République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option **: Probabilités et Statistique**

Par

Bensedira Chahrazad

Titre

Le problème de contrôle optimal de système couplées complètement EDSPR avec risque sensitive performance

Soutenu publiquement,le :20/06/2023

Devant le jury composé de:

.SAOULI Mostapha	MCB.UKM-Ouargla	Président
.BENBRAHIM Radhia	MCB.UKM-Ouargla	Examinateur
.MANSOUL Brahim	MAA.UKM-Ouargla	Rapporteur

Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Ma chère mère et à mon cher père, qui m'ont été aidé et qui m'ont soutenu pendant mes études.

à mes frères : **Taher** et **Djaleleddin** .

à mes sœurs : **Habiba .Roukaya .Noura. Hind . Ikhlass .**

à mes anges : **Maroua .Roufaida .Razan et Nermine**

à mon petit prince : **Aness.**

à mon grand mére : **Yamina**

Et tous le membres de la familles **BEN SEDIRA** et **BOUGGUERRA** petit et grand.

REMERCIEMENTS

$\mathcal{J}$e tiens remercier tout dabord «**Allah**»

qui nous a permis d'atteindre ce moment et d'achever ce travail

$\mathcal{J}$e tiens à remercier mon encadreur **Mr.Mansoul Brahim**.

Pour son précieux conseil et son aide.durant toute la période du travail.

$\mathcal{J}$e remercie également aux membres du Jury **Dr :Saouli Mostapha abdelouahab**.**Dr :Benbrahim Radhia**

qui ont acceptés dévaluer et de juger mon travail

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDS) et les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) sont des outils mathématiques utilisés pour modéliser les phénomènes dynamiques dans lesquels des facteurs aléatoires sont présents. Elles trouvent leur application dans divers domaines tels que la finance, la physique, la biologie et l'économie. L'étude des EDS a été initiée par Kiyoshi- Itô en 1946[9]. Itô a développé la théorie mathématique des intégrales stochastiques, connue aujourd'hui sous le nom d'intégrale d'Itô, qui est essentielle pour la résolution des EDS. Son travail fondateur a jeté les bases des EDS et a permis de développer des outils analytiques et numériques pour étudier ces équations. pendant que Les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont été introduites pour la première fois par Bismut en 1973 [2]. qui a utilisé ces EDSR pour étudier les problèmes de contrôle optimal stochastique. Après en 1978 , Bismut [3] a étendu sa théorie et démontré l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati. Depuis lors, de nombreux auteurs ont considérablement développé la théorie des EDSR parmi ces auteurs, les plus célèbres sont Pardoux et Peng en 1990[16]

Les systèmes d'équations différentielles EDSPR sont des modèles qui combinent à la fois des équations différentielles stochastiques et rétrogrades. Ces systèmes offrent une approche puissante pour modéliser des phénomènes dynamiques complexes où l'incertitude joue un rôle dans les deux directions du temps. Antonilli [1] a été le premier à étudier cette équation et à en donner l'existence et l'unicité lorsque le temps T est suffisamment petit. Ma et al [13] ont donné l'existence et l'unicité pour une classe dans laquelle le coefficient σ du l'EDS n'est pas dégénéré. Y. Hu et al [8] ont étudié l'existence et l'unicité de la solution sous une certaine condition de "monotonie".de σ.

Une application des équations EDSPR est le principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle optimal. La première contribution au problème de contrôle d'un système EDSPR a été faite par Peng [17], qui a étudié le principe du maximum lorsque le domaine de contrôle est convexe. Xu [18] a établi le principe du maximum stochastique dans le cas où le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe.Tant donné que le domaine de contrôle strict n'est pas convexe.

Depuis les travaux initiaux de Jacobson [10], le problème de contrôle stochastique avec risque sensitive a été étudié par de nombreux auteurs. étant donné qu'il peut être appliqué aux jeux différentiels et à la finance mathématique, plusieurs articles ont été consacrés au principe du maximum stochastique. Lim et Zhou [12] ont obtenu un nouveau maximum avec risque sensitive pour les processus de diffusion de Markov, avec une fonction de performance intégrale exponentielle. Djehiche et al [7] ont étendu un principe du maximum stochastique à une classe de problèmes de contrôle de type champ moyen avec risque sensitive . A.Chala, R.Khalout et A. Chala, D. Hafayed and R. Khallout,[4, 5, 6], ont étudié les conditions d'optimalité nécessaires et/ou suffisantes des contrôles lorsque le système est gouverné par une équation différentielle stochastique EDSPR. Un principe maximum stochastique sensible au risque pour des équations différentielles stochastiques EDSPR couplées complètement avec des applications.Et c'est le sujet que nous abordons à travers cette mémoire .

Dans le cas de la performance avec risque sensitive ,On considère le système gouverne par une EDSPR suivante :

$$\begin{cases} dx_t = h\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + g\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dW_t \\ dy_t = -b\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + z_t dW_t \\ x_0 = d \quad , y_T = a \qquad t \in [0, T] \end{cases}$$

où h,g et b sont des fonctions données, d est la donnée initiale,a est la donnée terminale,et $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace probabilité filtrée $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ vérifie les conditions habituelles,un contrôle admissible strict $v = v\left(t\right)$ est un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeurs dans un ensemble U de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble de toutes les contrôles admissible.Le but de contrôle optimal est minimise la fonction de coût J sur $\mathcal{U}$ sous la forme :

$$J^{\theta}(v) = \mathbb{E}\left(\exp\theta\left[\int_0^T f(t, x(t), y(t), z(t), v(t))\, dt + \Phi(x_T^v) + \Psi(y_0^v)\right]\right)$$

L'objectif est détermine le contrôle optimal et dérive les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du système EDSPR sous la forme du principe du maximum stochastique.

Ce mémoire se compose de trois chapitres

Premier chapitre

Dans ce chapitre, on parle de quelques concepts de base du mesure et calcul stochastique on définit le processus stochastique.Filtration.Mouvement Brownien.Intégrale d'Itô . Formule d'Itô ....etc.

Deuxième chapitre :

Dans ce chapitre on présente la formule des équations EDS , EDSR et le système EDSPR , et on étudie la résultat de la théorème d'existence et d'unicité d'une solution pour ces équations .

Troisième chapitre :

Dans le dernier chapitre, on parle sur le problème du contrôle optimal et on dérivie les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un système EDSPR .

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre on donne quelques définitions au calcul stochastique.Pour plus details voir[14, 11]

1.1 Tribu

Ω un ensemble non vide.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathcal{F}$une famille de partie de Ω , on dit que $\mathcal{F}$ est tribu s'elle vérifie les conditions suivantes :*

1-$\phi \in \mathcal{F}$ $\quad$ (ϕ est l'ensemble vide) .

2-$\forall A \in \mathcal{F} \iff A^c \in \mathcal{F}$.

3-$\forall n \in N^*$ et $A_n \in \mathcal{F} \iff U_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle espace mesurable.

Définition 1.1.2 ***Sous- tribu*** *.On dit que G est un sous- tribu de $\mathcal{F}$s'elle vérifie :*

$$\forall B \subset \Omega : \ B \in G \implies B \in \mathcal{F}$$

Définition 1.1.3 ***Tribu engendrée***. *C'est la plus petite tribu contenant A telle que $A \subset \Omega$ notée $\sigma(A)$.*

Définition 1.1.4 ***Tribu borélinne*** *.C'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermés,ou ouverts à droite fermés à gauche) .On la note* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Définition 1.1.5 ***Filtration*** *.Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une famille croissante de sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *c'-à-d*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s : \forall 0 \leq t \leq s$$

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$*satisfait les conditions habituelle si :*

-Elle est continue a droite au sens ou $\mathcal{F}_t = \cap_{s\geq t}\mathcal{F}_s$.

-Les ensembles n'egligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

1.2 Mesurabilité

Définition 1.2.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ξ) *deux espaces mesurables,on dit que* f *une application mesurable definit* $f : \Omega \longrightarrow E$ *s'elle vérifie :*

$$\forall A \in \xi : f^{-1}(A) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \in A\} \in \mathcal{F}$$

Propriété 1.2.1

- Toute fonction continue $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est mesurable.
- Si f et g sont deux fonctions mesurables $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ alors :$f + g$ et $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont des fonctions mesurables.
- Si $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \xi)$ est mesurable et $g : (E, \xi) \longrightarrow \left(\Omega', \mathcal{F}'\right)$ est mesurable alors $f \circ g : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \left(\Omega', \mathcal{F}'\right)$ est mesurable.

1.3 Mesure

Définition 1.3.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable,la mesure sur* Ω *est tout application définit* $\mu : F \to \mathbb{R}_+$ *vérifie*

- $\mu(\phi) = 0$

-*si* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite deux à deux disjoints alors* $\mu\left(U_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est un espace mesuré.*

Propriété 1.3.1 μ *est une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{F})$

-*Si* $\mu(\Omega) \leq \infty$ *on dit que* μ *est une mesure finie.*

-*Si* $\mu(\Omega) = 1$ *alors* μ *est une mesure de probabilité noté* $\mathbb{P}$.*Le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s'appelle espace de probabilité..*

-*L'espace* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *s'appelle espace de probabilité filtré.*

1.4 Variable aléatoire

Soit Ω un ensemble des possibilités d'un experience aléatoire.

Définition 1.4.1 *Soit* X *une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *,on dit que* X *une variable aléatoire s'elle vérifie*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Il y'a deux types de variable aléatoire continue et discrète.

1.4.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.4.2 *Une variable aléatoire* X *définit sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .P_X *la probabilité de* X *sur* $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *écrire sous la forme :*

$$P_X(A) = P\{\omega : X(\omega) \in A\} = P(X \in A), \forall A \in B_{\mathbb{R}}$$

Définition 1.4.3 *L'espérance d'une variable aléatoire* X *est définie par la quantité* $\int_{\Omega} X dP$

que l'on note $E(X)$ *ou* $E_P(X)$, *tel que :*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

- *X est intégrable si* $E(X) < \infty$ *.*
- *si X est une v.a discréte alors* $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x)$.
- *si X est une v.a continue alors* $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$.

1.4.2 L'espérance conditionnelle

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Par rapport à un évènement

Soient B et A deux évènements de $\mathcal{F}$ on a :

$$E(X/B) = \frac{P(X/B)}{P(B)} \quad /P(B) \neq 0$$

Par rapport à une tribu

On définit une variable aléatoire X integrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et Y une sous-tribu de $\mathcal{F}$, donc il existe une unique v.a appelée un espérance conditionnelle de X sachant Y, notée $E(X/Y)$ tel que :

-$E(X/Y)$ est Y -mesurable.

-$\forall B \in Y : \int_B E(X/Y)\, dP = \int_B X(\omega)\, dP.$

Par rapport à une variable aléatoire

Une espérance conditionnelle de v.a X par rapport à Y.comme l'éspérance conditionnelle de X par rapport à la tribu engendré $\sigma(Y)$ .On la note $E(X/Y)$ tel que

- c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable.
- $\forall A \in \sigma(Y) : \int_A E(X/Y)\, dP = \int_A X dP.$

Propriété 1.4.1 *a) Linéarité* $E(\alpha X+\beta Y/Z)=\alpha E(X/Z)+\beta E(Y/Z)$ *telque* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

b) La croissance : si $X \leq Y$ *alors* $E(X/Z) \leq E(Y/Z)$.

c) La positivité :si $X \geq 0$ *alors* $E(X/Z) \geq 0$.

d) $E[E(X/Z)]=E(X)$.

e) Si X *est* $Z-$ *mésurable alors* $E(XY/Z)=XE(Y/Z)$.

f) Si X *est indépandante de* Z *alors* $E(X/Z)=E(X)$.

g) Si $Z \subset G$ *alors* $E[E(X/Z)/G]=E[E(X/G)/Z]=E(X/G)$.

1.5 Processus stochastique

Définition 1.5.1 ***Un processus stochastique*** *est une famille de variable aléatoire* $(X_t, t \in [0,\infty])$ *définie sur le méme espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Remarque 1.5.1 *- Si* t *fixé donc* $X(t,\omega)$ *est une v.a.*

-Si ω *fixé donc* $X(t,\omega)$ *est une trajectoire continue.*

Définition 1.5.2 ***Processus adapte*** *.On dit le processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* $\forall t \in \mathbb{R}$ *: le variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *−mésurable.*

Définition 1.5.3 ***Processus progressivement mésurable.*** *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$*est progressivement mésurable par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* $\forall t \geq 0$ *l'application*

$$[0,t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$$

est mésurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.5.4 ***Processus à accroissement stationnaire et independante*** *Pour* $0 \leq s \leq t$ *les variables alétoires* $X(t)-X(s)$ *sont appelés des accroissements.*

-Si la distribution de la variable aléatoire $X_{t+s} - X_t$ *ne dépend pas de* t *alors le processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est à accroissement stationnaire .*

-Si pour tout suite $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n$ *les variables aléatoires* $X_{t_1} - X_{t_0}$,$X_{t_2} - X_{t_1}$,...,$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes alors le processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est à accroissement indépendants .*

1.6 Martingale

Définition 1.6.1 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale si :*

1- pour tout $t \geq 0$,X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté .*

2- pour tout $t \geq 0$, X_t *est intégrable c-à-d.* $\mathbb{E}\left(|X_t|\right) \leq \infty$.

