (quatrième chapitre), nous étudions le problème de de Contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne ; nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant les techniques de point fixe et de monotonie, puis pour l'analyse des estimations d'erreur, on adopte l'approximation variationnelle complète où on discrétise la variable spatiale et la variable temporelle, le contenu de cette partie est accepté pour publication [38].

Notations générales

Notations diverses

\mathbb{N}	L'ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels,
\mathbb{S}^d	L'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$),
C	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est-à-dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application $\psi : \nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
$\partial \psi$	Sous-différentiel de l'application ψ ,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, $\psi : \text{Div} \psi = (\partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi)$,
" . "	Produit scalaire sur \mathbb{R}^d ou \mathbb{S}^d ,
$ \cdot $	La norme euclidienne sur \mathbb{R}^d ou \mathbb{S}^d ,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X ,
$\ \cdot\ _X$	la norme de X ,
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires et continues de X dans Y ,
$\langle \cdot \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X ,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d , parfois domaine L'hertzien,
$\overline{\Omega^\ell}$	l'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$),

$mes\Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\overline{\Omega^\ell}$,
$C^1(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ ,
$\mathcal{D}(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
\mathcal{D}^ℓ	L'espace $\left\{ \phi^\ell = (\phi_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}; \phi_i^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell); \forall i = 1, \dots, d \right\} = (\mathcal{D}(\Omega^\ell))^d$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,
H^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^d$,
H_1^ℓ	l'espace $H^1(\Omega^\ell)^d$,
\mathcal{H}^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)_s^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1^ℓ	l'espace $\{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}; \operatorname{div} \tau^\ell \in H^\ell\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$H^1(\Omega^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \right)^d$,
H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ} .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles,
W^ℓ	l'espace $\{\psi^\ell \in E_1^\ell \mid \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}$,
\mathcal{W}^ℓ	l'espace $\{D^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}$,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\ \cdot\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\ \psi\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}}{\ \phi\ _{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$.

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot \ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k, p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot \ _{W^{k, p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k, p}(0, T; H)$.

Notations élasticité

Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables,
Γ^ℓ	La frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$,
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3}$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
ζ	Vecteurs d'adhésions sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Vecteurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$,
$\sigma^\ell \cdot u^\ell$	Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par $\sigma^\ell : (\sigma^\ell \cdot u^\ell)_i = \sigma_{ij}^\ell u_j^\ell$,
u_ν^ℓ	Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine : $u_\nu^\ell = u^\ell \cdot \nu^\ell$,
$u_\nu^\ell \nu^\ell$	Vecteur composante normale du déplacement $u^\ell : (u_\nu^\ell \nu^\ell)_i = u_\nu^\ell \cdot \nu_i^\ell$,
u_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle du déplacement $u^\ell : u_\tau^\ell = u^\ell - u_\nu^\ell \nu^\ell$.

Première partie

Modélisation et Outils Mathématiques

Chapitre 1

Modélisation

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques phénomènes mécaniques et thermiques. Tout en introduisant quelques lois de comportement piézoélectrique, des modèles mathématiques et des différentes lois de contact ainsi que les conditions aux limites des contacts qui nous serviront dans les chapitres suivants.

1.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans cette thèse sont décrits par deux cadres physiques suivants ;

Cadre physique n^o1 (Problème piézoélectrique.) Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$). Pour chaque domaine Ω^ℓ , la frontière Γ^ℓ est supposée Lipschitz continue, et est partitionnée en trois parties mesurables disjointes Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ , d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , d'autre part, tel que $meas(\Gamma_1^\ell) > 0$, $meas(\Gamma_a^\ell) > 0$. Soit $T > 0$ et soit $(0, T)$ l'intervalle de temps d'intérêt. Le corps Γ^ℓ est soumis à des forces \mathbf{f}_0^ℓ et à des charges électriques volumiques de densité q_0^ℓ . Les corps sont encastrés sur Γ_1^ℓ , donc le champ de déplacement s'y annule. Les tractions de surface \mathbf{f}_2^ℓ agissent sur Γ_2^ℓ . Nous supposons également que le potentiel électrique s'annule sur Γ_a^ℓ et une charge électrique de surface de densité q_2^ℓ est prescrite sur Γ_b^ℓ . Les deux corps peuvent entrer en contact le long de la partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 \equiv \Gamma_3$.

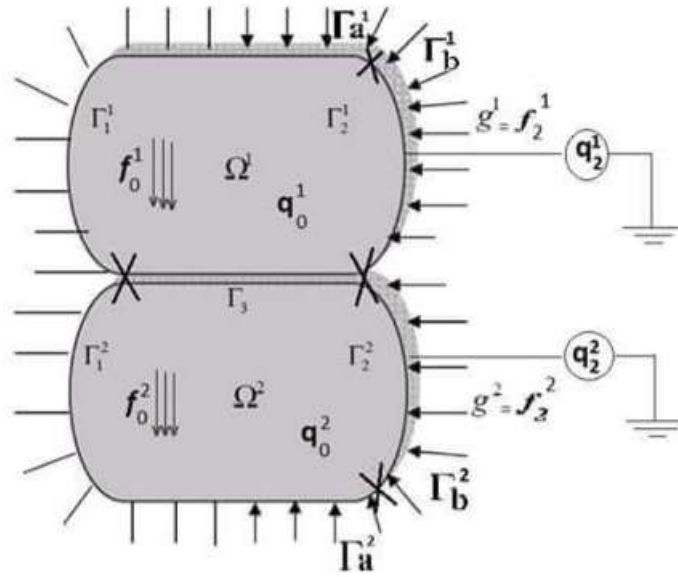


Figure1.1. Cadre Physique 1

Àvant d’obtenir les modèles mathématiques qui correspondent aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons ce cadre physique dans le chapitre 3 de ce mémoire.

Cadre physique n^o2 (Problème thermo-piézoélectrique.) Nous considérons deux corps thermo-électro-viscoélastiques qui occupent deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l’espace $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière Γ^ℓ , partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ telles que $meas(\Gamma_1^\ell) > 0, meas(\Gamma_a^\ell) > 0$. Nous notons par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Les deux corps sont encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et dans Ω^ℓ agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l’intervalle de temps. En plus de l’action des forces et des tractions, les deux corps sont soumis à l’action des charges électriques de densité volumique q_0^ℓ et des charges électriques de surface. Pour les décrire, nous considérons une deuxième partition de la frontière Γ^ℓ en trois parties mesurables $\Gamma_a^\ell, \Gamma_b^\ell$ et Γ_3^ℓ telles que $meas(\Gamma_a^\ell) > 0$. Nous supposons que les deux corps sont en contact avec compliance normal et adhesion sur Γ_3^ℓ , le potentiel électrique s’anule sur Γ_a^ℓ et une charge électrique superficielle de densité q_2^ℓ est prescrite sur Γ_b^ℓ . (voir Fig.1.2).

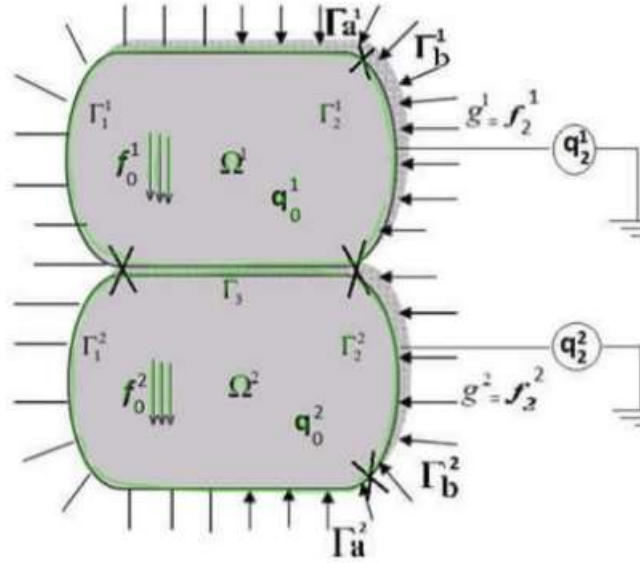


Figure1.2. Cadre Physique 2

nous utiliserons ce cadre physique dans le chapitre 4 de ce mémoire.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), "·" et $|\cdot|$ représentent respectivement le produits scalaires et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & |\mathbf{v}^\ell| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_i^\ell \cdot \tau_i^\ell, & |\boldsymbol{\tau}^\ell| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et \mathbf{v}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définie par

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales.

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière donnée par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \mathbf{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell \cdot \mathbf{v}_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact. En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{\mathbf{u}}^\ell = \frac{d\mathbf{u}^\ell}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{u}}^\ell = \frac{d^2\mathbf{u}^\ell}{dt^2},$$

où $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{\mathbf{u}}^\ell$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ les notations $\dot{\mathbf{u}}_\nu^\ell$ et $\dot{\mathbf{u}}_\tau^\ell$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu^\ell = \dot{\mathbf{u}}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \dot{u}_\tau^\ell = \dot{\mathbf{u}}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon^\ell(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_j \mathbf{u}_i^\ell + \partial_i \mathbf{u}_j^\ell).$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondant à la variable spatiale. Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associés aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n^0 1. Le premier modèle mathématique étudié dans cette thèse décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n^0 1. Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements \mathbf{u}^ℓ , les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$, les potentiels électriques φ^ℓ , les champs d'endommagements β^ℓ et les champs des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ . On sait qu'en général, l'évolution du corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy.

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (1.4)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier : par

exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T).$$

Puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ , le champ des déplacements s'annule

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T). \quad (1.5)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (1.6)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4)-(1.6) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n^0 2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n^0 2. A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électriques :

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (1.7)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} \mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumique sur Ω^ℓ . Rappelons que dans les cadres physiques, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (1.8)$$

tandis que sur Γ_b^ℓ , une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrit,

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T). \quad (1.9)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.4)-(1.9) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois des comportements

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constitue le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-déchargement, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par la loi de comportement, nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$, cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électromécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique D^ℓ ainsi que le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell)$.

Nous présentons par la suite les lois de comportement des matériaux : matériaux électro-élastiques, matériaux piézoélectriques élasto-viscoplastique, matériaux thermo-électro-viscoélastique.

1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.10)$$

où \mathcal{F}^ℓ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul; $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$, où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi_{(i)}^\ell)$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ dénote le transpose du tenseur \mathcal{E}^ℓ , tel que

$$\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.11)$$

Pour plus de détails sur les lois de comportement (1.10), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [2, 5].

1.2.2 Loi de comportement piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement

Dans ce cas la loi de comportement Piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement est donnée par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell + \\ &\int_0^t \mathcal{F}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \boldsymbol{\beta}^\ell(s) \right) ds, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \quad (1.13)$$

où \mathbf{D}^ℓ est le champ de déplacement électrique, \mathbf{u}^ℓ le champ de déplacement, $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)$ représentent respectivement la contrainte et le tenseur de déformation linéarisé. Ici \mathcal{A}^ℓ est une fonction non linéaire donnée, \mathcal{F}^ℓ est la relaxation tenseur, et \mathcal{G}^ℓ représente l'opérateur d'élasticité. $E(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition. Il résulte de (1.12) qu'à chaque instant, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell(t)$ décompose en trois parties : $\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \boldsymbol{\sigma}_V^\ell(t) + \boldsymbol{\sigma}_E^\ell(t) + \boldsymbol{\sigma}_R^\ell(t)$, où $\boldsymbol{\sigma}_V^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))$ représente la partie purement visqueuse de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_E^\ell(t) = (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t)$ représente la partie électrique de la contrainte et $\boldsymbol{\sigma}_R^\ell(t)$ satisfait une relation élastique-viscoplastique de type taux

$$\boldsymbol{\sigma}_R^\ell(t) = \mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_R^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \boldsymbol{\beta}^\ell(s)) ds. \quad (1.14)$$

Divers résultats, exemples et interprétations mécaniques dans l'étude des matériaux élastiques viscoplastiques de la forme (1.14) peuvent être trouvés dans [44, 24] at les références qu'il contient. Notons aussi que lorsque $\mathcal{F}^\ell = 0$, la loi de comportement (1.12) devient le Kelvin-Voigt électroviscoélastique relation constitutive

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t). \quad (1.15)$$

Les problèmes de contact dynamique avec les matériaux de Kelvin-Voigt de la forme (1.15) peuvent être trouvés dans [5]. La condition de contact de conformité normale a d'abord été considérée dans [39] dans l'étude de problèmes dynamiques avec des matériaux linéairement élastiques et viscoélastiques, puis elle a été utilisée dans diverses références, voir, par exemple, [35, 49]. Cette condition permet l'interpénétration de la surface du corps dans l'obstacle et elle a été justifiée en considérant l'interpénétration et la déformation des aspérités de surface.

L'endommagement β^ℓ est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\beta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \beta^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\beta^\ell) \ni \mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \beta^\ell), \quad (1.16)$$

où K^ℓ désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles définies par,

$$K^\ell = \{\xi \in V^\ell; 0 \leq \xi \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega^\ell\}, \quad (1.17)$$

κ^ℓ un coefficient positif, $\partial \psi_{K^\ell}$ représente le sou différentiel de la fonction d'indicateur de l'ensemble K^ℓ et \mathbf{S}^ℓ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources des d'endommagement dans le système. Lorsque $\beta^\ell = 1$, il n'y a aucun endommagement dans le matériau Ω^ℓ , lorsque $\beta^\ell = 0$, la matière complètement endommagée, quand $0 < \beta^\ell < 1$, il y a endommagements partiel et le système a une capacité de charge réduite. Nous utilisons la loi de comportement des matériaux Piézoélectriques élasto-viscoplastique avec endommagement dans le chapitre 3 dans cette thèse.

1.2.3 Loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne

La loi de comportement d'un matériau thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne est donnée par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E(\xi)^\ell + \\ \int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \varsigma^\ell(s), \mathbf{k}^\ell(s), \tau^\ell(s) \right) ds, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\dot{\mathbf{k}}^\ell = \Theta^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell \right), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + \boldsymbol{\beta}^\ell E(\xi^\ell), \quad (1.20)$$

où \mathbf{u}^ℓ désigne le champ de déplacement $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)$ représentent respectivement la contrainte et le tenseur de déformation linéarisé, \mathbf{D}^ℓ est le champ de déplacement électrique. Ici \mathcal{A}^ℓ et \mathcal{B}^ℓ sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement visqueuses et élastiques du matériau, \mathcal{G}^ℓ est une fonction constitutive non linéaire décrivant le comportement viscoplastique du matériau. \mathbf{k}^ℓ désigne la variable d'état interne, ς^ℓ et τ^ℓ représentent respectivement l'endommagement et le champ de température, Θ^ℓ est également une fonction constitutive non linéaire. Il existe une variété de choix pour les variables d'état internes, pour référence dans le domaine voire [14, 16]. Certaines variables d'état interne couramment utilisées sont la déformation plastique et un certain nombre de variables tensorielles qui prennent en compte l'affichage spatial des dislocations et l'écroissage du matériau. $E(\xi^\ell)$ est le champ électrique qui satisfait $E(\xi^\ell) = -\nabla \xi^\ell$, où ξ^ℓ est le potentiel électrique. Aussi, \mathcal{E}^ℓ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition et $\boldsymbol{\beta}^\ell$ désigne le tenseur de permittivité électrique. Il résulte de (1.18) qu'à chaque instant, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est décomposé en trois parties $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}_V^\ell + \boldsymbol{\sigma}_E^\ell + \boldsymbol{\sigma}_R^\ell$, où $\boldsymbol{\sigma}_V^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell)$ représente la partie purement visqueuse de la contrainte, $\boldsymbol{\sigma}_E^\ell = -(\mathcal{E}^\ell)^* E(\xi^\ell)$ représente la partie électrique de la contrainte et $\boldsymbol{\sigma}_R^\ell$ est la partie élastoplastique de la contrainte qui satisfait

$$\boldsymbol{\sigma}_R^\ell = \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + \int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_R^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \varsigma^\ell(s), \mathbf{k}^\ell(s), \tau^\ell(s) \right) ds. \quad (1.21)$$

Notons également que lorsque $\mathcal{G}^\ell = 0$ la loi de comportement (1.18) devient la relation de comportement électro-viscoélastique de Kelvin-Voigt

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E(\xi^\ell). \quad (1.22)$$

Les problèmes de contact avec les matériaux de Kelvin-Voigt de la forme (1.22) peuvent être trouvés dans [3, 35, 48]. Nous utilisons une loi piézoélectrique thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement et variable d'état interne donné par (1.18)-(1.20) où l'endommagement des matériaux causé par les déformations plastiques. L'inclusion différentielle utilisée pour l'évolution du champ d'endommagement est

$$\dot{\zeta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\zeta^\ell) \ni \phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell)$$

où K^ℓ désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles définies par,

$$K^\ell = \{\omega \in H^1(\Omega^\ell); 0 \leq \omega \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega^\ell\}, \quad (1.23)$$

κ^ℓ est un coefficient positif, $\partial \psi_{K^\ell}$ représente le sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble K^ℓ et ϕ^ℓ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources d'usure dans le système. Lorsque $\zeta^\ell = 1$, il n'y a pas de dommage dans le matériau, lorsque $\zeta^\ell = 0$, le matériau est complètement endommagé, lorsque $0 < \zeta^\ell < 1$, il y a un dommage partiel et le système a une capacité de charge réduite. De nouveaux modèles généraux de dommages ont été dérivés dans [21, 23, 20] du principe de puissance virtuelle. L'inclusion différentielle utilisée pour l'évolution du champ de température est

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell) + \chi^\ell$$

où Ψ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici, et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et χ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne dans le chapitre 4 dans cette thèse.

Nous passons maintenant aux conditions aux limites utilisées dans les chapitres 3 et 4.

1.3 Conditions aux limites

Dans cette étape, nous définirons les conditions aux limites de chacune des parties Γ^ℓ . comme suit

1.3.1 La condition aux limites de déplacement

Les corps sont encastrés dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements \mathbf{u}^ℓ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.24)$$

1.3.2 La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.25)$$

1.3.3 Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations ;

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.26)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.27)$$

1.3.4 Conditions continue aux limites de contact.

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées conditions de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsqu'il ne peut y'avoir d'interpénétration entre les deux corps), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre les deux corps), de compliance normale (lorsque surface de contact est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifié). À par le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle

(le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

On définit le déplacement normal par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \quad (1.28)$$

et le déplacement tangent par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2. \quad (1.29)$$

La continuité des contraintes sur l'inter faces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.30)$$

Conditions aux limites de contact de Signorini.

La condition de contact *non-pénétration* entre les deux corps est exprimée par la relation suivante :

$$[u_\nu] \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.31)$$

Au point de Γ_3 tels que $[u_\nu] < 0$, il y a séparation entre les deux corps. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$[u_\nu] < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.32)$$

Au point de Γ_3 tels que $[u_\nu] = 0$, le contact est maintenu et chaque corps exerce une réaction normale orientée vers l'autre corps et donc nous pouvons écrire

$$[u_\nu] = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.33)$$

On dit que le contact entre les deux corps sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.34)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.28)-(1.34) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante : suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \stackrel{\text{noté}}{\equiv} \sigma_\nu \\ (b) : [u_\nu] \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, [u_\nu]\sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \\ (c) : \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Les conditions aux limites de la forme (1.35) sont aussi appelés "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*".

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue a priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{array} \right. \quad (1.36)$$

où g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Cette condition indique qu'un corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. Précisons que dans les chapitres 4 de la cette thèse nous considérons le cas où d'un corps reposons sur l'autre corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.37)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.38)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.36) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle

dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans cette thèse

Contact avec compliance normale et un amortissement normal

Soit maintenant p_i , pour $i = \nu, \tau$ la fonction de compliance normale satisfaite $p_i(r) = 0$ si $r \leq 0$ et q_i , est une fonction de raideur tangentielle non négative. satisfait la condition disoit une compliance normale, un amortissement normal

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g) + q_\nu([\dot{u}_\nu]) \\ \|\sigma_\tau\| = p_\tau([u_\tau] - g) + q_\tau([\dot{u}_\tau]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.39)$$

où g représente l'interstice entre les deux corps .

Cette condition indique qu'un cops exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. Précisons que dans les chapitres 3 de la cette thèse nous considérons le cas ou d'un corps reposons sur le autre corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$.

Contact sans frottement

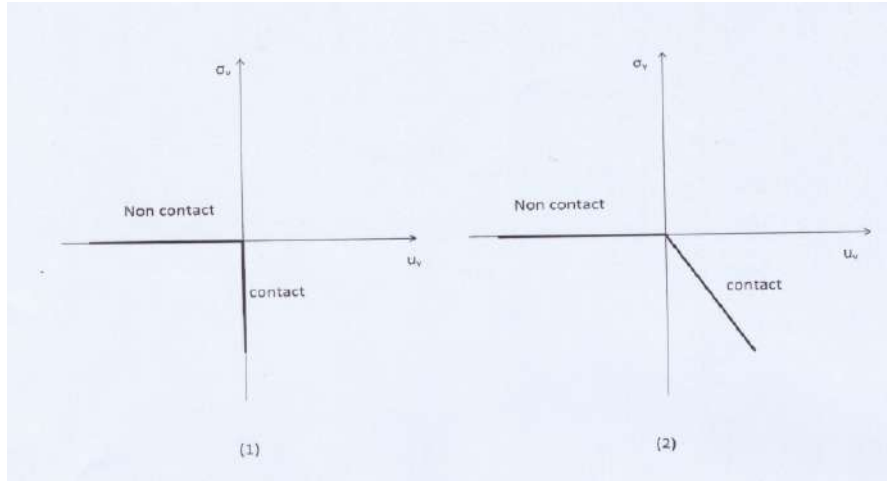
Dans un contact sans frottement, l'action mécaniques transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact .

Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nul.

Dans le cas où la contrainte tangentielle n'est pas nulle-on dit que le mouvement tangentiel se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.



Figure(1.3) –Loi de Coulomb (1) et sa régularisation(2).

Lois de contact avec compliance normale et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on introduit une variable interne d'État définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \zeta \leq 1$. Quand $\zeta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\zeta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \zeta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plusieurs détails sur cette section, on renvoie par exemple [17]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

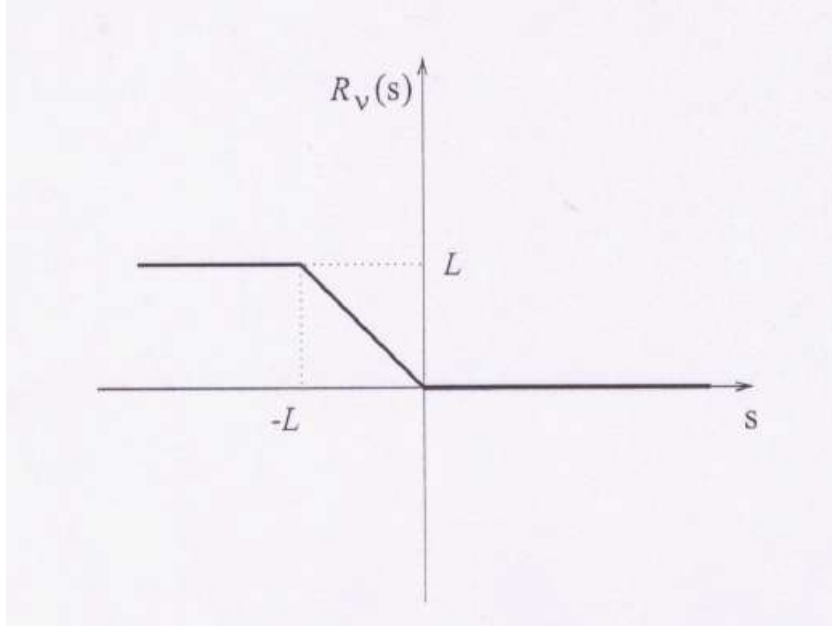
$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.40)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.40) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où

le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.40) a été déjà utilisée dans [15], [26].



Figure(1.4) -représentation graphique de l'opérateur de traction R_ν

Quand le champ d'adhésion ζ est nul, (1.40) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.42)$$

qui représente la condition de compliance normale.

1.3.5 Condition dans le plan tangent

Aux points de Γ_3 , la rigidité tangentielle générée par la colle est supposée dépendre de l'adhésion et du déplacement tangentiel,

$$\sigma_\tau = -p_\tau(\zeta) \mathbf{R}_\tau([u_\tau]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.43)$$

où \mathbf{R}_τ est un opérateur de troncation défini par la relation

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.44)$$

Alors, $p_\tau(\zeta)$ agit comme une constante de ressort, qui croit avec ζ ; la traction est en direction opposée au déplacement. Le module maximum de la traction tangentiel dans (1.43) est $p_\tau(1)L > 0$. La traction de frottement tangentielle est supposée être beaucoup plus petite que l'adhésion et est donc omise. Quand elle n'est pas négligeable on doit ajouter la traction de frottement comme cela a été fait en [25].

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\zeta} = H_{ad}(\zeta, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.45)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.46)$$

H_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et ζ_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.47)$$

Sous les conditions (1.45)-(1.47), on a la remarque suivante :

Remarque 1.3.1 : *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \zeta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\zeta} \leq 0$ donc $\zeta \leq \zeta_0 \leq 1$. En outre, si $\zeta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\zeta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\zeta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \zeta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Ce chapitre est consacré à la disruption des espaces utilisés dans cette thèse. Nous supposons que Ω^ℓ est un domaine borné et des lipschitz de \mathbb{R}^d , ($d = 2, 3$), c'est-à-dire que sa frontière Γ^ℓ est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} avec une partition de trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'un côté est et une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, en deux parties ouvertes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ d'un autre côté, telles que $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$ et $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$.

2.1 Contraction

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe . En analyse ces théorèmes se relèvent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de résolution des equations différentielles. Le théorème de point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe. En définissent quelques définitions qui permettent d'affirmer qu'une fonction f admet des critères de théorème du point fixe de contraction.

Définition 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \rightarrow X$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si ;

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

k est dite constante de Lipschitz.

Définition 2.1.2 Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \rightarrow X$ est dite 1-lipschitzienne si $k = 1$ et

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

et l'application f est dite non expansive.

Définition 2.1.3 L'application lipschitzienne f est appelé.

1. non expansive si $k \leq 1$.
2. contraction si $0 < k < 1$.

Théorème 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz .

Alors f admet un unique point fixe $u \in X$.

En outre, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^n(x) = u,$$

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

Maintenant il nous est paru nécessaire de présenter quelques espaces, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et Lipschitzienne, les inéquations variationnelles et dévolution.

2.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 2.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

2.3 Les espaces $L^p(\Omega^\ell)$

Définition 2.3.1 (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble ,

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ lebesgue integrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c; |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.3.2 Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p$ pour tout $\forall K \subset \Omega$ où I_K représente l'application identité de K .

Théorème 2.3.1 . Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes ;

- 1) les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Pour tout fonction $u, v \in L^1(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder est vérifiée ; i.e

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

- 3) les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces séparables pour p .
- 4) L'espace $L^2(\Omega)$ munit de produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée ; i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

2.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque-là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par ;

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace d'Hilbert pour le produit scalaire ;

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.4.1 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset^c L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.4.2 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.4.1 L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représenté l'espace de fonctions réel sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.4.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

Définition 2.4.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha} u \}.$$

Remarque 2.4.3 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha} u$ et v_{α} .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha} u \|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha} u \|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorèm 2.4.3 *Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega^{ell})$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.*

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [6].

