République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIERE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE PRESENT EN VUE DE L OTENTION DU DIPLOME

MASTER en Mathématiques

Option **:** Probabilités Et Statistique

Par
LOGAB YAMINA

Titre

principe de maximum du contrôle stochastique relaxé avec risque sensitive performance

Devant le jury composé de :

SAOULI Mostapha Abdelouahab	MCB. UKM- Ouargla	Président
BENBRAHIM Radhia	MCB. UKM - Ouargla	Examinateur
MANSOUL Brahim	MAA. UKM - Ouargla	Rapporteur

Juin 2023

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACILITÉ Des Mathématiques et des Sciences De Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du Diplôme

MASTER EN MATHÉMATIQUES

OPTION

PROBABILIÉS ET STATISTIQUES

PAR

LOGAB YAMINA

LE THÉME

principe de maximum du contrôle stochastique relaxé avec risque sensitive performance

MEMBRES DU COMITÉ D'EXAMEN

Dr.	SAOULI Mostapha Abdelouahab	MCB. UKM- Ouargla	Président
Dr.	BENBRAHIM Radhia	MCB. UKM- Ouargla	Examinateur
Dr.	MANSOUL Brahim	MAA. UKM - Ouargla	Rapporteur

JUIN 2023

DÉDICACE.

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents .

Ma mére, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses pécieux conseil, pour toute son assistance et sa présence dans

ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et

de mon éternelle gratitude.

Mon pére, qui peut étre fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de

privation pour m'aider à avance dans la vie. Puisse dieux faire en sorte que ce travail

porte son fruit, merci pour les valeurs et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et sœurs qui n'ont cessé d'étre pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes professeurs du département de Mathématiques de ouargla qui doivent voir dans ce

travail la fierté d'un savoir bien acquis.

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a

donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Dr :Mansourl Brahim,

son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciement vont également aux membres du jury pour l'intérète qu'ils ont

porté à notre recherche en accemptons d'examiner notre travail et l'enrichir par leurs

propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près

ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDS) ont des origines remontant au XXe siècle et sont liées au travail de plusieurs scientifiques et mathématiciens importants.En 1905, le mathématicien français Paul Lévy a introduit la théorie de la diffusion, qui concerne le mouvement aléatoire des particules dans un milieu homogène. Lévy a décrit ce mouvement en utilisant des équations différentielles ordinaires, jetant ainsi les bases des équations différentielles stochastiques. Et en 1928, le physicien français Louis Bachelier a développé une théorie du mouvement brownien, connue sous le nom d'équations de Bachelier. Ces équations étaient utilisées pour décrire la diffusion des rayonnements et l'interaction entre les particules dans un milieu aléatoire.Et en 1944, le scientifique russe Andrei Kolmogorov a développé la théorie des équations différentielles stochastiques. Son célèbre ouvrage "Foundations of the Theory of Diffusion Processes" prés

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades $(EDSR)$ sont une extension des équations différentielles stochastiques classiques où le temps évolue en sens inverse. Cependant, contrairement aux équations différentielles stochastiques classiques, l'étude des $EDSR$ est relativement récente et leur développement s'est produit au cours des dernières décennies.Les $EDSR$ ont émergé dans les années 1990 et les années 2000 en tant qu'outil puissant pour modéliser et analyser des phénomènes où le comportement passé affecte le comportement futur. Elles trouvent des applications dans divers domaines tels que la finance mathématique, la théorie du contrôle stochastique, l'optimisation et la théorie des jeux.Les contributions majeures à l'étude des $EDSR$ comprennent les travaux des chercheurs tels que Rainer Buckdahn, Juan-Pablo Ortega, Huyên Pham, Shige Peng, Nizar Touzi, etc. Ces chercheurs ont développé des méthodes d'analyse et de résolution pour les $EDSR$, en étudiant notamment les problèmes de régularité des solutions, les principes de programmation dynamique, les méthodes de Monte Carlo, etc

Le systéme l'équations différentielles stochastiques $EDS-EDSR$, Antonilli [1] est le premier qui étudié cette équation et a donné l'existence et l'unicité lorsque le temps T est suffisamment petit,et puis a été étudié par de nombreux auteurs dans des cas différentes pour l'existence et l'unicité dans laquelle le coefficient σ du forward est non dégénéré, l'existence et l'unicité de la solution sans la condition de non-dégénérescence de σ sous une certaine condition de "monotonie". par exemple Peng [14] et Ma et all [10]

Une application de système des équations $EDS - EDSR$ est le principal maximum stochastique au problème de contrôle optimal, la première contribution du problème de contrôle du système $EDS-EDSR$ est faite par Peng, il étudie le principal maximum dont le domaine de contrôle est convexe.aprés Xu établit le principal maximum stochastique dans le cas où le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe. étant donné que le domaine de contrôle strict n'est pas convexe, les problèmes de contrôle stochastique pour les systèmes $EDS - EDSR$ ont été étudiés par de nombreux auteurs en utilisant une nouvelle approche appelée modèle relaxé. L'idée alors d'introduire une nouvelle classe $\mathcal{R}$ de contrôles admissibles, cette nouvelle classe est appelée contrôle relaxé et a une structure plus riche de compacité et de convexité pour plus de détails voir par exemple[5].Depuis les premiers travaux de Jacobson, le problème de contrôle stochastique avec risque sensitive a été étudié par de nombreux auteurs. Parce qu'ils peuvent être appliqués au jeu différentiel et à la finance mathématique, Il y a beaucoup des articles serval ont été notés au principal maximum stochastique..Lim et Zhou a été obtenu un nouveau maximum avec risque sensitive pour le processus de diffusion de Markov, qui est une fonction de performance intégrale exponentielle. Djehiche et al ont étendu un principal maximum stochastique pour une classe de problème de contrôle de type champ moyen avec risque sensitive ,R.Khalout, A.Chala [7] et D.Hafayed, A.chala ont étudié les conditions nécessaire et ou les suffisantes d'optimalité où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique rétrograde $EDSR$, $EDSRD$ et $EDSRP$ avec une fonctionnelle de performance avec risque.sensitive .

Dans ce mémoire, nous conduisons des conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes sous la forme d'un principal maximum stochastique où le système est régi par une $EDS-EDSR$ fablement couplée dans le modèle relaxé avec risque sensitive à travers le détaille d'article[9] on a

$$\begin{cases} dx_t = & \int_U b\left(t, x_t^q, a\right) q_t(da)dt + \int_U \sigma\left(t, x_t^q, a\right) q_t(da)dB_t \\ dy_t = & -\int_U g\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t(da)dt + z_t^v dB_t \\ x_0^q = \zeta, & y_T^q = \eta, 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{1}$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$g : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

ζ et η sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_0^B-$mesurable,telles que

$$\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + |\eta|^2\right] < \infty,$$

la fonction de coût J qui définié sur $\mathcal{R}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles relaxés par

$$\mathcal{J}(q)=\mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^q\right)+\Psi\left(y_0^q\right)+\int_0^T\int_U f\left(t,x_t^q,y_t^q,z_t^q,a\right)q_t(da)dt\right)\right] \qquad (2)$$

$$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

$$\Psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

$$f:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\longrightarrow\mathbb{R}.$$

le controle $\mu\in\mathcal{R}$ est optimal si

$$\mathcal{J}(\mu)=\inf_{q\in\mathcal{R}}\mathcal{J}(q)$$

Dans ce mémoire qui ce compose à trois chapitre :

Premièr chapitre :

Dans ce chapitre, on introduit les générales du calcul stochastique,on définit la tribu et la filtration ;et le mouvement brownien,et le processus stochastique et le mouvement brownien ...etc.

Deuxième chapitre :

On présentait dans ce chapitre le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une **EDS**,et l'existence et l'unicité de la solution d'une **EDSR** dans le cas Lipchitz ,et étudiés l'existence et l'unicité de la solution du système **EDS-EDSR** .

Troisième chapitre :

Dans ce chapitre représente le problème de ce mémoire, telle que le but de ce chapitre est de déterminer, les conditions nécessaires et lsuffisantes d'optimalité pour problème de contrôle relaxé .

Chapitre 1

Généralités sur le Calcul Stochastique

Voir [3, 8, 10, 11]

1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *une tribu (où $\sigma -$ algèbre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$de sous-ensembles de Ω si elle vérifie les propriétés suivantes :*

– $\phi \in \mathcal{F}$.

– $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{F}$.

– $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable :$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

On s'appelle l'éspace $(\Omega, \mathcal{F})$ espace mesurable.

Définition 1.1.2 *(**mesure)** Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$, on dit que μ est une mesure (positive) sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si :*

1/ $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$.

2/ $\mu(\phi) = 0$.

3/ Pour $A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ *deux à deux disjoints, alors* $\mu\left\{\cup_{i=0}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$.

On s'appelle l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré.

Définition 1.1.3 ***(La tribu engendrée)*** *Soit* $A \in P(\Omega)$ *,la tribu engendrée par une famille de sous ensembles* A *sur est la plus petite tribu sur* Ω *contenant cette famille , on noté* $\sigma(A)$*.Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant* A*.*

Définition 1.1.4 ***('La tribu borélienne)*** *La tribu borélienne sur* $\Omega = [0,1]$ *est la tribu engendrée par la famille de sous-ensembles* $A = \{\ ]a,b[: 0 \leq a < b \leq 1\ \}$ $= \{$*intervalles ouverts dans* $[0,1]\}$*.Elle est notée* $\mathcal{B}([0,1])$*.*

Définition 1.1.5 ***(sous tribu)*** *On dit que* $\mathcal{G}$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *si et seulement si :*

$$\forall A \in P(\Omega) : A \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$$

1.2 Espace de probabilité

Définition 1.2.1 *Une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application* $\mathbb{P}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *telle que :*

A) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

B) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ pour des A_n appartenant à $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

Remarque 1.2.1 * *Un événement* $A \in \mathcal{F}$ *est dit* ***négligeable*** *si* $\mathbb{P}(A) = 0$*.*

* *Un événement* $A \in \mathcal{F}$ *est dit* ***presque sûr*** *(souvent abrégé p.s.) si* $\mathbb{P}(A) = 1$*,* ***i.e.*** *si* A^c *est négligeable.*

Définition 1.2.2 *Un espace de probabilité est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où :*

- Ω est un ensemble d'expérence aléatoire.
- $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω.
- $\mathbb{P}$ est une (mesure de) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Propriété 1.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité,alors :*

- $\mathbb{P}(\phi) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{F}; 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$
- $\forall A \in \mathcal{F}; \mathbb{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathbb{P}(A).$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}; \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$
- Si $A \subset B \in \mathcal{F}; \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}$ suit croissante $A_n \subset A_{n+1}$ et $\underset{n \geq 1}{\cup} A_n = A$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$$

1.3 Filtration :

Définition 1.3.1 *:Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$.

On parle d'hypothéses habituelles si :

- les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.
- La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Une filtration $\mathcal{G}$ est dite plus grosse que F si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\forall t$.

1.3.1 Mesurabilité

Définition 1.3.2 *Soit* $(\Omega,\ \mathcal{F})$ *et* $(E,\ \mathcal{E})$ *deux espaces mesurables. Une application* f *de* Ω *dans* E *est dite* $(\mathcal{F},\ \mathcal{E})$ *mesurable si :*$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{E}$,*où*

$$f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega \ \mid f(\omega) \in A\}$$

1.4 Variable aléatoire

Définition 1.4.1 *Soit* (Ω_1, A_1) *et* (Ω_2, A_2) *deux espaces mesurables et* X *une application de* (Ω_1, A_1) *dans* (Ω_2, A_2)*, Lapplication* X *est une variable aléatoire si :*

$$\forall A \in A_2 \qquad X^{-1}(A) \in A_1$$

Où

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\}.$$

- si Ω_2 est dénombrable, X est une variable aléatoire discréte.
- si $\Omega_2 = I \subseteq \mathbb{R}$, X est une variable aléatoire continue (réelle).

Définition 1.4.2 ***(Loi d'une variable aléatoire)*** *La loi de variable aléatoire* X *est l'application* $\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$*définie par*

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(\{X \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_X)$ forme un nouvel espace de probabilité.