3- pour tout $0 \leq s \leq t$,$\mathbb{E}\left(X_t/\mathcal{F}_s\right) = X_s$.

-On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un sur martingale si* $\forall s \leq t$,$E\left(X_t/\mathcal{F}_s\right) \leq X_s$.

-On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un sous martingale si* $\forall s \leq t$,$E\left(X_t/\mathcal{F}_s\right) \geq X_s$.

1.7 Mouvement Brownien

Définition 1.7.1 *Mouvement Brownien* (B_t) *est un processus stochastique qui vérifie :*

1. $P\left(B_0 = 0\right) = 1$.

2. $t \rightarrow B_t$ *est continue .*

3. $\forall 0 \leq s \leq t$ *les accroissement* $(B_t - B_s)$ *suit la loi normal centrée de variance* $(t-s)$.

4. $\forall 0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n : B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}), ... \left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ *sont independants.*

1.8 I'intégrale stochastique

Définition 1.8.1 *L'intégrale stochastique est un intégrale sur un processus stochastique sous la forme suivantes :*

$$\int_0^t X_s dB_s,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ *un Mouvement Brownien .*

Propriété 1.8.1 *1. Linéairité* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *et* X, Y *deux processuses stochastiques alors :*

$$\int_0^t (\alpha X_s + \beta Y_s)\, dB_s = \alpha \int_0^t X_s dB_s + \beta \int_0^t Y_s dB_s$$

2.Additivité pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X_s dB_s = \int_s^u X_s dB_s + \int_u^t X_s dB_{s.}$$

.*3. Si* $\int_0^T E\left[X_s^2\right] dB_s < \infty$ *alors* $\forall t \leq T$

$$E\left[\int_0^T X_s dB_s\right] = 0$$

4.Isométrie d'Itô

$$E\left(\int_0^T X(s)\, dB_s\right)^2 = E \int_0^T (X(s))^2\, ds$$

5.Propriété du martingale

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s) dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s) dBs.$$

1.9 Processus d'Itô

Définition 1.9.1 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré et* (B_t) *un MB .On définit un processus d'Itô* $(X_t)_{t\in[0,1]}$*dans* $\mathbb{R}$ *sous la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \delta(s)\, dB_s, \quad \forall t \geq 0 :$$

Ou sous la forme

$$dX_t = b(t)\,dt + \delta(t)\,dB_t$$

Avec

-X_0 est $\mathcal{F}_0$ - mesurable.

-$(b_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté telle que : $\forall t \geq 0 : \int_0^t |b(s)|\,ds < \infty$ p.s.

-$(\delta_t)_{t\geq 0}$un processus adapté telle que : $\forall t \geq 0 : \int_0^t |\delta(s)|^2\,ds < \infty$ p.s.

1.10 Formule d'Itô

Définition 1.10.1 *On définie un processus d'Itô $(X_t)_{t\geq 0}$ sous la forme suivante :*

$$X_t = x_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \delta_s dB_s$$

1.Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors :

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X_s)\,\delta_s^2 ds$$

2. Si f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ * \mathbb{R}$ de classe C^2par rapport à x et de classe C^1 par rapport t alors :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\,d\langle X_s\rangle$$

Avec

$$d\langle X_s\rangle = \langle dX_{s,} dX_s\rangle = \langle b_s ds + \delta_s dB_s, b_s ds + \delta_s dB_s\rangle = \delta_s^2 ds.$$

3. Soient X et Y deux processus d'Itô et f une fonction dans $\mathbb{R}$ de classe C^2

$$\begin{aligned} f\left(X\left(t\right),Y\left(t\right)\right) &= f\left(X\left(0\right),Y\left(0\right)\right)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\left(X_s,Y_s\right)dX_s+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}\left(X_s,Y_s\right)dY_s \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(X_s,Y_s\right)d\langle X_s\rangle+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(X_s,Y_s\right)d\langle Y_s\rangle \\ &+\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(X_s,Y_s\right)d\langle X_s,Y_s\rangle \end{aligned}$$

Proposition 1.10.1 ***Intégration par partie*** *Soit X et Y deux processus d'Itô telle que :*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0+\int_0^t \alpha_s ds+\int_0^t \beta_s dB_s \\ Y_t &= Y_0+\int_0^t \alpha_s^{'} ds+\int_0^t \beta_s^{'} dB_s \end{aligned}$$

Alors

$$X_tY_t = X_0Y_0+\int_0^t X_s dY_s+\int_0^t Y_s dX_s+\left\langle X,Y\right\rangle_t$$

avec

$$\left\langle X,Y\right\rangle_t = \int_0^t \beta_s\beta_s^{'} ds$$

De plus la formule d'intégration par partie s'écrit

$$d\left(X_tY_t\right) = X_t dY_t+Y_t dX_t+d\left\langle X,Y\right\rangle_t$$

.

Chapitre 2

Les EDSs.Les EDSRs .Le système EDSPR

2.1 L'équation différentielle stochastique EDS

Définition 2.1.1 *[14]Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien,* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus stochastique continue à valeur dans* $\mathbb{R}$ *.L'équation différentielle stochastique (EDS) écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dB_t \quad t \geq 0 \\ X_0 = \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

Telles que $f, g : \mathbb{R} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions déterministes mesurables et* f *est appelée le coefficient de dérive et* g *est appelée le coefficient de diffusion .*ξ *est une v.a de carrée intégrale indépendante de MB* $(B_t)_{t\geq 0}$ *s'appelle la condition initial.*

Définition 2.1.2 *Une solution de l'EDS (2.1) est un processus stochastique continue* $\mathcal{F}_t-$

adapté tel que les integrales $\int_0^t f(s, X_s)\, ds$ *et* $\int_0^t g(s, X_s)\, dB_s$ *sont bien définies.*

$$\int_0^t f(s, X_s)\, ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{−}p.s$$
$$\int_0^t g(s, X_s)\, dB_s < \infty \quad \mathbb{P}\text{−}p.s$$

et

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s \quad \textit{pour tout } t \ \ \mathbb{P} - p.s \tag{2.2}$$

2.1.1 Théorème d'existance et d'unicité

on suppose que

1. Les fonctions $f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues.
2. Condition de Lipschitz :$\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in [0, T] \quad \exists k > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq k\,|x - y| \\ |g(t, x) - g(t, y)| &\leq k\,|x - y| \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. Condition de croissance linéaire :$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ \ \exists c > 0$

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq c\,(1 + |x|) \\ |g(t, x)| &\leq c\,(1 + |x|) \end{aligned} \tag{2.4}$$

4. La condition initiale X_0 est independante de $(B_t)_{t\geq 0}$ telle que $E\left[|X_0|^2\right] < \infty$.

Alos pour tout $t \geq 0$. L'EDS(2.1)admet un unique solution fort $X = (X_t)_{t\geq 0}$ continue $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ −adapte c-à-d si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ sont deux solutions de L'EDS(2.1) donc

$$\forall t \in [0, T] \quad P(X_t = Y_t) = 1.$$

La preuve du théorème d'existnce et l'unicité est basé sur **lemme de Gronwall 3.4.1et Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (3.4.2).**

Preuve. **1) L'unicité :**

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ deux solutions de l'équation(2.1)tel que $X_0 = Y_0 = \xi$

$$X_t = \xi + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s$$
$$Y_t = \xi + \int_0^t f(s, Y_s)\, ds + \int_0^t g(s, Y_s)\, dB_s$$

En appliquant l'inégalité de Young $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ sur les formules de X_t, Y_t

On obtient :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left|\xi + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s - (\xi + \int_0^t f(s, Y_s)\, ds + \int_0^t g(s, Y_s)\, dB_s)\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t (f(s, X_s)\, ds - f(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))\, dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t (f(s, Xs)\, ds - f(s, Y_s))\, ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))\, dB_s\right|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t f(s, Xs)\, ds - f(s, Y_s)\, ds\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))\, dB_s\right|^2$$

D'après L'isométrie d'Itô,on a

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))\, dB_s\right|^2 = \int_0^t \mathbb{E}|(g(s, X_s) - g(s, Y_s)|^2\, ds$$

Ensuite,on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz proposition(3.4.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 &\leq 2\mathbb{E}\int_0^t \left(\mathbf{1}^2\ ds\right) \int_0^t |(f(s, X_s)\, ds - f(s, Y_s))|^2\, ds + 2\mathbb{E}|\left|\int_0^t (g(s, X_s) - g(s, Y_s))\right|^2 ds \\
&\leq 2t\mathbb{E}\int_0^t |f(s, X_s)\, ds - f(s, Y_s)|^2\, ds + 2\mathbb{E}\int_0^t |g(s, X_s) - g(s, Y_s)|^2\, ds
\end{aligned}$$

D'après la condition Lipschitzienne (2.3) , et la théorème de Fubini(3.4.7) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 &\leq 2T\int_0^t \mathbb{E}\left|(f(s,X_s)\,ds - f(s,Y_s))\right|^2 ds + 2\int_0^t \mathbb{E}\left|(g(s,X_s) - g(s,Y_s)\right|^2 ds \\
&\leq 2Tk\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds + 2k\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds
\end{aligned}$$

On pose $C = \max(2Tk, 2k)$, donc

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s - Y_s\right|^2 ds.$$

D'après Lemme Gronwall(3.4.1) ,on abteint :

$$0 \leq \mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 0\exp(Ct) = 0$$

Alors $\mathbb{P} - p.s \quad X = Y$

2) L'existence :

Pour montrer l'existance d'une solution forte en utilisant la méthode des approximations successives, et pour cela on pose

$$X_t^n = \xi + \int_0^t f\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t g\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 &= \left|\xi + \int_0^t f(s,X_s^n)\,ds + \int_0^t g(s,X_s^n)\,dB_s - \left(\xi + \int_0^t f\left(s,X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t g\left(s,X_s^{n-1}\right) dB_s\right.\right. \\
&= \left|\int_0^t \left(f(s,X_s^n)\,ds - f\left(s,X_s^{n-1}\right)\right) ds + \left(g(s,X_s^n) - g\left(s,X_s^{n-1}\right)\right) dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t \left(f(s,X_s^n)\,ds - f\left(s,X_s^{n-1}\right)\right) ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \left(g(s,X_s^n) - g\left(s,X_s^{n-1}\right)\right) dB_s\right|^2
\end{aligned}$$

On utilise la même méthode de l'unicité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2 &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t\left(f\left(s,X_s^n\right)ds-f\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^2+2\mathbb{E}\left|\int_0^t\left(g\left(s,X_s^n\right)-g\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right|^2\\
&\leq 2\mathbb{E}\int_0^t\left(\mathbf{1}^2\ ds\right)\int_0^t\left|\left(f\left(s,X_s^n\right)ds-f\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^2ds+2\mathbb{E}\int_0^t\left|\left(g\left(s,X_s^n\right)-g\left(s,X_s^{n-1}\right)\right.\right.\\
&\leq 2t\mathbb{E}\int_0^t\left|\left(f\left(s,X_s^n\right)ds-f\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^2ds+2\mathbb{E}\int_0^t\left|\left(g\left(s,X_s^n\right)-g\left(s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^2ds\\
&\leq 2Tk\int_0^t\mathbb{E}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|ds+2k\int_0^t\mathbb{E}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2
\end{aligned}$$

tell que $C=\max\left(2Tk,2k\right)$,on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\leq C\int_0^t\mathbb{E}\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds.$$

Pour $n=0$.on a

$$\mathbb{E}\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\leq 2T\mathbb{E}\int_0^t\left|f\left(s,X_s^0\right)\right|^2ds+2\mathbb{E}\int_0^t\left|g\left(s,X_s^0\right)\right|^2ds.$$

D'après la croissance et la linéairité f et g , on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^1-X_t^0\right|^2 &\leq 2Tc\mathbb{E}\int_0^t\left(1+|X_s|^2\right)ds+2c\mathbb{E}\int_0^t(\left(1+|X_s|^2\right)ds\\
&\leq 2Tc\int_0^t\left(1+\mathbb{E}\,|X_s|^2\right)ds+2c\int_0^t\left(1+\mathbb{E}\,|X_s|^2\right)ds\\
&\leq M\ \int_0^t\left(1+\mathbb{E}\,|X_s|^2\right)ds\\
&\leq CT
\end{aligned}$$

telle que $M=\max(2Tc,2c)$ et $CT=M\int_0^t\left(1+\mathbb{E}\,|X_s|^2\right)ds$, Ensuite pour $n = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 &\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2 ds \\
&\leq C\int_0^t Cs\ ds \\
&\leq C^2\int_0^t s\ ds \\
&\leq C^2\frac{T^2}{2}.
\end{aligned}$$

Alors pout tout $n \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 &\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_t^n - X_t^{n-1}\right|^2 ds \\
&\leq \frac{C^{n+1}}{n!}\int_0^t s^n ds \\
&\leq \frac{C^{n+1}}{n!}\frac{T^{n+1}}{n+1} \\
&\leq \frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

On montre maintenant que X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)^{1/2} &= \left\|X_t^m - X_t^n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1}\left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1}\left[\frac{(CT)^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{1/2} \underset{n\to\infty,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, et $m \to \infty$, on obtient

$$\left(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Donc X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ qui est lui même un espace complet, et par conséquence elle est convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Notons X_t la limite de la suite $(X_t^n)_n$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} X_t^n = X_t$ dans $(\mathbb{L}^2(\Omega))$, telle que :

$$X_t = \xi + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s.$$

On a déjà montrer que $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t$ telle que

$$X_t^n = \xi + \int_0^t f\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t g\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s.$$

Il nous reste à montrer que la solution s'écrit sous la forme EDS, en utiliser l'isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left|\left(\int_0^t g\left(s, X_s^{n-1}\right) - g(s, X_s)\right) dB_s\right|^2 \leq C\mathbb{E}\left|X_t^{n-1} - X_t\right|^2 \to 0,$$

car $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t$, alors $g\left(s, X_s^{n-1}\right) \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} g(s, X_s))$.