2.5 Espaces fonctionnels

Nous utilisons des notations standard pour les espaces Lebesgue et Sobolev associés à Ω^ℓ et Γ^ℓ et, de plus, on considère les espaces

$$\left\{ \begin{array}{l} H^\ell = \{\mathbf{v}^\ell = (v_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}; v_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\boldsymbol{\tau}^\ell = (\tau_{ij}^\ell)_{1 \leq i,j \leq d}; \tau_{ij}^\ell = \tau_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}, \\ H_1^\ell = \{\mathbf{v}^\ell = (v_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}; \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \in \mathcal{H}^\ell\}, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\boldsymbol{\tau}^\ell = (\tau_{ij}^\ell)_{1 \leq i,j \leq d}; \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathcal{H}^\ell, \text{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell \in H^\ell\}, \\ \mathbf{Y}^\ell = \{\boldsymbol{\lambda}^\ell = (\lambda_i^\ell)_{1 \leq i \leq m}; \lambda_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Il est facile de vérifier que les espaces $H^\ell, \mathcal{H}^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}_1^\ell, \mathbf{Y}^\ell$, et \mathbf{V}^ℓ sont tous les espaces Hilbert équipés des produits intérieurs

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \nabla \mathbf{u}^\ell \cdot \nabla \mathbf{v}^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \text{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{\mu}^\ell)_{\mathbf{Y}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\lambda}^\ell \cdot \boldsymbol{\mu}^\ell dx, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

et les normes associées $\|\cdot\|_{H^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}, \|\cdot\|_{H_1^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, et $\|\cdot\|_{\mathbf{Y}_1^\ell}$ respectivement. Ici et ci-dessous, nous utilisons la notation

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}^\ell &= (u_{i,j}^\ell), \quad \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \forall \mathbf{u}^\ell \in H_1^\ell. \\ \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= (\sigma_{ij,j}^\ell), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell. \end{aligned}$$

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation \mathbf{v}^ℓ pour

désigner la trace $\gamma \mathbf{v}^\ell$ de \mathbf{v}^ℓ sur Γ^ℓ .

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continu, mais n'est pas surjective.

Désignons par H_{Γ^ℓ}' le dual de H_{Γ^ℓ} , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H_{Γ^ℓ}' et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H_{\Gamma^\ell}'$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.5)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.6)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.7)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$V^\ell = \{\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}. \quad (2.8)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V^ℓ ; alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|\mathbf{v}^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.9)$$

Nous considérons sur l'espace V^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \quad (2.10)$$

et soit $\|\cdot\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} = \|\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.11)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{V^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert.

De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.7) et (2.9), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|\mathbf{v}^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.12)$$

Pour une fonction scalaire ζ , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \{\zeta : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \zeta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (2.13)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$E_0^\ell = L^2(\Omega^\ell), \quad E_1^\ell = H^1(\Omega^\ell), \quad L_0^\ell = L^2(\Omega^\ell), \quad L_1^\ell = H^1(\Omega^\ell),$$

$$W^\ell = \{\xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \xi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}, \quad \mathcal{W}^\ell = \{\mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\},$$

où $\text{div} \mathbf{D}^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces W^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{H^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} \mathbf{D}^\ell, \text{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (2.14)$$

soient $\|\cdot\|_{W^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées ; c'est-à-dire

$$\|\xi^\ell\|_{W^\ell} = \|\nabla \xi^\ell\|_{H^\ell}, \quad \|\mathbf{D}^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|\mathbf{D}^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\text{div} \mathbf{D}^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (2.15)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \xi^\ell\|_{H^\ell} \geq c \|\xi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (2.16)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvé dans [42]. Sur l'espace W nous considérons le produits scalaires donné par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla \varphi^\ell \cdot \nabla \xi^\ell \quad (2.17)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré trouvé dans [19].

Il s'ensuit de (2.16) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0^ℓ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (2.18)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, W = W^1 \times W^2, \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

$$E_0 = E_0^1 \times E_0^2, E_1 = E_1^1 \times E_1^2, L_0 = L_0^1 \times L_0^2, L_1 = L_1^1 \times L_1^2$$

les espaces $V, W, \mathcal{W}, E_0, E_1, L_0$ et L_1 sont des espaces de Hilbert réels dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}, (\cdot, \cdot)_{E_1}$ et $(\cdot, \cdot)_{L_1}$. Les normes associées seront désignées par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}, \|\cdot\|_{E_1}$ et $\|\cdot\|_{L_1}$, respectivement.

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et a valeur dans un espace de Banach réel, nous utilisons la classique notation pour les espaces $L^p(0, T; X), W^{k,p}(0, T; X)$, où $1 \leq p \leq \infty, k \geq 1$. Nous notons par $C((0, T), X)$ et $C^1((0, T), X)$ les espaces des fonctions continus et continûment différentiables sur $(0, T)$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C((0,T),X)} = \max_{t \in (0,T)} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1((0,T),X)} = \max_{t \in (0,T)} \|f(t)\|_X + \max_{t \in (0,T)} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c((0, T), X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.5.1 Une fonction $f : (0, T) \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset (0, T)$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c((0, T), X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in (0, T) \setminus E$.

2.6 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments danalyses non linéaires dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques

2.6.1 Opérateur fortement monotone

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$

Définition 2.6.1 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire. L'opérateur A est dit

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (2.19)$$

(2) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X; \quad (2.20)$$

(3) Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2.21)$$

(4) hémicontinu si

$$\forall u, v \in X \quad \text{l'application } t \longrightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \longrightarrow X' \quad \text{est continue.} \quad (2.22)$$

2.6.2 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physique conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans la fonctionnel non différentiable dépend de la solution elle. Ces dernières sont appelées " inégalités quasi variationnelles". Pour cela, nous nous considérons un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire et la fonctionnel $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi variationnelle suivante :

$$(Au, u - v)_X + j(u, v) + j(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.23)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A fortement monotone et Lipschitz, c'est-à-dire A , satisfait à (2.19), (2.20) et la fonctionnel $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X, \\ (b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_1) - j(u_1, v_2) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha\|u_1 - u_2\|_X\|v_1 - v_2\|_X. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.23) est donnée par le résultat suivant.

Théorèm 2.6.1 *Supposons que les hypothèses (2.20), (2.21), et (2.24) sont satisfaites. Alors $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (2.23).*

La démonstration du Théorème se trouve dans [27].

Théorèm 2.6.2 (Théorème de point fixe de Banach) *Soit K un sous-ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est-à-dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que*

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorèm 2.6.3 *Soit K un sous-ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Définition 2.6.2 *Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continu s'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\|b(u, v)\|_X \leq M\|u\|_X\|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.6.3 *Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dit coercive s'il existe un constant $m > 0$ telle que :*

$$b(u, u) \geq m\|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorèm 2.6.4 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive.

Soit $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (2.25)$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}b(u, u) - \langle u, u \rangle_X \leq \frac{1}{2}b(v, v) - \langle v, v \rangle_X, \quad \forall v \in X. \quad (2.26)$$

2.6.3 Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 2.6.4 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 2.6.5 Soient une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X telle que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_{X' \times X}, \forall v \in K\}. \quad (2.27)$$

Le crochet $(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide.

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (2.28)$$

2.6.4 Équation différentielle ordinaire

Théorème 2.6.5 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés

suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T]; \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p([0, T]; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

2.6.5 Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorèm 2.6.6 Soit V, H oit comme ci-dessus, et soit $A : V \rightarrow V'$ être un héli-continuu et opérateur monotone qui satisfait

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V, \tag{2.29}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C(\|v\|_V + 1) \quad \forall v \in V, \tag{2.30}$$

pour certaines constantes $w > 0, C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, étai donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait which satisfies

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad p.p. t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

2.6.6 Inégalités variationnelle paraboliques

Soit V et H deux espaces de Hilbert tel que V sont denses dans H et son injection est continue, L'espace H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V . Nous écrivons $V \subset H \subset V'$ et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triple de Gelfand. Nous désignons par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{V'}$ les normes sur les espaces V, H et V' respectivement, et nous utilisons $V \times V'$ pour l'appariement de dualité entre

V et V' . Notez que si $f \in H$ alors $\langle f, v \rangle_{V \times V'} = (f, v)_H$, $\forall v \in H$. se qui suit est un résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques.

Théorèm 2.6.7 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triple de Gelvand ,soit K un non-vide ensemble fermé et convexe de V . Supposons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est continue forme bilinéaire symétrique telle que pour certaines constantes $c_1 > 0$ et c_0 ,*

$$a(v, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq c_1 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

. Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T, H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ tel que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in K$, $\forall t \in [0, T]$ et pour presque tout $t \in (0, T)$.

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K.$$

2.7 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.7.1 *Soient $m, n \in C((0, T); \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C((0, T); \mathbb{R})$*

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s) ds) \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T],$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.7.1 Soient $m \in C((0, T); \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\psi \in C((0, T); \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient,

Corollaire 2.7.2 soient $n \in C((0, T); \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $a \geq 0$ et $\psi \in C((0, T); \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds) \quad \forall t \in [0, T],$$

alors.

$$\psi(t) \leq (a) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire précédent est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds. \quad \forall t \in [0, T]$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$.

L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

2.8 Discrétisation et éléments de contact

Dans la suite, afin d'alléger les notations, l'indice relatif au temps n (permettant de considérer le problème incrémental) ne sera plus indiqué.

Discrétisation spatiale

La méthode des éléments finis consiste en une discrétisation spatiale du corps en éléments géométriques simples connectés par un nombre fini de noeuds. Supposant une

solution du type polynomial par morceaux dans chaque élément, la méthode permet de trouver une solution discrète aux noeuds, approximant les mouvements dans l'espace du corps. Nous admettons que le corps considéré est un domaine de l'espace \mathbb{R}^2 . Ce dernier peut être décomposé en un nombre fini N^h de triangles droits ou de quadrilatères Ω^e via une triangulation $\mathcal{T}^h = \{\Omega^e\}$, h désignant le diamètre maximum des éléments Ω^e , tels que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{a=1}^{N^h} \Omega^e$$

La triangulation \mathcal{T}^h est supposée régulière, voir [12]. Notons X^h l'espace élément fini des éléments linéaires correspondant à la triangulation \mathcal{T}^h . Une fois la triangulation \mathcal{T}^h construite, les espaces de dimension finie V^h sont donnés par

$$V^h = X^h \cap V$$

Si l'on considère la famille d'éléments P_1 , l'ensemble des fonctions de base $\{\bar{\alpha}_i\}$ linéaires, constantes par morceaux, prenant la valeur 1 au noeud i et 0 aux autres noeuds, les espaces V^h valent alors

$$V^h = \{\omega^h \in C(\Omega); \omega^h_{|\Omega^e} \in P_1(\Omega^e), \Omega^e \in \mathcal{T}^h, \omega^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \quad (2.31)$$

où Ω^e désigne l'élément référencé au lequel sont définies les fonctions de base. De cette façon, le champ discret $\omega^h \in V^h$ peut s'écrire sous la forme

$$\omega^h(x) = \sum_{i=1}^{N_{tot}} \omega_i \bar{\alpha}_i(x) \quad (2.32)$$

où $\{\omega_i\}$ sont les valeurs au noeud i de la fonction ω et N_{tot} est le nombre total de noeuds du maillage. Avec cette construction des espaces V^h , les espaces $\omega^h \in V^h$ sont caractérisés par leurs valeurs au sommet de la triangulation (voir [12]). Le choix de tels espaces V^h construits à partir d'éléments de type P_1 est simple mais peut être un peu rudimentaire. Il est alors possible afin d'augmenter la précision de l'approximation des champs de déplacements de remplacer l'espace P_1 dans la définition (2.31) des espaces V^h par un espace plus grand Q_2 (espace des polynômes quadratiques). De nombreux autres choix sont possibles, voir [12] ou [55]. Pour plus de détails, lorsque les corps ne sont pas polygonaux, nous renvoyons le lecteur à [12]

ou [13].

Discrétisation temporelle

Par ailleurs, pour diacrétiser la variable temporelle, on considère une subdivision équidistante $\bigcup_{n=1}^N [t_{m+1}, t_n]$ de l'intervalle $[0, T]$ telle que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ et on définit par $k = \frac{T}{N}$ le pas de temps.

2.9 Approximation variationnelle approchée

Soit X l'espace défini précédemment (de dimension infinie), on se donne un sous-espace X^h de X de dimension finie et dépendant d'un paramètre $h > 0$, soit I la dimension de X ; en pratique, X^h représente une approximation de l'espace X de dimension infinie et on aura :

$$\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = +\infty$$

et soit le problème variationnel suivant :

Problème \mathcal{P}_V : Trouver $u \in X$ tel que :

$$u \in X, \langle Au, v - u \rangle_X + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle_X, \quad \forall v \in X,$$

où A et j suis définis dans (2.23).

Afin d'obtenir une approximation numérique de la solution u on introduit un problème approché \mathcal{P}_V^{hk} posé dans un espace de dimension finie. On vérifie, en premier que le problème \mathcal{P}_V^{hk} à une solution unique puis on montre que sa solution converge vers la solution u du problème \mathcal{P}_V . Alors, au sous-espace X^h de X , on associe le problème approché \mathcal{P}_V^{hk} suivant :

Problème \mathcal{P}_V^{hk} : trouver $u^{hk} \in X^h$ tel que :

$$u^{hk} \in X^h, \langle Au^{hk}, v - u^{hk} \rangle_X + j(v) - j(u^{hk}) \geq \langle f, v - u^{hk} \rangle_X, \quad \forall v \in X^h$$

l'intérêt de la méthode d'approximation variationnelle est de trouver une estimation d'erreur commise lorsqu'on approche u par u^{hk} , c'est-à-dire démontrer le théorème :

Théorème 2.9.1 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et k tel que*

$$\|u - u^{hk}\| \leq C \inf_{v \in X^h} \|u - v\| \leq C(h + k).$$

Deuxième partie

Problème de Contact entre deux corps

Piézoélectrique élasto-viscoplastique

avec endommagement

Chapitre 3

Problème de Contact entre deux corps Piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus dynamique d'un problème de contact avec compliance normale, un amortissement normal entre deux corps piézoélectriques élasto-viscoplastique avec endommagement, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements u^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques φ^ℓ , les champs d'endommagements β^ℓ et les champs des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ . Ce problème est modélisé par l'endommagement est décrite par inclusion différentielle ordinaire du premier ordre. Nous avons deux objectifs. Le premier est de formuler le problème variationnel, où les inconnues les champs des déplacements, les champs des contraintes, les champs des potentiels électriques, les champs d'endommagements et les champs des déplacements électriques. Aussi nous prouver l'existence et l'unicité du solution faible. Les techniques employées dans les démonstrations sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe de Banach. Le second, nous présentons la formulation variationnelle approchée du problème faible, ces problèmes nécessitent une discrétisation mixte, pour les matériaux par éléments finis et pour les temps par différences finies, et puis on montre le résultat d'approximation numérique.

3.1 Formulation du problème

Le modèle électro-mécanique étudié est classé dans *le cadre physique n°1*, que nous avons décrit dans la première partie du thèse. Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est électro-élasto-viscoplastique du type (1.12)-(1.13) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.39). Avec ces considérations, le modèle mécanique du problème se formulere de la manière suivante :

Problème \mathcal{P}_1 . Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs d'endommagements $\beta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \\ + \int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \beta^\ell(s) \right) ds &\quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - \mathbf{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T) \quad (3.2)$$

$$\dot{\beta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \beta^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\beta^\ell) \ni \mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \beta^\ell). \quad (3.3)$$

$$\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\text{div } \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g) + q_\nu([\dot{u}_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ \|\sigma_\tau\| = p_\tau([u_\tau] - g) + q_\tau([\dot{u}_\tau]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$[\dot{\mathbf{u}}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -(p_\tau([u_\tau] - g) + q_\tau([\dot{u}_\tau])) \cdot \frac{[\dot{\mathbf{u}}_\tau]}{[\dot{\mathbf{u}}_\tau]} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \beta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}^1 \cdot \boldsymbol{\nu}^1 = \mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\nu}^2 = \mathbf{D}, \\ \mathbf{D} = \boldsymbol{\psi}([\mathbf{u}_\nu] - g)\phi_l(\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \boldsymbol{\beta}^\ell(0) = \boldsymbol{\beta}_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (3.15)$$

Premièrement, les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi de comportement électro-élastique-viscoplastique avec endommagement dans laquelle $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)$ représente le tenseur linéarisé de contrainte, $E(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ est le champ électrique, \mathcal{A}^ℓ et \mathcal{B}^ℓ sont respectivement les opérateurs de viscosité et d'élasticité non linéaire, respectivement, \mathcal{G}^ℓ représente le tenseur de viscoplasticité, \mathcal{E}^ℓ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé et \mathbf{B}^ℓ représente le tenseur de permittivité électrique, l'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donné par la relation (3.3) où \mathbf{S}^ℓ , est la source mécanique de la croissance des dommages, supposée être fonction assez générale des déformations un endommagement proprement dit $\partial\psi_{K^\ell}$ est le sou différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K^ℓ . Les équations suivantes (3.4) et (3.5) sont les équations de mouvement pour le champ de contrainte et les équations d'équilibre pour le champ de déplacement électrique, respectivement.

Nous utilisons ces équations car le processus est supposé être mécaniquement dynamique et électriquement quasi-statique. Les conditions (3.6) et (3.7) sont les conditions aux limites classiques de déplacement-traction tandis que (3.12) et (3.13) représentent les conditions aux limites pour les variables électriques, L'équation (3.8) représente la condition de compliance normale avec amortissement normal sur la surface de contact de potentiel Γ_3 . dans laquelle p_ν et g représente l'écart dans la configuration de référence entre deux corps, mesuré selon la direction de $\boldsymbol{\nu}^\ell$. Lorsqu'il est positif, $[u_\nu] - g$ représente l'interpénétration des aspérités de surface dans celles de la fondation. Cette condition a été introduite pour la première fois dans [32] et utilisée dans un grand nombre d'articles, voir, par exemple, [22, 23, 27, 36] et les références qu'il contient. La condition (3.9) représente la condition de contact compliance normale avec amortissement normal sur le plan tangentiel, ou p_τ est une fonction donnée, le cisaillement

tangentiel ne peut pas dépasser la résistance de frottement maximale $p_\tau([u_\nu] - g)$, ce que l'on appelle la limite de frottement. De plus, lorsque le glissement commence, le cisaillement tangentiel atteint la limite de frottement et s'oppose à au mouvement. Les conditions de contact de friction de la forme (3.8), (3.9) ont été utilisées dans divers articles, voir, par exemple, [29, 44, 49] et les références qui y sont contenues et le frottement est décrit par la relation (3.10) qui peut être écrite sous la forme (1.39).

La relation (3.11) représente une condition aux limites de Neumann homogène pour le champ d'endommagement sur Γ^ℓ . Ensuite, (3.14) est la condition de contact électrique sur Γ_3 , introduite dans [35]. Il peut être obtenu comme suit. Premièrement, contrairement aux articles précédents sur le contact piézoélectrique, nous supposons que la surface de contact est électriquement conductrice et son potentiel est maintenu à φ_0 . Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point de la surface (c'est-à-dire $[u_\nu] < g$), l'espace est supposé être un isolant (disons, il est rempli d'air), il n'y a pas de charges électriques libres sur la surface et de la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule. Ainsi,

$$[u_\nu] < g \Rightarrow \mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = 0. \quad (3.16)$$

Pendant le processus de contact (c'est-à-dire lorsque $[u_\nu] \geq g$) composante normale du champ de déplacement électrique ou de la charge libre est supposée proportionnelle à la différence entre le potentiel de la fondation et le potentiel de surface du corps, avec \mathbf{k} comme le facteur de proportionnalité. Ainsi

$$[u_\nu] \geq g \Rightarrow \mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{k}(\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0). \quad (3.17)$$

On combine (3.16), (3.17) pour obtenir

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{k}_{\chi_{[0, \infty)}}([u_\nu] - g)(\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0), \quad (3.18)$$

où $\chi_{[0, \infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty)$; C'est,

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (3.18) décrit le contact électrique parfait et est quelque peu similaire à la condition de contact Signorini bien connue. Les deux conditions peuvent dépasser

les idéalisation dans de nombreuses applications. Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (3.18) et l'écrivons (3.14), dans laquelle $\mathbf{k}_{\chi_{[0,\infty)}}([\mathbf{u}_v] - g)$ is est remplacée par $\boldsymbol{\psi}$ qui est une fonction régulière et qui sera décrite ci-dessous, et ϕ_l est la fonction de troncature

$$\phi_l(s) = \begin{cases} -l & \text{si } s < -l, \\ s & \text{si } -l \leq s \leq l, \\ l & \text{si } s > l, \end{cases} \quad (3.19)$$

où l est une grande constante positive. Nous notons que cette troncature ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle, puisque l peut être arbitrairement grand, supérieur à toute tension de crête possible dans le système, et donc dans les applications $\phi_l(\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0) = \varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0$. Les raisons de la régularisation (3.14) de (3.18) ont mathématique. Premièrement, nous devons éviter la discontinuité de la charge électrique gratuite lorsque le contact est établi et, par conséquent, nous régularisons la fonction $\mathbf{k}_{\chi_{[0,\infty)}}$ dans (3.18) avec un Lipschitz fonction continue $\boldsymbol{\psi}$. Un choix possible est

$$\boldsymbol{\psi}(r) \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq l/\delta, \\ k & \text{si } r > \delta, \end{cases} \quad (3.20)$$

où $\delta > 0$ est un petit paramètre. Ce choix signifie que pendant le processus de contact, la conductivité électrique augmente à mesure que le contact entre les aspérités de surface s'améliore et se stabilise lorsque la pénétration $[\mathbf{u}_v] - g$ atteint la valeur δ .

Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\phi_l(\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0) = \varphi^1 + \varphi^2 - \varphi_0$ pour contrôler les bornes de $[\varphi] - \varphi_0$. dans $\boldsymbol{\psi} \equiv 0$ in (3.14), puis

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.21)$$

qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (2.23) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [5, 36, 51, 52]. La condition (3.14), au lieu de (3.21), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et conduit à un nouveau

modèle mathématique non standard. En raison de la condition de frottement (3.9), qui n'est pas lisse, nous ne nous attendons pas à ce que le problème ait, en général, des solutions classiques. Enfin, dans l'équation (3.15) \mathbf{u}_0^ℓ est le déplacement initial et β_0^ℓ est l'endommagement initial.

3.2 Formulation Variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème \mathcal{P}_1 , nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

H(3.1) : (a) Il existe $L_{\mathcal{A}^\ell} > 0$ telle que

$$|\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|, \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$$

(b) Il existe $m_{\mathcal{A}^\ell} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) &\geq m_{\mathcal{A}^\ell} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2, \\ \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} &\in \Omega^\ell. \end{aligned}$$

(c) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est Lebesgue mesurable sur Ω^ℓ ,
pour toute $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$.

(d) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ appartient à Q^ℓ .

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

H(3.2) : (a) Il existe $L_{\mathcal{B}^\ell} > 0$ telle que

$$|\mathcal{B}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{B}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)| \leq L_{\mathcal{B}^\ell} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|, \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell$$

(b) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{B}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est Lebesgue mesurable sur Ω^ℓ ,
pour toute $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$.

(c) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{B}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ appartient à Q^ℓ .

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

H(3.3) : (a) Il existe une constante $L_{\mathcal{G}^\ell} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \varsigma_1) - \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\theta}_2, \varsigma_2)\| &\leq \\ L_{\mathcal{G}^\ell} (\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + \|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\| + \|\varsigma_1 - \varsigma_2\|) &, \\ \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \varsigma_1, \varsigma_2 \in \mathbb{R} &\text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \end{aligned}$$

(b) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \varsigma)$ est Lebesgue mesurable sur Ω^ℓ ,

pour $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d$, for all $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}$.

(c) L'application $\mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ appartient à Q^ℓ .

L'opérateur de permittivité électrique $\mathbf{B}^\ell = (b_{ij}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

H(3.4) :(a) $\mathbf{B}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = (b_{ij}^\ell(\mathbf{x})E_j) \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d$, p.p. $\mathbf{x} \in \Omega^\ell$.

(b) $b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell$, $b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell)$, $1 \leq i, j \leq d$

(c) Il existe $m_{\mathbf{B}^\ell} > 0$ tel que $\mathbf{B}^\ell \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_{\mathbf{B}^\ell} |\mathbf{E}|^2$,

$\forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d$, p.p. $\mathbf{x} \in \Omega^\ell$.

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

H(3.5) :(a) $\mathcal{E}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (e_{ijk}^\ell(\mathbf{x})\tau_{jk})$, $\forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d$ p.p.

(b) $e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell)$, $1 \leq i, j, k \leq d$.

La fonction source de dommage $\mathbf{S}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

H(3.6) :(a) Il existe une constante $M_{\mathbf{S}^\ell} > 0$ tel que

$$\|\mathbf{S}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\beta}_1) - \mathbf{S}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\beta}_2)\| \leq M_{\mathbf{S}^\ell} (\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + \|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\|), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$$

(b) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\beta})$ Lebesgue mesurable sur Ω^ℓ ,

pour tout $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d$, est, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$.

(c) L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ appartient $L^2(\Omega^\ell)$.

La fonction de réponse damped normale $q_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ($r = v, \tau$) satisfait :

H(3.7) :(a) Il existe une constante C_1^r, C_2^r tel que

$$|q_r(x, \mathbf{d})| \leq C_1^r |\mathbf{d}| + C_2^r, \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Gamma_3$$

(b) $(q_r(x, \mathbf{d}_1) - q_r(x, \mathbf{d}_2))(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \geq 0$, $\forall \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^d$ p.p. $x \in \Gamma_3$.

(c) L'application $\mathbf{x} \mapsto q_r(x, d)$ est mesurable sur Γ_3 pour tout $d \in \mathbb{R}^d$.

(d) L'application $\mathbf{x} \mapsto q_r(x, d)$ est continue sur \mathbb{R}^d p.p. $x \in \Gamma_3$.

La fonction de compliance normale $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ($r = v, \tau$) satisfait :

H(3.8) :(a) Il existe une constante C_1^r, C_2^r tel que

$$|p_r(x, \mathbf{d})| \leq C_1^r |\mathbf{d}| + C_2^r, \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Gamma_3$$

(b) $(p_r(x, \mathbf{d}_1) - p_r(x, \mathbf{d}_2))(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \geq 0$, $\forall \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^d$ p.p. $x \in \Gamma_3$.

(c) L'application $\mathbf{x} \mapsto p_r(x, d)$ est mesurable sur Γ_3 pour tout $d \in \mathbb{R}^d$.

(d) L'application $\mathbf{x} \mapsto p_r(x, d)$ est continue sur \mathbb{R}^d p.p. $x \in \Gamma_3$.

Un exemple d'une fonction de conformité normale p_ν , qui satisfait les conditions H(3.8), est $p_\nu(u) = c_\nu u_+$, ou $c_\nu \in L^\infty(\Gamma_3)$ est un coefficient de rigidité surfacique positif, et $u_+ = \max\{0, u\}$. Les choix $p_\tau = \mu p_\nu$ et $p_\tau = \mu p_\nu(1 - \delta p_\nu)_+$ dans (3.9), ou $\mu \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $\delta \in L^\infty(\Gamma_3)$ sont des fonctions positives, conduisent à la loi de Coulomb usuelle ou modifiée frottement, respectivement, voir [29, 44, 53] pour plus de détails. Ici, μ représente le coefficient de frottement et δ est une petite constante de matériau positive liée à l'usure et à la dureté de la surface. Notons que si p_ν satisfait la condition H(3.8), alors p_τ la satisfait aussi, dans les deux exemples. Par conséquent, nous concluons que les résultats ci-dessous sont valables pour le piézoélectrique correspondant modèle de contact de friction.