Définition 1.4.3 ***(L'espérance)*** *d'une variable aléatoire X est défini par :*

$$E(X) = \int_{\Omega} dP = \begin{cases} \sum\limits_{K=0}^{n} kP(x=k). & \textit{cas discréte} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf\ \ (x)\,dx. & \textit{cas continue} \end{cases}$$

Propriété 1.4.1 *Soient X, Y deux v.a. intégrables.*

- Linéarité : $\mathbb{E}(cX+Y) = c\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y), c \in \mathbb{R}$ *et* X, Y v.a. intégrables.
- Positivité : si $X \geq 0$ $p.s.$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- Positivité stricte : si $X \geq 0$ $p.s.$ et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $X = 0$ $p.s.$
- Monotonie : si $X \geq Y p.s.$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Terminologie : Si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors on dit que X est une v.a. centrée.

- Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors on dit que X est une v.a. intégrable.
- Si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$,alors on dit que X est une v.a. de carré intégrable.
- On dit que X est une v.a. bornée s'il existe une constante $K > 0$ telle que $|X(\blacksquare)| \leq K, \forall \blacksquare \in \blacksquare$.

Définition 1.4.4 (***La variance***)*d'une variable aléatoire X est définie par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} (K-\mathbb{E}(X))^2 P(x=K), & \textit{cas discréte} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)\,dx, & \textit{cas continue} \end{cases}. \end{aligned}$$

Définition 1.4.5 ***(variable aléatoire indépendante)*** *Une famille $(X_1, ..., X_n)$ de v.a. $(\mathcal{F} - mesurables)$ est indépendante si $(\sigma(X_1), ..., \sigma(X_n))$ est indépendante.*

Proposition 1.4.1 *$(X_1, ..., X_n)$ est une famille de v.a. indépendante ssi les événements $\{X_1 \leq t_1\}, ..., \{X_n \leq t_n\}$ sont indépendants $\forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$.*

En particulier : $X \perp Y$ ssi $\mathbb{P}(\{X \leq t, Y \leq s\}) = \mathbb{P}(\{X \leq t\})\mathbb{P}(\{Y \leq s\}), \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.4.2 *Soient $c \in \mathbb{R}$ et X, Y deux v.a. de carré intégrable. Si $X \perp Y$, alors*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad et \quad \mathbb{V}ar(cX+Y) = c^2\mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y).$$

La première égalité dit que si deux v.a. sont indépendantes, alors elles sont décorrélées, la réciproque n'est pas vraie.

Définition 1.4.6 ***(variable aléatoire intégrable)*** *soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,on dit que X est v.a intégrable si :*

$$|\mathbb{E}(X)| < +\infty.$$

1.5 Espérance conditionnelle :

Définition 1.5.1 *Si X est une variable aléatoire intégrable dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu*

de $\mathcal{F}$, on dit que Y est une espérance conditionnelle de X respectivement à G si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et si :

$$\mathbb{E}[X1_A] = \mathbb{E}[Y1_A] \forall A \in \mathcal{G}.$$

On écrit alors :

$$Y = E\left[X \,|\mathcal{G}\right]$$

Propriétés 1.5.1 *Soient X, Y deux v.a. intégrables.*

- Linéarité : $E(cX + Y \mid \mathcal{G}) = cE(X \mid \mathcal{G}) + E(Y \mid \mathcal{G}) p.s.$
- Positivité-monotonie : $X \geq Y$ $p.s. \Rightarrow E(X \mid \mathcal{G}) \geq E(Y \mid \mathcal{G})$ $p.s.$
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
- Si $X \perp G$ alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ $p.s.$

– Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$ $p.s.$

– Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et bornée, alors $\mathbb{E}(XY \mid G) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})Y$ $p.s.$

– Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid\mathcal{G})|\mathcal{H})$ $p.s.$

1.6 Martingales

Définition 1.6.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t) -$ *adapté. On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t) -$ *martingale si :*

– $\mathbb{E}\left(|X_t|\right) < +\infty$ (autrement dit $X_t \in L^1(\Omega)$) pourtout $t \geq 0$.

– $\mathbb{E}[X_t \mid F_s] = X_s$ pour tout $s \leq t$.

1. **on dit que sur-martingale si pour** :

$$s \leq t : \mathbb{E}[X_t|F_s] \leq X_s.$$

2. **on dit que sous-martingale Si pour** :

$$s \leq t : \mathbb{E}[X_t|F_s] \geq X_s.$$

Définition 1.6.2 ***(Martingale locale)*** *Soit* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration et* $X = \{X\left(t\right), t \geq 0\}$ *un processus stochastique* $\mathcal{F}_t-$*adapté. On dit que* X *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale locale s'il existe une suite de* $\mathcal{F}_t-$ *temps d'arrêt* $\{\tau_n \; n \geq 0\}$ *telle que :*$\mathbb{P}\left(\tau_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty\right) = 1$ *et telle que : le processus* $X^n : t \to X_{t\wedge\tau_n}$ *est martingale nulle en* 0 $\forall n$.

Définition 1.6.3 ***(Semi-martingale)*** *Une Semi-martingale* X_t *est un processus réel adapté et càdlàg qui se décompose en une somme d'une martingale locale* M_t *et d'une processus* Y_t *réel càdlàg et a variation finie ie.*

$$X_t = M_t + Y_t.$$

1.7 Processus stochastiques

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in [0, \infty[)$ définies sur le même espace de probabilité .

Définition 1.7.1 ***(Processus)*** *Un processus stochastique* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit adaptée (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$*) si* X_t *est* $\mathcal{F}_t -$ *mesurable pour tout* t*.*

On dit que le processus est à trajectoires continues si les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Définition 1.7.2 ***(un processus à trajectoires continues)*** *Un processus* (X_t) *est appelé un processus à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \longmapsto X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Remarque 1.7.1 *Les v.a.* $X_t - X_s, t > s \geq 0$*, sont appelées des accroissements du processus* (X_t)*.*

Définition 1.7.3 ***(Processus prévisible)*** *On dit qu'un processus* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est prévisible pour* $\mathcal{A}_t$*, si* X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* X_t *est* $\mathcal{F}_{t-1}$*-mesurable pour chaque* $t > 0$*.*

Définition 1.7.4 ***(Processus adapté)*** *Un processus* X *est adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ *si, pour tout* t*,* X_e *est* $\mathcal{F}_t -$ *mesurable.*

Définition 1.7.5 ***(Processus à accroissements indépendants et stationnnaires)***

(Indépendance) : $(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s), \forall t > s \geq 0$.

(Stationnarité) : $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall t > s \geq 0$.

Définition 1.7.6 ***(processus progressivement mesurables).*** *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application*

$(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.7.7 ***(Un processus mesurable)*** *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

1.7.1 Mouvement Brownien Standard

Définition 1.7.8 *Un mouvement brownien standard (abrégé MBS.) est un processus aléatoire à temps continu $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ tel que :*

i) $B_0 = 0$ *p.s.*,

ii) (B_t) est à accroissements indépendants et stationnaires,

iii) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall t > 0$,

iv) (B_t) est à trajectoires continu.

Définition 1.7.9 ***(L'intégralle stochastique)*** *est une intégrale proposée avec des processus stochastiques sous la forme suivantes :*

$$\int_0^t X_s dB_s;$$

où $\{X_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Propriétés 1.7.1

1. Linéairité $\forall a \in \mathbb{R}$, Additivité : Pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t X(s)dB_s = \int_s^u X(s)dB_s + \int_u^t X(s)dB_s.$$

2. Si $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$\int_0^t a(X_s + Y_s)dB_s = a \int_0^t X_s dB_s + a \int_0^t Y_s dB_s,$$

3. Si $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$E\left[\int_0^T X(s)dB_s\right] = 0.$$

4. Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(s)dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (X(s))^2 \, ds.$$

5. Propriété du martingale $\quad \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)dBs$

1.8 Processus d'Itô

Définition 1.8.1 *Un processus X est un processus d'Itô si :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s \; ds + \int_0^t \sigma_s \; dB_s.$$

où b_s est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| \; ds$ existe (au sens Lebesgue) $p.s.$ pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} \quad dX_t = b_t \; dt + \sigma_t \; dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient b la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Définition 1.8.2 ***(Intégration par parties)*** *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

1.9 Formule d'Itô

Définition 1.9.1 *Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, X une semi-martingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ Alors, $F(X)$ est une semi-martingale et*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)_s \ dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X)_s \ d < X^i, X^j >_s .$$

Définition 1.9.2 ***($2^{éme}$ formule d'Itô) :****Soient f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_s'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

Définition 1.9.3 ***($3^{éme}$ formule d'Itô) :****Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées,Ona :*

$$\begin{aligned} f\left(X_t^1, X_t^2\right) &= f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^1 + \int_0^t (f_2'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(f_{1.1}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^1\right)^2 + 2\rho f_{1.2}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{2.2}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^2\right)^2\right) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Les équations Différentielles Stochastiques (EDS), (EDSR) et système EDS-EDSR

Dans ce chapitre, nous allons étudier la forme générale des équations différentielles stochastiques (EDS), équations différentielles stochastiques rétrogradé $(EDSR)$ et système d'équation différentielle stochastique-équation différentielle stochastique rétrograde $(EDS - EDSR)$ EDSBF, ainsi que la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution qui est vérifiée par un ensemble de conditions que nous examinerons.Voir [1, 3, 13, 14]

2.1 Équations Différentielles Stochastiques (EDS)

Définition 2.1.1 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité filtré,* B_t *un* $(\mathcal{F}_t) - MB$ *d-dimensionnelle,* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus stochastique continue à* *valeur dans $\mathbb{R}^n$, et*

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}_{n\times d}(\mathbb{R}),$$

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right)\ dt + \sigma\left(t; X_t\right)\ dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *On dit que l'équation (2.1) admet unique solution forte si pour deux solutions fortes $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ on a :*

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t - Y_t\right| > 0) = 0,$$

Théor■me 2.1.1 ***(Théorème d'existence et unicité)*** *Supposons que pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \geq 0$, les fonctions σ et b satisfait les conditions suivants :*

1. les fonctions σ et b sont continues.
2. **Condition Lipschitz** : il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\left|b\left(t,x\right) - b\left(t,y\right)\right|^2 + \left|\sigma\left(t,x\right) - \sigma\left(t,y\right)\right|^2 \leq L\left|x-y\right|^2. \tag{2.2}$$

3. **Croissance linéaire :** il existe une constante $c > 0$ telle que :$|b\left(t,x\right)|^2 + \left|b\left(t,y\right)\right|^2 \leq c\left(1+|x|^2\right)$.

Si les coefficients b et σ vérifient les conditions (2.2) et (**??**). Alors l' equation (2.1) admet une solution forte unique $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$,$(\mathcal{F}_t)$–adapté et continue avec condition initiale $X_0 = x$ de plus cette solution est Markovienne et vérifie

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] < M,$$

où M est une constante qui dépend de L, T et x.

2.1.1 L'existence et L'unicité de la solution

Preuve. L'existence et L'unicité 2.1.1 ■

i) Unicité de la solution de(2.1)

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ deux solutions pour l'équation (2.1) tel que $X_0 = Y_0 = x$, et en appliquant l'inégalité de Young $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, et en utilisant les formules de X_t, Y_t on obtient :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left|x + \int_0^t b(r, X_r)\,dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)\,dW_r - (x + \int_0^t b(r, Y_r)\,dr + \int_0^t \sigma(r, Y_r)\,dW_r)\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t (b(r, X_r) - b(r, Y_r))\,dr + \int_0^t (\sigma(r, X_r) - \sigma(r, Y_r))\,dW_r\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t (b(r, X_r) - b(r, Y_r))\,dr\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(r, X_r) - \sigma(r, Y_r))\,dW_r\right|^2.
\end{aligned}$$

nous appliquons l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t b(r, X_r) - b(r, Y_r)\,dr\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(r, X_r) - \sigma(r, Y_r))\,dW_r\right|^2$$

D'après L'isométrie d'Itô (2.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz proposition 3.5.1 , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 &\leq 2\mathbb{E}\int_0^t \left(\mathbf{1}^2 \, dr\right)\int_0^t \left|\left(b\left(r, X_r\right) - b\left(r, Yr\right)\right)\right|^2 dr + 2\mathbb{E}|\left|\int_0^t \left(\sigma\left(r, X_r\right) - \sigma\left(r, Y_r\right)\right)\right|^2 dr \\
&\leq 2t\mathbb{E}\int_0^t \left|b\left(r, X_r\right) - b\left(r, Y_r\right)\right|^2 dr + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(r, X_r\right) - \sigma\left(r, Y_r\right)\right|^2 dr
\end{aligned}$$