On applique l'inégalité de Hôlder(3.4.4), on trouve

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(f\left(s, X_s^{n-1}\right) - f(s, X_s)\right) ds\right|^2 \leq CT\mathbb{E}\left|X_t^{n-1} - X_t\right|^2 \to 0,$$

car $X_t^n \overset{\mathbb{L}_2(\Omega)}{\to} X_t$, et par la continuité de $\alpha(\omega, t)$. Alors $\alpha\left(s, X_s^{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \alpha(s, X_s))$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

En passant à la limite, on obtient :

$$X_t^n = \xi + \int_0^t f\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t g\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t = \xi + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s.$$

Donc X_t est un solution de l'équation (2.1).

On va montrer que $\mathbb{E}\left(\sup_t |X_t|^2\right) < M$, par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, et on passant à l'espérance on a

$$\mathbb{E}(\,|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}|\xi|^2 + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^t |f\,(s,X_s)|^2\right] ds + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t |g\,(s,X_s)|^{\,2}\right] ds.$$

D'après la croissante et linéairité de f et g , on obtient

$$\mathbb{E}(\,|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}\,|\xi|^2 + 3Tc\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds + 3c\mathbb{E}\left[\int_0^t (1+|X_s|^2)\right] ds$$

avec $N = \max\,(3, 3c, 3cT)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\,|X_t|^2) &\leq N\mathbb{E}\,|\xi|^2 + N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds + N\mathbb{E}\left[\int_0^t (1+|X_s|^2)\right] ds \\ &\leq N\mathbb{E}\,|\xi|^2 + 2N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds\end{aligned}$$

On pose $c_n = \max(2N, N)$,Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\,|X_t|^2) &\leq c_n\mathbb{E}\,|\xi|^2 + c_n\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_s|^2\right)\right] ds \\ &\leq c_n\mathbb{E}\,|\xi|^2 + c_nT + c_n\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s|^2\right] ds \\ &\leq c_n(\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T) + c_n\int_0^t \mathbb{E}\,|X_s|^2\,ds,\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\mathbb{E}(\,|X_t|^2) \leq \left[\mathbb{E}|\xi|^2 + T\right] \exp\left(c_n t\right) \leq M.$$

Puis que $\left[\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T\right] < \infty$, telle que $M = (\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T)\exp(c_n t)$, alors

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leq \infty\ \forall t \in [0,T]\,.$$

Ce qui implique d'après BDG

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^2\right)\leq C\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right)<M..$$

■

2.2 L'équation différentielle stochastique rétrograde EDSR

voir[16]

On consédère $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(B_t)_{t\geq 0}$ un Mouvement Brownien,on notera $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration du Mouvement Brownien .On travaillera avec deux espaces :

$S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel des processus$Y$, progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$ tel que

$$\|Y\|_{S^2}^2=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right]<\infty$$

$\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ l'espace vectoriel les processus Z,progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ telle que

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2=\mathbb{E}\left[\int_0^T\|Z_t\|^2\right]<\infty$$

où si $Z\in\mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z\|^2=trace\,(ZZ^*)$ .les espaces $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}_c^2$, et $\mathbb{M}^2$ sont des espaces de Banach pour ces normes. On désigne par $\mathbb{B}^2$ l'espace de Banach $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^k)\times\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Dans ce contexte .On définit l'équation différentielle stochastique rétrograde $(EDSR)$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases}-dY_t=f\left(t,Y_t,Z_t\right)dt-Z_tdB_t\\ Y_T=\xi, \qquad\qquad \forall t\in[0,T],\end{cases}\tag{2.5}$$

Ou de façon intégrable

$$Y_t=\xi+\int_t^T f\left(s,Y_s,Z_s\right)ds-\int_t^T Z_sdB_s$$

Où

$$f: \quad \left([0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}\right) \to \mathbb{R}^k$$
$$(t,\omega,y,z) \longmapsto f(t,\omega,y,z).$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, s'appelle la condition terminale.

Définition 2.2.1 *Une solution de l'EDSR (2.5) est le couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurable à valeur respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$
2. $\mathbb{P}-ps$ $\int_0^t \{|f(s,y_s,z_s)| + \|Z_s\|^2 ds\} < \infty$
3. $\mathbb{P}-ps$ *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dB_s 0 \leq t \leq T$$

2.2.1 Théorème d'existence et d'unicité

le cas Lipschitz

Dans ce partie.On va montrer le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSRs dans le cas où le générateur est non-linéaire. Ce dernier qu'est étudié par **Pardoux et Peng** [**16**].

On suppose les hypothèses suivantes.

Hypothèses

Il existe une constante $\lambda > 0$, telle que $\mathbb{P}-ps$

1) Condition de Lipschitz en (y,z) pour tout t, y, y', z, z' :

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda\left(|y-y'| + \|z-z'\|\right).$$

2) Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\right) < \infty.$$

Cas simple f ne dépend pas ni y ni z Soit f ne dépend pas ni y ni z c-à-d on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, et on veut trouver une solution de l'EDSR (2.5)

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.6}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$.L'EDSR (2.6) admet une unique solution (Y,Z), telle que $Z \in \mathbb{M}^2$.*

Preuve. **1) L'existence :** Suppose que (Y,Z) soit une solution vérifié $Z \in \mathbb{M}^2$ si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$,on a

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Comme $\int_0^T Z_s dB_s$ est intégrale d'Itô, alors $\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dB_s\right) = 0$, on fait dans $\mathbb{S}_c^2$ car F est de carré intégrable, on a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds \\
&= M_t - \int_0^t F_s ds,
\end{aligned}$$

où M_t est un martingale Brownienne. D'après le théorème de représentation des martingales,il existe un processus prévisible Z carré intégrable $(Z \in \mathbb{M}^2)$, telle que

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_s ds \\ &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR (2.6) étudiée puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds \right) \\ &= \left(\int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \right) - \left(\int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T Z_s dB_s \right) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

Alors

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

2) L'unicité : Soient (Y_t, Z_t) et (Y'_t, Z'_t) deux solutions de l'EDSR (2.6) et $Y_T = Y'_T$, $F_s = F'_s$ soient $\mathcal{Y}_t = Y_t - Y'_t$ et $\mathcal{Z} = Z_t - Z'_t$

On va prouver que $Y_t = Y'_t$ et $Z_t = Z'_t$ $d\mathbb{P} \times dt - ps$.

En effet

$$\mathcal{Y}_t = -\int_t^T \mathcal{Z}_s dB_s. \quad t \in [0, T]$$

On applique la formule d'Ito telle que $g(\mathcal{Y}_t) = |\mathcal{Y}_t|^2$ donc

$$\begin{aligned} d|\mathcal{Y}_t|^2 &= 2\mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_t + 2\frac{1}{2} \langle \mathcal{Y}_t \rangle \\ &= 2\mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_t + \|\mathcal{Z}_t\|^2 dt \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale et comme $\mathcal{Y}_T = 0$, alors :

$$\begin{aligned}\int_t^T d\left|\mathcal{Y}_s\right|^2 &= 2\int_t^T \mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_s + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_s\right\|^2 ds \\ \left|0-\mathcal{Y}_t\right|^2 &= 2\int_t^T \mathcal{Y}_s d\mathcal{Y}_s + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_s\right\|^2 ds,\end{aligned}$$

Où

$$\mathcal{Y}_s d\mathcal{Y}_s = -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s.$$

Donc

$$-\left|\mathcal{Y}_t\right|^2 = 2\int_t^T -\mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_s\right\|^2 ds.$$

Alors

$$2\int_t^T \mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s = \left|\mathcal{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_s\right\|^2 ds.$$

On passe à l'espérance mathématique,comme $\int_t^T \mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s$ est un intégrale d'Itô donc $\mathbb{E}\left[\int_t^T \mathcal{Y}_s \mathcal{Z}_s dB_s\right] = 0$,on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathcal{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_s\right\|^2 ds\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \left|\mathcal{Y}_t\right|^2 = 0 \text{ alors } \mathcal{Y}_t = 0, d\mathbb{P}-ps \\ \displaystyle\int_t^T \left\|\mathcal{Z}s\right\|^2 ds = 0 \text{ alors } \mathcal{Z}_s = 0, d\mathbb{P}\times dt - ps \end{cases}$$

Alors $d\mathbb{P}\times dt-ps$

$$\begin{cases} Y_t = Y_t', \\ Z_t = Z_t'. \end{cases}$$

D'où le résultat. ■

Cas où f dépend de y et z.

Théorème 2.2.1 ***(Pardoux-Peng 1990 [16])*** *Sous l'hypothèse , l'EDSR (2.5) possède une unique solution* (Y, Z) , *telle que* $Z \in \mathbb{M}^2$.

Preuve. Pour montre cette théorème nous utilisons un argument du point fixe dans l'espace de Banach $\mathbb{B}^2$, soit l'application

$$\begin{aligned} \Psi: \quad & \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2 \\ & (Y, Z) \longmapsto \Psi(Y, Z), \end{aligned}$$

le couple (Y, Z) est une solution de l'EDSR (2.5) si et seulement Ψ admet un point fixe.

Pour tout $(U, V) \in \mathbb{B}^2$,on définit $\Psi(U, V) = (Y, Z)$ solution de L'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)_s \, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \;\; 0 \leq t \leq T. \tag{2.7}$$

Remarquons que l'EDSR (2.7) possède une unique solution dans $\mathbb{B}^2$.En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s) \in \mathbb{M}^2$ comme f est $\lambda-$Lipschizienne on a :

$$\begin{aligned} |f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V'_s)| &\leq \lambda (|U_s - U'_s| + \|V_s - V'_s\|) \\ &\leq \lambda |U_s - U'_s| + \lambda \|V_s - V'_s\|. \end{aligned}$$

Soint $U'_s = V'_s = 0$, alors :

$$|f(s, U_s, V_s)| - |f(s, 0, 0)| \leq \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|$$

$$|f(s, U_s, V_s)| \leq |f(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|,$$

avec f et U_s et V_s sont des processus de carré intégrable,par suit nous pouvons appliquer le lemme 2.2.1 pour obtenir une unique solution (Y, Z) tel que $Z \in \mathbb{M}^2$. $(Y, Z) \in \mathbb{B}^2$

L'intégrabilité de Z est obtenue par le théorème de représention de martingale et comme les hypothèses sont vraifiant et si $\{(Y_t, Z_t)\}$ est solution de l'EDSR , telle que $Z \in \mathbb{M}^2$, alors $Y \in \mathbb{S}^2$..