La fonction de conductivité électrique de surface : $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\text{H(3.9) : (a) } \exists L_\psi > 0 \text{ tel que } \|\psi(\mathbf{x}, u_1) - \psi(\mathbf{x}, u_2)\| \leq L_\psi \|u_1 - u_2\|$$

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

$$\text{(b) } \exists M_\psi > 0 \text{ tel que } \|\psi(\mathbf{x}, u)\| \leq M_\psi \|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

$$\text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(d) } \psi(\mathbf{x}, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Un exemple de fonction de conductivité, qui satisfait la condition H(3.9), est donné par (3.20), auquel cas $M_\psi = k$. Un autre exemple est fourni par $\psi \equiv 0$, qui modélise le contact avec une fondation isolée. Nous concluons que nos résultats ci-dessous sont valables pour les modèles de contacts piézoélectriques correspondants. Le coefficient de diffusion des microfissures est vrai

$$\kappa^\ell > 0, \tag{3.22}$$

et le champ de dommage initial satisfait

$$\beta_0^\ell \in K^\ell. \tag{3.23}$$

Enfin, nous supposons que la fonction de gap, le potentiel donné et le déplacement initial satisfait

$$g \in L^2(\Gamma_3) \quad g \geq 0. \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \tag{3.24}$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \tag{3.25}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}. \tag{3.26}$$

Les forces, les tractions ont la régularité . les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions surfaciques f_2^ℓ , les charges électriques volumiques sont q_0^ℓ , et surfaciques q_2^ℓ ont la régularité :

$$\mathbf{f}_0^\ell \in W^{1,p}(0, T; W^\ell), \quad \mathbf{f}_2^\ell \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (3.27)$$

$$q_0^\ell \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)). \quad (3.28)$$

Ici, $1 \leq p \leq \infty$. On définit la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega^\ell) \times H^1(\Omega^\ell) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a(\xi^\ell, \varphi^\ell) = \sum_{\ell=1}^2 k^\ell \int_{(\Omega)^\ell} \nabla \xi^\ell \cdot \nabla \varphi^\ell dx. \quad (3.29)$$

Ensuite, nous définissons les quatre applications $j_1 : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j_2 : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbf{V} \times W \longrightarrow W$, $\mathbf{f} : (0, T) \rightarrow \mathbf{V}$ et $q : (0, T) \rightarrow W$, respectivement, par

$$j_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu] - g)[v_\nu] da + \int_{\Gamma_3} p_\tau([\mathbf{u}_\tau] - g)\|\mathbf{v}_\tau\| da, \quad (3.30)$$

$$j_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} q_\nu([u_\nu])[v_\nu] da + \int_{\Gamma_3} q_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|\mathbf{v}_\tau\| da, \quad (3.31)$$

$$(h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_\nu] - g)\phi_l([\varphi] - \varphi_0)\xi da, \quad (3.32)$$

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad (3.33)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t)\zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t)\zeta^\ell da \quad (3.34)$$

pour tout $\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in V^\ell$, $\varphi^\ell, \xi^\ell \in W^\ell$ et $t \in [0; T]$ Notons que les définitions de h, f et q sont basés sur le théorème de représentation de Riesz, de plus, il découle des hypothèses H(1.6)-(3.26) que les intégrales dans (3.30)-(3.31) et (3.34) sont bien définies.

A l'aide des formules de Green on voit directement que si $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) et (3.10) avec (3.30) et (3.31) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} Div \boldsymbol{\sigma}^\ell \mathbf{v}^\ell dx = \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da$$

$$+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \varepsilon(\mathbf{v}^1) dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{v}^1 dx &= \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da \\ &+ \int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da, \forall \mathbf{v}^1 \in V^1. \end{aligned} \quad (3.35)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \varepsilon(\mathbf{v}^2) dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{v}^2 dx &= \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \mathbf{v}^2 da \\ &+ \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \mathbf{v}^2 da + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \mathbf{v}^2 da, \forall \mathbf{v}^2 \in V^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

à addition (3.35) et (3.36)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \mathbf{v}^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (3.4) (3.6) et (3.7) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \mathbf{v}^\ell dx \\ = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \mathbf{v}^\ell dx \\ = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \mathbf{v}^\ell dx \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (3.33)

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \mathbf{v}^\ell da,$$

$$(\ddot{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{u}^\ell \mathbf{v}^\ell dx.$$

En suite :

$$(\ddot{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da = ?$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \mathbf{v}^2 da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\mathbf{v}_\nu^1 - \mathbf{v}_\nu^2) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{v}_\tau^1) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu ([\mathbf{v}_\nu]) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau ([\mathbf{v}_\tau]) da. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nous substituons (3.8)-(3.9) et (3.10) dans (3.37) pour trouver que :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([\mathbf{u}_\nu] - g) - q_\nu([\dot{\mathbf{u}}_\nu])) [\mathbf{v}_\nu] da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} (p_\tau([\mathbf{u}_\tau] - g) + q_\tau([\dot{\mathbf{u}}_\tau])) \|\mathbf{v}_\tau\| da. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} + \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([\mathbf{u}_\nu] - g) - q_\nu([\dot{\mathbf{u}}_\nu])) [\mathbf{v}_\nu] da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} (p_\tau([\mathbf{u}_\tau] - g) + q_\tau([\dot{\mathbf{u}}_\tau])) \|\mathbf{v}_\tau\| da. \end{aligned}$$

D'après (3.30) et (3.31) on trouve :

$$(\ddot{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{Q}^\ell} + j_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + j_2(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}. \quad (3.38)$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (3.5), (3.12) et la définition (3.32) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \mathbf{D}^\ell, \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \xi^\ell da, \quad \forall \xi^\ell \in \mathcal{W}^\ell, \quad (3.39)$$

doù

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \mathbf{D}^\ell \cdot \xi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \xi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \xi^\ell da, \quad \forall \xi^\ell \in \mathcal{W}^\ell. \quad (3.40)$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \xi^1 dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \mathbf{D}^1 \cdot \xi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \xi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \xi^1 da, \quad \forall \xi^1 \in \mathcal{W}^1. \quad (3.41)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \xi^2 dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \mathbf{D}^2 \cdot \xi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \xi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \xi^2 da, \quad \forall \xi^2 \in \mathcal{W}^2. \quad (3.42)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (3.12) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \xi^\ell da = 0.$$

à addition (3.41) et (3.42) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \mathbf{D}^\ell \cdot \xi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \xi^\ell da.$$

On a d'après (3.5)-(3.13) et (3.14) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \xi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \xi^\ell da + \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_v] - g) \phi_l([\varphi] - \varphi_0) \xi da,$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \xi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \xi^\ell da = \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_v] - g) \phi_l([\varphi] - \varphi_0) \xi da.$$

On a d'après (3.34) et (3.32) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \xi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \xi^\ell da = (q(t), \psi)_W,$$

$$(h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_v] - g) \phi_l([\varphi] - \varphi_0) \xi da.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (q(t), \psi)_W = (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W.$$

De (3.2), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_W = (q(t), \xi)_W, \quad (3.43)$$

$$\forall \xi \in \mathcal{W}, t \in [0, T].$$

Maintenant, pour les inconnues d'endommagements, soit $\beta^\ell(t) \in K^\ell$, $\ell = 1, 2$ et pour tout $t \in (0, T)$. La définition de $\partial\psi_{K^\ell}(\beta^\ell)$ (2.28) et de (1.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\beta}^\ell) - \dot{\beta}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta \beta^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \\ \forall \xi^\ell \in K^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\beta}^\ell), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ \leq \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell \left(\Delta \beta^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (3.11)

$$\begin{aligned} \left(\Delta \beta^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \left(\nabla \beta^\ell(t), \nabla(\xi^\ell - \beta^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial \beta^\ell(t)}{\partial \nu} \cdot (\xi^\ell - \beta^\ell(t)) da, \\ \left(\Delta \beta^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} = - \int_{\Omega^\ell} \nabla \beta^\ell(t) \cdot \nabla(\xi^\ell - \beta^\ell(t)) dx. \end{aligned}$$

En suite :

$$\begin{aligned} \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \beta^\ell(t) \cdot \nabla(\xi^\ell - \beta^\ell(t)) dx \geq \\ \left(\mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\beta}^\ell), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Additionner, pour $\ell = 1, 2$ il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \beta^\ell(t) \cdot \nabla(\xi^\ell - \beta^\ell(t)) dx \geq \\ \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\beta}^\ell), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi \in K. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Daprès (3.29), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t)) \geq \\ \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathbf{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\beta}^\ell), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi \in K. \quad (3.45) \end{aligned}$$

Finalement, de (3.1), (3.2), (3.53), (3.43), (3.45) et (3.15), on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P}_1 .

Problème $\mathcal{P}_{V,1}$. Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$, les champs des potentiels électriques $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, les champs d'endommagements $\beta = (\beta^1, \beta^2) : [0, T] \rightarrow E_1$ et les champs des déplacements électriques, tels que : $\mathbf{D} = (\mathbf{D}^1, \mathbf{D}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ tels que :

pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell(t) &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell + \\ &\int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \beta^\ell(s) \right) ds \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.46)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.47)$$

$$(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{Q}^\ell} + j_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + j_2(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (3.48)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + (h(\mathbf{u}, \varphi), \xi)_{W^\ell} = (q, \xi)_W, \quad \xi \in W, \quad (3.49)$$

$$\beta(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq \quad (3.50)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \xi^\ell - \beta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi \in K,$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \dot{\mathbf{u}}^\ell(0) = \mathbf{v}_0^\ell, \quad \beta^\ell(0) = \beta_0^\ell. \quad (3.51)$$

Pour étudier le problème $\mathcal{P}_{V,1}$, nous utilisons l'hypothèse de petitesse

$$M_{\psi^\ell} < \frac{m_{\mathcal{B}^\ell}}{c_0^2}, \quad (3.52)$$

où M_{ψ^ℓ} , c_0 et $m_{\mathcal{B}^\ell}$ donnés sont dans H(3.9), (2.18) et H(3.4), respectivement. Nous notons que seule la constante de trace, la constante de coercivité de \mathcal{B}^ℓ et la borne de sont ψ^ℓ impliquées dans (3.52); par conséquent, cette hypothèse de petitesse ne concerne que la géométrie et la partie électrique, et ne dépend pas des données mécaniques du problème. De plus, il est satisfait lorsque l'obstacle est isolé depuis alors

$\psi^\ell \equiv 0$ et donc $M_{\psi^\ell} = 0$. Supprimer ceci l'hypothèse reste une tâche pour la recherche future car elle est faite pour des raisons mathématiques, et ne semble pas se rapporter à des contraintes physiques inhérentes au problème.

3.3 Existence et Unicité Résultat

Maintenant, nous proposons notre résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 3.3.1 *Supposons que (2.18)-(3.28) tiennent. Alors il existe une solution unique $\{\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \beta\}$ Problème $\mathcal{P}_{V,1}$. De plus, la solution satisfait*

$$\mathbf{u} \in W^{2,p}(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1(0, T; \mathbf{V}), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in W^{2,p}(0, T; \mathbf{V}'), \quad (3.53)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (3.54)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,p}(0, T; Q), \quad (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^1, \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^2) \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}), \quad (3.55)$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}), \quad (3.56)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1). \quad (3.57)$$

Les fonctions $\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}$ et β , qui satisfont (3.46)-(3.51), sont appelées solutions faibles du du problème de contact \mathcal{P}_1 . Nous concluons que, sous les hypothèses H(3.1)-(3.28) et (3.52), le problème mécanique (3.1) a une unique solution faible satisfaisant (3.53). La régularité de la solution faible est donnée par (3.53), et en matière de déplacement électrique,

$$\mathbf{D} \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.58)$$

Il résulte de (3.67) et (3.27) que $\text{div } \mathbf{D}^\ell(t) - q_0^\ell(t) = 0$ pour tout $t \in (0, T)$, et donc la régularité (3.54) de φ , combiné avec H(3.4), H(3.5) et (3.28), implique (3.58). Dans cette section on suppose que les hypothèses du théorème 3.3.1 sont vérifiées, et on considère que C est un générique constante positive qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, q_\nu, q_\tau$ et peut changer d'endroit placer.

Soit a $\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ donné. Dans un premier temps, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{PV}_η^1 . Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}_\eta = (\mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$

tel que :

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_2(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) \quad (3.59)$$

$$+(\eta(t), v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, p.p. t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \dot{\mathbf{u}}^\ell(0) = \mathbf{v}_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (3.60)$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème.

Lemme 3.3.1 *Il existe une solution unique du problème \mathcal{PV}_η^1 qui satisfait (3.53).*

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (3.61)$$

Soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$, en utilisant (3.61) et (3.31), on trouve

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ &\int_{\Gamma_3} (q_\nu([u_{1\nu}]) - q_\nu([u_{2\nu}])([u_{1\nu} - u_{2\nu}]) da + \int_{\Gamma_3} (q_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}]) - q_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}])) \|[\mathbf{u}_{1\tau} - \mathbf{u}_{2\tau}]\| da, \end{aligned}$$

et en gardant à l'esprit H(3.1), H(3.7) , on obtient

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \geq m \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}. \quad (3.62)$$

Reprenons (3.61) et (3.31), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ &\int_{\Gamma_3} (q_\nu([u_{1\nu}]) - q_\nu([u_{2\nu}])([v_\nu]) da + \int_{\Gamma_3} (q_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}]) - q_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}])) \|[\mathbf{v}_\tau]\| da, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned}$$

et par (2.18) et H(3.1), on en déduit que

$$\begin{aligned} |A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2|_{\mathbf{V}'} &\leq L_{\mathcal{A}^\ell} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{\mathbf{V}} + c_0 |q_\nu([u_{1\nu}]) - q_\nu([u_{2\nu}])|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + c_0 |q_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}]) - q_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}])|_{L^2(\Gamma_3)^d}, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}, \end{aligned}$$

et en gardant à l'esprit le théorème de Krasnoselski (voir [32, p.60]), on en déduit que

$A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ est un opérateur continu. Maintenant, par (3.61), (2.11) et H(3.1), on

trouve où le constant positif $m = \min\{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$. En choisissant $\mathbf{u}_2 = 0_{\mathbf{V}}$ dans (3.62) on obtient

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &\geq m\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}}^2 - \|A0_{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{V}'}^2 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}} \\ &\geq \frac{1}{2}m\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}}^2 - \frac{1}{2m}\|A0_{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{V}'}^2 \quad \forall \mathbf{u}_1 \in \mathbf{V}, \end{aligned}$$

ce qui implique que A satisfait la condition (2.29) avec $\omega = \frac{m}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2m}\|A0_{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{V}'}^2$. De plus, par (3.61) et H(3.1) on trouve

$$\|A\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}'} \leq C^1\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}} + C^2 \quad \forall \mathbf{u}_1 \in \mathbf{V},$$

où $C^1 = \max\{C_{\mathcal{A}^1}^1, C_{\mathcal{A}^2}^1\}$ et $C^2 = \max\{C_{\mathcal{A}^1}^2, C_{\mathcal{A}^2}^2\}$. Cette inégalité et (3.27) implique que A satisfait la condition (3.62). Enfin, on rappelle que par (3.27) et (3.33) on a $\mathbf{f} - \eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ et $\mathbf{v}_0 \in H$.

Il résulte maintenant du théorème 2.6.6 qu'il existe une fonction unique \mathbf{v}_η qui satisfait

$$\mathbf{v}_\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap C(0, T; H), \quad \dot{\mathbf{v}}_\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad (3.63)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\eta(t) + A\mathbf{v}_\eta(t) + \eta(t) = \mathbf{f}(t), \quad p.p. \ t \in (0, T), \quad (3.64)$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.65)$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s) ds + \mathbf{u}_0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.66)$$

Il résulte de (3.61) et (3.63)-(3.66) que \mathbf{u}_η est une unique solution du problème variationnel \mathcal{PV}_η^1 , et il satisfait à la régularité exprimée en (3.53). ■

Dans la deuxième étape, soit $\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$, on utilise le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta = (\mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^2)$ obtenu dans le lemme 3.3.1 et on considère le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{PV}_η^2 . Trouver le champ de potentiel électrique $\varphi_\eta = (\varphi_\eta^1, \varphi_\eta^2) : [0, T] \rightarrow W$ tel que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{B}^\ell \nabla \varphi_\eta^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \xi^\ell)_{W^\ell} + (h(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \xi)_W = (q(t), \xi)_W \quad (3.67)$$

pour tous les $\xi \in W$, $t \in (0, T)$. Pour que le problème \mathcal{PV}_η^2 soit bien posé on a le résultat suivant.

Lemme 3.3.2 *Il existe une unique solution $\varphi_\eta = (\varphi_\eta^1, \varphi_\eta^2) \in W^{1,p}(0, T; W)$ que satisfait (3.67). plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont les solutions de (3.67) correspondant à $\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2} \in C(0, t; Q)$, alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq C \|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_{\mathbf{V}} \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.68)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\eta(t) : W \rightarrow W$ par

$$(A_\eta(t)\varphi, \xi)_W = \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{B}^\ell \nabla \varphi_\eta^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + (h(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \xi)_W \quad (3.69)$$

Pour tout $\varphi, \xi \in W$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$, nous utilisons les hypothèses H(3.4) et (3.32) pour trouver

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \\ & + \int_{\Gamma_3} \psi([u_{\eta\nu}(t)] - g) (\phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi(\varphi_2 - \varphi_0)) (\varphi_1 - \varphi_2) da \end{aligned}$$

et, par la coosltion H(3.9) (a) combinée avec la monotonie de la fonction ϕ , définie par (3.19), nous obtenons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \quad (3.70)$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau H(3.4) H(3.5) H(3.9) et (3.32) nous avons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq c_\varepsilon \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \int_{\Gamma_3} M_\psi |\varphi_1 - \varphi_2| |\xi| da, \quad \forall \xi \in W, \quad (3.71)$$

où c_ε represente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique \mathcal{E} . Il s'ensuit de (3.71) et (2.18) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq (c_\varepsilon + M_\psi \tilde{c}_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W$$

ce qui implique que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq (c_\varepsilon + M_\psi \tilde{c}_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W \quad (3.72)$$

Les inégalités (3.70) et (3.72) montrent que l'opérateur $A_\eta(t)$ est fortement monotone et de Lipschitz sur W et, par conséquent, il existe un élément unique $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (3.73)$$

Nous combinons maintenant (3.69) et (3.73) pour déduire que $\varphi_\eta(t) \in W$ solution de l'équation variationnelle (3.67).

Nous prouvons maintenant que $\varphi_\eta(t) \in W^{1,p}(0, T; W)$. À cette fin, considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et, pour raison de simplicité, nous écrivons $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i, u_{\eta\nu}(t_i) = u_i, q_b(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$.

Moyennant (3.67), H(3.4), H(3.5) et (3.32) nous dérivons l'inégalité

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 &\leq c_\varepsilon \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ &+ \int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g) \phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g) \phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da, \end{aligned} \quad (3.74)$$

Nous utilisons les limites $|\psi(u_i - g)| \leq M_\psi, |\phi_L(\varphi_i - \varphi_0)| \leq L$, la continuité de Lipschitz des fonctions ψ et ϕ_L , et l'inégalité (2.18) à obtenir

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g) \phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g) \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (3.74) et trouver

$$m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \leq (c_\varepsilon + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W, \quad (3.75)$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (3.75) et l'hypothèse de petitesse (3.52) que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c (\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W), \quad (3.76)$$

où c est une constante positive. Notons aussi que les hypothèses (3.28) combinées avec la définition (3.34) impliquent que $q \in W^{1,p}(0, T; W)$. Donc, puisque $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$. L'inégalité (3.76) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$. Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$ et, pour simplicité, notons $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i, u_{\eta_i} = u_i$ pour $i = 1, 2$. Nous utilisons (3.67) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.75) pour obtenir que

$$m_{\mathbf{B}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq (c_\varepsilon + L_\psi L_\phi c_0 \tilde{c}_0) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + M_\psi \tilde{c}_0^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W,$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'hypothèse de petitesse sur la fonction ψ (3.52) mènent à (3.68), ce qui achève la preuve. ■

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement \mathbf{u}_η obtenu dans le lemme 3.3.1 et nous considérons l'initiale suivante- problème de valeur.

Dans la troisième étape, nous donnons $\theta = (\theta^1, \theta^2) \in L^2(0, T; E_0)$ et considérons le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

Problème \mathcal{PV}_θ . Trouver le champ de damage $\beta_\theta = (\beta_\theta^1, \beta_\theta^2) : [0; T] \longrightarrow E_1$ tel que

$$\beta_\theta(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\beta}_\theta^\ell(t), \xi^\ell - \beta_\theta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \geq \quad (3.77)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\theta^\ell(t), \xi^\ell - \beta_\theta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \forall \xi \in K, \quad p.p \quad t \in (0, T),$$

$$\beta_\theta^\ell(0) = \beta_0^\ell. \quad (3.78)$$

On a le résultat suivant

Lemme 3.3.3 *Il existe une solution unique β_θ du problème \mathcal{PV}_θ et elle satisfait*

$$\beta_\theta \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1).$$

Démonstration. L'application d'inclusion de $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ est continue et a image dense. Notant par E_1' l'espace dual de E_1 et, identifiant le dual de E_0 à lui-même, on peut écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = E_0' \subset E_1'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{E_1' \times E_1}$ pour représenter l'appariement de dualité entre E_0 et E_1 . On a

$$(\beta, \xi)_{E_1' \times E_1} = (\beta, \xi)_{E_0} \quad \forall \beta \in E_0, \quad \xi \in E_1$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans E_1 . Ainsi, le champ d'endommagement initial $\beta_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la définition (3.29) de la forme bilinéaire a , pour tout $\xi, \varphi \in E_1$ on a

$$a(\xi, \varphi) = a(\varphi, \xi)$$

et

$$\|a(\xi, \varphi)\| \leq 3k \|\nabla \xi\|_H \|\nabla \varphi\|_H \leq c \|\xi\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\varphi \in E_1$, nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = k \|\nabla \varphi\|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k + 1) \|\varphi\|_{E_0} \geq k (\|\nabla \varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{E_0}),$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 \|\varphi\|_{E_0} \geq c_1 \|\varphi\|_{E_0} \quad \text{avec} \quad c_0 = k + 1 \quad \text{et} \quad c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 2.6.7 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 3.3.3. ■

On utilise maintenant le champ de déplacement \mathbf{u}_η obtenu dans le lemme 3.3.1, φ_η obtenu dans le lemme 3.3.2 et β_θ obtenu dans le lemme 3.3.3 pour construire le problème de Cauchy suivant pour le champ de contraintes.

problème $\mathcal{PV}_{\eta,\theta}$. Trouver le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta} = (\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^1, \boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^2) : [0, T] \rightarrow Q$ qui est une solution du problème

$$\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^\ell(t) = \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \beta_\theta^\ell(s)) ds, \quad \ell = 1, 2, \quad \text{a, e } t \in (0, T). \quad (3.79)$$

On a le résultat suivant

Lemme 3.3.4 *Il existe une solution unique du problème $\mathcal{PV}_{\eta,\theta}$ et elle satisfait (3.55). De plus, si $\mathbf{u}_{\eta_i}^\ell$, $\beta_{\eta_i}^\ell$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i,\theta_i}^\ell$ représenter les solutions des problèmes $\mathcal{PV}_{\eta_i}^1$, \mathcal{PV}_{θ_i} et $\mathcal{PV}_{\eta_i,\theta_i}$, respectivement, pour $(\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\theta}_i) \in W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1,\theta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2,\theta_2}(t)\|_Q^2 &\leq C (\|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_V^2 + \\ &\int_0^t \|\mathbf{u}_{\eta_1}(s) - \mathbf{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\beta_{\theta_1}(s) - \beta_{\theta_2}(s)\|_{E_0}^2 ds). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Démonstration. Soit $\Lambda_{\eta,\theta}^\ell : W^{1,p}(0, T; Q^\ell) \rightarrow W^{1,p}(0, T; Q^\ell)$ l'application proposée par

$$\Lambda_{\eta,\theta}^\ell \boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \beta_\theta^\ell(s)) ds, \quad \ell = 1, 2, \quad (3.81)$$

Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in W^{1,p}(0, T; Q^\ell)$ et $t \in [0, T]$. Pour $\boldsymbol{\sigma}_1^\ell, \boldsymbol{\sigma}_2^\ell \in W^{1,p}(0, T; Q^\ell)$ nous utilisons H(3.3) et (3.81) a obtenir pour tous $t \in [0, T]$

$$\|\Lambda_{\eta,\theta}^\ell \boldsymbol{\sigma}_1^\ell(t) - \Lambda_{\eta,\theta}^\ell \boldsymbol{\sigma}_2^\ell(t)\|_Q \leq L_{\mathcal{G}^\ell} \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_1^\ell(s) - \boldsymbol{\sigma}_2^\ell(s)\|_Q, \quad \ell = 1, 2. \quad (3.82)$$

Il résulte de cette inégalité que pour n assez grand, une puissance $(\Lambda_{\eta,\theta}^\ell)^n$ est une contraction sur l'espace de Banach $W^{1,p}(0, T; Q^\ell)$ et, par conséquent existe un élément unique $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in W^{1,p}(0, T; Q^\ell)$ telles que $\Lambda_{\eta,\theta}^\ell \boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell$. En outre, qui $\boldsymbol{\sigma}$ de plus, est l'unique solution au problème $\mathcal{PV}_{\eta,\theta}$ et, en utilisant (3.79), la régularité de \mathbf{u}_η , β_θ et les propriétés des opérateurs \mathcal{B}^ℓ et \mathcal{G}^ℓ , il s'ensuit que $\boldsymbol{\sigma}_i \in W^{1,p}(0, T; Q)$. Considérons maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2) \in W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$ et, pour $i = 1, 2$, notons $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$, $\beta_{\theta_i} = \beta_i$, $\varphi_{\theta_i} = \varphi_i$. On a

$$\boldsymbol{\sigma}_i^\ell(t) = \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_i^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^\ell(s)), \beta_i^\ell(s)) ds, \quad \ell = 1, 2, \quad \forall t \in (0, T), \quad (3.83)$$

et, en utilisant les propriétés H(1.3) et H(1.4) de \mathcal{G}^ℓ et \mathcal{B}^ℓ , on trouve

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q^2 &\leq C (\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_Q^2 ds \\ &+ \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{E_0}^2 ds), \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.84)$$

On utilise un argument de Gronwall dans l'inégalité obtenue on en déduit (3.80), ce qui conclut la preuve du lemme 3.3.4. \blacksquare

Enfin, à la suite de ces résultats et d'utiliser les propriétés de l'opérateur \mathcal{G}^ℓ , l'opérateur \mathcal{E}^ℓ , la fonction \mathbf{S}^ℓ pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \in Q \times E_0 \quad (3.85)$$

défini par les égalités

$$\begin{aligned} (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \mathbf{v})_Q &= \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\eta^\ell(t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \beta_\theta^\ell(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) \right)_Q + j_1(\mathbf{u}_\eta, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = (\mathbf{S}^1(\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^1(t)), \beta_\theta^1(t)), \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}^2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^2(t)), \beta_\theta^2(t))). \quad (3.87)$$

Ici, pour tout $(\eta, \theta) \in W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$ l'élément $\Lambda(\eta, \theta) \in W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$. \mathbf{u}_η , φ_θ , β_θ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta,\theta}$, représentent le champ de déplacement, le champ de potentiel, le champ d'endommagement et le champ de contrainte obtenue dans les lemmes 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, et 3.3.4.