D'après condition Lipschitienne (2.2) , et la théorème de Fubini 3.5.5 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 &\leq 2T\int_0^t \mathbb{E}\left|\left(b\left(r, X_r\right) - b\left(r, Y_r\right)\right)\right|^2 dr + 2\int_0^t \mathbb{E}\left|\left(\sigma\left(r, X_r\right) - \sigma\left(r, Y_r\right)\right|^2 dr \\
&\leq 2TL\int_0^t \mathbb{E}\left|X_r - Y_r\right|^2 dr + 2L\int_0^t \mathbb{E}\left|X_r - Y_r\right|^2 dr \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_r - Y_r\right|^2 dr,
\end{aligned}$$

telle que $C = \max(2TL, 2L)$, alors

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_r - Y_r\right|^2 dr.$$

D'après Lemme Gronwall 3.5.1, on obtient

$$0 \leq \mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 0\exp\left(Ct\right) = 0$$

Donc $\mathbb{P}.p.s$ $X = Y$

ii) Existence d'une solution de (2.1)

On utilise la méthode des aproximations successives :

$$X_t^n = x + \int_0^t b\left(r, X_r^{n-1}\right) dr + \int_0^t \sigma\left(r, X_r^{n-1}\right) dW_r.$$

et on a :

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 = \left|\int_0^t \left(b\left(r, X_r^n\right) - b\left(r, X_r^{n-1}\right)\right) dr + \left(\sigma\left(r, X_r^n\right) - \sigma\left(r, X_r^{n-1}\right)\right) dW_r\right|^2.$$

Nous utilisons la même méthode pour **l'unicité**, on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left|X_r^n - X_r^{n-1}\right|^2 dr.$$

Pour $n = 0$ on a

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2T\mathbb{E}\int_0^t \left|b\left(r, X_r^0\right)\right|^2 dr + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma\left(r, X_r^0\right)\right|^2 dr.$$

D'après la croissance linéaire (**??**) b et σ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 &\leq 2Tc\mathbb{E}\int_0^t \left(1 + |X_r|^2\right) dr + 2c\mathbb{E}\int_0^t ((1 + |X_r|^2) dr \\
&\leq 2Tc\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}|X_r|^2\right) dr + 2c\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}|X_r|^2\right) dr \\
&\leq M\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}|X_r|^2\right) dr \\
&\leq CT,
\end{aligned}$$

telle que $M = \max(2Tc, 2c)$ et $CT = M\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}|X_t|^2\right) dr$, ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 &\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_r^1 - X_r^0\right|^2 dr \\
&\leq C\int_0^t Cr\ dr \\
&\leq C^2\int_0^t r\ dr \\
&\leq C^2\frac{T^2}{2}.
\end{aligned}$$

Alors pout tout $n \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2 &\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2 dr \\
&\leq \frac{C^{n+1}}{n!}\int_0^t r^n dr \\
&\leq \frac{C^{n+1}}{n!}\frac{T^{n+1}}{n+1} \\
&\leq \frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Nous montrons que X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left|X_t^m-X_t^n\right|^2\right)^{1/2} &= \left\|X_t^m-X_t^n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1}\left\|X_t^{k+1}-X_t^k\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1}\left[\frac{(C_M T)^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{1/2} \underset{n\to\infty,m\to\infty}{\rightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Lorsque $n\to\infty$, et $m\to\infty$,

$$\left(\mathbb{E}\left|X_t^m-X_t^n\right|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Donc X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ qui est lui même un espace complet, et par conséquence elle est convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Notons X_t la limite de la suite $\left(X_t^n\right)_n$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} X_t^n = X_t$ dans $\left(\mathbb{L}^2(\Omega)\right)$, telle que :

$$X_t = x + \int_0^t b\left(r, X_r\right) dr + \int_0^t \sigma\left(r, X_r\right) dW_r.$$

On a déjà montrer que $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t$ telle que

$$X_t^n = x + \int_0^t b\left(r, X_r^{n-1}\right) dr + \int_0^t \sigma\left(r, X_r^{n-1}\right) dW_r.$$

nous montrer que la solution s'écrit sous la forme EDS, en utiliser l'isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left|\left(\int_0^t \sigma\left(r, X_r^{n-1}\right) - \sigma\left(r, X_r\right)\right) dW_r\right|^2 \leq C\mathbb{E}\left|X_t^{n-1} - X_t\right|^2 \to 0,$$

puis que $X_t^n \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t$, donc $\sigma\left(r, X_r^{n-1}\right) \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} \sigma\left(r, X_r\right).$

Nous appliquons l'inégalité de Hôlder 3.5.4, on trouve

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(b\left(r, X_r^{n-1}\right) - b\left(r, X_r\right)\right) dr\right|^2 \leq CT\mathbb{E}\left|X_t^{n-1} - X_t\right|^2 \to 0,$$

puis que $X_t^n \overset{\mathbb{L}_2(\Omega)}{\to} X_t$, et par la continuité de $b(\omega, t)$. Alors $b\left(r, X_r^{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} b\left(r, X_r\right))$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

En passant à la limite, on obtient :

$$X_t^n = x + \int_0^t b\left(r, X_r^{n-1}\right) dr + \int_0^t \sigma\left(r, X_r^{n-1}\right) dW_r \overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\to} X_t = x + \int_0^t b\left(r, X_r\right) dr + \int_0^t \sigma\left(r, Xr\right) dW_r.$$

Donc X_t est un solution de l'équation (2.1).

Nous montrons que $\mathbb{E}\left(\sup_t |X_t|^2\right) < M$, par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 2(a^2+b^2+c^2)$, et on passant à l'espérance alors

$$\mathbb{E}(\,|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}|x|^2 + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(r, X_r\right)\right|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(r, X_r\right)\right|^2\right] dr.$$

D'après la croissante linéaire de b et σ (**??**) , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\,|X_t|^2) &\leq 3\mathbb{E}\,|x|^2 + 3Tc\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_r|^2\right)\right] dr + 3c\mathbb{E}\left[\int_0^t (1+|X_r|^2)\right] dr \\
&\leq N\mathbb{E}\,|x|^2 + N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_r|^2\right)\right] dr + N\mathbb{E}\left[\int_0^t (1+|X_r|^2)\right] dr \\
&\leq N\mathbb{E}\,|x|^2 + 2N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_r|^2\right)\right] dr \\
&\leq c_N\mathbb{E}\,|x|^2 + c_N\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1+|X_r|^2\right)\right] dr \\
&\leq c_N\mathbb{E}\,|x|^2 + c_N T + c_N\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_r|^2\right] dr \\
&\leq c_N(\mathbb{E}\,|x|^2 + T) + c_N\int_0^t \mathbb{E}\,|X_r|^2\,dr,
\end{aligned}$$

avec $N = \max\,(3, 3c, 3cT)$ et $c_N = \max(2N, N)$, et nous appliquons le lemme de Gronwall **3.5.1**, on obtient :

$$\mathbb{E}(\,|X_t|^2) \leq \left[\mathbb{E}|x|^2 + T\right] \exp\left(c_N t\right) \leq M.$$

Puis que $\left[\mathbb{E}\,|x|^2 + T\right] < \infty$, telle que $M = (\mathbb{E}\,|x|^2 + T)\exp(c_N t)$, alors

$$\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) \leq \infty \;\forall t \in [0, T]\,.$$

Ce qui implique d'après 3.5.2

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right) < M.$$

2.2 Équations Différentielles Stochastiques Rétrograde (EDSR)

Équations Différentielles Stochastiques Rétrograde Introduites par Bismut (1973) dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng (1990) dans le cas général, les équations différentielles stochastiques rétrogrades (car la valeur terminale cie la fonction inconnue est donnée), en abrégé **EDSR**, apparaissent dans de nombreux problèmes en finance.

Définition 2.2.1 *Une équation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} \quad dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right)\ dt - Z_t\ dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi\ , & \end{cases} , \tag{2.3}$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(r, Y_r, Z_r\right)\ dr - \int_t^T Z_r\ dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.4}$$

Où

$$\begin{aligned} f: \quad & \left([0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}\right) \to \mathbb{R}^k \\ & (t, \omega, y, z) \longmapsto f\left(t, \omega, y, z\right). \end{aligned}$$

La fonction f s'appelle le générateur et mesurable par rapport :$\mathbb{P}. \times \mathbb{B}$ et ξ et $\mathcal{F}_T-$mesurable carré intégrable $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$.

Définition 2.2.2 *Une solution de* ***l'EDSR*** *(2.3) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;

2. $\mathbb{P}-p.s$, $\int_0^T \left\{ |f(r, Y_r, Z_r)| + ||Z_r||^2 \right\} dr < \infty$.

3. $\mathbb{P}-p.s$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) \ dr - \int_t^T Z_r \ dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

Y_t est une semi–martingale continue, car Y_t écrit sous la forme $Y_t = M_t + A_t$ telle que M_t est un martingale local et A_t est un processus stochastique a variation finie.

En effet on a Y_t est continue car $Y_t \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) \, dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

$A_t = \displaystyle\int_t^T f(r, Y_r, Z_r) \, dr$ est un processus stochastique à variation finie où :

$$\left\langle \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) \, dr, \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) \, dr \right\rangle = 0 < \infty.$$

$M_t = -\displaystyle\int_t^T Z_r dW_r$ est un intégrale d'Itô alors est martingale, et comme tout martingale est un martingale locale .

Donc Y_t est un semi-martingale continue.

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ *, positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive* λ *tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d}, \qquad |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda \left(|y| + ||z|| \right).$$

Proposition 2.2.2 *Supposons que 2.2.1 est vraie et si* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *est une solution de* ***l'EDSR*** *(2.3) telle que* $Z \in \mathbb{M}^2$ *alors* $Y \in \mathbb{S}^2$.

Preuve. Y_0 est déterministe, alors pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}|Y_t| &= |Y_0 - \int_0^t f(r,Y_r,Z_r)dr + \int_0^t Z_r dW_r| \\ &\leq |Y_0| + |\int_0^t f(r,Y_r,Z_r)dr| + |\int_0^t Z_r dW_r|.\end{aligned}$$

D'après proposition 2.2.1 **,** on a :

$$\begin{aligned}|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t \left(f_r + \lambda\left(|y_r| + \|z_r\|\right)\right) dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_r dW_r| \\ &\leq \underbrace{|Y_0| + \int_0^t (f_r + \lambda \|z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_r dW_r|}_{=:\varepsilon} + \lambda \int_0^t |y_r|\, dr \\ &\leq \varepsilon + \lambda \int_0^t |y_r|\, dr.\end{aligned}$$

Si $Z \in \mathbb{M}^2$ donc $\mathbb{E}\left(\int_0^t ||Z_r||^2 dr\right) < \infty$ et d'après l'inégalité de (3.5.2), on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_s dW_s|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^t |Z_r|^2 dr\right) < \infty.$$

On sait que Y_0 et $\{f_t\}_{t\in[0,T]}$ sont déterministe et de carrée intégrable, et comme Y_t est un processus continue et $|Y_t| \leq \varepsilon + \lambda \int_0^t |y_r|\, dr$, donc nous appliquons de lemme de Gronwall 3.5.1 i.e

$$|Y_t| \leq \varepsilon \exp(\lambda t),$$

telle que $t \in [0,T]$ (d'horizon finie), donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|\right] \leq \varepsilon \exp(\lambda t).$$

On a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|\right] \leq \varepsilon \exp(\lambda t) < \infty.$$

Donc $Y \in \mathbb{S}^2$. ■

Lemme 2.2.1 *Si* $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, *alors*

$$X_t = \left\{ \int_0^t Y_r Z_r \, dW_r, \qquad t \in [0,T] \right\}, \tag{2.5}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. 1)X_t est un intégrale d'Itô $\Longrightarrow$ est martingale, telle que $Y_r\ Z_r$ est un bon-processus.

En effet $Y_r\ Z_r$ est adapté et càdlàg car $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz(3.5.1) et l'inégalité de Young (3.5.3) on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_r Z_r| dr\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_r|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_r|^2\right] \int_0^T dr + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] \\
&\leq \frac{T}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_r|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

■

car $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. X_t est uniformément intégrable :

D'après l'inégalité de **B-D-G** (3.5.2) et l'inégalité de Young (3.5.3) $ab \leq a^2 + b^2$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r Z_r \ dW_r\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 \ dr\right|\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|^2 \int_0^t \|Z_r\|^2 \ dr\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right] \\
&\leq C'\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_r|^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

avec $C' = \max\left(\frac{C^2}{2}, \frac{1}{2}\right)$ car $Y \in \mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ .Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|\right] < \infty.$$

Donc X_t est uniformément intégrable.