Soient (U,V) et $(U',V')\in\mathbb{B}^2$ où $(Y,Z)=\Psi(U,V)$ et $(Y',Z')=\Psi(U',V')$,notons $y=Y-Y'$ et $z=Z-Z'$ et $y_T=0$ telle que

$$dy_t=(f(t,U_t,V_t)-f(t,U'_t,V'_t))-z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $\exp(\alpha t)|y_t|^2$ .Alors

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right) &= \alpha\exp(\alpha t)|y_t|^2\,dt+2\exp(\alpha t)\,y_t dy_t+\frac{1}{2}2\exp(\alpha t)\langle dy\rangle_t \\ &= \alpha\exp(\alpha t)|y_t|^2\,dt+2\exp(\alpha t)\,y_t\left[(f(t,U_t,V_t)-f(t,U'_t,V'_t))-z_t dB_t\right] \\ &+\exp(\alpha t)\|z_t\|^2\,dt. \end{aligned}$$

En passant à l'intégrant entre t et T ,on obtient

$$\begin{aligned} &\int_t^T d\left(\exp(\alpha s)|y_s|^2\right) \\ &= \int_t^T \left(\alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2\,ds+2\exp(\alpha s)\,y_s\left[\left[f(s,U_s,V_s)-f(s,U'_s,V'_s)\right]-z_s dB_s\right]\right) \\ &+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\exp(\alpha T)|y_t|^2-\exp(\alpha t)|y_t|^2 \\ &= \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2\,ds+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2\,ds \\ &+2\int_t^T \exp(\alpha s)\,y_s\left((f(s,U_s,V_s)-f(s,U'_s,V'_s))-z_s dB_s\right). \end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& -\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \\
& = 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s\left[f(t,U_s',V_s')-f(s,U_s,V_s)-\int_t^T z_s dB_s\right] \\
& \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds
\end{aligned}
$$

Comme f est $\lambda-$Lipchitzienne et on note par $u=U'-U$ et par $v=V'-V$, on a

$$
\begin{aligned}
& -\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \\
& = \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s\left(\lambda|U_s'-U_s|+\lambda\|V_s'-V_s\|\right) \\
& + 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s z_s dB_s \\
& -\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \\
& = \int_t^T \alpha\exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s\left(\lambda|u_s|+\lambda\|v_s\|\right) \\
& + 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s z_s dB_s.
\end{aligned}
$$

Pour tout $\varepsilon>0$, en appliquant l'inégalité de Yong $2ab\le\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2$,l'intégalité précédente donne

$$
\begin{aligned}
& \exp(\alpha t)|y_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \\
& \le \int_t^T\left[-\alpha+2\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right]|y_s|^2 ds \\
& +\varepsilon\int_t^T \exp(\alpha s)\left(|u_s|^2+\|v_s\|^2\right) ds + 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s z_s dB_s.
\end{aligned}
$$

Prenant $\alpha=\dfrac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ et $R_\varepsilon=\varepsilon\displaystyle\int_0^T \exp(\alpha s)\left(|u|^2+\|v\|^2\right) ds$, donc $\forall t\in[0,T]$

$$
\exp(\alpha t)|y_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \le R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha s) y_s z_s dB_s.
$$

Alors

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 \le R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\ , \tag{2.8}$$

$$\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \le R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s. \tag{2.9}$$

D'après (2.9) et $\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\right]$, la martingale locale $\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s$ est une martingale nulle en 0 puisque Y, $Y' \in \mathbb{S}^2$, et $Z, Z' \in \mathbb{M}^2$,Alors

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right] \le \mathbb{E}(R_\varepsilon). \tag{2.10}$$

D'autre part d'après (2.8), et on applique l'inégalité de Doob (3.4.3) et BDG (3.4.2), on obtient acec C universelle.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s\right)\\
&\le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left(\int_t^T \exp(\alpha s)|y_s|^2\|z_s\|^2 ds\right)\\
&\le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + C\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\exp(\alpha t)|y_t|^2\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right)\\
&\le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon)\\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\le \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] \le 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + C^2\mathbb{E}(R_\varepsilon).$$

Prenant en considération l'inégalité(2.10)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2 ds\right]=\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right)+2\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right)+C^2\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right)$$
$$=\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(R_\varepsilon\right).$$

Et par la suite d'après la définition de R_ε on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\\
&=\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right)ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left|u_s\right|^2 ds+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2 ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|u_t\right|^2\int_0^T ds+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2 ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|u_t\right|^2 T+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|v_s\right\|^2 ds\right)\\
&=\varepsilon\left(3+C^2\right)K,
\end{aligned}$$

En prenant :$\varepsilon\left(3+C^2\right)k=\frac{2}{5}$ telle que $K=(1\vee T)$ de sorte que l'application Ψ est une contraction stricte de $\mathbb{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme suivante

$$\|U,V\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2\right)+\int_0^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si on prend le cas que $[\alpha=0]$ alors Ψ possède un unique point fixe, ce qui démontre l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.5) dans $\mathbb{B}^2$. ■

2.3 Le système EDSPR

Définition 2.3.1 *[1]Le système EDSPR est une équation écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X\left(t\right), Y\left(t\right), Z\left(t\right)\right) dt + \sigma\left(t, X\left(t\right), Y\left(t\right), Z\left(t\right)\right) dB_t \\ dY_t = -f\left(t, X\left(t\right), Y\left(t\right), Z\left(t\right)\right) dt + Z_t dB_t \\ \quad X_0 = d \quad , Y_T = a \qquad t \in [0, T] \end{cases} \tag{2.11}$$

Où

$$b : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Telle que $d\ , a \in \mathbb{R}^n$

Notation 2.3.1 *On introduce quelque notation*

$$u = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \quad A\left(t, u\right) = \begin{pmatrix} b \\ \sigma \\ -f \end{pmatrix} \left(t, u\right).$$

Définition 2.3.2 *Le processus triplet* $(X, Y, Z) \in M^2\left([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$ *est un solution adapte de système (2.11) si le système (2.11)est statifait.*

(H_1) Il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\left\langle A\left(t, u\right) - A\left(t, \bar{u}\right), u - \bar{u}\right\rangle \leq -k\left|u - \bar{u}\right|^2.$$

(H_2) Pour tout $u \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$, $A\left(., u\right)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapted.

(H_3) $A\left(t, u\right)$ est lipschiz par rapport à u, alors il existe un constant $l > 0$ telle que

$$|A(t,u) - A(t,\bar{u})| \leq l \ \ |u - \bar{u}| \quad \forall \bar{u}, u \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d}$$

Préliminaites

Pour prouve la théorème d'existance et d'unicité de système(2.11) ,nous avons besoin les lemmes suivants.Il s'agit d'estimations a priori des solutions de la famille suivante de système a horison infini paramétrée par $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{aligned} dX^{\alpha}(t) &= [\alpha b(t, u^{\alpha}(t)) - k(1-\alpha)Y^{\alpha}(t) + \phi(t)]dt \\ &\quad + [\alpha\sigma(t, u^{\alpha}(t)) - k(1-\alpha)Z^{\alpha}(t) + \psi(t)]dB_t \\ -dY^{\alpha}(t) &= [\alpha f(t, u^{\alpha}(t)) + k(1-\alpha)X^{\alpha}(t) + \gamma(t))]dt - Z^{\alpha}(t)\, dB_t \\ X^{\alpha}(0) &= x_0 \qquad (X^{\alpha}, Y^{\alpha}, Z^{\alpha}) \in M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

telle que ϕ, ψ et γ sont des processus donnés dans $M^2([0,T])$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^{n\times d}$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement.

Observez que lorsque $\alpha = 1, \phi = 0, \psi = 0$ et $\gamma = 0$ le système(2.12)devient (2.11) .Quand $\alpha = 0$ le système(2.12) s'écrit sous la forme simple suivante.

$$\begin{aligned} dX^{0}(t) &= [-kY^{0}(t) + \phi(t)]dt + +[-kZ^{0}(t) + \psi(t)]dB_t \\ -dY^{0}(t) &= [kX^{0}(t) + \gamma(t))]dt - Z^{0}(t)\, dB_t \\ X^{0}(0) &= x_0 \qquad \left(X^{0}, Y^{0}, Z^{0}\right) \in M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d}\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

On a les lemmes suivante

Lemme 2.3.1 *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n.\phi, \psi,\gamma \in M^2([0,T])$ .le système (2.13)admet un unique solution dans $M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d}\right)$.*

Lemme 2.3.2 *Sous les hypothèses (H_1)_(H_3) il existe une constante positive δtelle que si a priori pour certains $\alpha \in [0,1]$,$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n.\phi, \psi$et $\gamma \in M^2([0,T])$.le système (2.12)admet* *un unique solution* $(X^{\alpha_0}, Y^{\alpha_0}, Z^{\alpha_0}) \in M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$ *,alors pour tout* $\delta \in [0, \delta_0]$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n.\phi, \psi$ *et* $\gamma \in M^2([0,T])$ *,le système* (2.12) *aussi admet un unique solution* $\left(X^{\alpha_0+\delta}, Y^{\alpha_0+\delta}, Z^{\alpha_0+\delta}\right) \in M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$ *.*

2.3.1 Théorème d'existance et d'unicité

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses* $(H_1), (H_3)$ *.*$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ *le système* (2.11) *admet une solution unique dans* $M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$*.*

Preuve. **1) L'unicité :** Soit $u = (X, Y, Z)$ et $\acute{u} = \left(\acute{X}, \acute{Y}, \acute{Z}\right)$ sont deux solutions de (2.11) on obtient

$$\hat{u} = u - \acute{u} = \left(X - \acute{X}, Y - \acute{Y}, Z - \acute{Z}\right) = \left(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\right)$$

Similaire au lemme(2.3.2) il existe$T_i \longrightarrow \infty \, (i \longrightarrow \infty)$ telle que

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \mathbb{E}\langle \hat{X}(T_i), \hat{Y}(T_i)\rangle = 0$$

En appliquant la formule d'Ito à$\left(\hat{X}(.), \hat{Y}(.)\right)$

$$\mathbb{E}\langle \hat{X}(T_i), \hat{Y}(T_i)\rangle - \mathbb{E}\langle \hat{X}(0), \hat{Y}(0)\rangle = \mathbb{E}\int_0^{T_i} \langle A(t,u) - A(t,\acute{u}), \hat{u}\rangle dt$$

D'après le hypothèse (H_1) ,on a

$$\begin{aligned}\langle A(t,u) - A(t,\acute{u}), \hat{u}\rangle &= |b(t,u) - b(t,\acute{u})| \leq k|u - \acute{u}|^2 \\ &= |\sigma(t,u) - \sigma(t,\acute{u})| \leq k|u - \acute{u}|^2 \\ &= |f(t,u) - f(t,\acute{u})| \leq k|u - \acute{u}|^2\end{aligned}$$

Donc soit $i \longrightarrow \infty$

$$k\mathbb{E}\int_0^{\infty} \left(\left|\hat{X}(t)\right|^2 + \left|\hat{Y}(t)\right|^2 + \left|\hat{Z}(t)\right|^2\right) dt \leq 0$$

Ainsi $\hat{X} = 0, \hat{Y} = 0, \hat{Z} = 0$

l'unicite est prouvée.

2) L'existence : D'après le lemme (2.3.1) :pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n.\phi, \psi,\gamma \in M^2\left([0,T]\right)$,le système(2.12)admet un unique solution dans $M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$ as $\alpha = 0$

Il découle du lemme(2.3.2) : qu'il existe une constante positive $\delta_0 = \delta_0\left(l,k\right)$, tell que pour

tout $\delta \in [0, \delta_0]$ et n'importte lequel $x_0 \in \mathbb{R}^n.\phi, \psi$ et $\gamma \in M^2\left([0,T]\right)$,le système (2.12)admet une unique solution dans $M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$ pour $\alpha = 0$ .comme $\delta_0$ne dépend que de (l,k), on peut répéter ce processus pour N fois avec $1 \leq N\delta_0 \leq 1 + \delta_0$.En perticulier , pour $\alpha = 1$ avec $\phi = 0, \psi = 0$ et $\gamma = 0$ .le système (2.12) admet un unique solution dans $M^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}\right)$.

la preuve est complet. ■

Chapitre 3

Les conditions nécessaires et suffissantes d'optimalité pour le système EDSPR

Dans ce chapitre nous présentons le problème et dirivéons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme du principe du maximum stochastique de système EDSPR.Cette mémoire est une analyse de article **R.Khallout**, **A.Chala** [6]

3.1 Formulation du problème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles .On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration engendrée par un processus $(B_t)_{t\geq 0}$tell que $(B_t)_{t\geq 0}$est un MB standard, et $T \geq 0$.

3.1.1 Contrôle admissible

Définition 3.1.1 *Un contrôle admissible v est un processus $\mathcal{F}_t-$adapte mesurable à valeur dans U telle que* $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |v_t|^2\right] < \infty$.
On noté $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Pour tout $v \in \mathcal{U}$.Nous considérons le système EDSPR contrôlée suivant :

$$\begin{cases} dx_t = h\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + g\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dB_t \\ dy_t = -b\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + z_t dB_t \\ x_0 = d \quad , y_T = a \qquad t \in [0, T] \end{cases} \tag{3.1}$$

où $h : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes. d et a sont $\mathcal{F}_0$-mesurables telle que $\mathbb{E}\left[|d|^2 + |a|^2\right] < \infty$.

L'objectif est minimiser la fonction de coût J qui définié sur $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$J^{\theta}\left(v\right) = \mathbb{E}\left(\exp\theta\left[\int_0^T f\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + \Phi\left(x^v\left(T\right)\right) + \Psi\left(y^v\left(0\right)\right)\right]\right) \tag{3.2}$$

Où $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,$f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\theta > 0$ est appelé le paramètre du risque sensitive.