Lemme 3.3.5 *L'opérateur Λ a un point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in W^{1,p}(0, T; Q \times L^2(\Omega))$.*

Démonstration. Soit $t \in (0, T)$ et $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$. On utilise la notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i, \theta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$ pour $i = 1, 2$. Commençons par utiliser (2.12), les hypothèses, H(3.3), H(3.5) et H(3.8) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_Q^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_2^\ell(t)\|_{Q^\ell}^2 \\ & + \sum_{\ell=1}^2 \int_0^t \|\mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_1^\ell(s), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell(s)), \beta_1^\ell(s)) - \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_2^\ell(s), \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell(s)), \beta_2^\ell(s))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds \\ & + C \|p_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}(t)]([\mathbf{u}_{1\nu}(t)]) - p_\nu([\mathbf{u}_{1\nu}(t)]([\mathbf{u}_{1\nu}(t)]))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & + C \|p_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}(t)]([\mathbf{u}_{1\tau}(t)]) - p_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}(t)]([\mathbf{u}_{1\tau}(t)]))\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \leq C \left(\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right. \\ & \left. + \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_Q^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Nous utilisons des estimations (3.68), (3.80) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_Q^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & \left. + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Par des arguments similaires, de (3.87), (3.80) et H(3.6) We obtain

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_Q^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & \left. + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Aussi, depuis

$$\mathbf{u}_i^\ell(t) = \int_0^t \mathbf{v}_i^\ell(s) ds + \mathbf{u}_0^\ell, \quad t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2.$$

Nous avons

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \leq \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}} ds,$$

ce qui implique

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq c \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds. \quad (3.91)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{Q \times E_0}^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \right. \\ & \left. \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

De plus, d'après (3.59) on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}_1^\ell - \mathbf{v}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - j_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\eta_1 - \eta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

On utilise H(1.7) (3.31) pour en déduire que

$$j_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - j_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \geq 0. \quad (3.94)$$

Il résulte de (3.93) et (3.94) que

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}_1^\ell - \mathbf{v}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & \leq -(\eta_1 - \eta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Nous intégrons cette égalité par rapport au temps, utilisons les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$ et la condition H(3.1) pour trouver

$$\begin{aligned} & \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}) \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq \\ & - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$. Alors, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m} + mb^2$, on obtient

$$\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathbf{V}'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.96)$$

Forme (3.77), on en déduit que

$$(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{\mathbf{E}_0} + a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{\mathbf{E}_0} \quad \forall t \in (0, T).$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$ et l'inégalité $a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$, nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathbf{E}_0}^2 ds \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{\mathbf{E}_0} ds, \quad (3.97)$$

ce qui implique

$$\|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathbf{E}_0}^2 ds \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{\mathbf{E}_0}^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Cette inégalité, combinée avec l'inégalité de Gronwall, conduit à

$$\|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \quad \forall(0, T). \quad (3.98)$$

De l'inégalité précédente et des estimations (3.96), (3.98) et (3.92) il s'ensuit maintenant que

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{Q \times E_0}^2 \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{Q \times E_0}^2 ds.$$

En réitérant cette inégalité n fois on obtient

$$\|\Lambda^n(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^n(\eta_2, \theta_2)\|_{W^{1,p}(0,T;Q \times E_0)}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{W^{1,p}(0,T;Q \times E_0)}^2.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, Λ^n est une contraction sur $W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$, et donc Λ a un unique point fixe dans cet espace de Banach. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème 3.3.1.

Existence. Soit $(\eta^*, \theta^*) \in W^{1,p}(0, T; Q \times E_0)$ le point fixe de Λ défini par (3.85)-(3.87), et dénotent

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \quad \beta_* = \beta_{\theta^*}, \quad (3.99)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell + \boldsymbol{\sigma}_{\eta^* \theta^*}^\ell, \quad \ell = 1, 2, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{D}_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell, \quad \ell = 1, 2. \quad (3.101)$$

Nous prouvons que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ satisfait (3.46)-(3.51) et les régularités (3.53)-(3.56). En effet, on écrit (3.59) pour $\eta^* = \eta$ et on utilise (3.99) pour trouver

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_2(\dot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v}) \\ & + (\eta^*(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, p.p. t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Pour les égalités $\Lambda^1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$ et $\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), \mathbf{v})_{Q \times \mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_Q + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{E}^\ell \nabla \varphi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \beta(s) \right) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) \right)_Q + j_1(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\theta^*(t) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \beta^\ell(t)). \quad (3.104)$$

Nous substituons maintenant (3.103) dans (3.102) pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_*(t), v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_2(\dot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v}) \\ & + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(s)), \beta_*^\ell(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_1(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

et on substitue (3.104) dans (3.77) pour avoir

$$\begin{aligned} & \beta_*(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\beta}_*^\ell(t), \xi^\ell - \beta_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq \\ & \sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \beta_*^\ell(t)), \xi^\ell - \beta_*^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ & \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Nous écrivons maintenant (3.67) pour $\eta = \eta^*$ et utilisons (3.99) pour voir que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell(t), \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = (q(t), \xi)_W, \\ & \forall \xi \in W, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Les relations (3.99)-(3.101), (3.105), (3.106), et (3.107) nous permettent maintenant de conclure que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ satisfait (3.46). Ensuite, (3.51) et les régularités (3.53), (3.54), (3.57) découlent des lemmes 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3. Comme \mathbf{u}_* et φ_* satisfont (3.53) et (3.57), il résulte du lemme 3.3.4 et (3.100) que

$$\sigma_* \in L^2(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.108)$$

On choisit $v = (v^1, v^2)$ avec $v^\ell = \omega^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $v^{3-\ell} = 0$ dans (3.105) et par (3.99) et (3.33)

$$\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}_*^\ell = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^\ell + \mathbf{f}_0^\ell, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2.$$

De plus, d'après (3.27), (3.53) et (3.108) nous avons

$$(\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^1, \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^2) \in L^2(0, T; \mathbf{V}').$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, d'après (2.17), H(3.4), H(3.5) et (3.101), on en déduit que

$$\|\mathbf{D}_*(t_1) - \mathbf{D}_*(t_2)\|_H \leq C (\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|\mathbf{u}_*(t_1) - \mathbf{u}_*(t_2)\|_V).$$

La régularité de \mathbf{u}_* et φ_* donnée par (3.53) et (3.54) implique

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; H). \quad (3.109)$$

On choisit $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ avec $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (3.107), et en utilisant (3.34), (3.101) on trouve

$$\text{div } \mathbf{D}_*^\ell(t) = q_0^\ell(t) \quad \forall t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2,$$

et, par (3.28), (3.109), on obtient

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Enfin, nous concluons que la solution faible $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \beta_*, \mathbf{D}_*\}$ du problème du contact piézoélectrique $\mathcal{P}_{V,1}$ a les régularités (3.53)-(3.56), ce qui conclut la partie existence du théorème 3.3.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.86)-(3.87) et de l'unique résolubilité des Problèmes \mathcal{PV}_η^1 , \mathcal{PV}_η^2 , \mathcal{PV}_θ et $\mathcal{PV}_{\eta,\theta}$.

3.4 Approximation numérique d'un problème Piézo-électrique élasto-viscoplastique avec endommagement.

Dans notre étude on considère l'approximation numérique du problème étudié dans la première section. Nous utilisons une méthode d'approximation variationnelle. Dans cette section on va présenter le problème approché, ensuite donner et estimer l'erreur de la discrétisation complète du problème approché et puis on donne un résultat de convergence pour le schéma numérique. Le schéma de discrétisation complète est analysé à l'aide de la méthode des éléments finis. En fait cette méthode est utilisée pour discrétiser l'espace et le temps. La convergence forte dans ce cas est établie sous une régularité minimale de la solution.

3.4.1 La discrétisation complète

Nous introduisons maintenant une approximation complète du problème variationnel $\mathcal{P}_{V,1}$ par la méthode des éléments fini et nous donnons une estimation d'erreur de ce problème. La discrétisation du problème (3.46)-(3.51) est donnée comme suit. Pour chaque paramètre $h_\ell > 0$, destiné à tendre vers 0, on associe la triangulation τ_h^ℓ de Ω^ℓ en triangles de taille maximale h_ℓ . Ensuite, les dérivations de temps sont discrétisés par l'utilisation d'une partition uniforme de $[0; T]$, notée par $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Soit k un pas de temps, $k = T/N$, et pour une fonction continue $f(t)$ soit $f_n = f(t_n)$, Finalement, pour une suite $\{\omega_n\}_{n=0}^N$ nous notons par $\delta\omega_n = (\omega_n - \omega_{n-1})/k$ la différence finie. Dans cette section, aucune addition n'est assumée sur un indice répété, et c dénote une constante positive qui dépend des données du problème, mais indépendante des paramètres de discrétisation h et k . Nous considérons une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{V}$, $W^h \subset W$, $Q^h \subset Q$ et $E_1^h \subset E_1$ pour approcher des espaces \mathbf{V}, W, Q et E_1 , respectivement.

3.4.2 Formulation variationnelle approchée

La discrétisation complète du problème $\mathcal{P}_{V,1}$ est basée sur un schéma progressif d'Euler et elle est donnée sous la forme suivante :

Problème $\mathcal{P}_{V,1}^{hk}$. Trouver une discrétisation du champ des déplacements

$\mathbf{w}^{hk} = \{(\mathbf{w}_n^{1,hk}, \mathbf{w}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset \mathbf{V}^h$, une discrétisation du champ contraintes

$\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{(\boldsymbol{\sigma}_n^{1,hk}, \boldsymbol{\sigma}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset Q^h$, une discrétisation du champ potentiel électrique

$\varphi^{hk} = \{(\varphi_n^{1,hk}, \varphi_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset W^h$ et une discrétisation du champ d'endommagements

$\beta^{hk} = \{(\beta_n^{1,hk}, \beta_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset E_1^h$ et pour tout $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\ell,hk} &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^{\ell,hk}) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\ell,hk}) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^{\ell,hk} + \\ &\sum_{j=0}^{n-1} k \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell,hk}), \beta_j^{\ell,hk} \right) \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{cases} (\delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h}))_{Q^\ell} + j_1(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) \\ + j_2(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \end{cases} \quad (3.111)$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_n^{\ell,hk}, \nabla \xi^{\ell,h})_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla \xi^{\ell,h})_{W^\ell} \\ + (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \xi^h)_{W^\ell} = (q_n, \xi^h)_W, \quad \xi^h \in W^h, \end{cases} \quad (3.112)$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\delta \beta_n^{\ell,hk}, \xi^{\ell,h} - \beta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta_n^{hk}, \xi^h - \beta_n^{hk}) \geq \\ \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{S}^\ell (\boldsymbol{\sigma}_{n-1}^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_{n-1}^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_{n-1}^{\ell,hk}), \xi^{\ell,h} - \beta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi^h \in K^h, \end{cases} \quad (3.113)$$

où le champ de déplacement discret $\mathbf{u}^{hk} = \{(\mathbf{u}_n^{1,hk}, \mathbf{u}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset \mathbf{V}^h$ est donné

$$\mathbf{u}_n^{hk} = \mathbf{u}_0^h + \sum_{j=0}^n k \mathbf{w}_j^{hk} \quad (3.114)$$

et \mathbf{u}_0^h et \mathbf{w}_0^h et β_0^h sont des approximations appropriées des conditions initiales \mathbf{u}_0 et \mathbf{w}_0 et β_0 respectivement. Nous remarquons que la discrétisation complète du Problème $\mathcal{P}_{V,1}^{hk}$ peut-être vue comme un système d'une inéquation variationnelle, d'une équation variationnelle et d'une équation différentielle. Utilisant des résultats classiques des problèmes variationnels non linéaires (voir [34]), nous obtenons que le Problème $\mathcal{P}_{V,1}^{hk}$ admette une solution unique dans $\mathbf{V}^h \times Q^h \times W^h \times E_1^h$.

3.4.3 L'estimation d'erreur du problème approché

Notre intérêt dans cette section est de trouver l'estimation d'erreur $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}$, $\|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_{\mathbf{Q}}$, $\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W$ et $\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}$.

Lemme 3.4.1 *Sous les hypothèses $H(3.5)$ -(3.23). Soit $\{\mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta\}$ et $\{\mathbf{w}_n^{hk}, \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}, \beta_n^{hk}\}$ les solutions des Problèmes $\mathcal{P}_{V,1}$ et $\mathcal{P}_{V,1}^{hk}$ respectivement. Alors, on a l'estimation d'erreur suivante :*

pour tout, $v^h = \{v_j^h\}_{j=1}^N \subset \mathbf{V}^h$ et $\xi^h = \{\xi_j^h\}_{j=1}^N \subset W^h$,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 \right\} \\ & + k \sum_{j=1}^N \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\nabla(\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{E_0}^2 \right) \\ \leq c & \left(\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \|\varphi_n - \xi_n^h\|_W^2 + k \sum_{j=1}^N \left[\|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_H^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right] + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \\ & + k^2 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_H^2 + \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^h\|_H^2 + \|\beta_0 - \beta_0^h\|_{E_0}^2 \\ & + \max_{1 \leq n \leq N} \|\beta_n - \xi_n^h\|_{E_0}^2 + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|(\beta_{j+1} - \xi_{j+1}^h) - (\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\delta \beta_j - \dot{\beta}_j\|_{E_0}^2 \\ & + k \sum_{j=1}^n \|(\mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j) - (\mathcal{E})^* \nabla \varphi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \beta_j) - \delta \beta_j + \kappa \Delta \beta_j)\|_{E_0} \|\beta_j - \xi_j^h\|_{E_0} \\ & + k \sum_{j=1}^n \|\beta_n - \xi_n^h\|_{E_0}^2 + \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_H^2 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Démonstration. D'abord, on commence par l'obtention de l'estimation d'erreur pour le potentiel électrique. On prend (3.51) en temps $t = t_n$ pour $\xi = \xi^h \in W^h$ et ont la soustrayant de (3.112), il ensuite que :

$$\begin{cases} \left(\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \nabla \xi^{\ell,h})_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla \xi^{\ell,h})_{W^\ell} \right) \\ + (h(\mathbf{u}_n, \varphi_n), \xi^h)_{W^\ell} - (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \xi^h)_{W^\ell} = 0, \quad \xi^h \in W^h, \end{cases}$$

Donc, nous avons

$$\begin{cases} \left(\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}))_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}))_{W^\ell} \right) \\ + (h(\mathbf{u}_n, \varphi_n), \varphi_n - \varphi_n^{hk})_{W^\ell} - (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \varphi_n - \varphi_n^{hk})_{W^\ell} \\ = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}), \nabla(\varphi_n^\ell - \xi^{\ell,h}))_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla(\varphi_n^\ell - \xi^{\ell,h}))_{W^\ell} \\ + (h(\mathbf{u}_n, \varphi_n), \varphi_n - \xi^h)_{W^\ell} - (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \varphi_n - \xi^h)_{W^\ell}, \quad \xi^h \in W^h. \end{cases}$$

Il vient de la définition (3.32) de la fonction h que

$$\begin{aligned}
 & (h(\mathbf{u}_n, \varphi_n), \varphi_n - \varphi_n^{hk})_{W^\ell} - (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \varphi_n - \varphi_n^{hk})_{W^\ell} \\
 = & \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_{n,v}] - g) \phi_l([\varphi_n] - \varphi_0) (\varphi_n - \varphi_n^{hk}) da - \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_{n,v}^{hk}] - g) \phi_l([\varphi_n^{hk}] - \varphi_0) (\varphi_n - \varphi_n^{hk}) da, \\
 & = \int_{\Gamma_3} \psi([\mathbf{u}_{n,v}] - g) [\phi_l([\varphi_n] - \varphi_0) - \phi_l([\varphi_n^{hk}] - \varphi_0)] (\varphi_n - \varphi_n^{hk}) da \\
 & - \int_{\Gamma_3} \phi_l([\varphi_n^{hk}] - \varphi_0) [\psi([\mathbf{u}_{n,v}^{hk}] - g) - \psi([\mathbf{u}_{n,v}] - g)] (\varphi_n - \varphi_n^{hk}) da.
 \end{aligned}$$

En gardant à l'esprit la condition H(3.9), on peut en déduire que

$$\begin{aligned}
 & (h(\mathbf{u}_n, \varphi_n), \varphi_n - \varphi_n^{hk})_{W^\ell} - (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \varphi_n - \varphi_n^{hk})_{W^\ell} \geq \\
 & -M_\psi L_\phi \|\mathbf{u}_{n,v}^{hk} - \mathbf{u}_{n,v}\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \geq -M_\psi L_\phi c_0 c_1 \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\|_{\mathbf{V}} \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W.
 \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
 & (h(\mathbf{u}_n, \varphi_n), \varphi_n - \xi^h)_{W^\ell} - (h(\mathbf{u}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}), \varphi_n - \xi^h)_{W^\ell} \\
 & \leq M_\psi L_\phi c_0 c_1 \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi_n - \xi^h\|_W + M_\phi L_\psi c_1^2 \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi_n - \xi^h\|_W.
 \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant H(3.2) et H(3.5), on voit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \leq c \left(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi_n - \xi^h\|_W \right. \\ \left. + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W \|\varphi_n - \xi^h\|_W \right) \quad \forall \xi^h \in W^h. \end{array} \right.$$

Nous appliquons l'inégalité élémentaire suivante :

$$a.b \leq \alpha a^2 + \frac{a}{\alpha} b, \quad a, b, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0. \quad (3.116)$$

Alors, nous trouvons

$$\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \leq c \left(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_n - \xi^h\|_W^2 \right) \quad \forall \xi^h \in W^h. \quad (3.117)$$

Deuxièmement, on estime l'erreur pour un champ de contraintes pour $n = 1, 2, \dots, N$.

Par récurrence, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^{\ell, hk} & = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^{\ell, hk}) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\ell, hk}) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^{\ell, hk} + \\
 \sum_{j=0}^{n-1} k \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell, hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell, hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell, hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell, hk}), \beta_j^{\ell, hk} \right). & \quad (3.118)
 \end{aligned}$$

Ensuite, on intègre (3.46) de $t = 0$ à $t = t_n$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \\ &+ \int_0^{t_n} \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \beta^\ell(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.119)$$

En combinant (3.118) et (3.119), on trouve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\alpha, hk} - \boldsymbol{\sigma}_n^\alpha &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell, hk}) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell) - \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell, hk}) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla (\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell, hk}) \\ &+ \mathbf{M}_n^k(\mathcal{G}^\ell) + \sum_{j=0}^{n-1} k \left[\mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^\ell) \right) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell \right) \\ &- \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell, hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell, hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell, hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell, hk}), \beta_j^{\ell, hk} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.120)$$

où, pour $n = 1, \dots, N$, l'erreur de quadrature est

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n^k(\mathcal{G}^\alpha) &= \int_0^{t_n} \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \beta^\ell(s) \right) ds \\ &- \sum_{j=0}^{n-1} k \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell \right). \end{aligned}$$

Par la continuité Lipschitz de \mathcal{G} nous avons

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{G}^\alpha \left(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell \right) - \mathcal{G}^\alpha \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell, hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell, hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell, hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell, hk}), \beta_j^{\ell, hk} \right) \right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq c \left(\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{\mathbf{E}_0} \right). \end{aligned}$$

Alors (3.120) implique

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q &\leq c \left(\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{M}_n^k(\mathcal{G})\|_{\mathcal{H}} \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^{n-1} k \left[\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{\mathbf{E}_0} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Encore une fois, par la continuité Lipschitz de \mathcal{G} nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_n^k(\mathcal{G})\|_{\mathcal{H}} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \mathcal{G}^\alpha \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \beta^\ell(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{G}^\alpha \left(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell \right) \right\|_{\mathcal{H}} dt \end{aligned}$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\|\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}_j\|_Q + \|\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_j\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi(t) - \varphi_j\|_W + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_j\|_{\mathbf{V}} + \|\beta(t) - \beta_j\|_{\mathbf{E}_0} \right) dt.$$

En utilisant les hypothèses sur la régularité de la solution on en déduit

$$\|\mathbf{M}_n^k(\mathcal{G})\|_Q \leq ck, \quad (3.122)$$

où la constante c dépend de $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(0,T;Q)}$, $\|\mathbf{w}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap C(0,T;H)}$ and $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap C^1(0,T;H)}$.

From (3.121) and (3.122) we also obtain the inequality

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q^2 &\leq c \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + k^2 \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^{n-1} k \left[\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{\mathbf{E}_0} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.123)$$

Au vu des applications impliquant des matériaux piézoélectriques élasto-viscoplastiques, il convient de considérer la quantité

$$\mathbf{N}_n^{\ell,hk}(\mathbf{w}) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell - \mathbf{v}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell}$$

Par les propriétés H(3.1) et l'inégalité de Korn, on a la borne inférieure suivante :

$$\mathbf{N}_n^{\alpha,hk}(\mathbf{w}) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})\|_{\mathcal{H}}^2 \geq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad (3.124)$$

Nous tournons pour dériver une limite supérieure pour $\mathbf{N}_n^{\ell,hk}(\mathbf{w})$. Pour tout $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_n^{\ell,hk}(\mathbf{w}) &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell - \mathbf{v}^{\ell,h}) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Par (3.118), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_n^{\ell,hk}) \right. \\ &\left. + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}) + \sum_{j=0}^{n-1} k \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_j^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell,hk}), \beta_j^{\ell,hk} \right) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell}. \end{aligned}$$

Il découle de (3.119) que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_n^\ell) \right. \\ &\left. + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell) + \int_0^{t_n} \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_n^\ell), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell), \beta^\ell \right) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell}. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} \\ - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla(\varphi_n^\ell - \varphi_n^{\ell,hk}) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell) - \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) \right)_{\mathcal{W}^\ell} &- \mathbf{P}_n(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\mathbf{v}^{\ell,h}) &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathbf{M}_n^k(\mathcal{G}^\ell), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h}) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \sum_{j=0}^{n-1} k \left(\mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell \right) \right. \\ &\left. - \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell,hk}), \beta_j^{\ell,hk} \right), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h}) \right)_{\mathcal{H}^\ell}. \end{aligned}$$

Nous bornons ce terme comme suit :

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_n(\mathbf{v}^{\alpha,h})| &\leq c \left(\sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \right. \\ &\quad \left. + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{\mathbb{E}_0}) + \|\mathbf{M}_n^k(\mathcal{G})\|_{\mathcal{H}} \right) \|\mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq c \left(\sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{\mathbb{E}_0}) + k \right) \|\mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

Puis à partir de l'expression (3.125), on obtient la borne supérieure,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_n^{\ell,hk}(\mathbf{w}) &\leq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} \\ &+ c \left(\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{\mathbb{E}_0}) + k \right) \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

En combinant la borne inférieure (3.124) et la borne supérieure (3.126), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} \\ + c \left(\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0} + k \right) \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}. \end{array} \right.$$

Ensuite, nous avons lié $\|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}$ avec $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}$. On a donc finalement l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}^2 + c \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} \\ + c \left(\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 + k^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.127)$$

Ces inégalités seront utilisées dans l'analyse numérique des problèmes de contact pour les matériaux piézoélectriques élasto-viscoplastiques.

Troisièmement, nous procédons maintenant à l'estimation des erreurs numériques sur le champ de vitesse. Nous récrivons l'équation variationnelle. (3.48) au temps $t = t_n$ pour $\mathbf{v} = \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$ et on le soustrait à (3.112) obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h}))_{Q^\ell} = -(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} - j_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h) \\ + j_1(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j_2(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h) + j_2(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h). \end{array} \right.$$

Alors, (3.127) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}^2 + c \left((\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} j_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h) \right. \\ + j_1(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h) - j_2(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h) + j_2(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h) \left. \right) + c \left(\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \right. \\ + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 \\ \left. + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 + k^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.128)$$

Ensuite, nous écrivons

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = -(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \\ + (\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + (\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}. \end{array} \right.$$

Alors, il découle de (3.128) que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + |j_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)| + |j_1(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)| \right. \\ \left. - |j_2(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)| + |j_2(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h)| + (\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + k^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2) \right). \end{array} \right. \quad (3.129)$$

À partir des propriétés H(3.7) et H(3.8), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h) - j_1(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h) \leq \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \\ j_2(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h) - j_2(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h) \leq \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \end{array} \right.$$

où le terme $\|\mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}$ est en outre délimité par

$$\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}.$$

L'utilisation répétée de l'inégalité (3.116) puis (3.129) implique que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + (\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2) + k^2 \right), \end{array} \right. \quad (3.130)$$

on note $\delta \mathbf{w}_n = (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1})/k$.

Ensuite, une borne inférieure pour $(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}$ est

$$(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \geq \frac{1}{2k} \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 - \|\mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{w}_{n-1}^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right).$$

Donc, pour $\mathbf{v}_n^h \in \mathbf{V}^h$, on obtient de (3.130) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2k} \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 - \|\mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{w}_{n-1}^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \|\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + (\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2) + k^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \right) \end{array} \right. \quad (3.131)$$

En multipliant cette inégalité par $2k$, en changeant n en j , en remplaçant \mathbf{v}^h par \mathbf{v}_j^h et

en effectuant la sommation sur $j = 1$ pour n , rendements

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 - \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + 2 \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \sum_{j=1}^n k \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}\|_H^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + (\delta \mathbf{w}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}, \mathbf{w}_j - \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2) + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + k^2 \right), \end{array} \right. \quad (3.132)$$

pour tous les $\mathbf{v}^h = \{\mathbf{v}_j^h\}_{j=0}^n \subset \mathbf{V}^h$.