2.2.1 Le cas Lipschitz

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité .Ce résultat est dû à **E**. **Pardoux** et **S. Peng** [13] ; c'est le premier résultat d'**existence** et d'**unicité** pour les **EDSR** dans le cas où le générateur est non-linéaire.

soit $f : \left([0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}\right) \to \mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_t - mesurable$, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Hypothése (L)

Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P} - p.s.$,

1. condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z',

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda\left(|y-y'| + \|z-z'\|\right).$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2\, dr\right] < \infty.$$

Cas simple f ne dépend pas ni de y de ni z

Soit f ne dépend ni de y ni de z **i.e.** on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR 2.3.**

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r\, dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.6}$$

Lemme 2.2.2 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. L'**EDSR** (2.6) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in \mathbb{M}^2$.*

1) L'existence : (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z \in \mathbb{M}^2$.si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement

$$Y_t = \mathbb{E}\left(Y_t \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r \mid \mathcal{F}_t\right).$$

On a $\int_0^T Z_r dW_r$ intégrale d'Itô, donc $\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_r dW_r\right) = 0$, on fait dans $\mathbb{S}_c^2$ par ce que F est de carré intégrable,et on a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr \\ &= M_t - \int_0^t F_r dr, \end{aligned}$$

Soient M_t une martingale $\mathcal{F}_t-$adapté. D'après le théorème de représentation des martingales 3.5.6.Donc il existe un processus prévisible Z carré intégrable $(Z \in \mathbb{M}^2)$, telle que

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_r dr \\ &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'**EDSR** (2.6) étudiée et comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr\right) \\ &= \left(\int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr\right) - \left(\int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T Z_r dW_r\right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

donc

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.$$

2) L'unicité : Soit (Y_t, Z_t) et (Y_t', Z_t') deux solutions de l'**EDSR**(2.6) , et $Y_T = Y_T'$, $F_r = F_r'$, soit : $\mathcal{Y}_t = Y_t -\ Y_t'$ et $\mathcal{Z} = Z_t -\ Z_t'$ nous prouvons que $Y_t = Y_t'$ et $Z_t = Z_t'$

$d\mathbb{P}\times dt{-}ps.$

$$\mathcal{Y}_t = -\int_t^T \mathcal{Z}_r dW_r.$$

On applique la formule d'Ito telle que $g\left(\mathcal{Y}_t\right) = \left|\mathcal{Y}_t\right|^2$:

$$\begin{aligned} d\left|\mathcal{Y}_t\right|^2 &= 2\mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_t + 2\frac{1}{2}\left\langle \mathcal{Y}_t \right\rangle \\ &= 2\mathcal{Y}_t d\mathcal{Y}_t + \left\|\mathcal{Z}_t\right\|^2 dt \end{aligned}$$

on applique l'intégrale et comme $\mathcal{Y}_T = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \int_t^T d\left|\mathcal{Y}_r\right|^2 &= 2\int_t^T \mathcal{Y}_r d\mathcal{Y}_r + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_r\right\|^2 dr \\ 0 - \mathcal{Y}_t &= 2\int_t^T \mathcal{Y}_r d\mathcal{Y}_r + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_r\right\|^2 dr, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{Y}_r d\mathcal{Y}_r = -\mathcal{Y}_r \mathcal{Z}_r dW_r.$$

Donc

$$-\left|\mathcal{Y}_t\right|^2 = -2\int_t^T \mathcal{Y}_r \mathcal{Z}_r dW_r + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_r\right\|^2 dr.$$

Alors

$$\int_t^T \mathcal{Y}_r \mathcal{Z}_r dW_r = \left|\mathcal{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_r\right\|^2 dr.$$

comme $\int_t^T \mathcal{Y}_r \mathcal{Z}_r dW_r$ est un intégrale d'Itô, donc $\mathbb{E}\left[\int_t^T \mathcal{Y}_r \mathcal{Z}_r dW_r\right] = 0$, alors :

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathcal{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left\|\mathcal{Z}_r\right\|^2 dr\right] = 0,$$

$$\begin{cases} \left|\mathcal{Y}_t\right|^2 = 0 \text{ alors } \mathcal{Y}_t = 0, d\mathbb{P} - ps \\ \int_t^T \left\|\mathcal{Z}r\right\|^2 dr = 0 \text{ alors } \mathcal{Z}_r = 0, d\mathbb{P}\times dt{-}ps \end{cases}$$

Alors $d\mathbb{P}\times dt-ps$

$$\begin{cases} Y_t = Y'_t, \\ Z_t = Z'_t. \end{cases}$$

Cas où f dépend de y et z

Théor■me 2.2.1 *(**Pardoux–Peng** [13])'L'hypothèse (L), l'**EDSR** (2.3) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe (3.5.2) dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'$EDSR$ (2.3) ssi c'est un point fixe de Ψ.

Pour $(U, V) \in \mathcal{B}^2$, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ une solution de l'**EDSR** :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(r, U_r, V_r\right)\, dr - \int_t^T Z_r\, dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.7}$$

■

Nous remarquons que l'**EDSR**(2.7) possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.En effet, posons $F_r = f(r, U_r, Vr) \in M^2$ puisque, f est $\lambda-$Lipschitz,on a

$$\begin{aligned} \left|f\left(r, U_r, V_r\right) - f\left(r, U'_r, V'_r\right)\right| &\leq \lambda\left(\left|U_r - U'_r\right| + \left\|V_r - V'_r\right\|\right) \\ &\leq \lambda\left|U_r - U'_r\right| + \lambda\left\|V_r - V'_r\right\|. \end{aligned}$$

Soint $U'_r = V'_r = 0$, alors :

$$\left|f\left(r, U_r, V_r\right)\right| - \left|f\left(r, 0, 0\right)\right| \leq \left|f\left(r, U_r, V_r\right) - f\left(r, 0, 0\right)\right| \leq \lambda\left|U_r\right| + \lambda\left\|V_r\right\|.$$

Donc

$$\left|f\left(r, U_r, V_r\right)\right| \leq f\left(r, 0, 0\right) + \lambda\left|U_r\right| + \lambda\left\|V_r\right\|,$$

avec f et U_r et V_r sont des processus de carré intégrable, alors par suit nous pouvons appliquer le lemme **2.2.2** pour obtenir un unique solution (Y, Z) tel que $Z \in \mathbb{M}^2$.L'intégrabilité de Z est obtenue par le théorème de représentions de martingale 3.5.6 et d'après la proposition 2.2.2, alors $Y \in \mathbb{S}^2$.Soint (U, V) et $(U', V') \in \mathbb{B}^2$ où $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ et $(Y', Z') = \Psi(U', V')$.

Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$ et $y_T = 0$ tell que

$$dy_t = f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t) - z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô sur $\exp(\alpha t)|y_t|^2$, soit $g(t, x_t) = \exp(\alpha t)|x_t|^2$, alors calculer les dérivées :

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right) &= \alpha \exp(\alpha t)|y_t|^2 dt + 2\exp(\alpha t) y_t dy_t + \frac{1}{2} 2\exp(\alpha t)\langle dy\rangle_t \\ &= \alpha \exp(\alpha t)|y_t|^2 dt + 2\exp(\alpha t) y_t \left[f\left[(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\right] - z_t dB_t\right] \\ &+ \exp(\alpha t)\|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

Nous appliquons à l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_t^T d\left(\exp(\alpha r)|y_r|^2\right) \\ &= \int_t^T \left(\alpha \exp(\alpha r)|y_r|^2 dr + 2\exp(\alpha r) y_r \left[\left[f(r, U_r, V_r) - f(r, U'_r, V'_r)\right] - z_r dW_r\right]\right) \\ &+ \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha s)|y_T|^2 - \exp(\alpha t)|y_t|^2 \\
&= \int_t^T \alpha \exp(\alpha r)|y_r|^2 dr + \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \\
&+ 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r \left[f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r', V_r') - \int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&-\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \right] \\
&= 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r \left[f(r, U_r', V_r') - f(r, U_r, V_r) + \int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r \right] \\
&- \int_t^T \alpha \exp(\alpha r)|y_r|^2 dr.
\end{aligned}$$

Comme f est $\lambda-$Lipchitzienne et on note par $u = U' - U$ et par $v = V' - V$, on a

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \\
&= -\int_t^T -\alpha \exp(\alpha r)|y_r|^2 dr + 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r (\lambda |U_r' - U_r| + \lambda \|V_r' - V_r\|) \\
&+ 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r \\
&\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \\
&= \int_t^T -\alpha \exp(\alpha r)|y_r|^2 dr + 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r (\lambda |u_r| + \lambda \|v_r\|) \\
&+ 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en appliquant inégalité de Yong 3.5.3 $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, on a

$$\begin{aligned}
&\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \\
&\leq \int_t^T \left[-\alpha + 2\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right]|y_r|^2 dr \\
&+ \varepsilon \int_t^T \exp(\alpha r)\left(|u_r|^2 + \|v_r\|^2\right) dr + 2\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_r.
\end{aligned}$$

Prenant $\alpha = \dfrac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ et $R_\varepsilon = \varepsilon \displaystyle\int_0^T \exp(\alpha s)\left(|u|^2 + \|v\|^2\right) ds$, donc $\forall t \in [0,T]$

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_r.$$

Alors

$$\exp(\alpha t)|y_t|^2 \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_r\ , \tag{2.8}$$

$$\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_s. \tag{2.9}$$

D'après (2.8) et $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_r\right]$, la martingale locale $\displaystyle\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_r$ est une martingale nulle en 0 puisque Y, $Y' \in \mathbb{S}^2$, et $Z, Z' \in \mathbb{M}^2$, donc

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon).$$

D'autre part d'après (2.9), et on applique l'inégalité de Doob **??** et de BGD (3.5.2), n obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\le \mathbb{E}(R_\varepsilon)+2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\int_t^T \exp(\alpha r)\, y_r z_r dW_r\right)\\
&\le \mathbb{E}(R_\varepsilon)+C\mathbb{E}\left(\int_t^T \exp(\alpha r)|y_r|^2\|z_r\|^2 dr\right)\\
&\le \mathbb{E}(R_\varepsilon)+C\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\exp(\alpha t)|y_t|^2\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right)\\
&\le \mathbb{E}(R_\varepsilon)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right]-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\le \mathbb{E}(R_\varepsilon)+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon)\\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] &\le \mathbb{E}(R_\varepsilon)+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right] \le 2\mathbb{E}(R_\varepsilon)+C^2\mathbb{E}(R_\varepsilon).
$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right] &= \mathbb{E}(R_\varepsilon)+2\mathbb{E}(R_\varepsilon)+C^2\mathbb{E}(R_\varepsilon)\\
&= \left(3+C^2\right)\mathbb{E}(R_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Et par suite d'après la définition de R_ε on a :

$$\begin{aligned}
&\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right] \\
&= \left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon\int_0^T \exp(\alpha r)\left(|u_r|^2+\|v_r\|^2\right)dr\right) \\
&= \varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\int_0^T \exp(\alpha r)|u_r|^2 dr+\int_0^T \exp(\alpha r)\|v_r\|^2 dr\right) \\
&= \varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\exp(\alpha t)|u_t|^2\int_0^T dr+\int_0^T \exp(\alpha r)\|v_r\|^2 dr\right) \\
&= \varepsilon\left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left(\exp(\alpha t)|u_t|^2 T+\int_0^T \exp(\alpha r)\|v_r\|^2 dr\right) \\
&= \varepsilon\left(3+C^2\right)K,
\end{aligned}$$

telle que $K=(1\vee T)$, on prenant telle que :$\varepsilon\left(3+C^2\right)K=\frac{2}{5}$ de sort que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathbb{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme suivante

$$\|U,V\|_\alpha=\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\exp(\alpha t)|y_t|^2\right)+\int_0^T \exp(\alpha r)\|z_r\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}.$$

le cas que $[\alpha=0]$ alors Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui démontrer l'existence et l'unicité d'un solution de l'EDSR (2.3) .

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in\mathbb{M}^2$ puisque 2.2.2 implique qu'un telle solution appartient $\mathbb{B}^2$.

Remarque 2.2.1 *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression* « **la solution de l'EDSR** » *signifiera la solution de l'EDSR vérifiant* $Z\in\mathbb{M}^2$.

2.2.2 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul..