Un contrôle admissible $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'est satisfait :

$$J^{\theta}\left(u\right) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J^{\theta}\left(v\right) \tag{3.3}$$

On suppose les hypothèses suivantes

Les hypothèses

Les fonctions h,g et Φ sont continues par rapport à x.

Les fonctions b et f sont continues par rapport à x, y et z. et Ψ par rapport à y.

Les fonctions h, g, b et f et toutes leurs dérivées sont de Lipschitz.

Les dérivées de Φ et Ψ sont bornées par $C\left(1 + |x^v|\right)$ et $C\left(1 + |y^v|\right)$.

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses pour tout $v \in \mathcal{U}$ le système (3.1) admet une unique solution forte et la fonction de coût (3.2) est bien definit sur $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. La preuve est trouvée dans[8] ■

3.1.2 Processus auxiliaire avec risque sensitive performance.

Tout d'abord nous pouvons intoduire un processus d'état auxiliaire $\xi^v(t)$ qui est la solution de l'EDS suivant

$$d\xi^v(t) = f(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t))\, dt, \quad \xi^v(0) = 0 \tag{3.4}$$

Alors notre problème de contrôle (3.1),(3.2),(3.3) est équivalent à :

$$\begin{cases} d\xi^v(t) = f(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t))\, dt \\ dx^v(t) = h\big(t, x^v(t), y^v(t), z^v_,(t), v(t)\big)\, dt + g\big(t, x^v(t), y^v(t), z^v_,(t), v(t)\big)\, dB_t \\ dy^v(t) = -b(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t)) + z^v(t)\, dB_t \\ x^v(0) = x_0 \quad y^v(T) = \xi \qquad \xi^v(0) = 0 \\ J^\theta(v) = \mathbb{E}\left(\exp\theta\left[\int_0^T f(t, x(t), y(t), z(t), v(t))\, dt + \Phi(x^v(T)) + \Psi(y^v(0))\right]\right) \\ \qquad = E\left[\exp\theta\left\{\Phi(x^v(T)) + \Psi(y^v(0)) + \xi(T)\right\}\right] \\ J^\theta(u) = \inf_{v\in\mathcal{U}} J^\theta(v) \end{cases} \tag{3.5}$$

On note A_T^θ et $\ominus_T$ par :

$$A_T^\theta := \exp\theta\left\{\Phi(x^v(T)) + \Psi(y^v(0)) + \int_0^T f(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t))\, dt\right\}$$

$$\ominus_T := \Phi(x^v(T)) + \Psi(y^v(0)) + \int_0^T f(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t))\, dt$$

Lemme 3.1.1 *Nous supposons que les hypothèses sont vérifiées,alors la fonction de perte risque sensitive est donnée par*

$$\ominus_\theta = \frac{1}{\theta}\ln E\left[\exp(\theta\ominus_T)\right]$$
$$\frac{1}{\theta}\ln\mathbb{E}\left[\exp\theta\ominus_T\right] = \mathbb{E}\left[\ominus_T\right] + \frac{\theta}{2} var\left[\ominus_T\right] + o\left(\theta^2\right)$$

Preuve. On a $\ominus_\theta = \dfrac{1}{\theta}\ln\mathbb{E}\left[\exp\theta\ominus_T\right]$,en utilisant le développement de Taylor des fonctions exp et ln respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}
\ominus_\theta &= \frac{1}{\theta}\log\mathbb{E}\left(\exp\left\{\theta\ominus_T\right\}\right)\\
&= \frac{1}{\theta}\ln\mathbb{E}\left[1+\theta\,\ominus_T+\frac{\left(\theta\ominus_T\right)^2}{2!}+\circ\left(\left[\theta\ominus_T\right]^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{\theta}\ln\left[1+\mathbb{E}\left(\theta\ominus_T\right)+\mathbb{E}\left(\frac{\left(\theta\ominus_T\right)^2}{2!}\right)+\mathbb{E}\left(\circ\left(\left[\theta\ominus_T\right]^2\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{\theta}\left\{\mathbb{E}\left(\theta\ominus_T\right)+\mathbb{E}\left(\frac{\left(\theta\ominus_T\right)^2}{2!}\right)+\mathbb{E}\left(\circ\left(\left[\theta\ominus_T\right]^2\right)\right)\right\}\\
&- \frac{1}{\theta}\frac{\left\{\mathbb{E}\left(\theta\ominus_T\right)+\mathbb{E}\left(\frac{\left(\theta\ominus_T\right)^2}{2!}\right)+\mathbb{E}\left(\circ\left(\left[\theta\ominus_T\right]^2\right)\right)\right\}^2}{2}\\
&= \mathbb{E}\left[\ominus_T\right]+\frac{\theta}{2}var\left[\ominus_T\right]+o\left(\theta^2\right),
\end{aligned}$$

D'ou le résultat. ■

Si $\theta < 0$, le $var\left[\ominus_T\right]$, comme mesure du risque,améliore les performances $\ominus_\theta$,mais quand $\theta > 0$, le $var\left[\ominus_T\right]$ diminue les performance $\ominus_\theta$. la foctionnelle de perte neutre au risque $\mathbb{E}\left[\ominus_T\right]$ peut avoir limite la fonctionnelle risque sensitive $\ominus\ _\theta$ lorsque $\theta \longrightarrow 0$.Pour plus détail voir [4]

Notation 3.1.1 *Nous utiliserons la notation suivante pour toute fonction* $\varphi \in \left\{b,\sigma,f,g,H^\theta,\tilde{H}^\theta\right\}$

$$\begin{cases}
\phi^v(t) = \phi\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t)\right)\\
\phi^u(t) = \phi\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t)\right)\\
\partial\phi(t) = \phi\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t)\right)\\
-\phi\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t)\right)\\
\phi_\varsigma(t) = \frac{\partial\phi}{\partial\varsigma}\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t)\right),\ \textit{telleque}\ \varsigma = x,y,z,
\end{cases}$$

Lemme 3.1.2 *Nous supposons que les hypothèses vérifiant.Alors il existe un unique trois* *paires processus $\mathcal{F}_t-$adapté $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$ qui sont la solution du système suivant :*

$$\begin{cases} d\vec{p}(t) & = \begin{pmatrix} dp_1(t) \\ dp_2(t) \\ dp_3(t) \end{pmatrix} \\ & = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_x(t) & b_x(t) & g_x(t) \\ f_y(t) & b_y(t) & g_y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dt \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x(t) & 0 \\ 0 & \sigma_y(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} dt \\ \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(0) \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \theta A_T \\ \theta \Phi_x(x_T^u) A_T \\ \theta \Phi_y(y^u(0)) A_T \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.6}$$

avec

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} \sup_{0\leq t\leq T} |p_i(t)|^2 + \sum_{i=1}^{2} \int_0^T |q_i(t)|^2 \, dt\right] < \infty$$

Preuve. D'apres le système(3.5) ,on pose$p_1(t)$ le processus adjoint de EDS par rapport à(3.4) , $p_2(t)$le processus adjoint de EDS(3.5) ,$p_3(t)$ le processus adjoint de EDS(3.5) , on a

$$\begin{cases} d\,\vec{p}(t) & = \begin{pmatrix} dp_1(t) \\ dp_2(t) \\ dp_3(t) \end{pmatrix} = -F(t)\,dt + G(t)\,dB(t) \\ \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(0) \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \theta A_T \\ \theta \Phi_x(x_T^u) A_T \\ \theta \Phi_y(y^u(0)) A_T \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.7}$$

telle que

$$F(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ f_x(t) & b_x(t) & g_x(t)\\ f_y(t) & b_y(t) & g_y(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_x(t) & 0\\ 0 & \sigma_y(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{pmatrix}$$

et

$$G(t)=\begin{pmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\theta}\left(t,\xi^u(t),x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t),\vec{p}(t),\vec{q}(t)\right)$$
$$\begin{pmatrix}f(t)\\ b(t)\\ g(t)\end{pmatrix}(\vec{p}(t))^T+\begin{pmatrix}0\\ \sigma(t)\\ 0\end{pmatrix}(\vec{q}(t))^T \tag{3.8}$$

En remplaçant toutes les dérivées de la fonctionnelle hamiltonienne $\tilde{\mathbf{H}}^{\theta}$ par rapport à toutes leurs composantes ξ, x, y et z, dans les équations adjointes(3.7) ,on obtient

$$\begin{cases} dp_1(t)=q_1(t)\,dB_t\\ d\tilde{p}_2(t)=-\left\{f_x(t)+b_x(t)\,\tilde{p}_2(t)+g_x(t)\,\tilde{p}_3(t)+\sigma_x(t)\,\tilde{q}_2(t)\right\}dt\\ \qquad +\left\{\tilde{q}_2(t)-\theta l_2(t)\,\tilde{p}_2(t)\right\}dB(t)\\ d\tilde{p}_3(t)=-\left\{f_y(t)+b_y(t)\,\tilde{p}_2(t)+g_y(t)\,\tilde{p}_3(t)\right.\\ \qquad \left.+\sigma_y(t)\,\tilde{q}_2(t)+\theta l_3(t)\,\tilde{q}_3(t)\ \right\}dt\\ -\left\{f_z(t)+b_z(t)\,\tilde{p}_2(t)+g_z(t)\,\tilde{p}_3(t)+\sigma_z(t)\,\tilde{q}_2(t)\right\}dB(t)\end{cases}$$

Ensuite, on obtient la forme matricielle, on a le résultat désert(3.6) ■

Le théorème suivant est le principe du maximum stochastique pour le risque neutre de système EDSPR.

Théorème 3.1.2 *Supposons que les hypothèses soient vérifiant.Si* μ *est contrôle optimal et* $(\xi^u(.), x^u(.), y^u(.), z^u(.))$*est un solution optimal du problème* (3.5)*, alors il existe unique trois paires processus* $\mathcal{F}_t-$*adapté* $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$,*qui statisfont* (3.6)*, tell que :*

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_v^\theta(t)\,(u_t - v_t)\,(t) \geq 0 \tag{3.9}$$

Pour tout $u \in \mathcal{U}$ *presque tout* $0 \leq t \leq T$ *et* $\mathbb{P}-p$ *s.avec* $\tilde{\boldsymbol{H}}^\theta$ *est l'hamiltonien défini par* (3.8)

3.2 Equation adjointe

On poursuit en proposant une transformation du processus $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$, telle que l'on veuille éliminer (p_1, q_1) dans (3.6)et obtenir le principe du maximum stochastique en respectant uniquement les couples de processus adjoints notés $(\widetilde{p}_2, \widetilde{q}_2)$ et $(\widetilde{p}_3, \widetilde{q}_3)$ qui sont les équations adjointes associées à notre problème de contrôle initial (3.1) ,(3.2),(3.3). Pour cette raison et selon le système (3.6),nous avons

$$dp_1(t) = q_1(t)\,dB_t$$
$$p_1(T) = \theta A_T^\theta$$

la solution explicite de ce EDSR est $p_1(t) = \mathbb{E}\left[A_T^\theta/\mathcal{F}_t\right] = \theta V^\theta(t)$ telle que $V^\theta(t) = \mathbb{E}\left[A_T^\theta/\mathcal{F}_t\right]$ $0 \leq t \leq T$ il serait naturel de choisir une transformation de $(\tilde{p}, \tilde{q},)$ au lieu de $(\vec{p}, \vec{q})$, avec $\tilde{p}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta V^\theta(t)}\tilde{p}(t)$ $\forall 0 \leq t \leq T$ alors $\tilde{p}_1(t) = \frac{1}{\theta V^\theta(t)} p_1(t) = 1$.Ainsi $(\tilde{p}_1(T), \tilde{p}_2(T), \tilde{p}_3(0)) = (1, \Phi_x(x^u(T)), \Phi_y(y^u(0)))$.

Les propriétés suivantes de V^θ sont essentielles pour trouver les propriétés des processus adjoints transformés.