Nous estimons le deuxième terme du membre de droite comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n k (\delta \mathbf{w}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}, \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk} - (\mathbf{w}_{j-1} - \mathbf{w}_{j-1}^{hk}), \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \\ \leq \epsilon \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}}^2 + c \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + c \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1^h\|_{\mathbf{V}}^2 \\ + c \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}}. \end{array} \right. \quad (3.133)$$

Prendre l'Éq. (3.114) au temps $t = t_j$ et en le soustrayant à (3.66) nous trouvons que

$$\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \leq c \left(\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}} + \sum_{l=1}^j k \|\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_l^{hk}\|_{\mathbf{V}} + I_j \right), \quad (3.134)$$

où I_j est l'erreur d'intégration donnée par

$$I_j = \left\| \int_0^{t_j} w(s) ds - \sum_{l=1}^j k w_l \right\|_{\mathbf{V}}.$$

D'après le théorème 2.6.6, on a $u \in H^2(0; T; \mathbf{V})$ et donc, il est facile de vérifier que

$$I_j \leq \|u\|_{H^2(0; T; \mathbf{V})}.$$

Nous combinons (3.133)–(3.134)–(3.132) et obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + 2 \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \sum_{j=1}^n k \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}\|_H^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \sum_{l=1}^j k \|\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_l^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2) + k^2 \right) + c \left(\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|u\|_{H^2(0; T; \mathbf{V})}^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.135)$$

Quatrièmement, Nous nous tournons vers l'estimation $\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}$. On choisit $\xi = \beta_n^{hk}$ dans (3.50) à $t = t_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\beta}_n^\ell, \beta_n^{\ell,hk} - \beta_n^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta_n, \beta_n^{hk} - \beta_n) \geq \\ \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell), \beta_n^{\ell,hk} - \beta_n^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{array} \right.$$

Ajout de cette inégalité à (3.113), avec $\xi^h = \xi_n^h \in K^h$, donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\delta(\beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk}), \beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\beta_n - \beta_n^{hk}, \beta_n - \beta_n^{hk}) \\ \leq \sum_{\ell=1}^2 (\delta\beta_n^\ell - \dot{\beta}_n^{\ell,hk}, \beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 (\delta(\beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk}), \beta_n^\ell - \xi_n^{\ell,h})_{L^2(\Omega^\ell)} \\ + a(\beta_n - \beta_n^{hk}, \beta_n - \xi_n^h) - \sum_{\ell=1}^2 (\delta\beta_n^\ell, \beta_n^\ell - \xi_n^{\ell,h})_{L^2(\Omega^\ell)} - a(\beta_n, \beta_n - \xi_n^h) \\ + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell), \beta_n^\ell - \xi_n^{\ell,h})_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ + \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_n^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell)) \right. \\ \left. - (\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{n-1}^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_{n-1}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^\ell)), \xi_n^{\ell,h} - \beta_n^{\ell,hk} \right)_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{array} \right. \quad (3.136)$$

Nous estimons chaque terme du membre de droite. Pour le terme

$$\sum_{\ell=1}^2 (\delta(\beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk}), \beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} = \frac{1}{k} (\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 - \sum_{\ell=1}^2 (\beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk}, \beta_{n-1}^\ell - \beta_{n-1}^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)}),$$

on a

$$\sum_{\ell=1}^2 (\delta(\beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk}), \beta_n^\ell - \beta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} \geq \frac{1}{k} \left(\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 - \|\beta_{n-1} - \beta_{n-1}^{hk}\|_{E_0}^2 \right). \quad (3.137)$$

On utilise (3.137), on remplace n par j dans (3.136) puis on additionne sur $j = 1, \dots, n$ obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 - \|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^n a(\beta_j - \beta_j^{hk}, \beta_j - \beta_j^{hk}) \\ \leq k \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^2 (\delta\beta_j^\ell - \dot{\beta}_j^{\ell,hk}, \beta_j^\ell - \beta_j^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^2 (\beta_j^\ell - \beta_j^{\ell,hk}, \beta_j^\ell - \xi_j^{\ell,h})_{L^2(\Omega^\ell)} \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^2 (\beta_j^\ell - \beta_j^{\ell,hk}, (\beta_{j+1}^\ell - \xi_{j+1}^{\ell,h}) - (\beta_j^\ell - \xi_j^{\ell,h}))_{L^2(\Omega^\ell)} - \sum_{\ell=1}^2 (\beta_1^\ell - \beta_1^{\ell,hk}, \beta_1^\ell - \xi_1^{\ell,h})_{L^2(\Omega^\ell)} \\ + k \sum_{j=1}^n a(\beta_j - \beta_j^{hk}, \beta_j - \xi_j^h) + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\ell=1}^2 \mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell - \xi_j^{\ell,h} \right]_{L^2(\Omega^\ell)} \\ - \sum_{\ell=1}^2 (\delta\beta_j^\ell, \beta_j^\ell - \xi_j^{\ell,h})_{L^2(\Omega^\ell)} - a(\beta_j, \beta_j - \xi_j^h) \Big] + k \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_j^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^\ell, \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^\ell), \beta_j^\ell) - (\mathcal{S}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{j-1}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{j-1}^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_{j-1}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{j-1}^\ell), \beta_{j-1}^{\ell,hk}), \xi_j^h - \beta_j^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{array} \right.$$

Puis,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{E_0}^2 \leq C \left(k \sum_{j=1}^n \|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\|_{E_0}^2 \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 \right. \\ + \|\beta_0 - \beta_0^h\|_{E_0}^2 k \sum_{j=1}^n \|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\|_{E_0}^2 \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 \|\beta_n - \xi_n^h\|_{E_0}^2 \\ + \|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{E_0}^2 \|\beta_1 - \xi_1^h\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^{n-1} \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0} \|(\beta_{j+1} - \xi_{j+1}^h)(\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0} \\ + k \sum_{j=1}^n \|(\mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j)) - (\mathcal{E})^* \nabla \varphi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \beta_j) - \delta\beta_j + \kappa \Delta \beta_j\|_{E_0} \|\beta_j - \xi_j^h\|_{E_0} \\ + k \sum_{j=1}^n (\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}) (\|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0} + \|\beta_j - \xi_j^h\|_{E_0}) \\ \left. + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{E_0} \|\nabla(\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0} \right). \end{array} \right.$$

En utilisant (3.134) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{E_0}^2 \leq \left(\|\beta_0 - \beta_0^h\|_{E_0}^2 + \|\beta_1 - \xi_1^h\|_{E_0}^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ + k^2 (\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\beta}\|_{E_0}^2) + k \sum_{j=1}^n \|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\|_{E_0}^2 + \|\beta_n - \xi_n^h\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \\ + k \sum_{j=1}^n \|(\mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j)) - (\mathcal{E})^* \nabla \varphi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \beta_j) - \delta\beta_j + \kappa \Delta \beta_j\|_{E_0} \|\beta_j - \xi_j^h\|_{E_0} \\ \left. + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0}^2 + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|(\beta_{j+1} - \xi_{j+1}^h) - (\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.138)$$

Alors, combinant (3.117), (3.123), (3.135) et (3.138), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 \\
 & \quad + k \sum_{j=1}^N \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\nabla(\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{E_0}^2 \right) \\
 \leq c & \left(\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n k \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}\|_H^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \sum_{l=1}^j k \|\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_l^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right) \\
 & + \sum_{j=0}^{n-1} k \left(\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\
 & + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 + \|\delta \beta_j - \dot{\beta}_j\|_{E_0}^2 + \|\nabla(\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 \\
 & \left. + \|(\mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j) - (\mathcal{E})^* \nabla \varphi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \beta_j) - \delta \beta_j + \kappa \Delta \beta_j)\|_{E_0} \|\beta_j - \xi_j^h\|_{E_0} \right) \\
 & + \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|u\|_{H^2(0;T;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|u_0 - u_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \\
 & + \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}} + \|\beta_0 - \beta_0^h\|_{E_0}^2 \\
 & + \|\beta_1 - \xi_1^h\|_{E_0}^2 + k^2(1 + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\beta}\|_{E_0}^2) + \|\beta_n - \xi_n^h\|_{E_0}^2 + \|\varphi_n - \xi_n^h\|_W^2 \\
 & + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|(\beta_{j+1} - \xi_{j+1}^h) - (\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0}^2 + k \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2
 \end{aligned} \right). \tag{3.139}
 \end{aligned}$$

Enfin, en combinant (3.139), en tenant compte de l'estimation (3.134) et en appliquant une version discrète de l'inégalité de Gronwall (voir [29] pour plus de détails), on obtient alors (3.115). \blacksquare

Nous remarquons que les estimations d'erreur ci-dessus sont à la base de l'analyse du taux de convergence de l'algorithme. Ainsi, soit Ω^ℓ un domaine polyédrique et notons \mathfrak{S}^h une triangulation de Ω^ℓ compatible avec la partition du bord $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$ en Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ et Γ_3 d'une part, et en Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , d'autre part. Soit $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$, $W_h(\Omega^\ell)$, $Q^h(\Omega^\ell)$ et E_1^h consistant en des fonctions continues et affines par morceaux; C'est,

$$\begin{cases}
 \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \{\mathbf{v}_h^\ell [C(\bar{\Omega}^\ell)]^d; \mathbf{v}_h^\ell|_{Tr} \in [P_1(Tr)]^d, \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_1^\ell} \equiv 0\}, \\
 W_h(\Omega^\ell) = \{\varphi_h^\ell C(\bar{\Omega}^\ell); \varphi_h^\ell|_{Tr} \in P_1(Tr), \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \varphi_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\}, \\
 Q^h(\Omega^\ell) = \{\boldsymbol{\tau}^\ell \in Q^\alpha; \boldsymbol{\tau}_{|Tr}^{\ell,h} \in [P_1(Tr)]^{d \times d}, \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell\}, \\
 E_1^{\ell,h} = \{\beta_h^\ell C(\bar{\Omega}^\ell); \beta_h^\ell|_{Tr} \in P_1(Tr), \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \beta_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\},
 \end{cases}$$

où $P_1(Tr)$ représente l'espace des polynômes de degré global inférieur ou égal à un dans Tr . Supposons que les conditions initiales discrètes \mathbf{u}_0^h et \mathbf{w}_0^h sont obtenus par

$$\mathbf{u}_0^h = \Pi^h \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w}_0^h = \Pi^h \mathbf{w}_0, \tag{3.140}$$

où $\Pi^h = (\pi^h)_{i=1}^d : [C(\bar{\Omega}^\ell)]^d \longrightarrow \mathbf{V}^h$ et π^h sont l'opérateur standard d'interpolation par élément fini (voir, par exemple [12]).

Alors, on a le corollaire suivant qui énonce la linéaire convergence de l'algorithme dans des conditions de régularité convenables.

Corollaire 3.4.1 *Soit les hypothèses du théorème 3.3.1. Soit $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta)$ et $(\mathbf{w}_n^{hk}, \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}, \beta_n^{hk})$ désignent respectivement les solutions aux problèmes $\mathcal{P}_{V,1}$ et $\mathcal{P}_{V,1}^{hk}$, et soit les conditions initiales discrètes données par (3.140). Sous les conditions de régularité suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d) \cap H^3(0, T; \mathbf{V}), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; H^1(\Omega)^{d \times d}), \\ \varphi &\in C(0, T; H^2(\Omega)), \quad \beta \in C^1(0, T; H^2(\Omega)), \end{aligned}$$

la convergence linéaire de l'algorithme est atteinte ; que s'il existe une constante positive $c > 0$, indépendante des paramètres de discrétisation h et k , tels que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{E_0}^2 \right\} \\ + \left(k \sum_{j=1}^N \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\beta_j - \beta_j^{hk}\|_{E_0}^2 \right) \right)^{1/2} \leq c(h + k). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Démonstration. Nous avons les propriétés suivantes des espaces des éléments finit \mathbf{V}^h, W^h, Q^h et E_1^h (voir [12]).

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\xi_n^h \in W^h} \|\varphi_n - \xi_n^h\|_W \leq ch \|\varphi\|_{C(0, T; H^2(\Omega))},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}_n^h \in \mathbf{V}^h} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d)},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}_n^h \in \mathbf{V}^h} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}} \leq ch^2 \|\mathbf{u}\|_{C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d)},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\beta_n^h \in E_1^h} \|\beta_n - \beta_n^h\|_{E_0} \leq ch \|\beta\|_{C^1(0, T; H^1(\Omega))}.$$

De plus, à partir de la définition de l'interpolation par élément fini l'opérateur Π^h il s'ensuit que

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d)},$$

$$\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^h\|_{\mathbf{V}} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d)},$$

$$\|\beta_0 - \beta_0^h\|_{E_0} \leq ch \|\beta\|_{C^1(0, T; H^1(\Omega))},$$

et il est facile de vérifier que

$$\sum_{j=1}^N k \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_{\mathbf{V}}^2 \leq ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^3(0,T;\mathbf{V})}^2$$

$$\sum_{j=1}^N k \|\delta \beta_j - \dot{\beta}_j\|_{E_0}^2 \leq k^2 \|\ddot{\beta}\|_{L^2(0,T;E_0)}.$$

On trouve que (voir [30] pour plus de détails)

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;\mathbf{V})}^2,$$

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\beta_{j+1} - \xi_{j+1}^h - (\beta_j - \xi_j^h)\|_{E_0}^2 \leq ch^2 \|\dot{\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},$$

en combinant les dernières estimations, (3.117), (3.132), (3.138) et (3.139) on déduit (3.141). ■

Troisième partie

Problème de Contact entre deux corps
thermo-électro-vscoélastiques avec
adhésion, endommagement et variable
d'état interne

Chapitre 4

Problème de Contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus dynamique d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements \mathbf{u}^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques ξ^ℓ , les champs des températures τ^ℓ , les champs d'endommagements ς^ℓ , les champs de variables internes d'état \mathbf{k}^ℓ , les champs des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ et un champ d'adhésion ζ , avec la loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques non linéaire. Pour ce problème le contact est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Nous avons deux objectifs. Le premier est de formuler le problème variationnel et de prouver l'existence et l'unicité de la solution. Le second est de donner l'approximation numérique. L'analyse de ce problème a fait l'objet de la publication [38].

4.1 Formulation du problème

Le cadre physique de ce problème est décrit dans la section une du premier chapitre (Cadre physique \mathbf{n}^0). Les deux corps peuvent entrer en contact le long de la partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$. Les contacts avec adhésion et compliance normale sur la partie $\Gamma_3 \in [0, T]$. Avec ces hypothèses, la formulation classique du problème dynamique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre deux corps piézoélectriques thermo-élasto viscoplastiques avec endommagement et à variable d'état interne est la suivante.

Problème \mathcal{P}_2 . Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs des potentiels électriques $\xi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs d'endommagements $\varsigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des températures $\tau^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell + \\ &\int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \varsigma^\ell(s), \mathbf{k}^\ell(s), \tau^\ell(s) \right) ds \\ &\text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{k}}^\ell = \Theta^\ell (\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell) \text{ dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - \boldsymbol{\beta}^\ell \nabla \xi^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}^\ell - \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\varsigma^\ell) \ni \phi^\ell (\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell) \\ \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Psi^\ell (\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell) + \chi^\ell \\ \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\text{div } \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \text{ dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (4.9)$$

$$\dot{\zeta} = H_{ad}(\zeta, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ \sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \sigma_\tau = p_\tau(\zeta) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (4.13)$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \tau^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \tau^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (4.14)$$

$$\xi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (4.16)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \dot{\mathbf{u}}^\ell(0) = \mathbf{v}_0^\ell, \varsigma^\ell(0) = \varsigma_0^\ell, \mathbf{k}^\ell(0) = \mathbf{k}_0^\ell, \tau^\ell(0) = \tau_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (4.17)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0, \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.18)$$

Premièrement, les équations (4.1)-(4.2)-(4.3) représentent la loi de comportement thermo-élastique-viscoplastique avec endommagement et une variable d'état interne du matériau dans laquelle $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)$ représente le tenseur linéarisé de contrainte, \mathcal{A}^ℓ et \mathcal{B}^ℓ sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement viscosité et élasticité avec endommagement, où $E(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell$ est le champ électrique, \mathcal{E}^ℓ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé et \mathcal{G}^ℓ représente le tenseur de viscoplasticité et $\boldsymbol{\beta}^\ell$ représente le tenseur de permittivité électrique et Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire. L'évolution du champ d'endommagement est régie par l'inclusion de type parabolique donnée par la relation (4.4) où ϕ^ℓ est la source mécanique de la la croissance des dommages, supposée être fonction assez générale des déformations un endommagement proprement dit $\partial \psi_{K^\ell}$ est la sous-di érentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K^ℓ . L'équation (4.5) représente la conservation de l'énergie où Ψ^ℓ est une

fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et χ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. Les équations (4.6) et (4.7) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique. Ensuite, les équations (4.8) et (4.9) représentent respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction. Équation (4.10) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ de liaison, où H_{ad} est la fonction du taux d'évolution de l'adhérence. L'équation (4.11) représente la condition de compliance normale avec adhésion sur la surface de contact Γ_3 . La condition (4.12) est la tangentielle condition aux limites sur la surface de contact, montrant que le cisaillement sur le contact surface dépend du champ d'adhérence et du déplacement tangentiel, p_ν et p_τ reçoivent des fonctions (1.41) et (1.44). Les conditions aux limites (4.13), (4.14) représentent, respectivement sur Γ^ℓ , une condition aux limites de Neumann homogène pour l'endommagement et une condition aux limites de Fourier pour la température. (4.15) et (4.16) représentent les conditions aux limites électriques. Enfin les fonctions \mathbf{u}_0^ℓ , \mathbf{v}_0^ℓ , ς_0^ℓ , \mathbf{k}_0^ℓ , τ_0^ℓ et ζ_0 dans (4.17) et (4.18) sont les initiales donnée.

4.2 Formulation Variationnelle

Pour dériver la formulation variationnelle du problème \mathcal{P}_2 , nous devons introduire les hypothèses suivantes :

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

H(4.1) :(a) Il existe une constante $C_{\mathcal{A}^\ell}^1, C_{\mathcal{A}^\ell}^2 > 0$ telle que

$$|\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})| \leq C_{\mathcal{A}^\ell}^1 |\boldsymbol{\omega}| + C_{\mathcal{A}^\ell}^2, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$$

(b) Il existe une constante $m_{\mathcal{A}^\ell} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}_1) - \mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}_2)) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) &\geq m_{\mathcal{A}^\ell} |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2|^2, \\ \forall \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} &\in \Omega^\ell. \end{aligned}$$

(c) $\mathcal{A}^\ell(\cdot, \boldsymbol{\omega})$ est Lebesgue mesurable dans Ω^ℓ , pour tout $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d$.

(d) $\mathcal{A}^\ell(\mathbf{x}, \cdot)$ est continu sur \mathbb{S}^d , p.p. $\mathbf{x} \in \Omega^\ell$.

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

H(4.2) :(a) Il existe une constante $L_{\mathcal{B}^\ell} > 0$ telle que

- $|\mathcal{B}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}_1) - \mathcal{B}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}_2)| \leq L_{\mathcal{B}^\ell} |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2|, \forall \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$
- (b) $\mathcal{B}^\ell(\cdot, \boldsymbol{\omega})$ est Lebesgue mesurable dans $\Omega^\ell, \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d.$
- (c) $\mathcal{B}^\ell(\cdot, \mathbf{0})$ appartient à $\mathcal{H}^\ell.$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

H(4.3) : (a) Il existe une constante $L_{\mathcal{G}^\ell} > 0$ telle que

- $$|\mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\omega}_1, d_1, \mathbf{k}_1, \tau_1) - \mathcal{G}^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_2, d_2, \mathbf{k}_2, \tau_2)| \leq L_{\mathcal{G}^\ell} (|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2| + |d_1 - d_2| + |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| + |\tau_1 - \tau_2|), \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^m, \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$$
- (b) $\mathcal{G}^\ell(\cdot, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}, d, \mathbf{k}, \tau)$ est mesurable sur $\Omega^\ell, \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d, d \in \mathbb{R}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m.$
- (c) $\mathcal{G}^\ell(\cdot, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 0)$ appartient à $\mathcal{H}^\ell.$

Les fonctions constitutives non linéaires $H_{ad}, \Theta^\ell, \phi^\ell$ et Ψ^ℓ sont supposées satisfaire la Suivante

H(4.4) : $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (a) Il existe $L_{H_{ad}} > 0$ telle que
- $$|H_{ad}(\mathbf{x}, \zeta_1, r_1, \omega_1) - H_{ad}(\mathbf{x}, \zeta_2, r_2, \omega_2)| \leq L_{H_{ad}} (|\zeta_1 - \zeta_2| + |r_1 - r_2| + |\omega_1 - \omega_2|),$$
- pour tout $\zeta_1, \zeta_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^{d-1}$, pour p.p. $\mathbf{x} \in \Gamma_3.$
- (b) $H_{ad}(\cdot, \zeta, r, \omega)$ est mesurable sur $\Gamma_3, \forall \zeta, r \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^{d-1},$
- (c) $H_{ad}(\mathbf{x}, \cdot, \cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ p.p. $\mathbf{x} \in \Gamma_3.$
- (d) $H_{ad}(\mathbf{x}, 0, r, \omega) = 0, \forall r \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3,$
- $$H_{ad}(\mathbf{x}, \zeta, r, \omega) \geq 0, \forall \zeta \leq 0, r \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \text{ et}$$
- $$H_{ad}(\mathbf{x}, \zeta, r, \omega) \leq 0, \forall \zeta \geq 1, r \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

H(4.5) : $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ telle que

- (a) Il existe $L_{\Theta^\ell} > 0$ telle que
- $$|\Theta^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \ell_1, \mathbf{k}_1, \tau_1) - \Theta^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_2, \ell_2, \mathbf{k}_2, \tau_2)| \leq L_{\Theta^\ell} (|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2| + |\ell_1 - \ell_2| + |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| + |\tau_1 - \tau_2|),$$
- $$\forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{S}^d, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^m, \tau_1, \tau_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$$
- (b) $\Theta^\ell(\cdot, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}, \ell, \mathbf{k}, \tau)$ est mesurable sur $\Omega^\ell, \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m, \ell, \tau \in \mathbb{R}.$
- (c) $\Theta^\ell(\cdot, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 0)$ appartient à $L^2(\Omega^\ell).$

H(4.6) : $\phi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ telle que

(a) Il existe $L_{\phi^\ell} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & |\phi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \ell_1, \mathbf{k}_1, \tau_1) - \phi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_2, \ell_2, \mathbf{k}_2, \tau_2)| \leq \\ & L_{\phi^\ell} (|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2| + |\ell_1 - \ell_2| + |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| + |\tau_1 - \tau_2|), \\ & \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{S}^d, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^m, \tau_1, \tau_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \end{aligned}$$

(b) $\phi^\ell(\cdot, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}, \ell, \mathbf{k}, \tau)$ est mesurable sur Ω^ℓ , $\forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m, \ell, \tau \in \mathbb{R}$.

(c) $\phi^\ell(\cdot, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 0)$ appartient à $L^2(\Omega^\ell)$.

H(4.7) : $\Psi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ telle que

(a) Il existe $L_{\Psi^\ell} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & |\Psi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \ell_1, \mathbf{k}_1, \tau_1) - \Psi^\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_2, \ell_2, \mathbf{k}_2, \tau_2)| \leq \\ & L_{\Psi^\ell} (|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2| + |\ell_1 - \ell_2| + |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| + |\tau_1 - \tau_2|), \\ & \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{S}^d, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^m, \tau_1, \tau_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell. \end{aligned}$$

(b) $\Psi^\ell(\cdot, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}, \ell, \mathbf{k}, \tau)$ est mesurable sur Ω^ℓ , $\forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m, \ell, \tau \in \mathbb{R}$.

(c) $\Psi^\ell(\cdot, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 0)$ appartient à $L^2(\Omega^\ell)$.

Le tenseur piézoélectrique et le tenseur de permittivité électrique satisfont à ce qui suit conditions.

H(4.8) : $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

(a) $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$, $e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell)$, $1 \leq i, j, k \leq d$.

(b) $\mathcal{E}^\ell \sigma \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v}$, $\forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$.

H(4.9) : $\boldsymbol{\beta}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

(a) $\boldsymbol{\beta}^\ell = (\beta_{ij}^\ell)$, $\beta_{ij}^\ell = \beta_{ji}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell)$, $1 \leq i, j \leq d$.

(b) Il existe $m_{\boldsymbol{\beta}^\ell} > 0$ tel que

$$\boldsymbol{\beta}^\ell \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_{\boldsymbol{\beta}^\ell} |\mathbf{E}|^2, \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega^\ell.$$

la fonction de compliance normale p_ν et la fonction tangentielle p_τ satisfont aux hypothèses (L_ν, L_τ et M_τ étant des constantes positives).

H(4.10)(a) $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

(b) $|p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|$, $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.

(c) $p_\nu(\cdot, r)$ est mesurable sur Γ_3 , $\forall r \in \mathbb{R}$.

(d) $p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0$, $\forall r \leq 0$, p.p. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.