Proposition 2.2.3 *Soient* (Y, Z) *la solution de l'EDSR* (2.3) *et un temps d'arrêt majoré par* T *On suppose, en outre l'hypothèse* (**H2**) *que est* $\mathcal{F}_T$ *–mesurable et que* $f(t, y, z) = 0$ *dès que* $t \geq \tau$ *. Alors si* $t \geq \tau$

$$\begin{cases} Y_t = Y_{t\wedge\tau}, \\ Z_t = 0. \end{cases}$$

Preuve. On a $\mathbb{P}-p.s.$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(r, Y_r, Z_r\right)\ dr - \int_t^T Z_r\ dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

et donc $t = \tau$, comme $f\left(r, Y_r, Z_r\right) = 0$ dés que $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f\left(r, Y_r, Z_r\right)\ dr - \int_\tau^T Z_r\ dW_r = \xi - \int_\tau^T Z_r\ dW_r.$$

Il vient alors $Y_\tau = \mathbb{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \xi$ et par suit $\int_\tau^T Z_r\ dW_r = 0$ d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r\ dW_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \left\|Z_r\right\|^2 dr\right] = 0.$$

et finalement que $Z_r \mathbf{1}_{r\geq\tau} = 0$.Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau$, $Y_t = Y_\tau$ puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_t^t f\left(r, Y_r, Z_r\right) dr - \int_t^t Z_r dW_r = Y_t + 0 - 0.$$

■

Notons que dans le cas où ξet f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = f\left(t, Y_t, 0\right), \qquad Y_T = \xi$$

2.3 Système équations Différentielles Stochastiques EDS-EDSR

Dans cette section, nous aborderons le système d'équations différentielles stochastiques et les équations différentielles stochastiques rétrogrades, qui peuvent être divisées en deux catégories. système faiblement couplée ou fortement couplée (totalement couplée)

2.3.1 système EDS-EDSR faiblement couplée

On s'intéresse àcoupler faiblement une équation diffèrentielle stochastique EDS ,à une équation diffèrentielle stochastique rètrograde EDSR telle que la solution de EDS est indépendante de la solution de EDSR donc, nous parlons d'un système de ce type

$$\begin{cases} dX_t = & b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t; X_t\right) dW_t \\ dY_t = & f\left(t, X_t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dW_t, \\ X_0 = x & , Y_T = \xi,\ 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.10}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^d$.

$b : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$\sigma : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$,

$f : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

Définition 2.3.1 *La solution du système (2.10) est tout triplet $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable $(X(); Y(); Z())$ a valeursdans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n \times d}$ telque :*

1. $E\left[\sup_{0 \leq t \leq T}\left(|X_t|^2 + |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt\right)\right] < +\infty$.
2. *$P - p.s$ l'équation (2.10) est verifée.*

Remarque 2.3.1 *En ce qui concerne l'étude des solutions, étant donné que la deuxième* *équation est uniquement liée à la première, il est possible de résoudre cette dernière comme dans la première section et de la substituer dans la deuxième équation, qui sera étudiée comme dans la deuxième section, en ajoutant les mêmes conditions sur la fonction par rapport aux Y et Z à la variable X.*

Remarque 2.3.2 1. *Le système EDS-EDSR fortement couplée est un système plus "compliqué" où l'équation différentielle stochastique progressive (2.1)et l'équation différentielle rétrograde (2.3) sont fortement liées ce la forme suivante.*

$$\begin{cases} dX_t = & b(t, X_t, Y_t, Z_t)\, dt + \sigma(t, X_t, Y_t, Z_t)\, dW_t \\ dY_t = & f(t, X_t, Y_t, Z_t)\;\; dt - Z_t dW_t, \\ X_0 = x & , Y_T = \xi,\;\; 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^d$,

$b : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$\sigma : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$,

$f : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

2. *Ce système est abrégé par le terme $EDSPR$*

3. *On a un cas particulier σ ne dépend pas à Z. .*

Chapitre 3

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème des contrôles stochastiques relaxé

Dans ce chapitre nous voulons détailler l'article[9] qui traite de Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème des contrôles stochastiques relaxé

3.1 Formulation du problème

Soient T un réel positif ,U un ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$,et $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfait les conditions usuelles,$B = (B_t)_{t\geq 0}$ un Mouvement Brownien .

3.1.1 Contrôle stochastique strict

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité muni d'une filtration satisfaisant les conditions habituelles, dans lequel un mouvement brownien unidimensionnel $B = (B_t; 0 \leq t \leq T)$ est défini. Nous supposons que $\left(\mathcal{F}_t^B\right) = \sigma\left(B_s : 0 \leq s \leq t\right) \vee \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ désigne l'ensembles négligabless de $\mathbb{P}$ ensembles nuls. Soit T un nombre réel strictement positif Öxé, et $U \subset \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{M}^2\left([0,T], \mathbb{R}\right)$ l'ensemble des processus aléatoires mesurables à une dimension qui satisfont à:

(i) $\mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t|^2 \ dt\right] < \infty.$

(ii) φ_t est $\mathcal{F}_{[t,T]}^B - mesurable$, pour tout $t \in [0;T]$.

Soit $S^2\left([0,T], \mathbb{R}\right)$ l'ensemble des processus aléatoires continus à une dimension qui satisfont à :

(i) $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2 dt\right] < \infty.$

(ii) φ_t est $\mathcal{F}_{[t,T]}^B$−mesurable, pour tout $t \in [0;T]$.

$C^1\left([0,T], \mathbb{R}\right)$ est l'ensemble des fonctions continûment différentiables définies dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *Le contrôle admissible strict est un processus $v, \mathcal{F}_t-$adapté prenant ces valeurs dans U tel que* $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |v_t|^2\right] < \infty.$

Nous désignons par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles. L'ensemble U de tous les contrôles admissibles n'est pas nécessairement convexe.

Pour tout $v \in U$, nous considérons le système **EDS-EDSR** suivant :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t^v, v_t\right) \ dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) \ dB_t, \\ dy_t = -g\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) \ dt + z_t^v dB_t, \\ x_0^v = \zeta, \quad y_T^v = \eta, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$g : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

ζ et η sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_0^B-$mesurable,telles que

$$\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + |\eta|^2\right] < \infty,$$

Nous définissons maintenant le fonctionnel de coût performance au risque suivant

$$J(v) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^v\right) + \Psi\left(y_0^v\right) + \int_0^T f\ \left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right)\ dt\right)\right], \tag{3.2}$$

avec

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\theta > 0$ est appelé le paramètre sensible au risque.

Le contrôle strict $u \in U$ est optimal s'il satisfait à :

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v). \tag{3.3}$$

Supposons les hypothèses suivantes :

Les fonctions b et h sont de classe $C^1([0, T], \mathbb{R})$ par rapport à x.

Les fonctions g et f sont de classe $C^1([0, T], \mathbb{R})$ par rapport à x, y et z, et Ψ par rapport à y.

Les fonctions b, g et f et toutes leurs dérivées sont **Lipschitz**.

La dérivée de h est bornée par $C(1+|x|)$ et la dérivée de Ψ est bornée par $C(1+|y|)$.

Théor■me 3.1.1 *Sous les hypothèses précédentes , pour tout $v \in U$, le système (3.1) admet une solution forte unique et la fonction coût (3.2) est bien définie de U à $\mathbb{R}$.*

Preuve. La preuve peut être trouvée dans l'article de Ma et al [13]. ■

3.2 Modèle Relaxé

L'idée dans le modèle relaxé est de remplacer le processus v a valeur dans U, par un processus q a valeur dans $\mathbb{P}(U)$, où $\mathbb{P}(U)$ représente l'espace des mesures de probabilité sur U, offrant une structure topologique très riche. Pour plus de détails, voir [2] et [6].

Définition 3.2.1 *Un contrôle relaxé q est une processus aléatoire $q(w; dt; da)$ définie sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ avec des valeurs dans $\mathbb{P}(U)$, processus progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^B$, tel que :$\forall t, I_{]0;T]}qt$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^B$ et* $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} \int_U |a|^2 q_t da\right] < \infty$.

Définition 3.2.2 *Nous désignons par $\mathcal{R}$ l'ensemble de tous les contrôles relaxés. Pour chaque $q \in \mathcal{R}$, nous obtenons le **EDS-EDSR** contrôle relaxé suivantes :*

$$\begin{cases} dx_t = \int_U b\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + \int_U \sigma\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dB_t, \\ dy_t = -\int_U g\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + z_t^q dB_t, \\ x_0^q = \zeta, \quad y_T^q = \eta, \end{cases} \tag{3.4}$$

Le coût relaxé associé à un contrôle relaxé q est défini sous la forme de performance sensible avec risque

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^q\right) + \Psi\left(y_0^q\right) + \int_0^T \int_U f\ \left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t(da)\ dt\right)\right]. \quad (3.5)$$

Le contrôle μ est le contrôle relaxé optimal s'il satisfait

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q) \quad (3.6)$$

Notre objectif est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le principe du maximum stochastique relaxé.

Remarque 3.2.1 *:Dans le modèle relax, l'avantage de $\mathbb{P}(U)$ est convexe et les coefficients du système (3.4) sont linéaires par rapport à la variable de contrôle relaxé.*

Remarque 3.2.2 *: L'existence d'un contrôle relaxé optimal de notre problème* $\{(3.4); (3.5); (3.6)\}$ *peut être trouvée dans [2].*

3.3 Processus auxiliaire dans la performance relaxé sensible au risque

De nos recherches, il n'y a pas de solution pour un tel problème de contrôle avec une utilité exponentielle, pour cette raison, nous pouvons introduire le processus auxiliaire qui est la solution de **l'EDS**.

$$\begin{cases} d\xi_t^q = \int_U f\ \left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t(da)\ dt, \\ \xi_0^q = 0\ , \end{cases} \quad (3.7)$$

Ainsi, notre problème de contrôle (3.4) ;(3.5) ;(3.6) est équivalent à :

$$\begin{cases} d\xi_t^q = \int_U f\ \ (t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a)\, q_t\,(da)\ \ dt, \\ dx_t^q = \int_U b\,(t, x_t^q, a)\, q_t\,(da)\, dt + \int_U \sigma\,(t, x_t^q, a)\, q_t\,(da)\, dB_t \\ dy_t^q = -\int_U g\,(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a)\, q_t\,(da)\, dt + z_t^q dB_t, \\ \xi_0^q = 0, \quad x_0^q = \zeta, \quad y_T^q = \eta, \\ \mathcal{J}\,(q) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\,(x_T^q) + \Psi\,(y_0^q) + \int_0^T \int_U f\ \ (t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a)\, q_t\,(da)\ \ dt\right)\right]. \\ =: \mathbb{E}\left[\Gamma\,(\xi_T, x_T, y_0)\right], \\ \mathcal{J}\,(\mu) = \inf\limits_{q\in\mathbb{R}} \mathcal{J}\,(q)\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Nous définissons A_T^0 et Φ_T comme suit :

$$A_T^0 = \exp\theta\left(h\,(x_T^q) + \Psi\,(y_0^q) + \int_0^T \int_U f\ \ (t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a)\, q_t\,(da)\ \ dt\right).$$
$$\Phi_T = h\,(x_T^q) + \Psi\,(y_0^q) + \int_0^T \int_U f\ \ (t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a)\, q_t\,(da)\ \ dt$$

Lemme 3.3.1 *Nous supposons que les hypothèses (1.1) sont satisfaites, alors la fonction de perte sensible au risque est donnée par*

$$\begin{aligned} \Phi_\theta &= \frac{1}{\theta} \ln E\left[\exp\theta\Phi_T\right], \\ &= E\left[\Phi_T\right] + \frac{\theta}{2} var\left|\Phi_T\right| + \sigma\left(\theta^2\right), \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons $\Phi_\theta = \frac{1}{\theta}\ln\mathbb{E}\left[\exp\theta\Phi_T\right]$, en utilisant le dévloppement de Taylor des fonctions exp et ln respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta &= \frac{1}{\theta}\ln\mathbb{E}\left[\exp\theta\Phi_T\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\ln\mathbb{E}\left[1+\theta\Phi_T+\frac{(\theta\Phi_T)^2}{2!}+\circ\left([\theta\Phi_T]^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\ln\left[1+\mathbb{E}\left(\theta\Phi_T\right)+\mathbb{E}\left(\frac{(\theta\Phi_T)^2}{2!}\right)+\mathbb{E}\left(\circ\left([\theta\Phi_T]^2\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\left\{\mathbb{E}\left(\theta\Phi_T\right)+\mathbb{E}\left(\frac{(\theta\Phi_T)^2}{2!}\right)+\mathbb{E}\left(\circ\left([\theta\Phi_T]^2\right)\right)\right\} \\
&\quad -\frac{1}{\theta}\frac{\left\{\mathbb{E}\left(\theta\Phi_T\right)+\mathbb{E}\left(\frac{(\theta\Phi_T)^2}{2!}\right)+\mathbb{E}\left(\circ\left([\theta\Phi_T]^2\right)\right)\right\}^2}{2}, \\
&= \mathbb{E}\left[\Phi_T\right]+\frac{\theta}{2}var\left[\Phi_T\right]+o\left(\theta^2\right),
\end{aligned}$$

■

donc les résultats sont les suivants :

Si $\theta < 0$, la $var[\Phi_T]$, en tant que mesure de risque, améliore la performance. Mais lorsque $\theta > 0$, la $var[\Phi_T]$ détériore la performance Φ_θ. La fonction de perte neutre avec risque $\mathbb{E}[\Phi_T]$ peut être vue comme une limite de la fonction de perte avec risque-sensible Φ_θ lorsque $\theta \longrightarrow 0$. Pour plus de détails, voir][4].