Lemme 3.2.1 *Supposons que les hypothèses sont vérifiées.Alors* $V^{\theta}(t)$*le processus est uniformément borné.*

Preuve. De les hypothèses on sait que les fonctions f,Φ et Ψ sont bornées par $C > 0$, on a

$$\begin{cases} -C \leq f \leq C \\ -C \leq \Phi \leq C \\ -C \leq \Psi \leq C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -CT \leq \int_0^T f(t)\,dt \leq CT \\ -C \leq \Phi(x_T^v) \leq C \\ -C \leq \Psi(y_0^v) \leq C \end{cases},$$

donc

$$-(2+T)\,C\theta \leq \theta\left(\Phi(x_T^v) + \Psi(y_0^v) + \int_0^T f(t)\,dt\right) \leq (2+T)\,C\theta$$

alors

$$0 < -(2+T)\,C\theta \leq A_T^{\theta} \leq (2+T)\,C\theta$$

En passant à l'exponentielle et à l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$,on obtien

$$0 < \exp\left[-(2+T)\,C\theta\right] \leq \mathbb{V}^{\theta}(t) \leq \exp\left[(2+T)\,C\theta\right]$$

C'est-à-dire les bornés de $\mathbb{V}^{\theta}$. ■

Lemme 3.2.2 *Le processus* $\left(\wedge^{\theta}(t), l(t)\right)$ *est une solution de l'EDSR quadratique .*

$$\begin{cases} d\wedge^{\theta}(t) = -\left\{f(t) + \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2\right\}dt + l(t)\,dB(t) \\ \wedge^{\theta}(t) = \Phi_x(x^u(T)) + \Psi(y^u(0)) \end{cases} \tag{3.10}$$

ou ***l****e première composnte* $\wedge^{\theta}$, *vérifié l'expression suivante*

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\theta\wedge^{\theta}(t)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\theta\left[\int_t^T f(t, x(t), y(t), z(t), v(t))\,dt + \Phi(x^v(T)) + \Psi(y^v(0))\right]/\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve. On considère l'EDSR quadratique(3.10) ,puis en appliquant la formule d'Ito à $\exp\left\{\theta\wedge^{\theta}(t)\right\}$,on obtient

$$\begin{aligned}
d\left(\exp\left(\theta\Lambda_t\right)\right) &= \theta\exp\left(\theta\Lambda_t\right)d\Lambda_t + \frac{\theta^2}{2}\exp\left(\theta\Lambda_t\right)d < \Lambda;\Lambda > \\
&= \theta\exp\left(\theta\Lambda_t\right)\left[-\left(f\left(t\right)+\frac{\theta}{2}\left|l\left(t\right)\right|^2\right)dt + l\left(t\right)dB_t + \frac{\theta}{2}\left|l\left(t\right)\right|^2 dt\right] \\
&= -\theta\exp\left(\theta\Lambda_t\right)f\left(t\right)dt + \theta\exp\left(\theta\Lambda_t\right)l\left(t\right)dB_t.
\end{aligned}$$

alors

$$d\left(\exp\left(\theta\Lambda_t\right)\right) + \theta\exp\left(\theta\Lambda_t\right)f\left(t\right)dt = \theta\exp\left(\theta\Lambda_t\right)l\left(t\right)dB_t.$$

Multiplier des deux cotés de l'expression ci-dessus par $\exp\left(\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)$on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\theta\int_0^t f\left(s\right)ds\right)d\left(\exp\left(\theta\Lambda_t\right)\right) + \theta\exp\left(\theta\int_0^t f\left(s\right)ds\right)\exp\left(\theta\Lambda_t\right)f\left(t\right)dt \\
&= \theta\exp\left(\theta\int_0^t f\left(s\right)ds\right)\exp\left(\theta\Lambda_t\right)l\left(t\right)dB_t \\
&= \theta\exp\left(\theta\Lambda_t + \theta\int_0^t f\left(s\right)ds\right)l\left(t\right)dB_t.
\end{aligned}$$

On remarquons que.

$$d\left[\exp\left(\theta\Lambda_t\right)\exp\left(\theta\int_0^t f\left(t\right)dt\right)\right] = d\left(\exp\left[\theta\Lambda_t + \theta\int_0^t f\left(s\right)ds\right]\right).$$

$$
\begin{aligned}
& d\left(\exp\left[\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right]\right) \\
& =\exp\left(\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)d\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right) \\
& +\theta\exp\left(\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt \\
& =\theta\exp\left(\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)l\left(t\right)dB_t \\
& =\theta\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)l\left(t\right)dB_t.
\end{aligned}
$$

En passant l'intégrale entre t et T,on trouve

$$
\begin{aligned}
& \exp\left(\theta\Lambda_T^\theta+\theta\int_0^T f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)- \\
& \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right) \\
& =\theta\int_t^T \exp\left(\theta\Lambda_s^\theta+\theta\int_0^t f\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right)\right)dt\right)l\left(s\right)dB_s.
\end{aligned}
$$

Alors , en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle des deux cotés de la dernière égalité,on obtient

$$
\begin{aligned}
& =\mathbb{E}\left\{\exp\theta\left[\int_t^T f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds+\right.\right. \\
& +\int_0^T f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds+ \\
& \Phi\left(x^v\left(T\right)\right)+\Psi\left(y^v\left(0\right)\right)\,]\,|\mathcal{F}_t\ ] \\
& =\mathbb{E}\left[\exp\theta\left(\int_0^T f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds\ +\right.\right. \\
& \Phi\left(x^v\left(T\right)\right)+\Psi\left(y^v\left(0\right)\right)\,]\,|\mathcal{F}_t\ ]
\end{aligned}
$$

En vertu de la martingale de integrale d'Ito et la mesurabilité par rapport la filtration $\mathcal{F}_t$, alors

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\theta\wedge_t^\theta+\theta\int_t^T f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds\right)\\
&=\mathbb{E}\left[\exp\theta\left(\int_0^T f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds\right.\right.\\
&\left.+\Phi\left(x^v\left(T\right)\right)+\Psi\left(y^v\left(0\right)\right)/\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

D'après la définition de la condition terminale de l'EDSR quadratique (3.10) ,nous avons que

$$\begin{aligned}
\exp\left\{\theta\wedge_t^\theta\right\}=\mathbb{E}\left\{\exp\theta\left[\int_0^t f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds+\right.\right.\\
\Phi\left(x^v\left(T\right)\right)+\Psi\left(y^v\left(0\right)\right)/\mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

D'autre part, nous supposons que (3.11) est vrai,cela signifie que

$$\begin{aligned}
\exp\left\{\theta\wedge_t^\theta\right\}=\mathbb{E}\left\{\exp\theta\left[\int_0^t f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds+\right.\right.\\
\Phi\left(x^v\left(T\right)\right)+\Psi\left(y^v\left(0\right)\right)/\mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\theta\wedge_t^\theta+\theta\int_t^T f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds\right)\\
&=\mathbb{E}\left\{\exp\theta\left[\int_0^t f\left(s,x\left(s\right),y\left(s\right),z\left(s\right),v\left(s\right)\right)ds+\right.\right.\\
&\Phi\left(x^v\left(T\right)\right)+\Psi\left(y^v\left(0\right)\right)/\mathcal{F}_t]\\
&=\mathbb{E}\left[A_T^\theta\mid\mathcal{F}\right]
\end{aligned}$$

si $t=0$, $V^\theta\left(0\right)=\mathbb{E}\left[A_T^\theta\mid\mathcal{F}_0\right]=\mathbb{E}\left[A_T^\theta\right]=\exp\left(\theta\Lambda_0^\theta\right)$

Soit B_t un MB standard sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega,\mathcal{F},\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq0},\mathbb{P}\right)$ et $\mathcal{F}_t$ la filtration engendrée par B_t. Si A_T^θ est une variable aléatoire carrée intégrable mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$.En effet, par le théorème de représentation de martingale , il existe un processus prévisible $Z(t)$ qui est adapté par rapport à $\mathcal{F}_t$, tel que

$$\mathbb{E}\left[A_T^\theta \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[A_T^\theta\right] + \int_0^t Z(s)\, dB_s = \exp\left(\theta\Lambda_0^\theta\right) + \int_0^t Z(s)\, dB_s$$

Donc

$$\exp\left\{\theta\wedge^\theta(t) + \theta\int_0^T f(s)\, ds\right\} - \exp\left(\theta\Lambda_0^\theta\right) = \int_0^t Z(s)\, dB_s$$

On applique la formule d'Ito à $\left(\exp\left\{\theta\wedge^\theta(t) + \theta\int_0^T f(s)\, ds\right\}\right)$, on obtient

$$d\left[\exp(\theta\Lambda_t + \theta\int_0^t f(s)\, ds)\right] = \theta f(t)\, dt \times \exp(\theta\Lambda_t + \theta\int_0^t f(s)\, ds) + \theta\exp(\theta\Lambda_t$$

$$+\theta\int_0^t f(s)\, ds) \times d\Lambda_t + \frac{\theta^2}{2}\exp(\theta\Lambda_t + \theta\int_0^t f(s)\, ds) \times d < \Lambda_t; \Lambda_t >$$

$$= k(t)\, dB_t$$

alors

$$\theta\exp(\theta\Lambda_t + \theta\int_0^t f(s)\, ds)\left[f(t)\, dt + d\Lambda_t + \frac{\theta}{2}d < \Lambda_t; \Lambda_t >\right] = k(t)\, dB_t.$$

donc

$$f(t)\, dt + d\Lambda_t + \frac{\theta}{2}d < \Lambda_t; \Lambda_t >= \frac{1}{\theta}\exp(-\theta\Lambda_t - \theta\int_0^t f(s)\, ds) \times k(t)\, dB_t \tag{3.12}$$

comme $\frac{1}{\theta}\exp(-\theta\Lambda_t - \theta\int_0^t f(s)\, ds) \times k(t)\, dB_t$ est un martingale,donc

$$\begin{aligned} d\langle\Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta\rangle &= \theta\left[\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\theta\wedge^\theta(t) - \theta\int_0^T f(s)\, ds\right\} k(t)\right]^2 dt \\ &= |l(t)|^2\, dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En remplaçant (3.13) dans (3.12) , on obtient l'égalité suivante

$$\theta\left(\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t f(s)\,ds\right)+\frac{\theta}{2}\theta^2\left|l(t)\right|^2dt=l(t)\,dB_t$$

Finalement

$$\begin{cases} d\wedge^\theta(t)=-\left\{f(t)+\frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2\right\}dt+l(t)\,dB(t) \\ \wedge^\theta(t)=\Phi_x\left(x^u(T)\right)+\Psi\left(y^u(0)\right)\end{cases}$$

■

Lemme 3.2.3 *Le martingale $V^\theta(t)$ peut réécrire sous la forme suivante*

$$V^\theta(t)=\exp\left\{\theta\wedge^\theta(t)+\theta\int_t^T f(s,x(s),y(s),z(s),v(s))\,ds\right\}$$

Preuve. Nous savons que

$$\begin{aligned} V^\theta(t)&=\mathbb{E}\left\{\exp\theta\left[\int_0^t f(s,x(s),y(s),z(s),v(s))\,ds+\right.\right. \\ &\Phi\left(x^v(T)\right)+\Psi\left(y^v(0)\right)/\mathcal{F}_t] \\ &=\mathbb{E}\left\{\exp\theta\left[\int_t^T f(s,x(s),y(s),z(s),v(s))\,ds+\right.\right. \\ &+\int_0^T f(s,x(s),y(s),z(s),v(s))\,ds+ \\ &\Phi\left(x^v(T)\right)+\Psi\left(y^v(0)\right)/\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

A partir du lemme précédente , la formule (3.11)peut transformer en

$$\begin{aligned} V^\theta(t)&=\exp\left(\theta\wedge^\theta(t)\right)+\exp\left(\theta\int_t^T f(s,x(s),y(s),z(s),v(s))\,ds\right) \\ &=\exp\left(\theta\wedge^\theta(t)+\theta\int_t^T f(s,x(s),y(s),z(s),v(s))\,ds\right) \end{aligned}$$

Ensuite,le lemme est prouvé. ■

On peut facilement prouver à partir de(3.10) et la borné de f que $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\wedge^{\theta}(t)\right|^{2}\right)\leq C_T$,avec C_T est une constante positive correspond uniquement à T de processus $\left(\wedge^{\theta}, l(t)\right)$ est l'unique solution de l'EDSR quadratique

$$\begin{cases} d\wedge^{\theta}(t) = -\left\{f(t) + \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^{2}\right\}dt + l(t)\,dB(t) \\ \wedge^{\theta}(t) = \Phi_x\left(x^u(T)\right) + \Psi\left(y^u(0)\right) \end{cases}$$

tel que $l(t) =: Z(t)\exp\left(\theta\wedge^{\theta}(t) + \theta\int_0^T f(s)\,ds\right)$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|l(t)\right|^2 dt\right] < \infty$.

Lemme 3.2.4 *En particulier ,V^{θ}résoulte l'EDSR linéaire suivante*

$$dV^{\theta}(t) = \theta l(t)\,V^{\theta}(t)\,dB(t) \quad V^{\theta}(t) = A_T^{\theta}$$

Ainsi ,le processus L_t^{θ} défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ par :

$$L_t^{\theta} := \frac{V^{\theta}(t)}{V^{\theta}(0)}\exp\left(\int_0^t \theta l(s)\,dB(s) - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t \left|l(s)\right|^2 ds\right) \tag{3.14}$$

est une $\mathcal{F}_t-$martingale uniformément bornée.