H(4.11)(a) $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

(b) $|p_\tau(\mathbf{x}, d_1) - p_\tau(\mathbf{x}, d_2)| \leq L_\tau |d_1 - d_2|, \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$

(c) $|p_\tau(\mathbf{x}, d)| \leq M_\tau \forall d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$

(d) $p_\tau(\cdot, d)$ est mesurable sur $\Gamma_3, \forall d \in \mathbb{R}.$

(e) $p_\tau(\cdot, 0) \in L^2(\Gamma_3).$

On suppose que la masse volumique, les efforts, les densités de traction et les températures de fondation satisfont ;

H(4.12)(a) $\rho^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \exists \rho_0 > 0; \rho^\ell(x) \geq \rho_0 \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell.$

(b) $\mathbf{f}_0^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad \mathbf{f}_2^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d).$

(c) $q_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)).$

(d) $\chi^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)).$

Le coefficient d'énergie, le coefficient de diffusion des microfissures et le coefficient de l'adhésion satisfont :

H(4.13) $\kappa_0^\ell, \kappa^\ell > 0, \quad \gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \gamma_\nu \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$

De plus, nous supposons que les valeurs initiales satisfont :

H(4.14)(a) $\mathbf{k}_0^\ell \in \mathbf{Y}^\ell, \quad \mathbf{u}_0^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad \mathbf{v}_0^\ell \in H^\ell, \quad \zeta_0^\ell \in K^\ell, \quad \tau_0^\ell \in L_1^\ell.$

(b) $\zeta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$

Nous utiliserons un produit scalaire modifié sur H , donné par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = \sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell},$$

et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée. Il découle de l'hypothèse H(ρ^ℓ), que $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_H$ sont des normes équivalentes sur H , et de l'application par inclusion de $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_{\mathbf{V}})$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continu et dense. Non note \mathbf{V}' le dual de \mathbf{V} . Identifier H avec son propre dual. Alors, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H, \forall \mathbf{u} \in H, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$

On définit six applications $\mathbf{f} : (0, T) \rightarrow \mathbf{V}', q : (0, T) \rightarrow W, a : L_1 \times L_1 \rightarrow \mathbb{R}, a_0 : L_1 \times L_1 \rightarrow \mathbb{R}, j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ et $j_{vc} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement, par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{f}_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (4.19)$$

$$(q(t), \varsigma)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \varsigma^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \varsigma^\ell da \quad \forall \varsigma \in W, \quad (4.20)$$

$$a(\varsigma, \omega) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell \cdot \nabla \omega^\ell dx, \quad (4.21)$$

$$a_0(\xi, \zeta) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell \cdot \nabla \zeta^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \xi^\ell \zeta^\ell da, \quad (4.22)$$

$$j_{\nu c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2)(v_\nu^1 + v_\nu^2) da, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} j_{ad}(\zeta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} \left(-\gamma_\nu \zeta^2 R_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2)(v_\nu^1 + v_\nu^2) \right) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \left(p_\tau(\zeta) \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2)(\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{v}_\tau^2) \right) da. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Notons que les conditions H(4.12)(b) et H(4.12)(c) impliquent

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad q \in C(0, T; W). \quad (4.25)$$

À l'aide des formules de Green on voit directement que si $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ et ς sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (4.6), (4.8), (4.11) et (4.12) avec (4.24) et (4.23) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \mathbf{v}^\ell dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \varepsilon(\mathbf{v}^1) dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{v}^1 dx &= \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da \\ &+ \int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in \mathbf{V}^1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \varepsilon(\mathbf{v}^2) dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{v}^2 dx = \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \mathbf{v}^2 da$$

$$+ \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \mathbf{v}^2 da + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \mathbf{v}^2 da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2, \quad (4.27)$$

à addition (4.26) et (4.27)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \mathbf{v}^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (4.6) (4.8) et (4.9) on a ;

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \mathbf{v}^\ell dx \\ = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \mathbf{v}^\ell dx \\ = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \mathbf{v}^\ell dx \\ + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \mathbf{v}^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (4.19)

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \mathbf{v}^\ell da, \\ (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \mathbf{v}^\ell dx = ((\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}))_H. \end{aligned}$$

En suite :

$$(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da = ? :$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \mathbf{v}^1 da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \mathbf{v}^2 da \\
 &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu (\mathbf{v}_\nu^1 - \mathbf{v}_\nu^2) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{v}_\tau^1) da \\
 &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu ([\mathbf{v}_\nu]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau]) da.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nous substituons (4.11) et (4.12) dans (4.28) pour trouver que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \mathbf{v}^\ell da &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2)) ([v_\nu]) da \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} p_\tau (\zeta) \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2) ([\mathbf{v}_\tau]) da.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 (\ddot{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} + \int_{\Gamma_3} (-p_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2)) (v_\nu - v_\nu) da \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} p_\tau (\zeta) \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2) (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}_\tau) da.
 \end{aligned}$$

D'après (4.24) et (4.23) on trouve

$$(\ddot{u}, v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}. \tag{4.29}$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (4.6), (4.15) et la définition (4.20) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + (\text{Div} \mathbf{D}^\ell, \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in \mathcal{W}^\ell, \tag{4.30}$$

d'où

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da \quad \forall \phi^\ell \in \mathcal{W}^\ell. \tag{4.31}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \mathbf{D}^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \phi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \phi^1 da. \tag{4.32}$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \mathbf{D}^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \phi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \phi^2 da. \tag{4.33}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (4.15) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da = 0.$$

à addition (4.32) et (4.33) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da.$$

On a d'après (4.7) et (4.16) :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da &= 0. \end{aligned}$$

On a d'après (4.20) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = (q(t), \psi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

De (4.3), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = -(q(t), \phi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in \mathcal{W}, t \in [0, T]. \quad (4.34)$$

Maintenant, pour les inconnues des températures du problème, pour tout $t \in [0, T]$ et la condition (4.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - (\kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \\ &(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ &\forall \delta^\ell \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

En utilisant la formule de Green, pour $\ell = 1, 2$ on a :

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \tau^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx - \kappa_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial^\ell \tau^\ell(t)}{\partial \nu^\ell} \delta^\ell dx, \quad \forall \delta^\ell \in L_1^\ell.$$

On a d'après (4.14) :

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \tau^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \delta^\ell dx, \quad \forall \delta^\ell \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2. \quad (4.36)$$

En combinant les inégalités (4.35) et (4.36), on a :

$$\begin{aligned} & (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \cdot \delta^\ell dx \\ &= (\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \delta^\ell \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Additionner, pour $\ell = 1, 2$ d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \cdot \delta^\ell dx \\ &= \sum_{\ell=1}^2 ((\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}), \quad \forall \delta = (\delta^1, \delta^2) \in L_1. \end{aligned}$$

D'après (4.22), on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^\ell} + a_0(\tau(t), \delta) \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \left((\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell)(t), \delta^\ell)_{L^\ell} \right) \quad \forall \delta \in L_1. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Maintenant, pour les inconnues d'endommagements, soit $\zeta^\ell(t) \in K^\ell$, $\ell = 1, 2$ et pour tout $t \in (0, T)$. La définition de $\partial \psi_{K^\ell}(\zeta^\ell)$ (2.28) et de (4.4), on obtient :

$$\begin{aligned} & (\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell) - \zeta^\ell + \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell, \omega^\ell - \zeta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \\ & \forall \omega^\ell \in K^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \zeta^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell), \omega^\ell - \zeta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \leq (\zeta^\ell(t), \omega^\ell - \zeta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell (\Delta \zeta^\ell(t), \omega^\ell - \zeta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (4.13)

$$\begin{aligned} (\Delta \varsigma^\ell(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + (\nabla \varsigma^\ell(t), \nabla(\omega^\ell - \varsigma^\ell(t)))_{L^2(\Omega^\ell)} &= \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial \varsigma^\ell(t)}{\partial \nu} \cdot (\omega^\ell - \varsigma^\ell(t)) d\omega, \\ (\Delta \varsigma^\ell(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} &= - \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\omega^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx. \end{aligned}$$

En suite :

$$\begin{aligned} &(\dot{\varsigma}^\ell(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\omega^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ &\geq \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Additionner, pour $\ell = 1, 2$ il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}^\ell(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\omega^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \geq \\ &\sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \omega \in K. \end{aligned} \tag{4.38}$$

D'après (4.21), on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}^\ell(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma(t), \omega - \varsigma(t)) \geq \\ &\sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell)(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \omega \in K. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Finalement, de (4.1), (4.3), (4.29), (4.34), (4.37), (4.39), (4.2), (4.10), (4.17) et (4.18), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème thermo-électro-viscoelastique \mathcal{P}_2 .

Problème $\mathcal{P}_{V,2}$. Trouve $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$,
 $\xi = (\xi^1, \xi^2) : [0, T] \rightarrow W$, $\varsigma = (\varsigma^1, \varsigma^2) : [0, T] \rightarrow L_1$, $\zeta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$,
 $\tau = (\tau^1, \tau^2) : [0, T] \rightarrow L_1$, et $\mathbf{k} = (\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{Y}$ tell que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell + \\ &\int_0^t \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \varsigma^\ell(s), \mathbf{k}^\ell(s), \tau^\ell(s) \right) ds \\ &\text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\dot{\mathbf{k}}^\ell = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + j_{\nu c}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \varsigma(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\zeta}^\ell(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma(t), \omega - \varsigma(t)) \geq \\ \sum_{\ell=1}^2 \left(\phi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell)(t), \omega^\ell - \varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \forall \omega \in K, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} a_0(\tau(t), \delta) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell, \mathbf{k}^\ell, \tau^\ell)(t), \delta^\ell \right)_{L_0^\ell} \\ + \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L_0^\ell} \quad \forall \delta \in L_1, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\beta^\ell \nabla \xi^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \quad (4.45)$$

$$\dot{\zeta} = H_{ad}(\zeta, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2)) \quad t \in (0, T), \quad (4.46)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \varsigma(0) = \varsigma_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \quad (4.47)$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Remarque 4.2.1 Notons que, dans le problème \mathcal{P}_2 et dans le problème $\mathcal{P}_{V,2}$, nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \zeta \leq 1$. En effet, l'équation (4.46) garantit que $\zeta(x, t) \leq \zeta_0(t)$ est par conséquent l'hypothèse H(4.4) montre que $\zeta(x, t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$, Par contre, si $\zeta(x, t) = 0$ à l'instant t_0 , alors ensuit de (4.46) que $\zeta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc $\zeta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ p.p. $x \in \Gamma_3$, nous concluons que $0 \leq \zeta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.

Maintenant, nous proposons notre résultat d'existence et d'unicité

4.3 Existence et unicité de la solution

Les résultats principaux sont énoncés par le théorème suivant.

Théorème 4.3.1 *Supposons que H(4.1)- H(4.14) sont vérifiées. Alors, il existe alors une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \xi, \varsigma, \zeta, \mathbf{k}, \tau\}$ problème $\mathcal{P}_{V,2}$, de plus la solution satisfait :*

$$\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^1, \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^2) \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad (4.49)$$

$$\xi \in C(0, T; W), \quad (4.50)$$

$$\varsigma \in W^{1,2}(0, T; L_0) \cap L^2(0, T; L_1), \quad (4.51)$$

$$\zeta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{k} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{Y}), \quad (4.53)$$

$$\tau \in W^{1,2}(0, T; L_0) \cap L^2(0, T; L_1). \quad (4.54)$$

Les fonctions $\{\mathbf{u}, \xi, \varsigma, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}, \tau, \zeta, \mathbf{D}\}$ qui satisfont (4.40)-(4.47) et (4.3) sont appelées solutions faibles du problème du contact thermo-piézoélectrique \mathcal{P}_2 . On conclut par le théorème 4.3.1 que, sous les hypothèses H(4.1)-H(4.14), le problème mécanique (4.1)-(4.18) Admets une unique solution faible $\{\mathbf{u}, \xi, \varsigma, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}, \tau, \zeta, \mathbf{D}\}$. Pour préciser la régularité de la solution faible, on note que la relation constitutive (4.3), les hypothèses H(4.8)- H(4.9), et les régularités (4.48), (4.50) montrent que $\mathbf{D} \in C(0, T; H)$. De plus, en utilisant (4.45) et la notation (4.20), on obtient

$$\text{div } \mathbf{D}^\ell(t) = q_0^\ell(t) \quad \forall t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2.$$

Il découle maintenant des régularités H(4.12)(c) Que $\text{div } \mathbf{D}^\ell \in C(0, T; H^\ell)$, $\ell = 1, 2$, qui montre que

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (4.55)$$

Nous concluons que la solution faible $\{\mathbf{u}, \xi, \varsigma, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}, \tau, \zeta, \mathbf{D}\}$ du problème du contact thermo-piézoélectrique \mathcal{P}_2 a la régularité (4.48)-(4.55).

Preuve du théorème 4.3.1

La preuve du théorème 4.3.1 qui sera réalisée en plusieurs étapes et qui reposent sur des arguments d'équations non linéaires avec des opérateurs monotones, un résultat classique d'existence et d'unicité sur des inégalités paraboliques et des arguments de

point fixe. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses du théorème 4.3.1 sont vérifiées, et nous considérons que C est une constante positive générique qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \mathcal{A}^\ell, \beta^\ell, \mathcal{B}^\ell, \mathcal{G}^\ell, \mathcal{E}^\ell, \Theta^\ell, H_{ad}, \gamma_\nu, \phi^\ell, \Psi^\ell, \kappa_0^\ell, \lambda_0^\ell, \kappa^\ell, \chi^\ell$ et T , avec $\ell = 1, 2$. Mais ne dépend pas de t ni du reste des données d'entrée, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Soit un $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $PV_\eta^{u\xi}$. Trouver $(\mathbf{u}_\eta, \xi_\eta) : (0, T) \rightarrow \mathbf{V} \times W$ tel que

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\eta(t), v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} &= (\mathbf{f}(t) - \eta(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\beta^\ell \nabla \xi_\eta^\ell(t) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (4.57)$$

$$\mathbf{u}_\eta^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta^\ell(0) = \mathbf{v}_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (4.58)$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème.

Lemme 4.3.1 *Il existe une solution unique $(\mathbf{u}_\eta, \xi_\eta)$ de problème $PV_\eta^{u\xi}$ et il satisfait*

$$\mathbf{u}_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}}_\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad (4.59)$$

$$\xi_\eta \in C(0, T; W). \quad (4.60)$$

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (4.61)$$

En utilisant (4.61) et H(4.1) il ensuit que

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}'}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

En gardant à l'esprit H(4.1) et Krasnoselski théorème (voir, par exemple, [33, p.60]), nous en déduisons que $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ est un continu, et donc hémi-continue. Maintenant, par H(4.1)(c) et (4.61), il ensuit que

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \geq m \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (4.62)$$

où le constant positif $m = \min\{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$. En choisissant $\mathbf{v} = 0$ dans (4.62) nous obtenons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &\geq m\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 - \|A_0\|_{\mathbf{V}'}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \\ &\geq \frac{1}{2}m\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 - \frac{1}{2m}\|A_0\|_{\mathbf{V}'}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

De plus, par (4.61) et H(4.1)(b) on trouve

$$\|A\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} \leq C^1\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + C^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V},$$

où $C^1 = \max\{C_{\mathcal{A}^1}^1, C_{\mathcal{A}^2}^1\}$ et $C^2 = \max\{C_{\mathcal{A}^1}^2, C_{\mathcal{A}^2}^2\}$. Enfin, nous rappelons que par (4.25) nous avons $\mathbf{f} - \eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ et $\mathbf{v}_0 \in H$. Par conséquent, en utilisant un standard pour les équations différentielles ordinaires dans les espaces abstraits (voir, par exemple, [50, Theorem 2.29]), n sait qu'il existe une unique fonction ϑ_η tel que

$$\vartheta_\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap C(0, T; H), \quad \dot{\vartheta}_\eta \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad (4.64)$$

$$\dot{\vartheta}_\eta(t) + A\vartheta_\eta(t) = \mathbf{f}(t) - \eta(t), \quad p.p. t \in (0, T), \quad (4.65)$$

$$\vartheta_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (4.66)$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \int_0^t \vartheta_\eta(s) ds + \mathbf{u}_0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.67)$$

Il découle de (4.61) et (4.64)-(4.67), que \mathbf{u}_η est une solution à (4.56), (4.58), avec la régularité (4.59).

Ensuite, nous définissons une forme bilinéaire $b(., .) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$b(\xi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\beta^\ell \nabla \xi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \xi, \phi \in W. \quad (4.68)$$

On utilise H(4.9) et (4.68) pour montrer que la forme bilinéaire $b(., .)$ est continue, symétrique et coercitive sur W . de plus, en utilisant (4.20) et le Théorème de représentation de Riesz on peut définir un élément $q_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(q_\eta(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour en déduire qu'il existe un élément unique $\xi_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\xi_\eta(t), \phi) = (q_\eta(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \quad (4.69)$$

Il découle de (4.69), que le couple $(\mathbf{u}_\eta, \xi_\eta)$ est la solution de l'équation variationnelle non linéaire (4.57). Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$, il découle de (4.57) que

$$\|\xi_\eta(t_1) - \xi_\eta(t_2)\|_W \leq C(\|\mathbf{u}_\eta(t_1) - \mathbf{u}_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \quad (4.70)$$

Puisque $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; H)$ et $q \in C(0, T; W)$, l'inégalité (4.70) implique que $\xi_\eta \in C(0, T; W)$. Ceci complète la preuve. ■

Dans la deuxième étape, nous posons $\theta = (\theta^1, \theta^1) \in L^2(0, T; L_0)$ et considérons le problème de valeur initiale suivante :

Problème \mathbf{PV}_θ^ζ . Trouver $\varsigma_\theta = (\varsigma_\theta^1, \varsigma_\theta^2) : (0, T) \rightarrow L_1$ tel que

$$\begin{aligned} \varsigma_\theta(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}_\theta^\ell(t) - \theta^\ell(t), \mu^\ell - \varsigma_\theta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma_\theta(t), \mu - \varsigma_\theta(t)) \geq 0 \\ \forall \mu \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Dans l'étude du problème \mathbf{PV}_θ^ζ Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.2 *Il existe une solution unique ς_θ de problème \mathbf{PV}_θ^ζ et elle satisfait*

$$\varsigma_\theta \in W^{1,2}(0, T; L_0) \cap L^2(0, T; L_1).$$

Démonstration. La démonstration du lemme 4.3.2 en utilisant les mêmes arguments du lemme 3.3.3.

On note par ς_θ la solution de problème \mathbf{PV}_θ^ζ obtenue dans le lemme 4.3.2. ■

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ \mathbf{u}_η obtenu dans lemma 4.3.1 et nous considérons le problème de la valeur initiale suivante.

Problème \mathbf{PV}_η^ζ . Trouver $\zeta_\eta : (0, T) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\zeta}_\eta(t) = H_{ad}(\zeta_\eta(t), R_\nu(\mathbf{u}_{\eta\nu}^1(t) + \mathbf{u}_{\eta\nu}^2(t)), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}^1(t) - \mathbf{u}_{\eta\tau}^2(t))), \quad (4.72)$$

$$\zeta_\eta(0) = \zeta_0. \quad (4.73)$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 4.3.3 *Il existe une solution unique $\zeta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$ au problème PV_η^ζ .*

Démonstration. On considère l'application $F_\eta : (0, T) \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$,

$$F_\eta(t, \zeta) = H_{ad}(\zeta(t), R_\nu(\mathbf{u}_{\eta\nu}^1(t) + \mathbf{u}_{\eta\nu}^2(t)), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}^1(t) - \mathbf{u}_{\eta\tau}^2(t))),$$

pour tout $t \in (0, T)$ et $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$. Il résulte des propriétés de l'opérateur de troncature R_ν et \mathbf{R}_τ que F_η est Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, uniformément dans temps. De plus, pour tout $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_\eta(t, \zeta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Ainsi en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz donné dans [31, p. 60], on en déduit qu'il existe une unique fonction $\zeta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution de l'équation (4.72). Aussi, les arguments utilisés dans la remarque 4.2.1 montrent que $0 \leq \zeta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in (0, T)$, p.p. sur Γ_3 . Ceci termine la preuve. ■

Dans la quatrième étape. Soit $\pi = (\pi^1, \pi^1) \in L^2(0, T; L_0)$ et considérons le problème auxiliaire.

Problème PV_π^τ . Trouve $\tau_\pi : (0, T) \rightarrow L_0$, tel que

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_\pi^\ell(t) - \pi^\ell(t) - \chi^\ell(t), \lambda^\ell)_{L_0^\ell} + a_0(\tau_\pi(t), \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in L_0, \quad (4.74)$$

$$\tau_\pi(0) = \tau_0. \quad (4.75)$$

Lemme 4.3.4 *Il existe une solution unique τ_π au problème auxiliaire PV_π^τ satisfaisant (4.54).*

Démonstration De plus, par application de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on peut trouver une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\int_{\Omega^\ell} |\nabla \lambda|^2 dx + \frac{\lambda_0^\ell}{\kappa_0^\ell} \int_{\Gamma^\ell} |\lambda|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\ell} |\lambda|^2 dx, \quad \forall \lambda \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2.$$

Ainsi, on obtient

$$a_0(\lambda, \lambda) \geq c_1 \|\lambda\|_{L_1}^2, \quad \forall \lambda \in L_1,$$

où $c_1 = \kappa_0 \min(1, c_0)/2$, ce qui implique que a_0 is L_1 - elliptique. Sur la base d'arguments classique de l'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques, l'équation variationnelle (4.74) À une unique solution τ_π satisfaisant $\tau_\pi(0) = \tau_0$ et la régularité

(4.54). ■

Dans la cinquième étape. Soit $\mu \in L^2(0, T, \mathbf{Y})$ et définissons $\mathbf{k}_\mu \in W^{1,2}(0, T, \mathbf{Y})$ par

$$\mathbf{k}_\mu(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \mu(s) ds. \quad (4.76)$$

Nous utilisons $(\mathbf{u}_\eta, \xi_\eta)$ obtenu au lemme 4.3.1, ς_θ obtenu au lemme 4.3.2, τ_π obtenu au lemme 4.3.4 et \mathbf{k}_μ défini en (4.76) pour construire le problème de Cauchy suivant pour le champ de contraintes.

Problème $\mathbf{PV}_{\eta\mu\theta\pi}^\sigma$. Trouver $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi} = (\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^1, \boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^2) : (0, T) \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^\ell(t) &= \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \varsigma_\theta^\ell(s), \mathbf{k}_\mu^\ell(s), \tau_\pi^\ell(s)) ds, \\ &\text{p.p. } t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dans l'étude du problème $\mathbf{PV}_{\eta\mu\theta\pi}^\sigma$ on a le résultat suivant.

Lemme 4.3.5 *Il existe une unique solution du problème $\mathbf{PV}_{\eta\mu\theta\pi}^\sigma$ et elle satisfait $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.*

Démonstration On introduit l'opérateur $\Lambda_{\eta\mu\theta\pi} = (\Lambda_{\eta\mu\theta\pi}^1, \Lambda_{\eta\mu\theta\pi}^2) : L^2(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{H})$ défini par

$$\Lambda_{\eta\mu\theta\pi}^\ell \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \varsigma_\theta^\ell(s), \mathbf{k}_\mu^\ell(s), \tau_\pi^\ell(s)) ds, \quad (4.78)$$

pour tout $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, $t \in (0, T)$ et $\ell = 1, 2$. Pour $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ nous utilisons (4.78) et H(4.3), pour obtenir

$$\|\Lambda_{\eta\mu\theta\pi} \boldsymbol{\sigma}_1(t) - \Lambda_{\eta\mu\theta\pi} \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \max(L_{\mathcal{G}^1}, L_{\mathcal{G}^2}) \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds,$$

pour tout $t \in (0, T)$. Il découle de cette inégalité que pour p suffisamment grand, une puissance $\Lambda_{\eta\mu\theta\pi}^p$ de l'opérateur $\Lambda_{\eta\mu\theta\pi}$ est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$ et, donc, il existe un élément unique $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda_{\eta\mu\theta\pi} \boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi} = \boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}$. De plus, $\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}$ est l'unique solution du problème $\mathbf{PV}_{\eta\mu\theta\pi}^\sigma$, ce qui conclut la preuve. ■

Lemme 4.3.6 *Soient $(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1), (\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2) \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)$ et soit $\boldsymbol{\sigma}_i$ les fonctions obtenues au Lemme (4.3.5), pour $i = 1, 2$. Alors, les inégalités*

suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \left(\|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_{\eta_1}(s) - \mathbf{u}_{\eta_2}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right. \\ &\quad + \int_0^t \|\varsigma_{\theta_1}(s) - \varsigma_{\theta_2}(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\mathbf{k}_{\mu_1}(s) - \mathbf{k}_{\mu_2}(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 ds \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\tau_{\pi_1}(s) - \tau_{\pi_2}(s)\|_{L_0}^2 ds \right), \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Démonstration Soit $t \in [0, T]$. En utilisant (4.77) et les propriétés H(4.2) - H(4.3) de \mathcal{B}^ℓ et \mathcal{G}^ℓ , on trouve

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c \left(\|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \right. \\ &\quad + \int_0^t \|\mathbf{u}_{\eta_1}(s) - \mathbf{u}_{\eta_2}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_{\theta_1}(s) - \varsigma_{\theta_2}(s)\|_{L_0}^2 ds + \\ &\quad \left. \int_0^t \|\mathbf{k}_{\mu_1}(s) - \mathbf{k}_{\mu_2}(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 ds + \int_0^t \|\tau_{\pi_1}(s) - \tau_{\pi_2}(s)\|_{L_0}^2 ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall dans l'inégalité précédente on en déduit l'estimation (4.79), qui conclut la preuve du lemme 4.3.6. ■

Nous passons maintenant à la dernière étape de la preuve du 4.3.1 dans laquelle nous utilisons un argument de point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur :

$$\Pi : L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0),$$

défini par

$$\Pi(\eta, \mu, \theta, \pi) = (\Pi^1(\eta, \mu, \theta, \pi), \Pi^2(\eta, \mu, \theta, \pi), \Pi^3(\eta, \mu, \theta, \pi), \Pi^4(\eta, \mu, \theta, \pi)), \quad (4.80)$$

avec

$$\begin{aligned} (\Pi^1(\eta, \mu, \theta, \pi)(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_\eta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^\ell(s)), \varsigma_\theta^\ell(s), \mathbf{k}_\mu^\ell(s), \tau_\pi^\ell(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + j_{ad}(\zeta_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) + j_{vc}(\mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \Pi^2(\eta, \mu, \theta, \pi)(t) &= \left(\Theta^1(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^1(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^1(t)), \varsigma_\theta^1(t), \mathbf{k}_\mu^1(t), \tau_\pi^1(t)), \right. \\ &\quad \left. \Theta^2(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^2(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta^2(t)), \varsigma_\theta^2(t), \mathbf{k}_\mu^2(t), \tau_\pi^2(t)) \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \Pi^3(\eta, \mu, \theta, \pi)(t) = & \left(\phi^1(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^1(t)), \varsigma_\theta^1(t), \mathbf{k}_\mu^1(t), \tau_\pi^1(t)), \right. \\ & \left. \phi^2(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^2(t)), \varsigma_\theta^2(t), \mathbf{k}_\mu^2(t), \tau_\pi^2(t)) \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \Pi^4(\eta, \mu, \theta, \pi)(t) = & \left(\Psi^1(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^1(t)), \varsigma_\theta^1(t), \mathbf{k}_\mu^1(t), \tau_\pi^1(t)), \right. \\ & \left. \Psi^2(\boldsymbol{\sigma}_{\eta\mu\theta\pi}^2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta^2(t)), \varsigma_\theta^2(t), \mathbf{k}_\mu^2(t), \tau_\pi^2(t)) \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Pour l'opérateur Π , nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.7 *L'opérateur Π a un unique point fixe $(\eta^*, \mu^*, \theta^*, \pi^*) \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)$.*

Démonstration Soit $(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1), (\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)$ dans $L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)$ et soit $t \in [0, T]$. On utilise la notation $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\eta_i}$, $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i}$, $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{\eta_i \mu_i \theta_i \pi_i}$, $\xi_i = \xi_{\eta_i}$, $\varsigma_i = \varsigma_{\theta_i}$, $\zeta_i = \zeta_{\eta_i}$, $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_{\mu_i}$ et $\tau_i = \tau_{\pi_i}$ pour $i = 1, 2$. On utilise H(4.2), H(4.3), H(4.8), H(4.10), H(4.11), (4.79) et la définition de R_ν , \mathbf{R}_τ , on a

$$\begin{aligned} & \|\Pi^1(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(t) - \Pi^1(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(t)\|_{\mathbf{V}'}^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 \\ & \left. + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \int_0^t \|\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Par des arguments similaires, de (4.79), (4.82) et H(4.5) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \|\Pi^2(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(t) - \Pi^2(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(t)\|_{\mathbf{Y}}^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \\ & \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \left. + \int_0^t \|\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds \right). \end{aligned}$$

De plus, à partir de (4.79), (4.83) et H(4.6) on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Pi^3(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(t) - \Pi^3(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(t)\|_{L_0}^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \\ & \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \left. + \int_0^t \|\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds \right). \end{aligned}$$

De même, en utilisant (4.84) et H(4.7), on obtient l'estimation suivante pour Π^4

$$\begin{aligned} & \|\Pi^4(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(t) - \Pi^4(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(t)\|_{L_0}^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \\ & \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \left. + \int_0^t \|\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|\Pi(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(t) - \Pi(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(t)\|_{\mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0}^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds \\ & + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)\|_{\mathbf{Y}}^2 ds \\ & \left. + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 + \|\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)\|_{\mathbf{Y}}^2 \right). \quad (4.85) \end{aligned}$$

De plus, d'après (4.56) on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{v}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}_1^\ell - \mathbf{v}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} = \\ & -(\eta_1 - \eta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}. \end{aligned}$$

On intègre cette égalité par rapport au temps, on utilise les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$ et condition H(4.1)(c) pour trouver

$$m \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} ds$$

où $m = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$. Alors, en utilisant $2ab \leq \frac{a^2}{\delta} + \delta b^2$ on obtient

$$\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathbf{V}'}^2 ds. \quad (4.86)$$

D'autre part, à partir du problème de Cauchy (4.72)-(4.73) on peut écrire

$$\zeta_i(t) = \zeta_0 - \int_0^t H_{ad}(\zeta_i(s), R_\nu(u_{i\nu}^1(s) + u_{i\nu}^2(s)), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{i\tau}^1(s) - \mathbf{u}_{i\tau}^2(s))) ds,$$

et alors

$$\begin{aligned} & \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ & + C \int_0^t \|R_\nu(u_{1\nu}^1(s) + u_{1\nu}^2(s)) - R_\nu(u_{2\nu}^1(s) + u_{2\nu}^2(s))\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ & + C \int_0^t \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}^1(s) - \mathbf{u}_{1\tau}^2(s)) - \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}^1(s) - \mathbf{u}_{2\tau}^2(s))\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et \mathbf{R}_τ et en écrivant $\zeta_1 = \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_2$, on obtient

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \left(\|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \right) ds.$$

Ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall et utilisons (2.12) pour conclure que

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds. \quad (4.87)$$

La définition (4.76) donne

$$\|\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)\|_Y^2 \leq C \left(\int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_Y^2 ds \right). \quad (4.88)$$

D'autre part, de (4.71) on déduit que

$$(\dot{\varsigma}_1 - \dot{\varsigma}_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)_{L_0} + a(\varsigma_1 - \varsigma_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)_{L_0}.$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\varsigma_1(0) = \varsigma_2(0) = \varsigma_0$ et l'inégalité $a(\varsigma_1 - \varsigma_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \geq 0$, pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \varsigma_1(s) - \varsigma_2(s))_{L_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds.$$

Cette inégalité, combinée avec l'inégalité de Gronwall, conduit à

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (4.89)$$

De (4.74) on déduit que

$$(\dot{\tau}_1 - \dot{\tau}_2, \tau_1 - \tau_2)_{L_0} + a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) = (\pi_1 - \pi_2, \tau_1 - \tau_2)_{L_0}.$$

On intègre cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\tau_1(0) = \tau_2(0) = \tau_0$ et l'inégalité $a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) \geq 0$, pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{L_0} \cdot \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq C \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{L_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (4.90)$$

Puisque \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 ont la même valeur initiale que nous obtenons

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds. \quad (4.91)$$

On remplace (4.86)-(4.91) dans (4.85) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Pi(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(t) - \Pi(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(t)\|_{\mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0}^2 \leq \\ & C \int_0^t \|(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)(s)\|_{\mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0}^2 ds. \end{aligned}$$

En réitérant cette inégalité n fois nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|\Pi^n(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1) - \Pi^n(\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)}^2 \leq \\ & \frac{C^n T^n}{n!} \|(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1) - (\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, Π^n est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)$, et donc Π a un point fixe unique. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème 4.3.1.