Notation 3.3.1 *: Tout au long de cet article, nous utiliserons les notations suivantes pour chaque fonction* $\phi(t) \in \{f, b, \sigma, g, h, \Psi\}$

$$\begin{cases}
\phi(t) = \phi\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, q\right) \\
\phi^\mu(t) = \phi\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu\right) \\
\partial\phi(t) = \phi\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, q\right) - \phi\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu\right) \\
\phi_\delta(t) = \frac{\partial\phi}{\partial\delta}\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, q\right), \quad \text{où } \delta =: x, y, z.
\end{cases}$$

Lemme 3.3.2 *:Nous supposons que les hypothèses (1.1) sont vérifiées. Alors il existe trois paires uniques de processus* $(p_1; P_1)$, $(p_2; P_2)$ *et* $(p_3; P_3)$ *à* $\mathcal{F}_t^B$ *.*

qui sont la solution du système suivant :

$$
\begin{cases}
d\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_x(t)\, q_t(da) & -\int_U b_x(t)\, q_t(da) & \int_U g_x(t)\, q_t(da) \\ -\int_U f_y(t)\, q_t(da) & 0 & \int_U g_y(t)\, q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dt \\
\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int_U \sigma_x(t)\, q_t(da) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} dB_t \\
\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_z(t)\, q_t(da) & 0 & \int_U g_z(t)\, q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dB_t, \\
\begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta A_{T^\theta} \\ \theta h_x(x_T^\mu)\, A_T^\theta \\ -\theta \Psi_y(y_0^\mu)\, A_T^\theta \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Où

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} \sup_{0\le t\le T} |p_i(t)|^2 + \int_0^T \left[|p_1(t)|^2 + |p_2(t)|^2\right] dt\right] < \infty,
$$

Preuve. :Soit le système (3.8) , nous définissons $p_1(t)$ le processus adjoint de l'**EDS** par rapport à (3.7) $p_2(t)$ le processus adjoint de l'**EDS** (3.8) et $p_3(t)$ sera le processus adjoint du **EDSR** (3.8) nous avons

$$
\begin{cases}
dp_1(t) = -H_\xi^\theta(t)\, dt + P_1(t)\, dB_t, \\
p_1(T) = \Gamma_\xi(T) = \theta A_T^\theta,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
dp_2(t) = -H_x^\theta(t)\, dt + P_2(t)\, dB_t, \\
p_2(T) = \Gamma_x(T) = \theta h_x(x_T)\, A_T^\theta,
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

$$\begin{cases} dp_3(t) = -H_y^\theta(t)\,dt + H_z^\theta(t)\,dB_t, \\ p_3(T) = \Gamma_y(0) = -\theta\Psi_Y(y_0)\,A_T^\theta, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{J}(q) = E\left[\Gamma\left(\xi_T, x_{T,}y_0\right)\right],$$

et

$$\begin{aligned} H^\theta(t) &= H^\theta\left(t, \xi^q, x^q, y^q, q, p(t), P(t)\right) \\ &= \left(\int_U f(t)\,q_t(da)\right)p_1(t) + \left(\int_U b(t)\,q_t(da)\right)p_2(t) \\ &+ \left(\int_U \sigma(t)\,q_t(da)\right)p_2(t) - \left(\int_U g(t)\,q_t(da)\right)p_3(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

En remplaçant toutes les dérivées de la fonction Hamiltonienne H^θ par rapport à toutes ses composantes ; x, y et z, dans les équations adjointes (3.10),on obtient

$$\begin{aligned} dp_1(t) &= P_1(t)\,dB_t, \\ dp_2(t) &= -\left[\left(\int_U f_x(t)\,q_t(da)\right)p_1(t) + \left(\int_U b_x(t)\,q_t(da)\right)p_2(t)\right. \\ &\quad\left.+ \left(\int_U \sigma_x(t)\,q_t(da)\right)p_2(t) - \left(\int_U g_x(t)\,q_t(da)\right)p_3(t)\right]dt \\ &\quad+ dp_2(t)\,dB_t, \\ dp_3(t) &= -\left[\left(\int_U f_y(t)\,q_t(da)\right)p_1(t) + \left(\int_U g_y(t)\,q_t(da)\right)p_3(t)\right]dt \\ &\quad- \left[\left(\int_U f_z(t)\,q_t(da)\right)p_2(t) - \left(\int_U g_z(t)\,q_t(da)\right)p_3(t)\right]dB_t, \end{aligned}$$

■

Ensuite, nous obtenons la forme matricielle et le résultat final (3.9) :

Le théorème suivant est le principe maximum stochastique pour le risque neutre relaxé des **EDS** forward-backward.

Théor■me 3.3.1 *Nous supposons que les hypothèses (1.1) sont satisfaites, si est un contrôle optimal et* $(\xi^{\mu}, x^{\mu}, y^{\mu}, z^{\mu})$ *est la solution de (3.8) associée à. Alors, il existe trois paires uniques de processus* $(p_1, P_1), (p_2, P_2)$ *et* (p_3, P_3) $\mathcal{F}_t^B$ *adaptés vérifiant (3.9) tels que :*

$$\partial H^{\theta}(t) \geq 0. \tag{3.12}$$

pour tout $q \in \mathcal{R}$, $a.e, a.s$ avec $H^{\theta}(t)$ est le Hamiltonien défini par 3.11 et

$$\partial H^{\theta}(t) = H^{\theta}(t, \xi^{q}, x^{q}, y^{q}, z^{q}, q, p(t), P(t)) - H^{\theta}(t, \xi^{\mu}, x^{\mu}, y^{\mu}, z^{\mu}, \mu, p(t), P(t)).$$

Preuve. Nous combinons les résultats de Yong [15] et Chala [5] en prenant $\gamma = 0, g = 0, k = 0$ et $l = f$ dans 3.8. Nous obtenons (3.8) . ■

3.3.1 Équations adjointes transformées

À cette étape, nous proposons une transformation du processus $(p_1, P_1), (p_2, P_2)$ et (p_3, P_3), en gardant à l'esprit que nous éliminerons (p_1, P_1) dans (3.9) ; après quoi nous obtiendrons le principe de maximum stochastique uniquement par rapport aux paires de processus adjoints notées $\left(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_1\right)$ et $\left(\tilde{\mathbf{p}}_3, \tilde{\mathbf{P}}_3\right)$, qui sont les équations adjointes associées à notre problème de contrôle initial (3.4) ;(3.5) ;(3.6) : Pour cette raison et en fonction du système (3.9) nous avons

$$\begin{cases} dp_1(t) = P_1(t)\, dB_t, \\ p_1(T) = \theta A_T^{\theta}. \end{cases}$$

La solution explicite de cette **EDSR** rétrograde est donnée par $p_1(t) = \theta \mathbb{E}\left[\, A_T^{\theta} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^B \right] =: \theta \mathbb{V}^{\theta}(t)$, où $\theta \mathbb{V}^{\theta}(t) =: \mathbb{E}\left[\, A_T^{\theta} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^B \right]$, pour tout $t \in [0; T]$.

Nous choisissons la transformation de $\left(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{P}}\right)$ à $\left(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{P}}\right)$ avec $\left(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{P}}\right) = \frac{1}{\theta V^{\theta}}\left(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{P}}\right)$, alors $\tilde{\mathbf{P}}_1(t) = \frac{1}{\theta V^{\theta}} P_1(t) = 1$, donc $\left(\tilde{\mathbf{P}}_1(T), \tilde{\mathbf{P}}_2(T), \tilde{\mathbf{P}}_3(0)\right) = \left(1 + h_x(x_T^{\mu}), -\Psi_y(y_0^{\mu})\right)$.

Les propriétés suivantes de $\mathbb{V}^\theta$ sont essentielles pour trouver des propriétés des processus adjoints transformés.

Lemme 3.3.3 *Nous supposons que les hypothèses (1.1) sont satisfaites. Alors le processus* $\mathbb{V}^\theta(t)$ *est uniformément borné.*

Preuve. Des hypothèses (1.1), nous savons que les fonctions f, h et sont bornées par $C > 0$; nous avons

$$-(2+T)\,C\theta \leq \theta\left(h\left(x_T^q\right) + \Psi\left(y_0^q\right) + \int_0^T \int_U f(t)\, q_t(da)\, dt\right) \leq (2+T)\,C\theta.$$

En passant à l'exponentielle et à l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t^B$, nous obtenons

$$0 \leq \exp\left[-(2+T)\,C\theta\right] \leq \mathbb{V}^\theta(t) \leq \exp\left[(2+T)\,C\theta\right].$$

■

ce qui signifie la borne de $\mathbb{V}^\theta$.

Lemme 3.3.4 *Le processus* $\left(\Lambda_0^\theta, l(t)\right)$ *est la solution de l'**EDSR** quadratique relaxée suivante*

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\theta = -\left[\int_U f(t)\, q_t(da) + \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2\right] dt + l(t)\, dB_t, \\ \Lambda_T^\theta = h\left(x_T^\mu\right) + \Psi\left(y_0^\mu\right), \end{cases} \tag{3.13}$$

où la première composante Λ_t^θ vérifie l'expression suivante

$$\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^\mu\right) + \Psi\left(y_0^\mu\right) + \int_t^T \int_U f(s)\, q_t(da)\, ds\right) |\mathcal{F}_t^B\right] \tag{3.14}$$

Preuve. En commençant par considérer l'**EDSR** quadratique 3.13, puis en appliquant la formule d'Itô à $\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)$, nous avons

$$d\left(\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)\right)+\theta\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)\int_U f\left(t\right)q_t\left(da\right)dt=\theta\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)l\left(t\right)dB_t.$$

En multipliant les deux côtés de l'expression ci-dessus par $\exp\left(\theta\int_t^t\int_U f\left(s\right)q_t\left(da\right)ds\right)$.nous obtenons

$$\begin{aligned}
&d\left(\exp\left[\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right]\right)\\
&=\exp\left(\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\ d\left(\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)\right)\\
&+\theta\exp\left(\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\ \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)\int_U f\left(t\right)q_t\left(da\right)dt\\
&=\theta\exp\left(\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\ \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right)\ l\left(t\right)dB_t\\
&=\theta\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\ l\left(t\right)dB_t.
\end{aligned}$$

■

En passant à l'intégrale de t à T, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\theta\Lambda_T^\theta+\theta\int_0^T\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)-\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\\
&=\theta\int_0^T\exp\left(\theta\Lambda_s^\theta+\theta\int_0^s\int_U f\left(r\right)q_r\left(da\right)dr\right)\ l\left(s\right)dB_s.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle des deux côtés de la dernière égalité, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\theta\int_0^T\exp\left(\theta\Lambda_s^\theta+\theta\int_0^s\int_U f\left(r\right)q_r\left(da\right)dr\right)\ l\left(t\right)dB_t\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta+\theta\int_0^t\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\ \Big|\ \mathcal{F}_t^B\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\Lambda_T^\theta+\theta\int_0^T\int_U f\left(s\right)q_s\left(da\right)ds\right)\ \Big|\ \mathcal{F}_t^B\right]
\end{aligned}$$

Selon la martingale de l'intégrale d'Itô et la mesurabilité par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t^B$, alors

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\Lambda_T^\theta + \theta\int_0^T\int_U f(s)\,q_s(da)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right] = \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\,q_s(da)\,ds\right).$$

D'après la définition de la condition terminale de l'**EDSR** quadratique (3.13), nous savons que $\Lambda_t^\theta = h(x_T^q) + \Psi(y_0^q)$ ensuite

$$\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h(x_T^\mu) + \Psi(y_0^\mu) + \int_0^T\int_U f(s)\,q_s(da)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right].$$