Preuve. Nous appliquons la formule d'Ito à $V^{\theta}(t) = \exp\left(\theta\wedge^{\theta}(t) + \theta\int_t^T f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds\right)$

$$\begin{aligned} d\mathbb{V}^{\theta}(t) = d&\left(\exp\left(\theta\wedge^{\theta}(t) + \theta\int_t^T f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds\right)\right) \\ &\theta\int_t^T f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds \times \\ &\exp\left(\theta\wedge^{\theta}(t) + \theta\int_t^T f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds\right) \\ &+\theta\left[\left(-\int_t^T f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds - \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2 dt + l(t)\,dB_t\right)\right. \\ &\left.\times\exp\left(\theta\Lambda_t^{\theta} + \int_0^t f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds\right)\right] \\ &+\frac{\theta^2}{2}\left|l(t)\right|^2\exp\left(\theta\Lambda_t + \int_0^t f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\,ds\right)dt \\ &= \theta l(t)\,\mathbb{V}^{\theta}(t)\,dB_t. \end{aligned}$$

Maintenant, nous voulons prouver (3.14) , nous avons de

$$\Lambda_t^\theta = \Lambda_0^\theta - \int_0^t f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\, ds - \frac{\theta}{2} \int_0^t |l(t)|^2\, ds + \int_0^t l(t)\, dB_s$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\theta(t) &= \exp\left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t f(s, x(s), y(s), z(s), v(s))\, ds\right) \\ &= \exp\left(\theta \Lambda_0^\theta - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t |l(t)|^2\, ds + \int_0^t l(t)\, dB_s\right) \end{aligned}$$

On divise sur $\mathbb{V}^\theta(0)$ tel que $\mathbb{V}^\theta(0) = \exp\left(\theta \Lambda_0^\theta\right)$, on obtient

$$L_t^\theta = \frac{V^\theta(t)}{V^\theta(0)} = \exp\left(\int_0^t \theta l(s)\, dB(s) - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t |l(s)|^2\, ds\right)$$

L_t^θ est une martingale $\mathcal{F}_t$ uniformément bornée. ■

3.3 Les conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette section, nous allons énoncer et prouver les conditions nécessaires d'optimalité pour le système EDSPR avec un contrôle optimal des risque sensitive performance. (3.1) , (3.2) , (3.3).

Lemme 3.3.1 *Les principales de risque sensitive des deuxième et troisième équations adjoints pour* $(\tilde{p}_2(t), \tilde{q}_2(t))$
,$(\tilde{p}_3(t), \tilde{q}_3(t))$ *et* $\left(V^\theta(t), l(t)\right)$ *deviennent*

$$\begin{cases} d\tilde{p}_2(t) = -\boldsymbol{H}_x^\theta(t)\, dt + (\tilde{q}_2(t) - \theta l(t)\, \tilde{p}_2(t))\, dB_t^\theta \\ d\tilde{p}_3(t) = -\boldsymbol{H}_y^\theta(t)\, dt - \left(\boldsymbol{H}_z^\theta(t) - \theta l(t)\, \tilde{p}_3(t)\right) dB_t^\theta \\ dV^\theta(t) = \theta \mathbb{V}^\theta(t)\, l(t)\, dB_t \\ V^\theta(0) = A_T^\theta \\ \tilde{p}_2(T) = \Phi_x(x(T)) \quad ,\tilde{p}_3(0) = \Psi_y(y(0)) \end{cases} \tag{3.15}$$

avec

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}^{\theta}\left(t,x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),v\left(t\right),\tilde{p}\left(t\right),\tilde{q}\left(t\right),\mathbb{V}^{\theta}\left(t\right),l\left(t\right)\right)\\&=f\left(t\right)+b\left(t\right)\tilde{p}_{2}+\sigma\left(t\right)\tilde{q}_{2}+\left(g\left(t\right)-\theta z\left(t\right)l\left(t\right)\right)\tilde{p}_{3}\end{aligned}\tag{3.16}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{p}\left(t\right)\right|^{2}+\sup_{0\leq t\leq T}\left|V^{\theta}\left(t\right)\right|^{2}+\int_{0}^{T}\left(\left|\tilde{q}\left(t\right)\right|^{2}+\left|l\left(t\right)\right|^{2}\right)\right]<\infty$$

Preuve. On applique la formule d'Itô à $d\ \vec{p}(t)=\theta V^{\theta}\left(t\right)\tilde{p}\left(t\right)$, on obtient

$$d\widetilde{p}\left(t\right)=\frac{1}{\theta\mathbb{V}^{\theta}\left(t\right)}\left(d\overrightarrow{p}\left(t\right)-\theta\left(d\mathbb{V}^{\theta}\left(t\right)\right)\widetilde{p}\left(t\right)-\theta<d\mathbb{V}^{\theta}\left(t\right),d\widetilde{p}\left(t\right)>\right)$$

On suppose que $d\tilde{p}\left(t\right)=-\tilde{\alpha}\left(t\right)dt+\tilde{\beta}\left(t\right)dB\left(t\right)$,on sait que $dV^{\theta}\left(t\right)=\theta V^{\theta}\left(t\right)l\left(t\right)dB_{t}$ alors $<d\mathbb{V}^{\theta}\left(t\right),d\widetilde{p}\left(t\right)>=\theta l\left(t\right)\mathbb{V}^{\theta}\left(t\right)\beta\left(t\right)dt$, notez que $d\ \vec{p}(t)=\frac{1}{\theta V^{\theta}(t)}\tilde{p}\left(t\right)$ et pour tout $i\in\{1,2,3\}$.

On veut déterminer les coefficients $\tilde{\alpha}(t)\in\mathbb{R}^{3}$ et $\tilde{\beta}\left(t\right)\in\mathbb{R}^{3}$, tels que

$$\begin{aligned}d\vec{p}(t)=\quad&-\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\f_{x}\left(t\right)&b_{x}\left(t\right)&g_{x}\left(t\right)\\f_{y}\left(t\right)&b_{y}\left(t\right)&g_{y}\left(t\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}_{1}\left(t\right)\\\tilde{p}_{2}\left(t\right)\\\tilde{p}_{3}\left(t\right)\end{pmatrix}\right.\\&\left.+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sigma_{x}\left(t\right)&0\\0&\sigma_{y}\left(t\right)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{q}_{1}\left(t\right)\\\tilde{q}_{2}\left(t\right)\\\tilde{q}_{3}\left(t\right)\end{pmatrix}-\theta\begin{pmatrix}l_{1}\left(t\right)\\l_{2}\left(t\right)\\l_{3}\left(t\right)\end{pmatrix}\tilde{\beta}\left(t\right)\right]dt\\&\left[\begin{pmatrix}\tilde{q}_{1}\left(t\right)\\\tilde{q}_{2}\left(t\right)\\\tilde{q}_{3}\left(t\right)\end{pmatrix}-\theta\begin{pmatrix}l_{1}\left(t\right)\\l_{2}\left(t\right)\\l_{3}\left(t\right)\end{pmatrix}\tilde{p}\left(t\right)\right]dB\left(t\right)\end{aligned}\tag{3.17}$$

En combinant entre (3.17)et $d\tilde{p}(t) = -\tilde{\alpha}(t)\,dt + \tilde{\beta}(t)\,dB(t)$ on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t) = &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_x(t) & b_x(t) & g_x(t) \\ f_y(t) & b_y(t) & g_y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x(t) & 0 \\ 0 & \sigma_y(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \\ \tilde{q}_3(t) \end{pmatrix} \\ &+ \theta l(t)\,\tilde{\beta}(t)\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \\ \tilde{q}_3(t) \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \end{pmatrix} \tilde{p}(t)$$

En remplaçant $\tilde{\beta}(t)$ par son expression dans $d\tilde{p}_1(t)$,on obtient $d\tilde{p}_1(t) = \tilde{q}_1(t)\left[-\theta l_1(t)\,dt + dB(t)\right]$, on peut utiliser le théorème de Girsanov [15]pour prétendre que

$$\begin{cases} d\tilde{p}_1(t) = \tilde{q}_1(t)\,dB^{\theta}(t) \\ \tilde{p}_1(T) = 1 \end{cases}$$

avec $dB^{\theta}(t) = -\theta l(t)\,dt + dB(t)$ est un $\mathbb{P}^{\theta}-$mouvement Brownien,telle que

$$\frac{d\mathbb{P}^{\theta}}{d\mathbb{P}} = L_t^{\theta} = \exp\left(\int_0^t \theta l(s)\,dB(s) - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t |l(s)|^2\,ds\right) \qquad 0 \leq t \leq T$$

On remarque que $\tilde{p}_1(t)$ est de carré intégrable et $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta}}\left[\tilde{p}_1(T)\,|\mathcal{F}_t\right] = 1$ car $\tilde{q}_1(t)$ a une variation quadratique, alors $\int_0^T |\tilde{q}_1(t)|^2\,dt = 0$,Cela implique que pour presque tout $0 \leq t \leq T$,

$\tilde{q}_1(t) = 0$.$\mathbb{P}-p.s$, nous avons

$$
\begin{aligned}
d\tilde{p}(t) = & -\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_x(t) & b_x(t) & g_x(t) \\ f_y(t) & b_y(t) & g_y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x(t) & 0 \\ 0 & \sigma_y(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \\ \tilde{q}_3(t) \end{pmatrix} \right\} dt \\
& \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \\ -f_z(t)\tilde{p}_1 - b_z(t)\tilde{p}_2 - g_z(t)\tilde{p}_3 - \sigma_z(t)\tilde{q}_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \end{pmatrix} \tilde{p}(t) \right\} dB^\theta(t)
\end{aligned}
$$

Ensuite, on trouve

$$
\begin{cases}
d\tilde{p}_2(t) = -\left\{ f_x(t) + b_x(t)\tilde{p}_2(t) + g_x(t)\tilde{p}_3(t) + \sigma_x(t)\tilde{q}_2(t) \right\} dt \\
\qquad + \left\{ \tilde{q}_2(t) - \theta l_2(t)\tilde{p}_2(t) \right\} dW^\theta(t) \\
\tilde{p}_2(T) = \Phi_x(x_T)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
d\tilde{p}_3(t) = -\left\{ f_y(t) + b_y(t)\tilde{p}_2(t) + g_y(t)\tilde{p}_3(t) + \sigma_y(t)\tilde{q}_2(t) + \theta l_3(t)\tilde{q}_3(t) \right\} dt \\
\qquad - \left\{ f_z(t) + b_z(t)\tilde{p}_2(t) + g_z(t)\tilde{p}_3(t) + \sigma_z(t)\tilde{q}_2(t) \right\} dB^\theta(t) \\
\tilde{p}_3(0) = \Phi_y(y(0))
\end{cases}
$$

Les principales équations des deuxième et troisième adjoints risque sensitive pour $(\tilde{p}_2(t), \tilde{q}_2(t))$, $(\tilde{p}_3(t), \tilde{q}_3(t))$et $\left(V^\theta(t), l(t)\right)$deviennent

$$
\begin{cases}
d\tilde{p}_2(t) = -\boldsymbol{H}_x^\theta(t)\,dt + \left(\tilde{q}_2(t) - \theta l_2(t)\tilde{p}_2\right) dB^\theta(t) \\
d\tilde{p}_3(t) = -\boldsymbol{H}_y^\theta(t)\,dt - \boldsymbol{H}_z^\theta(t)\,dB^\theta(t) \\
dV^\theta(t) = \theta l(t) V^\theta(t)\,dB(t) \\
V^\theta(T) = A^\theta(T) \\
\tilde{p}_2(T) = \Phi_x(x(T)) \quad , \quad \tilde{p}_3(0) = \Phi_y(y(0))
\end{cases}
$$

où $\boldsymbol{H}^{\theta}$ est défini par (3.16)

A partir des hypothèses la solution du système (3.15)existe et est unique, telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{p}\left(t\right)\right|^{2}+\sup_{0\leq t\leq T}\left|V^{\theta}\left(t\right)\right|^{2}+\int_{0}^{T}\left(\left|\tilde{q}\left(t\right)\right|^{2}+\left|l\left(t\right)\right|^{2}\right)\right]\leq\infty$$

■

Théorème 3.3.1 (***Conditions nécessaires d'optimalité avrc risque sensitive***). *Nous supposons que les hypothèses sont vérifiant, si* $(x^{u}(.),y^{u}(.),z^{u}(.),u(.))$ *est une solution optimale au problème de contrôle risque sensitive* $\{(3.1),(3.2),(3.3)\}$ *,alors il existe* $\mathcal{F}_{t}-$*processus adaptés* $\left(V^{\theta}(t),l(t)\right)$ *,et* $(\tilde{p}_{2}(t),\tilde{q}_{2}(t)),(\tilde{p}_{3}(t),\tilde{q}_{3}(t))$ *qui vérifient (3.15) tels que*

$$\boldsymbol{H}^{\theta}\left(t\right)\leq0, \tag{3.18}$$

Preuve. Pour tout $u\in\mathcal{U}$ presque tout $0\leq t\leq T$ et $\mathbb{P}-p.s$ la relation entre l'hamiltonien $\boldsymbol{H}^{\theta}$ associé à (3.16) et $\boldsymbol{H}^{\theta}$associé à(3.8) est donnée par

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{H}}^{\theta}\left(t,\xi^{u}\left(t\right),x^{u}\left(t\right),y^{u}\left(t\right),z^{u}\left(t\right),\vec{p}\left(t\right),\vec{q}\left(t\right)\right)\\&=\left\{\theta V^{\theta}\left(t\right)\right\}\boldsymbol{H}^{\theta}\left(t,x^{u}\left(t\right),y^{u}\left(t\right),z^{u}\left(t\right),\tilde{p}_{2}\left(t\right),\tilde{q}_{3}\left(t\right)V^{\theta}\left(t\right),l_{2}\left(t\right),l_{3}\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

■

3.4 Les conditions suffisantes d'optimalité

Dans cette section, nous étudions quand les conditions nécessaires d'optimalité deviennent suffisantes. Pour tout $u\in\mathcal{U}$, on note $(x_{t}^{u},y_{t}^{u},z_{t}^{u})$ la solution de système (3.1) contrôlé par u

Theorem (**Conditions suffisantes d'optimalité avec risque sensitive**) Supposons que $\Phi(.)$ et $\Psi(.)$ sont convexes et pour tout $(x,y,z,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U$ la fonction $\boldsymbol{H}(t,x,y,z,v,p,q)$ est convexe pour tout $v\in\mathcal{U}$. d et a sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{t}$-

mesurables telles que $E[|d|^2 + |a|^2] < \infty$ .Alors u est un solution optimale du problème contrôlée $\{$(3.1) (3.2) (3.3)$\}$,s'il vérifie (3.9) .