Démonstration Existence. Soit $(\eta^*, \mu^*, \theta^*, \pi^*) \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \times \mathbf{Y} \times L_0 \times L_0)$ soit le point fixe de Π défini par (4.80)-(4.84) et notons

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*}, \quad \xi_* = \xi_{\eta^*}, \quad \varsigma_* = \varsigma_{\theta^*}, \quad \zeta_* = \zeta_{\eta^*}, \quad \mathbf{k}_* = \mathbf{k}_{\mu^*}, \quad \tau_* = \tau_{\pi^*}, \quad (4.92)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_{\eta^*}^\ell + \boldsymbol{\sigma}_{\eta^* \mu^* \theta^* \pi^*}^\ell, \quad \ell = 1, 2. \quad (4.93)$$

On prouve que $\{\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \xi_*, \varsigma_*, \zeta_*, \mathbf{k}_*, \tau_*\}$ satisfait (4.40)-(4.47) et la régularités (4.48)-(4.55). En effet, on écrit (4.56) pour $\eta = \eta^*$ et on utilise (4.92) pour trouver

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta^*(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \\ & = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.94)$$

L'équation $\Pi^1(\eta^*, \mu^*, \theta^*, \pi^*) = \eta^*$ combinée avec (4.81) et (4.93) montre que

$$\begin{aligned}
 (\eta^*(t), v)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_{\zeta_*^\ell}, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{G}^\ell(\boldsymbol{\sigma}_*^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_{\zeta_*^\ell}, \varepsilon(\mathbf{u}_*^\ell), \zeta_*^\ell, \mathbf{k}_*^\ell, \tau_*^\ell)(s) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\
 &+ j_{ad}(\zeta_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) + j_{\nu c}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Nous remplaçons (4.95) dans (4.94) et utilisons (4.40) pour voir que (4.42) est satisfait. De $\Pi^2(\eta^*, \mu^*, \theta^*, \pi^*) = \mu^*$ et utilisez (4.76) on voit que (4.41) est satisfait. On écrit maintenant (4.57) et (4.72) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ et utilisez (4.92) pour trouver (4.45) et (4.46). Les égalités $\Pi^3(\eta^*, \mu^*, \theta^*, \pi^*) = \theta^*$ et $\Pi^4(\eta^*, \mu^*, \theta^*, \pi^*) = \pi^*$, combiné avec (4.71), (4.74) montre que (4.43)-(4.44) sont satisfaits. Ensuite, (4.47) et la régularité (4.48), (4.50)-(4.54) découlent des lemmes 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 et de la relation (4.76). La régularité $\sigma_* \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ découle du lemme 4.3.5, des hypothèses H(4.1), H(4.8) et (4.93). Enfin, (4.42) implique que

$$\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}_*^\ell = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^\ell + \mathbf{f}_0^\ell \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2,$$

et de H(4.12)(a), H(4.12)(b) et (4.48) on trouve que $(\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^1, \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_*^2) \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$. On en déduit que la régularité (4.49) est vérifiée.

Unicité. La partie unicité du théorème 4.3.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Π défini par (4.80)-(4.84) et de l'unicité de la résolution des problèmes $\text{PV}_\eta^{u\xi}$, PV_η^ζ , PV_θ^ζ , PV_π^τ et $\text{PV}_{\eta\mu\theta\pi}^\sigma$.

4.4 Approximation numérique d'un problème thermo-électro-Viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne.

Dans notre étude on considère l'approximation numérique d'un problème quasi-statiques de contact avec compliance normale et endommagement entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion et variable d'état interne. Nous utilisons

une méthode d'approximation variationnelle. Dans cette section on va présenter le problème approché, ensuite donner et estimer l'erreur de la discrétisation complète du problème approché et puis on donne un résultat de convergence pour le schéma numérique. Le schéma de discrétisation complète est analysé à l'aide de la méthode des éléments finis. En fait cette méthode est utilisée pour discrétiser l'espace et le temps. La convergence forte dans ce cas est établie sous une régularité minimale de la solution.

4.4.1 La discrétisation complète

Nous introduisons maintenant une approximation complète du problème variationnel $\mathcal{P}_{V,2}$ par la méthode des éléments finis et nous donnons une estimation d'erreur de ce problème. La discrétisation du problème (4.40)-(4.47) est donnée comme suit. Pour chaque paramètre $h_\ell > 0$, destiné à tendre vers 0, on associe la triangulation τ_h^ℓ de Ω^ℓ en triangles de taille maximale h_ℓ . Ensuite, les dérivations de temps sont discrétisés par l'utilisation d'une partition uniforme de $[0; T]$, notée par $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Soit k un pas de temps, $k = T/N$, et pour une fonction continue $f(t)$ soit $f_n = f(t_n)$, Finalement, pour une suite $\{\omega_n\}_{n=0}^N$ nous notons par $\delta\omega_n = (\omega_n - \omega_{n-1})/k$ la différence finie. Dans cette section, aucune addition n'est assumée sur un indice répété, et c dénote une constante positive qui dépend des données du problème, mais indépendante des paramètres de discrétisation h et k . Nous considérons une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{V}$, $Q^h \subset Q$, $W^h \subset W$, $L_1^h \subset L_1$, $Y^h \subset Y$ et $Z^h \subset L^2(\Gamma_3)$ pour approcher les espaces \mathbf{V}, Q, W, L_1, Y et $L^2(\Gamma_3)$, respectivement.

4.4.2 Formulation variationnelle approchée

La discrétisation complète du problème $\mathcal{P}_{V,2}$ est basée sur un schéma progressif d'Euler et elle est donnée sous la forme suivante ;

Problème $\mathcal{P}_{V,2}^{hk}$. Trouver une discrétisation du champ des déplacements

$$\mathbf{w}^{hk} = \{(\mathbf{w}_n^{1,hk}, \mathbf{w}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset \mathbf{V}^h, \text{ une discrétisation du champ contraintes}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{(\boldsymbol{\sigma}_n^{1,hk}, \boldsymbol{\sigma}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset Q^h, \text{ une discrétisation du potentiel électrique}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{hk} = \{(\boldsymbol{\xi}_n^{1,hk}, \boldsymbol{\xi}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset W^h, \text{ une discrétisation du champ d'endommagements}$$

$$\varsigma^{hk} = \{(\varsigma_n^{1,hk}, \varsigma_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset L_1^h, \text{ une discrétisation du champ de température}$$

$\tau^{hk} = \{(\tau_n^{1,hk}, \tau_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset L_1^h$ telle que $\tau_0^{hk} = \tau_0^h$, une discrétisation du champ de variable interne d'état $\mathbf{k}^{hk} = \{(\mathbf{k}_n^{1,hk}, \mathbf{k}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset Y^h$ et une discrétisation du champ d'adhésion $\zeta^{hk} = \{(\zeta_n^{1,hk}, \zeta_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset Z^h$ telle que $\zeta_0^{hk} = \zeta_0^h$ et pour tout $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\ell,hk} &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^{\ell,hk}) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\ell,hk}) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^{\ell,hk} + \\ &\sum_{j=0}^{n-1} k \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell,hk}), \zeta_j^{\ell,hk}, \mathbf{k}_j^{\ell,hk}, \tau_j^{\ell,hk} \right), \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{cases} (\delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h}))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) \\ + j_{\nu c}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \end{cases} \quad (4.97)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\beta}^\ell \nabla \xi^{\ell,hk} - \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla \phi^{\ell,h})_{H^\ell} = (q_n, \phi^h)_W, \quad \phi^h \in W^h, \quad (4.98)$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\delta \zeta_n^{\ell,hk}, \omega^{\ell,h} - \zeta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\zeta_n^{hk}, \omega^h - \zeta_n^{hk}) \geq \sum_{\ell=1}^2 (\phi^\ell (\boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk})) \\ - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \zeta_n^{\ell,hk}, \mathbf{k}_n^{\ell,hk}, \tau_n^{\ell,hk}, \omega^{\ell,h} - \zeta_n^{\ell,hk})_{L^2(\Omega^\ell)} \quad \omega^h \in K^h, \end{cases} \quad (4.99)$$

$$\delta \mathbf{k}_n^{\ell,hk} = \Theta^\ell (\boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \zeta_n^{\ell,hk}, \mathbf{k}_n^{\ell,hk}, \tau_n^{\ell,hk}), \quad (4.100)$$

$$\begin{cases} a_0(\tau_n^{hk}, \delta^h) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell (\boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \zeta_n^{\ell,hk}, \right. \\ \left. \mathbf{k}_n^{\ell,hk}, \tau_n^{\ell,hk} \right)_{L_0^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\delta \tau_n^{\ell,hk} - \chi_n^{\ell,hk}, \delta^{\ell,h})_{L_0^\ell} \quad \forall \delta^h \in L_1^h \end{cases} \quad (4.101)$$

$$\delta \zeta_n^{hk} = H_{ad}(\zeta_{n-1}^{hk}, R_\nu(u_{\nu(n-1)}^{1,hk} + u_{(n-1)\nu}^{2,hk}), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{(n-1)\tau}^{1,hk} - \mathbf{u}_{\tau(n-1)}^{2,hk})), \quad (4.102)$$

où le champ de déplacement discret $\mathbf{u}^{hk} = \{(\mathbf{u}_n^{1,hk}, \mathbf{u}_n^{2,hk})\}_{n=1}^N \subset \mathbf{V}^h$ est donné

$$\mathbf{u}_n^{hk} = \mathbf{u}_0^h + \sum_{j=0}^n k \mathbf{w}_j^{hk}, \quad (4.103)$$

$\mathbf{u}_0^h, \mathbf{w}_0^h, \zeta_0^h, \zeta_0^h, \mathbf{k}_0^h$ et τ_0^h sont des approximations appropriées des conditions initiales $\mathbf{u}_0^h, \mathbf{w}_0^h, \zeta_0^h, \zeta_0^h, \mathbf{k}_0^h$ et τ_0^h respectivement. Nous remarquons que la discrétisation complète du Problème $\mathcal{P}_{V,2}^{hk}$ peut être vue comme un système d'une inéquation variationnelle, d'une équation variationnelle et d'une équation différentielle. Utilisant des résultats classiques des problèmes variationnels non linéaires (voir [34]), nous obtenons que le Problème $\mathcal{P}_{V,2}^{hk}$ admet une solution unique dans $\mathbf{V}^h \times Q^h \times W^h \times L_1^h \times L_1^h \times Y^h \times Z^h$.

4.4.3 L'estimation d'erreur du problème approché

Notre intérêt dans cette section est de trouver l'estimation d'erreur $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}$, $\|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q$, $\|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W$, $\|\varsigma_n - \varsigma_n^{hk}\|_{L_0}$, $\|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}$, $\|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^{hk}\|_Y$ et $\|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}$.

Lemme 4.4.1 *Sous les hypothèses H(4.8)-H(4.13). Soit $\{\mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}, \xi, \varsigma, \tau, \mathbf{k}, \zeta\}$ et $\{\mathbf{w}_n^{hk}, \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}, \xi_n^{hk}, \varsigma_n^{hk}, \tau_n^{hk}, \mathbf{k}_n^{hk}, \zeta_n^{hk}\}$ les solutions des Problèmes $\mathcal{P}_{V,2}$ et $\mathcal{P}_{V,2}^{hk}$ respectivement. Alors, on a l'estimation d'erreur suivante :*

pour tout, $v^h = \{v_j^h\}_{n=1}^N \subset \mathbf{V}^h$, $\phi^h = \{\phi_j^h\}_{n=1}^N \subset W^h$ et $\omega^h = \{\omega_j^h\}_{n=1}^N \subset L_1^h$,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q^2 + \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W^2 + \|\varsigma_n - \varsigma_n^{hk}\|_{L_0}^2 + \|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^{hk}\|_Y^2 + \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 \right. \\ & \left. + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right\} + k \sum_{n=1}^N \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\nabla(\varsigma_n - \varsigma_n^{hk})\|_{L_0}^2 + \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 \right) \\ & \leq c \left(\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \|\xi_n - \phi_n^h\|_W^2 + k \sum_{n=1}^N \left(\|\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_j\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \\ & + \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 + k^2 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}}^2 \\ & + \|\varsigma_0 - \varsigma_0^h\|_{L_0}^2 + \|\varsigma_1 - \omega_1^h\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\delta \varsigma_j - \dot{\varsigma}_j\|_{L_0}^2 + \max_{1 \leq n \leq N} \left[\|\varsigma_n - \omega_n^h\|_{L_0}^2 \right. \\ & + k \sum_{j=1}^n \left\| (\phi(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j)) - (\mathcal{E})^* \nabla \xi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \varsigma_j, \mathbf{k}_j, \tau_j) - \delta \varsigma_j + \kappa \Delta \varsigma_j \|_{L_0} \right\| \varsigma_j - \omega_j^h \|_{L_0} \\ & + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|(\varsigma_{j+1} - \omega_{j+1}^h) - (\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 \left. \right] \\ & + \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\tau_n - \varphi_n^h\|_{L_0}^2 + \|\tau_n - \tau_{n-1}\|_{L_0}^2 \right\} + \|\tau_0 - \tau_0^h\|_{L_0}^2 + \|\tau_1 - \varphi_1^h\|_{L_0}^2 \\ & + k \sum_{j=1}^n \left[\|\dot{\tau}_j - \delta \tau_j\|_{L_0}^2 + \|\tau_j - \varphi_j^h\|_{L_0}^2 \right] + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|\tau_j - \varphi_j^h - (\tau_{j-1} - \varphi_{j-1}^h)\|_{L_0}^2 \\ & + k \left(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;\mathbf{V})} + \|\mathbf{k}\|_{H^2(0,T;\mathbf{Y})} + \|\zeta\|_{H^2(0,T;L^2(\Gamma_3))} \right) + k(\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\zeta}\|_{L_0}^2) \\ & + \|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_0^h\|_Y^2 + \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{k}_{j-1} - \mathbf{k}_{j-1}^{hk}\|_Y^2 + \|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \sum_{j=1}^n k \|\zeta_{j-1} - \zeta_{j-1}^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \end{aligned} \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Démonstration. D'abord, on commence par l'obtention de l'estimation d'erreur pour le potentiel électrique. On prend (4.47) en temps $t = t_n$ pour $\phi = \phi^h \in W^h$ et ont la soustrayant de (4.98), il s'ensuit que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\beta}^\ell \nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}), \nabla \phi^{\ell,h})_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\mathcal{E}}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla \phi^{\ell,h})_{W^\ell} = 0, \quad \phi^h \in W^h.$$

Donc, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\beta^\ell \nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}), \nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}))_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}))_{W^\ell} \\ = \sum_{\ell=1}^2 (\beta^\ell \nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}), \nabla(\xi_n^\ell - \phi^{\ell,h}))_{W^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \nabla(\xi_n^\ell - \phi^{\ell,h}))_{W^\ell} \\ \forall \phi^h \in W^h. \end{array} \right.$$

Nous combinons maintenant H(4.2) et H(4.8) , on voit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W^2 \leq c \left(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\xi_n - \phi^h\|_W \right. \\ \left. + \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W \|\xi_n - \phi^h\|_W \right) \quad \forall \phi^h \in W^h. \end{array} \right.$$

Nous appliquons l'inégalité élémentaire suivante :

$$a.b \leq \alpha a^2 + \frac{a}{\alpha} b, \quad a, b, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0. \quad (4.105)$$

Alors, nous trouvons

$$\|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W^2 \leq c \left(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\xi_n - \phi^h\|_W^2 \right) \quad \forall \phi^h \in W^h. \quad (4.106)$$

Deuxièmement, on estime l'erreur pour un champ de contraintes pour $n = 1, 2, \dots, N$.

Par récurrence, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\ell,hk} &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^{\ell,hk}) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\ell,hk}) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi^{\ell,hk} + \\ &\sum_{j=0}^{n-1} k \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}_j^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_j^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{\ell,hk}), \varsigma_j^{\ell,hk}, \mathbf{k}_j^{\ell,hk}, \tau_j^{\ell,hk} \right). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Ensuite, on intègre (4.40) de $t = 0$ à $t = t_n$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n^\ell &= \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) + \mathcal{B}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \\ &+ \int_0^{t_n} \mathcal{G}^\ell \left(\boldsymbol{\sigma}^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \varsigma^\ell(s), \mathbf{k}^\ell(s), \tau^\ell(s) \right) ds, \end{aligned} \quad (4.108)$$

l'estimation suivante pour le champ contrainte est obtenue :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q^2 &\leq c \left(\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + k^2 \right. \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} k \left[\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \right. \\ &\left. \left. + \|\varsigma_j - \varsigma_j^{hk}\|_{L_0} + \|\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_j^{hk}\|_Y + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0} \right] \right). \end{aligned} \quad (4.109)$$

Ensuite, nous avons lié $\|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}$ avec $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}$, On a donc finalement l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{V}}^2 + c \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h} - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}))_{Q^\ell} \\ + c \left(\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\zeta_j - \zeta_j^{hk}\|_{L_0} + \|\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_j^{hk}\|_Y + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0} + k^2 \right). \end{array} \right. \quad (4.110)$$

Ces inégalités seront utilisées dans l'analyse numérique des problèmes de contact pour les matériaux thermo-électro-viscoélastiques.

Troisièmement, nous procédons maintenant à l'estimation des erreurs numériques sur champ des déplacements. Nous récrivons l'équation variationnelle. (4.42) au temps $t = t_n$ pour $\mathbf{v} = \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$ et on le soustrait à (4.97) pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\ell,h}))_{Q^\ell} = -(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h)_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} - j_{ad}(\zeta_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h) \\ + j_{ad}(\zeta_n^{hk}, \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j_{\nu c}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h) + j_{\nu c}(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h), \end{array} \right.$$

l'estimation suivante pour le champ déplacement est obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + 2 \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c \sum_{j=1}^n k \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}\|_H^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\zeta_j - \zeta_j^{hk}\|_Z^2 + \sum_{l=1}^j k \|\mathbf{w}_l - \mathbf{w}_l^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} k (\|\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}\|_Q^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\zeta_j - \zeta_j^{hk}\|_{L_0} + \|\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_j^{hk}\|_Y + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0} + k^2 \right) \\ + c \left(\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|u\|_{H^2(0;T;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}} + \|u_0 - u_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right). \end{array} \right. \quad (4.111)$$

Quatrièmement, On utilise (4.43) au temps $t = t_n$ avec le choix $\varsigma = \varsigma_n^{hk}$, et en l'ajoutant à (4.99) avec $\varsigma = \varsigma^h$, après quelques calculs algébriques manipulations (voir [10]) pour les détails), l'estimation suivante pour le champ d'endommagement est obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varsigma_n - \varsigma_n^{hk}\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\varsigma_j - \varsigma_j^{hk})\|_{L_0}^2 \leq C \left(\|\varsigma_0 - \varsigma_0^h\|_{L_0}^2 + \|\varsigma_1 - w_1^h\|_{L_0}^2 + \|u_0 - u_0^h\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + k^2 (\|w\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\dot{\varsigma}\|_{L_0}^2) + k \sum_{j=1}^n \|\delta\varsigma_j - \dot{\varsigma}_j\|_{L_0}^2 + \|\varsigma_n - \omega_n^h\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^{n-1} \|w_j - w_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. + k \sum_{j=1}^n \|(\phi(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j) - (\mathcal{E})^*\nabla\xi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \varsigma_j, \mathbf{k}_j, \tau_j) - \delta\varsigma_j + \kappa\Delta\varsigma_j)\|_{L_0} \|\varsigma_j - \omega_j^h\|_{L_0} \right. \\ \left. + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 + k^{-1} \sum_{j=1}^n \|(\varsigma_{j+1} - \omega_{j+1}^h) - (\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\varsigma_j - \varsigma_j^{hk}\|_{L_0}^2 \right). \end{array} \right. \quad (4.112)$$

Cinquèmement, Nous procédons maintenant à l'obtention d'une estimation d'erreur pour le champ de température. Par conséquent, nous réécrivons(4.44) au temps $t = t_n$ pour $\varphi = \varphi^h \in L_1^h \subset L_1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(\tau_n, \varphi^h) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \mathcal{A}^\ell\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\xi_n^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell), \varsigma_n^\ell, \mathbf{k}_n^\ell, \tau_n^\ell), \varphi^{\ell,h} \right)_{L_0^\ell} \\ \left. + \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_n^\ell - \chi_n^\ell, \varphi^{\ell,h})_{L_0^\ell} \quad \forall \varphi^h \in L_1^h. \end{array} \right. \quad (4.113)$$

En soustrayant (4.101) de (4.113), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_n - \delta\tau_n^{\ell,hk}, \varphi^{\ell,h})_{L_0^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\chi_n - \chi_n^{\ell,hk}, \varphi^{\ell,h})_{L_0^\ell} - a_0(\tau_n - \tau_n^{hk}, \varphi^h) \\ \left. + \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell((\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}) - \mathcal{A}^\ell\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \right. \right. \\ \left. \left. (\varsigma_n^\ell - \varsigma_n^{\ell,hk}), (\mathbf{k}_n^\ell - \mathbf{k}_n^{\ell,hk}), (\tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk}), \varphi^{\ell,h} \right)_{L_0^\ell} = 0 \quad \forall \varphi^h \in L_1^h, \end{array} \right. \quad (4.114)$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_n - \delta\tau_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk})_{L_0^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\chi_n - \chi_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk})_{L_0^\ell} - a_0(\tau_n - \tau_n^{hk}, \tau_n - \tau_n^{hk}) \\ \left. + \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell((\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}) - \mathcal{A}^\ell\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), \right. \right. \\ \left. \left. (\varsigma_n^\ell - \varsigma_n^{\ell,hk}), (\mathbf{k}_n^\ell - \mathbf{k}_n^{\ell,hk}), (\tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk}), \tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk} \right)_{L_0^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_n - \delta\tau_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \varphi_n^{\ell,h})_{L_0^\ell} \right. \\ \left. - \sum_{\ell=1}^2 (\chi_n - \chi_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \varphi_n^{\ell,h})_{L_0^\ell} - a_0(\tau_n - \tau_n^{hk}, \tau_n - \varphi_n^h) + \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell((\boldsymbol{\sigma}_n^\ell - \boldsymbol{\sigma}_n^{\ell,hk}) \right. \right. \\ \left. \left. - \mathcal{A}^\ell\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^\ell - \mathbf{w}_n^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla(\xi_n^\ell - \xi_n^{\ell,hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^\ell - \mathbf{u}_n^{\ell,hk}), (\varsigma_n^\ell - \varsigma_n^{\ell,hk}), \right. \right. \\ \left. \left. (\mathbf{k}_n^\ell - \mathbf{k}_n^{\ell,hk}), (\tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk}), \tau_n^\ell - \varphi_n^{\ell,h} \right)_{L_0^\ell}. \end{array} \right.$$

Après de simples manipulations algébriques, en utilisant (4.105) et H(4.7) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\delta\tau_n - \delta\tau_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk})_{L_0^\ell} + \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0} \leq c \left(\|\dot{\tau}_n - \delta\tau_n\|_{L_0} + \|\tau_n - \varphi_n^h\|_{L_0} \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}} + \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varsigma_n - \varsigma_n^{hk}\|_{E_1} \right. \\ \left. + \|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^{hk}\|_Y + \sum_{\ell=1}^2 (\delta\tau_n - \delta\tau_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \varphi_n^{\ell,h})_{L_0^\ell} \right), \end{array} \right.$$

où $\delta\tau_n = (\tau_n - \tau_{n-1})/k$. Puisque

$$\sum_{\ell=1}^2 (\delta\tau_n - \delta\tau_n^{\ell,hk}, \tau_n^\ell - \tau_n^{\ell,hk})_{L_0^\ell} \geq \frac{1}{k} \left[\|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 - \|\tau_{n-1} - \tau_{n-1}^{hk}\|_{L_0}^2 \right],$$

il s'ensuit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 \leq ck \left(\sum_{j=1}^n (\|\dot{\tau}_j - \delta\tau_j\|_{L_0}^2 + \|\tau_j - \varphi_j^h\|_{L_0}^2) \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\xi_j - \xi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varsigma_j - \varsigma_j^{hk}\|_{E_1} + \|\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_j^{hk}\|_Y \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^2 (\delta\tau_j - \delta\tau_j^{\ell,hk}, \tau_j^\ell - \varphi_j^{\ell,h})_{L_0^\ell} \right) + c \|\tau_0 - \tau_0^h\|_{L_0}^2, \end{array} \right. \quad (4.115)$$

pour tout $\{\varphi_n^h\}_{n=1}^N \subset L_1^h$ Maintenant, notons que (voir [30] pour plus de détails)

$$\left\{ \begin{array}{l} k \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^2 (\delta\tau_j - \delta\tau_j^{\ell,hk}, \tau_j^\ell - \tau_j^{\ell,hk})_{L_0^\ell} \leq c \left(\aleph \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 + \|\tau_n - \varphi_n^h\|_{L_0}^2 + \|\tau_0 - \tau_0^h\|_{L_0}^2 \right. \\ \left. + \|\tau_1 - \varphi_1^h\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^{n-1} \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|\tau_j - \varphi_j^h - (\tau_{j-1} - \varphi_{j-1}^h)\|_{L_0}^2 \right), \end{array} \right.$$

où $\aleph > 0$ est suffisamment petit. En utilisant ceci dans (4.115) nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 \leq c \left(\|\tau_n - \varphi_n^h\|_{L_0}^2 + \|\tau_0 - \tau_0^h\|_{L_0}^2 + \|\tau_1 - \varphi_1^h\|_{L_0}^2 \right. \\ \left. + k \sum_{j=1}^n \left[\|\dot{\tau}_j - \delta\tau_j\|_{L_0}^2 + \|\tau_j - \varphi_j^h\|_{L_0}^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \|\tau_{j-1} - \tau_{j-1}^{hk}\|_{L_0}^2 + \|\xi_j - \xi_j^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varsigma_j - \varsigma_j^{hk}\|_{E_1} + \|\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_j^{hk}\|_Y \right] \right. \\ \left. + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|\tau_j - \varphi_j^h - (\tau_{j-1} - \varphi_{j-1}^h)\|_{L_0}^2 \right). \end{array} \right. \quad (4.116)$$