D'autre part, nous supposons que (3.14) est vrai, ce qui signifie que

$$\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h(x_T^q) + \Psi(y_0^q) + \int_0^T\int_U f(s)\,q_s(da)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\,q_s(da)\,ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h(x_T^q) + \Psi(y_0^q) + \int_0^T\int_U f(s)\,q_s(da)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]\\
&= \mathbb{E}\left[A_T^0 \mid \mathcal{F}_t^B\right],
\end{aligned}$$

Si $t = 0, \mathbb{V}^\theta(0) = \mathbb{E}\left[A_T^\theta \mid \mathcal{F}_0^B\right] = \mathbb{E}\left[A_T^\theta\right] = \exp\left(\theta\Lambda_0^\theta\right).$

Soit B_t un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré standard $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^B, \mathbb{P}\right)$ et $\mathcal{F}_t^B$ soit la filtration augmentée générée par B. Si A_T^θ est une variable aléatoire intégrable au carré mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^B$. Par conséquent, selon le théorème de représentation des martingales 3.5.6, il existe un processus prévisible $k(t)$ qui est adapté par rapport à $\mathcal{F}_t^B$, tel que

$$\mathbb{E}\left[A_T^\theta \mid \mathcal{F}_0^B\right] = \mathbb{E}\left[A_T^\theta\right] + \int_0^t k(s)\, dB_s = \exp\left(\theta \Lambda_0^\theta\right) + \int_0^t k(s)\, dB_s.$$

Par conséquent

$$\exp\left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) - \exp\left(\theta \Lambda_0^\theta\right) = \int_0^t k(s)\, dB_s.$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $\exp\left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right)$, nous obtenons

$$\theta \exp\left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \left[\int_U f(t)\, q_t(da)\, dt + d\Lambda_t^\theta + \frac{\theta}{2} d\langle \Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta \rangle\right]$$
$$= k(t)\, dB_t.$$

Alors

$$\int_U f(t)\, q_t(da)\, dt + d\Lambda_t^\theta + \frac{\theta}{2} d\langle \Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta \rangle \tag{3.15}$$
$$= \frac{1}{\theta} \exp\left(-\theta \Lambda_t^\theta - \theta \int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) k(t)\, dB_t \tag{3.16}$$

En raison de $\frac{1}{\theta} \exp\left(-\theta \Lambda_t^\theta - \theta \int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) k(t)\, dB_t$ est une martingale, donc

$$d\langle \Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta \rangle = \left(\frac{1}{\theta} \exp\left(-\theta \Lambda_t^\theta - \theta \int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \ k(t)\right)^2 dt \tag{3.17}$$
$$=: |l(t)|^2\, dt \tag{3.18}$$

En remplaçant (3.17) par (3.15), nous obtenons l'égalité suivante.

$$\int_U f(t)\, q_t(da)\, dt + d\Lambda_t^\theta + \frac{\theta}{2} |l(t)|^2\, dt - l(t)\, dB_t.$$

Enfin

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\theta = -\left(\int_U f(t)\, q_t(da)\, dt + \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2\right) dt + l(t)\, dB_t, \\ \Lambda_t^\theta = h\left(x_T^q\right) + \Psi\left(y_0^q\right) \end{cases}$$

Par conséquent, la preuve est terminée.

Lemme 3.3.5 *La martingale* $\mathbb{V}^\theta(t)$ *peut être récrite sous la forme suivante*

$$\mathbb{V}^\theta(t) = \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right).$$

Preuve. Nous savons que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\theta(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^\mu\right) + \Psi\left(y_0^\mu\right) + \int_0^T \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right] \\ &= \exp\left(\theta\int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \\ &\times \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^\mu\right) + \Psi\left(y_0^\mu\right) + \int_0^T \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent (voir **Lemme 3.3.4**), la formule (3.14) peut être transformée en

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\theta(t) &= \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta\right) + \exp\left(\theta\int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \\ &= \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t \int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right), \qquad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Ensuite, le lemme est prouvé. ■

Nous pouvons facilement prouver à partir de (3.13) et de la bornitude de f que $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\Lambda_t^\theta\right|^2\right] < C_T$,avec C_T étant une constante positive qui correspond uniquement à T.

Le processus $\left(\Lambda_t^\theta, l(t)\right)_{t\ge 0}$ est la solution unique du **EDSR** quadratique relaxé suivant :

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\theta = -\left(\int_U f(t)\, q_t(da)\, dt + \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2\right) dt + l(t)\, dB_t, \\ \Lambda_t^\theta = h\left(x_T^q\right) + \Psi\left(y_0^q\right). \end{cases}$$

Où $l(t) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\theta\Lambda_t^\theta - \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) k(t)$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|l(t)\right|^2 dt\right] < \infty$.

Lemme 3.3.6 *En particulier, $\mathbb{V}^\theta$ est la solution de l'équation différentielle stochastique backward suivante :*

$$\begin{cases} dV^\theta(t) = \theta l(t)\ \mathbb{V}^\theta(t)\, dB_t. \\ \mathbb{V}^\theta(T) = A_T^\theta. \end{cases}$$

De plus, le processus L_t^θ défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est donné par

$$\frac{\mathbb{V}^\theta(t)}{\mathbb{V}^\theta(0)} = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^t \left|l(s)\right|^2 ds + \theta\int_0^t \left|l(s)\right| dB_s\right) =: L_t^\theta, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.19}$$

est un processus $\mathcal{F}_t^B - martingale$ uniformément borné.

Preuve. Nous appliquons la formule d'**Itô** à $\mathbb{V}^\theta(t) = \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right)$

$$\begin{aligned} d\mathbb{V}^\theta(t) &= d\left(\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right)\right) \\ &= \theta\int_U f(s)\, q_s(da)\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) dt \\ &+ \theta\left[\left(-\int_U f(t)\, q_t(da)\, dt + \frac{\theta}{2}\left|l(t)\right|^2 dt + l(t)\, dB_t\right)\right. \\ &\left.\times\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right)\right] \\ &+ \frac{\theta^2}{2}\left|l(t)\right|^2\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) dt \\ &= \theta l(t)\ \mathbb{V}^\theta(t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Maintenant, nous voulons prouver (3.19) nous avons à partir de $\Lambda_t^\theta = \Lambda_0^\theta - \int_0^t\int_U f(t)\, q_t(da)\, ds -$

$\frac{\theta}{2}\int_0^t |l(t)|^2 ds + \theta \int_0^t |l(t)| dB_s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}^{\theta}(t) &= \exp\left(\theta\Lambda_t^{\theta} + \theta\int_0^t\int_U f(s)\, q_s(da)\, ds\right) \\
&= \exp\left(\theta\Lambda_0^{\theta} - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t |l(t)|^2 ds + \int_0^t l(s)\, dB_s\right)
\end{aligned}$$

Nous divisons par $\mathbb{V}^{\theta}(0)$ tel que $\mathbb{V}^{\theta}(t) = \exp\left(\theta\Lambda_0^{\theta}\right)$, nous obtenons

$$\frac{\mathbb{V}^{\theta}(t)}{\mathbb{V}^{\theta}(0)} = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^t |l(s)|^2 ds + \theta\int_0^t |l(s)|\, dB_s\right) =: L_t^{\theta}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

L_t^{θ} est un processus $\mathcal{F}_t^B - martingale$ uniformément borné. ■

3.4 Conditions d'optimalité nécessaires pour le contrôle relaxé

Dans cette section, nous énoncerons et prouverons les conditions d'optimalité nécessaires pour le système gouverne par des **EDS** avec un contrôle relaxé et une performance risque-sensible {(3.4); (3.5); (3.6)}.

Lemme 3.4.1 *Les principales équations adjointes risque-sensibles de second et troisième ordre pour* $\left(\tilde{\mathbf{p}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_2\right), \left(\tilde{\mathbf{p}}_3, \tilde{\mathbf{P}}_3\right)$ *et* $\left(\mathbb{V}^{\theta}, l\right)$ *deviennent*

$$\begin{cases}
d\tilde{p}_2 = -\tilde{\mathbf{H}}_x^{\theta}(t)\, dt + \left(\tilde{P}_2(t) - \theta l_2(t)\, \tilde{p}_2\right) dB_t^{\theta}, \\
d\tilde{p}_3 = -\tilde{\mathbf{H}}_y^{\theta}(t)\, dt - \tilde{\mathbf{H}}_z^{\theta}(t)\, dB_t^{\theta}, \\
d\mathbb{V}^{\theta}(t) = \theta l(t)\, \mathbb{V}^{\theta}(t)\, dB_t, \\
\tilde{p}_2(T) = h_x\left(x_T^{\mu}\right), \\
\tilde{p}_3(0) = -\Psi_y\left(y_0^{\mu}\right), \\
\mathbb{V}^{\theta}(0) = A_T^{\theta}.
\end{cases} \tag{3.20}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\theta}(t) := \tilde{\mathbf{H}}^{\theta}\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_2(t) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_3(t) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3(t) \end{pmatrix}, \mathbb{V}^{\theta}(t), l(t), q_t\right) \tag{3.21}$$

$$= \left(\int_U f(t)\, q_t(da)\right) \tilde{p_2}(t) - \left(\int_U b(t)\, q_t(da)\right) \tilde{p_2}(t) \tag{3.22}$$

$$+ \left(\int_U \sigma(t)\, q_t(da)\right) \tilde{p_2}(t) - \left(\int_U g(t)\, q_t(da) + \theta l(t)\, z_t\right) \tilde{p_3}(t). \tag{3.23}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{3} \sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{p}_i(t)|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left|\mathbb{V}^{\theta}(t)\right|^2 + \sum_{i=2}^{3} \int_0^T |\tilde{p}_i(t)|^2\, dt + \int_0^T |l(t)|^2\, dt\right] < \infty.$$

Preuve. Nous appliquons la formule d'**Itô** à $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \theta \mathbb{V}^{\theta}(t)\, \tilde{\mathbf{p}}(t)$,nous obtenons

$$d\tilde{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^{\theta}(t)} \left(d\tilde{\mathbf{p}}(t) - \theta \left(d\mathbb{V}^{\theta}(t)\right)\ \tilde{\mathbf{p}}(t) - \theta < d\mathbb{V}^{\theta}(t), d\tilde{\mathbf{p}}(t) >\right).$$

Nous supposons que $d\tilde{\mathbf{p}}(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t$, nous savons que $d\mathbb{V}^{\theta}(t) = \theta l(t)\mathbb{V}^{\theta}(t)\, dB_t$, alors $< d\mathbb{V}^{\theta}(t), d\tilde{\mathbf{p}}(t) > = \theta l(t)\mathbb{V}^{\theta}(t)\, \beta(t)dt$, remarquons ■

que $\tilde{\mathbf{p}}_i(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^{\theta}(t)} p_i(t)$ et $\tilde{\mathbf{P}}_i(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^{\theta}(t)} P_i(t)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Nous souhaitons déterminer les coefficients $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ et $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\mathbf{p}}\left(t\right) = {} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_x\left(t\right) q_t\left(da\right) & -\int_U b_x\left(t\right) q_t\left(da\right) & \int_U g_x\left(t\right) q_t\left(da\right) \\ -\int_U f_y\left(t\right) q_t\left(da\right) & 0 & \int_U g_y\left(t\right) q_t\left(da\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{p}}_2\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{p}}_3\left(t\right) \end{pmatrix} dt \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int_U \sigma_x\left(t\right) q_t\left(da\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3\left(t\right) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3\left(t\right) \end{pmatrix} dB_t \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_z\left(t\right) q_t\left(da\right) & 0 & \int_U g_z\left(t\right) q_t\left(da\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{p}}_2\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{p}}_3\left(t\right) \end{pmatrix} dB_t \\
& -\theta l\left(t\right) \; \tilde{\mathbf{p}}\left(t\right) dB_t - \theta l\left(t\right) \beta\left(t\right) dt.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

En combinant (3.24) et $d\tilde{\mathbf{p}}\left(t\right) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(t\right) = {} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_x\left(t\right) q_t\left(da\right) & -\int_U b_x\left(t\right) q_t\left(da\right) & \int_U g_x\left(t\right) q_t\left(da\right) \\ -\int_U f_y\left(t\right) q_t\left(da\right) & 0 & \int_U g_y\left(t\right) q_t\left(da\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{p}}_2\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{p}}_3\left(t\right) \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int_U \sigma_x\left(t\right) q_t\left(da\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2\left(t\right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3\left(t\right) \end{pmatrix} - \theta l\left(t\right) \beta\left(t\right).
\end{aligned}
$$

et

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_z(t)\, q_t(da) & 0 & \int_U g_z(t)\, q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{p}}_2(t) \\ \tilde{\mathbf{p}}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2(t) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3(t) \end{pmatrix} - \theta l(t)\ \tilde{\mathbf{p}}(t).$$