Preuve. Soit u un contrôle admissible (candidat à etre optimale) pour tout $v \in \mathcal{U}$,on a

$$\begin{aligned} dx_t^v &= h\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + g\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dB_t \\ dy_t^v &= -b\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), v\left(t\right)\right) dt + z_t dB_t \end{aligned}$$

donc.

$$\begin{aligned} J^\theta\left(v\right) - J^\theta\left(u\right) = {} & \mathbb{E}\left[\exp\left\{\theta\Psi\left(y^v\left(0\right)\right) + \theta\Phi\left(x^v\left(T\right)\right) + \theta\xi^v\left(T\right)\right\}\right] \\ & - \mathbb{E}\left[\exp\left\{\theta\Psi\left(y^u\left(0\right)\right) + \theta\Phi\left(x^u\left(T\right)\right) + \theta\xi^u\left(T\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor de la fonction $J^\theta\left(v\right)$ au point u,Φ et Ψ sont dérivables et $p_1\left(T\right) = \theta A_T, p_2\left(T\right) = \theta\Phi_x\left(x^u\left(T\right)\right) A_T$ et $p_3\left(0\right) = \theta\Psi_y\left(y^u\left(0\right)\right) A_T$,on obtient

$$\begin{aligned} J^\theta\left(v\right) - J^\theta\left(u\right) \geq {} & \mathbb{E}\left[p_1\left(T\right)\left(\xi^v\left(T\right) - \xi^u\left(T\right)\right)\right] + \mathbb{E}\left[p_2\left(T\right)\left(x^v\left(T\right) - x^u\left(T\right)\right)\right] \\ & + \mathbb{E}\left[p_3\left(T\right)\left(y^v\left(0\right) - y^u\left(0\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Appliquer la formule d'Itô à $p_1\left(t\right)\left(\xi^v\left(t\right) - \xi^u\left(t\right)\right), p_2\left(t\right)\left(x^v\left(t\right) - x^u\left(t\right)\right)$ et $p_3\left(t\right)\left(y^v\left(t\right) - y^u\left(t\right)\right)$,on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[p_1\left(T\right)\left(\xi^v\left(T\right) - \xi^u\left(T\right)\right)\right] = \mathbb{E}\Bigg[\int_0^T & \left(f\left(t, x^v\left(t\right), y^v\left(t\right), z^v\left(t\right), v\left(t\right)\right) - \right. \\ & \left. f\left(t, x^u\left(t\right), y^u\left(t\right), z^u\left(t\right), u\left(t\right)\right) p_1\left(t\right) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p_2(T)\left(x^v(T)-x^u(T)\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T -\left(f_x(t)\,p_1+b_x(t)\,p_2+\sigma_x(t)\,q_2+g_x(t)\,p_3\right)\left(x^v(t)-x^u(t)\right)dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(b\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t)\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.b\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t)\right)\right)p_2(t)\,dt\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sigma\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t)\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.\sigma\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t)\right)\right)q_2(t)\,dt\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p_3(0)\left(y^v(0)-y^u(0)\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(g\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t)\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.g\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t)\right)\right)p_2(t)\,dt\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_y(t)\,p_1(t)+b_y(t)\,p_2(t)+\sigma_y(t)\,q_2(t)\right.\right.\\
&\left.\left.+\,g_y(t)\,p_3(t)\right)\left(y^v(t)-y^u(t)\right)dt\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(f_z(t)\,p_1(t)+b_z(t)\,p_2(t)+\sigma_z(t)\,q_2(t)\right)\left(z^v(t)-z^u(t)\right)dt\right]
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
J^\theta(v)-J^\theta(u)\geq\mathbb{E}\Bigg[\int_0^T &\Big(\tilde{\boldsymbol{H}}^\theta\left(t,x^v(t),y^v(t),z^v(t),v(t),p(t),q(t)\right)-\\
&\tilde{\boldsymbol{H}}^\theta\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t),p^u(t),q^u(t)\right)\Big)\,dt\Bigg]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{\boldsymbol{H}}_x^\theta\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t),p^u(t),q^u(t)\right)\left(x^v(t)-x^u(t)\right)dt\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{\boldsymbol{H}}_y^\theta\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t),p^u(t),q^u(t)\right)\left(y^v(t)-y^u(t)\right)dt\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{\boldsymbol{H}}_z^\theta\left(t,x^u(t),y^u(t),z^u(t),u(t),p^u(t),q^u(t)\right)\left(z^v(t)-z^u(t)\right)dt\right]
\end{aligned}$$

D'après la convexité de l'Hamiltonien $\tilde{\boldsymbol{H}}^\theta$ en (x,y,z) et la linéairité en u, puis en utilisant le gradient généralisé de Clarke de $\tilde{\boldsymbol{H}}^{\theta}$ évalué en (x, y, z, v) et les conditions nécessaires d'optimalité (3.18), il s'ensuit de [19] que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\tilde{\boldsymbol{H}}^{\theta}\left(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t), p(t), q(t)\right) - \right.\right. \\
&\left.\tilde{\boldsymbol{H}}^{\theta}\left(t, x^u(t), y^u(t), z^u(t), u(t), p^u(t), q^u(t)\right)\right) dt] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{\boldsymbol{H}}_x^{\theta}\left(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t), p^u(t), q^u(t)\right)\left(x^v(t) - x^u(t)\right) dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{\boldsymbol{H}}_y^{\theta}\left(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t), p^u(t), q^u(t)\right)\left(y^v(t) - y^u(t)\right) dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \tilde{\boldsymbol{H}}_z^{\theta}\left(t, x^v(t), y^v(t), z^v(t), v(t), p^u(t), q^u(t)\right)\left(z^v(t) - z^u(t)\right) dt\right]
\end{aligned}$$

donc

$J^{\theta}(v) - J^{\theta}(u) \geq 0.$ ■

Conclusion

Dans ce mémoire,nous sommes basés sur le problème de contrôle optimal de système EDSPR couplée complément ($FBSDE$ en anglais) avec risque sensitive performance,où le contrôle admissible est convexe et nous dérivons les condotions nécessaires et suffisantes d'optimalité de cette cas .

Bibliographie

[1] F. Antonelli.Backward-forward stochastic differential equations. Ann. Appl. Probab. 3, 777-793 (1993)

[2] Bismut, J. M. (1973). Théorie probabiliste du contrôle des diffusions.Mem .Amer. Math.Soc.176,Providence,Rhode Island.

[3] J.M. Bismut : An introductory approach to duality in stochastic control, SIAM Rev, 20 (1978), 62-78

[4] A. Chala, D. Hafayed and R. Khallout, The use of Girsanov's theorem to describe the risk-sensitive problem and application to optimal control, in Stochastic Differantiel Equation-basics and Applications, Nova Science Publishers, New York, 111–142.(2018).

[5] Chala, A, Khalout, R (2018). A risk-sensitive stochastic maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic differential equations with applications.Asian J Control.

[6] Chala, A, Khalout, R (2019).Risk-sensitive Necessary and Sufficient Optimality Condition and Financial Application.

[7] Djehiche, B., Tembine, H., & Tempone, R. A stochastic maximum principle for risksensitive mean-field type control. IEEE Transactions on Automatic Control,60 (10), 2640–2649, (2015).

[8] Y, Hu., S, Peng. Solution of forward-backward stochastic differential equations, Probab. Theory Relat. Fields 103, 273 283 (1995).

[9] Itô, Kiyoshi. "Stochastic differential equations." Mem. Am. Math. Soc 4 (1951), 1-51. 2

[10] D.JACOBSON,. Optimal Stochastic Linear Systems with Exponential Performance Criteria and Their Relation to Deterministic Differential Games. IEEE Transactions on Automatic Control, (1973).

[11] Jean-François Le Gal,(2012).Mouvement brownien,martingales et calcul stochastique.

[12] A.E.B Lim,X. Zhou, : A new risk-sensitive maximum principle. IEEE Trans. Autom. Control 50(7), 958–966 (2005).

[13] J. Ma, P. Protter and J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme, Probab. Theory Related Fields 98 (1994), 339– 359.

[14] Monique Jeanblanc.Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY.Septembre 2006.

[15] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg New York (2000).

[16] Pardoux and S. Peng,(1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation,Systems Control Lett. 14 , no. 1, 55–61.

[17] S.Peng, Backward stochastic differential equations and application to optimal control problems, Appl. Math. Optim. 27, 125–144, (1993)

[18] W. Xu, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 37, 172-185(1995).

[19] X.Y. Zhou, Sufficient conditions of optimality for stochastic systems with controllable diffusions. IEEE Trans. on Automatic Control, 41, pp1176-1179, (1996)

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

MB	Mouvement Brownien
L^2	l'espace des fonctions de carré intégrable
$\mathbb{P}-p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$p.s$	presque surement
$\mathbb{R}^k$	espace réel euclidien de dimension d
$\mathbb{R}^{k\times d}$	ensemble des matrice réelles$k \times d$
$dt \times d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0;T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$
$c-\grave{a}-d$	C'est à dire
$trace\,(M)$	La trace de la matrice.M.
tq	Telle que
$\mathbb{S}_c^2$	le sous-espace par les processus continue
$\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$	désigne l'ensemble des classes équivalente de$\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Annexe

Lemme 3.4.1 ***Lemme de Gronwall*** *g une fonction positive mesurable bornée sur* $[0, T]$*. On suppose qu'il existe des constantes* $a > 0, b > 0$ *telles que pour tout* $t \in [0; T]$ *, on a :*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds$$

Alors $\forall t \in [0; T]$

$$g(t) \leq a \exp(bt)$$

Lemme 3.4.2 ***Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy(BDG)*** *pour tout temps d'arrêt* τ *on a ,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0;T]} \left| \int_0^t f(s) dB_s \right|^2\right] \leq C \mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s)|^2 ds\right],$$

où C *est une constante positive.*

Lemme 3.4.3 ***L'inégalité de Doob*** $\forall p \geq 1$*, si* $\{X_n\}_{n=1 \ldots N}$ *est une martingale dans* L^p*, alors*

$$\mathbb{E}[|X_N|] \leq \mathbb{E}[|X^{*p}|] \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \mathbb{E}[|X_N|],$$

telle que :$|X^*| := \max[|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_N|]$.

Lemme 3.4.4 ***L'inégalité de Hölder*** *L'inégalité de Hölder dit que si* $p, q > 1$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors :*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Lemme 3.4.5 ***l'inégalité de Cauchy-Schwartz*** *Soient f et $g \in ([0,1], \mathbb{R})$. Alors :*

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.4.6 ***Inégalité de Young*** *Soient a, b deux nombres réels Alors*

$$: (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Lemme 3.4.7 ***Théorème de Fibuni****Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$, (F, B, η) deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient $\sigma-$finies et soit $(E \times F, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \otimes \eta)$ l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si*

$$f : E \times F \rightarrow [0, \infty],$$

et est un application $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-mesurable, alors les applications :

$$x \mapsto \int_E f(x,y)\, d\eta(y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_F f(x,y)\, d\mu(x),$$

sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}-$mesurables et

$$\int_{E \times F} f(x,y)\, d(\mu \otimes \eta)(x \times y) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\, d\eta(y)\right) d\mu(x) = \int_E \left(\int_F f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\eta(y).$$

Lemme 3.4.8 ***Théorème du point fixe*** *Soient (E, d) un éspace métrique complet et $\Psi : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est à dire, Lipschitziènne de rapport $k < 1$. Alors : Ψ admet unique point fixe $a \in E$ tel que $\Psi(a) = a$.*