Sixièmement, On fait l'estimation d'erreur pour le champ de variable interne d'état,

on a

$$\delta\mathbf{k}_n = (\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n-1})/k.$$

Rappelons que

$$\delta\mathbf{k}_n^{\ell,hk} = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{(n-1)}^{\ell,hk} - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_{(n-1)}^{\ell,hk})) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_{(n-1)}^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{(n-1)}^{\ell,hk}), \varsigma_{(n-1)}^{\ell,hk}, \mathbf{k}_{(n-1)}^{\ell,hk}, \tau_{(n-1)}^{\ell,hk}),$$

en soustrayant (4.102), on obtient

$$\|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^{hk}\|_Y^2 \leq c \left(\|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_0^h\|_Y^2 + \sum_{j=1}^n k (\|\mathbf{k}_{j-1} - \mathbf{k}_{j-1}^{hk}\|_Y^2 + U_n) \right), \quad (4.117)$$

où

$$\begin{aligned} U_n = & \int_0^{t_n} \left(\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{(n-1)}^{\ell,hk}) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_{(n-1)}^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_{(n-1)}^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{(n-1)}^{\ell,hk}), \zeta_{(n-1)}^{\ell,hk}, \mathbf{k}_{(n-1)}^{\ell,hk}, \tau_{(n-1)}^{\ell,hk} \right) (s) ds \\ & + \sum_{j=1}^n k \left(\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}_{(j-1)}^{\ell,hk}) - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_{(j-1)}^{\ell,hk}) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_{(j-1)}^{\ell,hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{(j-1)}^{\ell,hk}), \zeta_{(j-1)}^{\ell,hk}, \mathbf{k}_{(j-1)}^{\ell,hk}, \tau_{(j-1)}^{\ell,hk} \right). \end{aligned}$$

D'après le Théorème (4.3.1), nous avons $\mathbf{u} \in H^2(0, T; \mathbf{V})$ et de plus, on peut trouver simplement

$$U_n \leq k \left(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, T; \mathbf{V})} + \|\mathbf{k}\|_{W^{1,2}(0, T; \mathbf{Y})} \right).$$

Finalement, on fait l'estimation d'erreur pour le champ d'adhésion, on a

$$\delta \zeta_n = (\zeta_n - \zeta_{n-1})/k.$$

Rappelons que

$$\delta \zeta_n^{hk} = \sum_{j=1}^n k \left(H_{ad}(\zeta_{j-1}^{hk}, R_\nu(u_{(j-1)\nu}^{1,hk} + u_{(j-1)\nu}^{2,hk}), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{(j-1)\tau}^{1,hk} - \mathbf{u}_{\tau(j-1)}^{2,hk})) \right),$$

en soustrayant (4.102), on obtient

$$\|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \left(\|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \sum_{j=1}^n k (\|\zeta_{j-1} - \zeta_{j-1}^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + d_n) \right), \quad (4.118)$$

où

$$\begin{aligned} d_n = & \int_0^{t_n} \left(H_{ad}(\zeta(s), R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2))(s), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2)(s) \right) ds \\ & - \sum_{j=1}^n k \left(H_{ad}(\zeta_{j-1}^{hk}, R_\nu(u_{(j-1)\nu}^{1,hk} + u_{(j-1)\nu}^{2,hk}), \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{(j-1)\tau}^{1,hk} - \mathbf{u}_{\tau(j-1)}^{2,hk})) \right). \end{aligned}$$

D'après le Théorème (4.3.1), nous avons $\mathbf{u} \in H^2(0, T; \mathbf{V})$ et de plus, on peut trouver simplement

$$d_n \leq k \left(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, T; \mathbf{V})} + \|\zeta\|_{C^1(0, T; L^2(\Gamma_3))} \right).$$

Alors, combinant (4.109), (4.111), (4.112), (4.116), (4.117) et (4.118) nous trouvons

$$\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2 + \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q^2 + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^0}^2 + \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L^0}^2 + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^{hk}\|_Y^2 + k \sum_{j=1}^N \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_V^2 + \|\nabla(\varsigma_j - \varsigma_j^{hk})\|_{L_0}^2 + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 \right) \\
 & \leq c \left(\begin{aligned}
 & \|\xi_n - \phi_n^h\|_W^2 + k \sum_{j=1}^N \left(\|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_V^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2 \right) + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_V^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 \\
 & + \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^h\|_V^2 + \|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \sum_{j=1}^n k \|\zeta_{j-1} - \zeta_{j-1}^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + d_n + \|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_0^h\|_Y^2 + \\
 & \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{k}_{j-1} - \mathbf{k}_{j-1}^{hk}\|_Y^2 + U_n + \|\tau_n - \varphi_n^h\|_{L_0}^2 + \|\tau_0 - \tau_0^h\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \left[\|\dot{\tau}_j - \delta \tau_j\|_{L_0}^2 \right. \\
 & \left. + \|\tau_j - \varphi_j^h\|_{L_0}^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_V^2 + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 + \|\tau_j - \tau_{j-1}\|_{L_0}^2 \right] \\
 & + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|\tau_j - \varphi_j^h - (\tau_{j-1} - \varphi_{j-1}^h)\|_{L_0}^2 + k^2 + \frac{1}{k} \sum_{N-1}^N \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_V^2 \\
 & + \|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_{L_0}^2 + \|\zeta_1 - \omega_1^h\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\delta \varsigma_j - \dot{\varsigma}_j\|_{L_0}^2 + k(\|\mathbf{w}\|_V^2 + \|\varsigma\|_{L_0}^2) + \|\zeta_n - \omega_n^h\|_{L_0}^2 \\
 & + k \sum_{j=1}^n \|(\phi(\boldsymbol{\sigma}_j - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_j)) - (\mathcal{E})^* \nabla \xi_j, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \varsigma_j, \mathbf{k}_j, \tau_j) - \delta \varsigma_j + \kappa \Delta \varsigma_j\|_{L_0} \|\varsigma_j - \omega_j^h\|_{L_0} \\
 & + k \sum_{j=1}^n \|\nabla(\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 + k^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|(\varsigma_{j+1} - \omega_{j+1}^h) - (\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 + \|\tau_1 - \varphi_1^h\|_{L_0}^2 \\
 & + k \sum_{j=1}^n \|\varsigma_j - \varsigma_j^{hk}\|_{L_0}^2 + k \sum_{j=1}^n \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_V^2
 \end{aligned} \right). \tag{4.119}
 \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant une version de l'inégalité de Gronwall (voir [12]) pour plus de détails, alors nous obtenons (4.104). \blacksquare

Nous remarquons que les estimations d'erreur ci-dessus sont à la base de l'analyse du taux de convergence de l'algorithme. Ainsi, soit Ω^ℓ un domaine polyédrique et notons \mathfrak{S}^h une triangulation de Ω^ℓ compatible avec la partition du bord $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$ en Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ et Γ_3 d'une part, et en Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , d'autre part. Soit $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$, $Q_h(\Omega^\ell)$, $W_h(\Omega^\ell)$, E_1^h , E_h , Y_h et Z_h consistent en des fonctions continues et affines par morceaux; C'est,

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \{\mathbf{v}_h^\ell [C(\bar{\Omega}^\ell)]^d; \mathbf{v}_h^\ell|_{Tr} \in [P_1(Tr)]^d, \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_1^\ell} \equiv 0\}, \\
 & Q^h(\Omega^\ell) = \{\boldsymbol{\tau}^\ell \in Q^\alpha; \boldsymbol{\tau}_{|Tr}^{\ell,h} \in [P_1(Tr)]^{d \times d}, \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell\}, \\
 & W_h(\Omega^\ell) = \{\xi_h^\ell C(\bar{\Omega}^\ell); \xi_h^\ell|_{Tr} \in P_1(Tr), \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \xi_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\}, \\
 & L_1^h(\Omega^\ell) = \{\zeta_h^\ell C(\bar{\Omega}^\ell); \zeta_h^\ell|_{Tr} \in P_1(Tr), \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \zeta_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\}, \\
 & L_1^h(\Omega^\ell) = \{\tau_h^\ell C(\bar{\Omega}^\ell); \tau_h^\ell|_{Tr} \in P_1(Tr), \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \tau_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\}, \\
 & Y_h(\Omega^\ell) = \{\mathbf{k}_h^\ell C(\bar{\Omega}^\ell); \mathbf{k}_h^\ell|_{Tr} \in P_1(Tr), \forall Tr \in \mathfrak{S}_h^\ell; \mathbf{k}_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} \equiv 0\}, \\
 & Z_h^\ell = \{\zeta_h^\ell C(\bar{\Gamma}_3); \zeta_h^\ell|_{x_i^\ell, x_{i-1}^\ell} \in P_1(]x_i^\ell, x_{i-1}^\ell]), \forall i = 0, \dots, N^\ell - 1\},
 \end{aligned} \right.$$

où $P_1(Tr)$ représente l'espace des polynômes de degré global inférieur ou égal à un dans Tr .

Supposons que les conditions initiales discrets $\mathbf{u}_0^h, \mathbf{w}_0^h, \zeta_0^h, \mathbf{k}_0^h$ et τu_0 sont obtenus par

$$\mathbf{u}_0^h = \Pi^h \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w}_0^h = \Pi^h \mathbf{w}_0, \quad \zeta_0^h = \Pi^h \zeta_0, \quad \mathbf{k}_0^h = \Pi^h \mathbf{k}_0, \quad \tau_0^h = \Pi^h \tau_0, \quad (4.120)$$

où $\Pi^h = (\pi^h)_{i=1}^d : [C(\bar{\Omega}^\ell)]^d \longrightarrow \mathbf{V}^h$ et π^h sont l'opérateur standard d'interpolation par élément fini (voir, par exemple, [12]).

Alors, on a le corollaire suivant qui énonce la linéaire convergence de l'algorithme dans des conditions de régularité convenables.

Corollaire 4.4.1 *Soit les hypothèses du théorème 3.3.1. Soit $(\mathbf{w}, \xi, \varsigma, \zeta, \mathbf{k}, \tau)$ et $(\mathbf{w}^{hk}, \xi^{hk}, \varsigma^{hk}, \zeta^{hk}, \mathbf{k}^{hk}, \tau^{hk})$ désignent respectivement les solutions aux problèmes $\mathcal{P}_{V,2}$ et $\mathcal{P}_{V,2}^{hk}$, et soit les conditions initiales discrètes données par (4.120). Sous les conditions de régularité suivantes :*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d) \cap H^3(0, T; \mathbf{V}), \quad \xi \in C(0, T; H^2(\Omega)), \quad \sigma \in C(0, T; H^1(\Omega)^{d \times d}).$$

$$\varsigma \in C^1(0, T; H^2(\Omega)), \quad \tau \in C(0, T; H^2(\Omega)), \quad \mathbf{k} \in C^1(0, T; H^2(\Omega)), \quad \zeta \in C^1(0, T; H^2(\Gamma_3)).$$

La convergence linéaire de l'algorithme est atteinte; que s'il existe une constante positive $c > 0$, indépendante des paramètres de discrétisation h et k , tels que

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\xi_n - \xi_n^{hk}\|_W^2 + \|\varsigma_n - \varsigma_n^{hk}\|_{L_0}^2 + \|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^{hk}\|_Y^2 + \|\tau_n - \tau_n^{hk}\|_{L_0}^2 \right. \\ & \left. + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right\} + \left(k \sum_{j=1}^N \left(\|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\tau_j - \tau_j^{hk}\|_{L_0}^2 + \|\nabla(\varsigma_j - \varsigma_j^{hk})\|_{L_0}^2 \right) \right)^{1/2} \leq c(h+k). \end{aligned} \quad (4.121)$$

Démonstration. Nous avons les propriétés suivantes des espaces des éléments finit $\mathbf{V}, \mathcal{W}^h, L_1^h, Y^h$ et Z^h (voir [12]),

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\phi_n^h \in \mathcal{W}^h} \|\xi_n - \phi_n^h\|_W \leq ch \|\xi\|_{C(0, T; H^2(\Omega))},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}_n^h \in \mathbf{V}^h} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d)},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}_n^h \in \mathbf{V}^h} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_{\mathbf{V}} \leq ch \|\mathbf{w}\|_{C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d)},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\varsigma_n^h \in L_1^h} \|\varsigma_n - \varsigma_n^h\|_{L_0} \leq ch^2 \|\varsigma\|_{C^1(0, T; H^2(\Omega))},$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\zeta_n^h \in Z^h} \|\zeta_n - \zeta_n^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq ch \|\zeta\|_{C^1(0, T; H^2(\Gamma_3))},$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{k}_n^h \in Y^h} \|\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_n^h\|_Y &\leq ch \|\mathbf{k}\|_{C^1(0,T;H^2(\Omega))}, \\ \max_{1 \leq n \leq N} \inf_{\tau_n^h \in L_1^h} \|\tau_n - \tau_n^h\|_{L_0} &\leq ch \|\tau\|_{C(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

De plus, à partir de la définition de l'interpolation par élément finit l'opérateur Π^h il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_{\mathbf{V}} &\leq ch \|\mathbf{u}\|_{C^1(0,T;[H^2(\Omega)]^d)}, \\ \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^h\|_{\mathbf{V}} &\leq ch \|\mathbf{u}\|_{C^1(0,T;[H^2(\Omega)]^d)}, \\ \|\varsigma_0 - \varsigma_0^h\|_{L_0} &\leq ch \|\varsigma\|_{C^1(0,T;H^1(\Omega))}, \\ \|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_Z &\leq ch \|\zeta\|_{C^1(0,T;H^2(\Gamma_3))}, \\ \|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_0^h\|_Y &\leq ch \|\mathbf{k}\|_{C^1(0,T;H^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N k \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^3(0,T;\mathbf{V})}^2, \\ \sum_{j=1}^N k \|\delta \varsigma_j - \dot{\varsigma}_j\|_{L_0}^2 &\leq k^2 \|\ddot{\varsigma}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2, \\ \sum_{j=1}^N k \|\dot{\tau}_j - \delta \tau_j\|_{L_0}^2 &\leq ck^2 \|\dot{\tau}\|_{C(0,T;H^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

On trouve que (voir [30] pour plus de détails)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;\mathbf{V})}^2, \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|(\varsigma_{j+1} - \omega_{j+1}^h) - (\varsigma_j - \omega_j^h)\|_{L_0}^2 &\leq ch^2 \|\dot{\varsigma}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2, \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n-1} \|\tau_j - \varphi_j^h - (\tau_{j-1} - \varphi_{j-1}^h)\|_{L_0}^2 &\leq ch^2 \|\dot{\tau}\|_{C(0,T;H^2(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

en combinant les dernières estimations, (4.106), (4.112), (4.116), (4.117), (4.118) et (4.119), on déduit (4.121). ■

Conclusion générale

Dans cette thèse, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de quatre problèmes aux limites de contact en mécanique ou électromécanique (piézoélectricité), le premier problème est un problème électro mécanique de contact avec endommagement entre deux corps piézoélectriques élasto viscoplastique et une base, le deuxième problème est un problème électromécanique de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec variable d'état interne et une base.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ces problèmes. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités ; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnel est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, équation différentielle et point fixe.

Nous avons étudié aussi l'approche numérique des problèmes précédents, en utilisant un schéma d'éléments finis avec une discrétisation spatiale et temporelle.

général Summary

In this thesis, we have studied the existence and the uniqueness of the solution of four problems at the contact limits in mechanics or electromechanics (piezoelectricity), the first problem is an electromechanical problem of contact with damage between two piezoelectric elasto-viscoplastic bodies and a base, the second problem is an electromechanical problem of contact with adhesion and damage between two thermo-electro-viscoelastic bodies with internal state variable and a base.

Green's formula was used to obtain the variational formulation of these problems. As the boundary of the bodies and the data of the problems have good regularities ; therefore, the solution of the mechanical problem and the variational problem is the same.

We have shown the existence and the uniqueness of the solution of the previous problems by the use of the following arguments : variational equation depending on time, variational equation of evolution, differential equation and fixed point.

We have also studied the numerical approach to the previous problems, using a finite element scheme with spatial and temporal discretization.

Bibliographie

- [1] K.T. Andrews, K.L. Kuttler, M. Rochdi, M. Shillor. One-dimensional dynamic thermoviscoelastic contact with damage. *J Math Anal Appl.* **272** (2002), 249–275
- [2] R.C. Batra, J.S. Yang. Saint-Venant’s principle in linear piezoelectricity. *J. of Elasticity.* **38** (1995), 209–218.
- [3] M. Barboteu, M. Sofonea, Analysis and numerical approach of a piezoelectric contact problem. *Ann.Aca.Rom.Sci*, **1**(2009), 7–30.
- [4] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran. Nonlinear finite elements for continua and structures. Wiley, (2000).
- [5] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri. The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in *Contact Mechanics*. J.A.C. Martins and Manuel D.P.Monteiro Marques (Eds), Dordrecht. (2002), 347–354.
- [6] S. Boutechbak, A dynamic problem of frictionless contact for elastic-thermoviscoplastic materials with damage. *Int. J. Pure Appl. Math.* **86** (2013), 173–197.
- [7] H. Brezis. *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité.* Annale de l’Institut Fourier, Tome **18** (1968).
- [8] D.S. Chandrasekharian. A generalized linear thermoelasticity theory of piezoelectric media. *Acta Mech.* **71** (1988), 39–49.
- [9] D.S. Chandrasekhariah. Temperature rate dependent theory of piezoelectricity, *J. Thermal Stresses.* **7** (1984), 293–306.
- [10] O. Chau, J.R. Fernández, W. Han, M. Sofonea. A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance and damage. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **191** (2002), 5007–5026.

-
- [11] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shollor, M. Sofonea. Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion. *J. Comp. App. Math.* **159** (2003), 431–465.
- [12] P.G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, in : P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. II, North Hollan. (1991), 17–352.
- [13] P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.). Basic Error Estimates for Elliptic Problem. in :P.G. Ciarlet, J.L.Lions (Eds., *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. II, North Holland. (1991), 17–352.
- [14] N. Cristescu, I.Suliciu, Viscoplasticity. Rev. transl. from the Roumanian. *Editura Technica* **307**(1982).
- [15] H. L. Dai, X. Wang. Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures. *Inter. J. Sol. Struct.* **42** (2005),1151–1171.
- [16] S. Drabla, M. Rochdi, M. Sofonea, A frictionless contact prolem for elastic-viscoelastic materials with internal state variables. *Math.Comput.Modelling.* **26**(1997), 31–47.
- [17] G. Duvaut, J. L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod. (1976).
- [18] A. Ern, J-L. Guermon. *Éléments finis : théorie, applications, mise en ouvre*, Springer. (2002).
- [19] M. Frémond. Equilibre des structures qui adhèrent à leur support. *C.R. Acad. Sci. Paris. Série II.* **295** (1982), 913–916.
- [20] M. Frémond, K. L. Kuttler, M. Shillor, Existence and uniqueness of solutions for a one-dimensinal damage mode. *J.Math.Anal.Appl.* **271** (1999), 271–294.
- [21] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor. One-dimensional models of damage. *Adv. Math. Sci. Appl.* **8**(1998), 541–570.
- [22] M. Frémond, B. Nedjar. Damage in concrete : the unilateral phenomenon. *Nuclear Engng. Design.* **156** (1995), 323–335.
- [23] M. Frémond, B. Nedja. Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work. *Int. J. Solids Structures.* **33** (8) (1996), 1083–1103.
-

-
- [24] J. R. Fernández-García, M. Sofonea, J. M. Viano. A Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials with Normal Compliance. *Numerische Mathematik*. **90** (2002), 689–719.
- [25] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane. Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies. *Stud. Univ. Babe, S-Bolyai Math.* **57** 3 (2012), 427-444.
- [26] T. Hadj Ammar, S. Drabla, B. Benederrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion. *Georgian Math. J.* **44** (2014), 1–15.
- [27] W. Han, M. Sofonea. Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. **38** (2000), 556–579.
- [28] W. Han, M. Sofonea. Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials. *Comp.Meth.Appl. Mech. Engng.* **190** (2000), 179-191.
- [29] W. Han, M. Sofonea. Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, *Studies in Advanced Mathematics 30*, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville. MA (2002).
- [30] W. Han, M. Shillor, M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage. *J.Comput.Appl.Math.* **137** (2001), 377–398.
- [31] M.I. Idiart, H. Moulinec, P.Ponte. Castañeda, P. Suquet. Macroscopic behavior and field fluctuations in viscoplastic composites : second-order estimates versus full-field simulations. *J.Mech.Phys.Solids.* **5** (2006), 1029–1063.
- [32] T. Ikeda. *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press. (1990).
- [33] O. Kavian, *Introduction a la th'eorie des points critiques et Applications aux équations elliptiques*. Springer, erlag. (1993).
- [34] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor. Frictional contact problems with normal compliance. *Int.J.Engng. Sci.* **26** (1988), 811-832.
- [35] Z. Lerguet, M. shillor, M. Sofonea. A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body. *Electronic Journal of Diferential Equations*. **170** (2007), 1–16.
-

- [36] F. Maceri, P. Bisegna. The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support. *Math. Comp. Modelling.* **28** (1998), 19–28.
- [37] L. Maiza, T.Hadj Amar, M. Said ameur. A Dynamic Contact Problem for Elasto-Viscoplastic Piezoelectric Materials with Normal Compliance, Normal Damped and Damage. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* **3**(2021), 280-302.
- [38] L. Maiza, T. Hadj Amar, M.L. Gossa. A Dynamic Contact problem for Thermo-Electro-Visoplastic Materials with Damage and internal State Variable. *Surveys in Mathematics and its Applications.* **17**(2022), 241-267.
- [39] R. D. Mindlin. Polarisation gradient in elastic dielectrics. *Int.J.Solids Structures.* **4** (1968) 637–663.
- [40] R.D. Mindlin, Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics. *Journal Of Elasticity.* **4** (1972), 217–280.
- [41] R.D. Mindlin, On the equations of motion of piezoelectric crystals, in : *Problems of Continuum Mechanics.* SIAM,Philadelphia, N.I. Muskhelishvili Birthday. **70** (1961), 282–290.
- [42] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [43] W. Nowacki. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *J.Thermal Stresses.* **1** (1978), 171–182.
- [44] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea. Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction. *Journal of Elasticity.* **51**(1982), 105–126.
- [45] J.N. Sharma, M. Pal. Propagation of Lamb waves in a transversely isotropic piezothermoelastic plate. *J.Sound Vibration.* **270** (2004), 587–610.
- [46] J.N. Sharma, M. Pal, D. Chand. Three dimensional vibrational analysis of a piezothermoelastic cylindrical panel. *Int.J Eng.Sci.* **42** (2004), 1655–1673.
- [47] J.N. Sharma, V. Walia. Straight and circular crested waves in generalized piezothermoelastic materials. *J.Thermal Stresses,* **29** (2006), 529–551.
- [48] M. Shillor, M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction., *Internat.J.Engng. Sci.* **38**(2000), 1517–1533.

- [49] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega. Models and Analysis of Quasistatic Contact. Lecture Notes in Physics **655**, Springer-Berlin. (2004).
- [50] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor. Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage. Pure and Applied Mathematics. **276**, Chapman, Hall/CRC Press, New York. (2006).
- [51] M. Sofonea, El H. Essoufi. A Piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction. Mathematical Modelling and Analysis. **9** (2004), 229–242.
- [52] M. Sofonea, El H. Essoufi. Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body. Adv.Math.Sci.Appl. **14** (2004), 613–631.
- [53] N. Stromberg, L. Johansson, A. Klarbring. Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear. Int.J.Solids Structures. **33** (1996), 1817–1836.
- [54] J.S. Yang, R.C. Batra. Free vibrations of a linear thermo-piezoelectric body. J.Thermal Stresses. **18** (1995), 247–262.
- [55] O.C. Zienkiewicz. The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill. (1989).

Résumé: L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes en mécanique de Contact pour des lois constitutive Piézoélectrique élasto-viscoplastique et thermo-électro-Viscoélastiques. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. La thèse est structurée en trois parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans la thèse. La deuxième partie est destinée à l'étude Problème de Contact entre deux corps Piézoélectrique élasto-viscoplastique avec endommagement. La troisième partie est dédiée à l'analyse problème de Contact entre deux corps thermo-électro-Viscoélastiques avec adhésion, endommagement et variable d'état interne. Nous étudions aussi l'approche numérique de deux problèmes, en utilisant un schéma d'éléments finis avec une discrétisation implicite en temps.

Mots-Clés : Adhésion, Compliance normale, Contact unilatéral, Élastiques, Electro-élastiques, Electro-élasto-viscoplastiques, Éléments finis, Point fixe, Inéquation d'évolution.

Etude Théoriques et Numériques de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables avec Adhésion et Endommagement

Abstract: The purpose of this work is the study of some problems In Contact Mechanics for Piezoelectric elasto-viscoplastic and thermo-electro-Viscoelastic constitutive laws. The results obtained concern the existence and the uniqueness of a weak solution for the studied problems. The thesis is structured in three parts. The first part is devoted to recall different mechanical models of contact, studied as well as some mathematical tools necessary in the thesis. The second part is intended for the study Contact problem between two elasto-viscoplastic Piezoelectric bodies with damage. The third part is dedicated to the problem analysis of Contact between two thermo-electro-Viscoelastic bodies with adhesion, damage and internal state variable. We also carry out the numerical approach of tow problems by using a finite element scheme with an implicit time discretization.

Key-words : Adherence, Normal compliance, Unilateral contact, Elastic, Electro-elastic, Electroelastic- viscoplastic, Finite elements, Fixed point, Inequality of evolution.

الدراسة النظرية و العددية لعدة مسائل للتماس بين أجسام قابلة للتشوه مع الالتصاق و التلف

المخلص: هدف هذه الأطروحة هو دراسة بعض المشاكل في ميكانيكا التلامس للقوانين التأسيسية كهروا ضغطية فيسكوبلاستيك والحرارية الكهربائية اللزجة. تتعلق النتائج المتحصل عليها بوجود وتفرد حل ضعيف للمشكلات المدروسة. تتكون الأطروحة من ثلاثة أجزاء. الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية المدروسة و كذلك بعض الوسائل الرياضية اللازمة في الأطروحة. الجزء الثاني مخصص لدراسة مشكلة التلامس بين جسمين كهربائيين الانضغاطيين مع تلف. الجزء الثالث مخصص لتحليل مشكلة التلامس بين جسمين حراريين كهربائيين – مرنين مع الالتصاق والتلف ومتغير الحالة الداخلية. ندرس كذلك التقريب العددي لمسائلتين باستعمال طريقة العناصر المنتهية مع تقييم الخطأ .

الكلمات المفتاحية: الالتصاق , توافق ناظمي , تماس وحيد الجانب, مرونة, كهرومرونة, كهرومرونة- فيسكوبلاستيك , العناصر المنتهية , نقطة ثابتة , متباينة التطور.