En remplaçant $\beta(t)$ par son expression dans $d\tilde{\mathbf{p}}(t)$, nous obtenons $d\tilde{\mathbf{p}}_1(t) = \beta_1(t)\,|-\theta l(t)\,dt + dB_t|$,n pouvons utiliser **le théorème de Girsanov** (voir [12]) pour affirmer que :

$$\begin{cases} d\tilde{\mathbf{p}}_1(t) = \beta_1(t)\, dB_t^{\theta} \\ \tilde{\mathbf{p}}_1(T) = 1. \end{cases}$$

avec $dB_t^{\theta} = -\theta l(t)dt + dB_t$ est un $\mathbb{P}^{\theta}-$*mouvement brownien* , où $\left.\frac{d\mathbb{P}^{\theta}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t^B} = L_t^{\theta}$, $0 \leq t \leq T$. Nous remarquons que $\tilde{\mathbf{p}}_1(t)$ est intégrable carré et $\mathbb{E}\left[\tilde{\mathbf{p}}_1(t) \,\middle|\, \mathcal{F}_t^B\right] = 1$, car $\beta_1(t)$ a une variation quadratique, donc $\int_0^t |\beta_1(t)|^2\, dt = 0$. Cela implique que pour presque tout $0 \leq t \leq T$, $\beta_1(t) = 0$ $\mathbb{P}^\theta - p.s$, et $\mathbb{P} - p.s$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\mathbf{p}}(t) &= \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{p}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_x(t)\, q_t(da) & -\int_U b_x(t)\, q_t(da) & \int_U g_x(t)\, q_t(da) \\ -\int_U f_y(t)\, q_t(da) & 0 & \int_U g_y(t)\, q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{p}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_3(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int_U \sigma_x(t)\, q_t(da) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{P}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{P}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{P}}_3(t) \end{pmatrix} dt + \beta(t)\, dB_t \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_x(t)\, q_t(da) & -\int_U b_x(t)\, q_t(da) & \int_U g_x(t)\, q_t(da) \\ -\int_U f_y(t)\, q_t(da) & 0 & \int_U g_y(t)\, q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{p}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_3(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int_U \sigma_x(t)\, q_t(da) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{P}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{P}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{P}}_3(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\int_U f_z(t)\, q_t(da) & 0 & \int_U g_z(t)\, q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{p}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{p}}_3(t) \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{P}}_1(t) \\ d\tilde{\mathbf{P}}_2(t) \\ d\tilde{\mathbf{P}}_3(t) \end{pmatrix} - \theta l(t)\ \tilde{p}(t) \right] dB_i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\mathbf{p}}_2(t) = &-\left(\int_U f_x(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \int_U b_x(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_2(t) + \int_U g_x(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_3(t) \right. \\
&\left. + \int_U \sigma_x(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_2(t)\right) dt + \left(\tilde{\mathbf{p}}_2(t) - \theta l(t)\ \tilde{p}(t)\right) dB_t^{\theta}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\mathbf{p}}_2(t) = &-\left(\int_U f_y(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_1(t) - \int_U g_y(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_3(t)\right) dt \\
&-\left(\int_U f_z(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_1(t) - \int_U g_z(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_3(t) - \theta l(t)\, q_t(da)\, \tilde{\mathbf{p}}_3(t)\right) dB_t^{\theta}.
\end{aligned}
$$

Les principales équations adjointes du risque pour $\left(\tilde{p}_2, \tilde{P}_2\right), \left(\tilde{p}_3, \tilde{P}_3\right)$ et $\left(\mathbb{V}^{\theta}, l\right)$ deviennent

$$
\begin{cases}
d\tilde{p}_2 = -\tilde{\mathbf{H}}_x^{\theta}(t)\, dt + \left(\tilde{P}_2(t) - \theta l_2(t)\, \tilde{p}_2\right) dB_t^{\theta}, \\
d\tilde{p}_3 = -\tilde{\mathbf{H}}_y^{\theta}(t)\, dt - \tilde{\mathbf{H}}_z^{\theta}(t)\, dB_t^{\theta}, \\
d\mathbb{V}^{\theta}(t) = \theta l(t)\, \mathbb{V}^{\theta}(t)\, dB_t, \\
\tilde{p}_2(T) = h_x(x_T^{\mu}), \\
\tilde{p}_3(0) = -\Psi_y(y_0^{\mu}), \\
\mathbb{V}^{\theta}(0) = A_T^{\theta}.
\end{cases}
$$

où H^{θ} est défini par (3.21).

À partir des **hypothèses (1.1)**, la solution du système (3.20) existe et est unique, telle que

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{3} \sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{p}_i(t)|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left|\mathbb{V}^{\theta}(t)\right|^2 + \sum_{i=2}^{3} \int_0^T |\tilde{p}_i(t)|^2\, dt + \int_0^T |l(t)|^2\, dt\right] < \infty.
$$

La preuve est terminée.

Théor■me 3.4.1 ***(Conditions d'optimalité nécessaires pour le contrôle relaxé et la performance sensible au risque)*** *Nous supposons que les* ***hypothèses***

(1.1) *sont satisfaites, si* $(x^{\mu}(t), y^{\mu}(t), z^{\mu}(t), \mu)$ *est une solution optimale du problème de contrôle relaxé sensible au risque* $\{(3.4); 3.5; 3.6\}$. *Alors, il existe trois paires de processus* $\mathcal{F}_t^B-$ *adaptés* $\left(\tilde{p}_2, \tilde{P}_2\right), \left(\tilde{p}_3, \tilde{P}_3\right)$ *et* $\left(\mathbb{V}^{\theta}, l\right)$ *qui satisfont (3.20) tels que*

$$\partial \tilde{\mathbf{H}}^{\theta}(t) \geq 0. \tag{3.25}$$

Preuve. Pour tout $q \in \mathcal{R}$, presque partout $0 \leq t \leq T$ et $\mathbb{P}-$**p.s.**, la relation entre **le Hamiltonien** $\tilde{\mathbf{H}}^{\theta}$ associé à (3.21) et H^{θ} associé à (3.11) est donnée par

$$\begin{aligned} &\partial \tilde{\mathbf{H}}^{\theta}\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, \begin{pmatrix} \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{P}_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{p}_3 \\ \tilde{P}_3 \end{pmatrix}, \mathbb{V}^{\theta}(t), l(t), q_t\right) \\ &= \frac{1}{\theta \mathbb{V}^{\theta}(t)} \partial \mathbf{H}^{\theta}\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, p(t), P(t) q_t\right). \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

3.5 Conditions d'optimalité suffisantes

Dans cette section, nous étudions les conditions sous lesquelles les conditions d'optimalité nécessaires deviennent suffisantes. Pour tout $q \in \mathcal{R}$, nous désignons par (x_t^q, y_t^q, z_t^q) la solution de l'équation (3.4) contrôlée par q, en utilisant la notation abrégée 3.3.1.

Théor■me 3.5.1 ***(Conditions de suffisance pour l'optimalité d'un contrôle relaxé avec une performance sensible au risque)*** *Nous supposons que les fonctions* Ψ , h *sont dérivables par rapport à leurs composantes et que l'application* $(\xi_t^q, x_t^q, y_t^q, z_t^q) \longmapsto H^{\theta}(t, \xi_t^q, x_t^q, y_t^q, z_t^q, p(t), P(t), q_t)$ *est convexe, et que pour tout* $q \in \mathcal{R}$, ζ *et* η *sont des variables aléatoires* $\mathcal{F}_0^B-$*mesurables telles que* $\mathbb{E}\left[|\zeta|^2 + |\eta|^2\right] < \infty$.. *Alors est une solution optimale du problème de contrôle* $\{(3.4); (3.5); (3.6)\}$ *si* *elle satisfait (3.12).*

Preuve. Soit μ un élément arbitraire de $\mathcal{R}$ (candidat à l'optimalité). Pour tout $q \in \mathcal{R}$, nous avons

$$dx_t^q = \int_U b\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + \int_U \sigma\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dB_t,$$
$$dy_t^q = -\int_U g\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + z_t^v dB_t.$$

alors $\mathcal{J}\left(q\right) - \mathcal{J}\left(\mu\right) = \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^q\right) + \Psi\left(y_0^q\right) + \xi_T^q\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\theta\left(h\left(x_T^\mu\right) + \Psi\left(y_0^\mu\right) + \xi_T^\mu\right)\right].$

■

En utilisant le développement de Taylor de la fonction $\mathcal{J}\left(q\right)$ au point μ , h et sont dérivables, et $p_1(T) = \theta A_T^\theta$, $p_2(T) = \theta h_x\left(x_T^\mu\right) A_T^\theta$ et $p_3(0) = -\theta\Psi\left(y_0^\mu\right) A_T^\theta$, nous obtenons

$$\mathcal{J}\left(q\right) - \mathcal{J}\left(\mu\right) = \mathbb{E}\left[p_1(T)\left(\xi_T^q - \xi_T^\mu\right)\right] + \mathbb{E}\left[p_2(T)\left(x_T^q - x_T^\mu\right)\right] - \mathbb{E}\left[p_3(0)\left(y_0^q - y_0^\mu\right)\right].$$

Appliquant la formule d'Itô à $p_1(t)\left(\xi_T^q - \xi_T^\mu\right), p_2(t)\left(x_T^q - x_T^\mu\right)$ et $p_3(t)\left(y_t^q - y_t^\mu\right)$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[p_1(T)\left(\xi_T^q - \xi_T^\mu\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U p_1(t)\left(f^q(t) - f^\mu(t)\right)(q_t - \mu_t)(da)\, dt\right],$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[p_2(T)\left(x_T^q - x_T^\mu\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T -\left(\int_U f_x^\mu(t)\, q_t(da)\, p_1(t)\right) + \left(\int_U b_x^\mu(t)\, q_t(da)\, p_2(t)\right)\right. \\
&\left. + \left(\int_U \sigma_x^\mu(t)\, q_t(da)\, P_2(t) - \int_U g_x^\mu(t)\, q_t(da)\, p_3(t)\right)\left(x_T^q - x_T^\mu\right) dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U p_2(t)\left(b(t) - b^\mu(t)\right)(q_t - \mu_t)(da)\, dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U p_2(t)\left(\sigma(t) - \sigma^\mu(t)\right)(q_t - \mu_t)(da)\, dt\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T H_x^\theta(\mu)\left(x_T^q - x_T^\mu\right) dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U p_2(t)\left(b(t) - b^\mu(t)\right)(q_t - \mu_t)(da)\, d\right. \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U p_2(t)\left(\sigma(t) - \sigma^\mu(t)\right)(q_t - \mu_t)(da)\, dt\right].
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&- \mathbb{E}\left[p_3(0)\left(y_0^q - y_0^\mu\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T H_y^\theta(\mu)\left(y_T^q - y_T^\mu\right) dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_z^\theta(\mu)\left(z_T^q - z_T^\mu\right) dt\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U p_3(t)\left(g(t) - g^\mu(t)\right)(q_t - \mu_t)(da)\, dt\right].
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(q) - \mathcal{J}\mu = \mathbb{E}\left[\int_0^T H^\theta(q) - H^\theta(\mu)\, dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_x^\theta(\mu)\left(x_T^q - x_T^\mu\right) dt\right] \\
- \mathbb{E}\left[\int_0^T H_y^\theta(\mu)\left(y_T^q - y_T^\mu\right) dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T H_z^\theta(\mu)\left(z_T^q - z_T^\mu\right) dt\right].
\end{aligned}$$

Selon la convexité du **Hamiltonien** H^{θ} dans (x, y, z) et linéaire en μ, alors en utilisant le gradient généralisé de **Clarke** de H^{θ} évalué en (x_t, y_t, z_t, μ_t) et les conditions d'optimalité nécessaires (3.25), il en découle, d'après [16], que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T H^{\theta}(q) - H^{\theta}(\mu)\, dt\right] &\geq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_x^{\theta}(\mu)\left(x_T^q - x_T^{\mu}\right) dt\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T H_y^{\theta}(\mu)\left(y_T^q - y_T^{\mu}\right) dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T H_z^{\theta}(\mu)\left(z_T^q - z_T^{\mu}\right) dt\right].\end{aligned}$$

Ensuite $\mathcal{J}(q) - \mathcal{J}\mu \geq 0$.

Le théorème est démontré.

Conclusion

Dans ce mémoire,nous considérons un problème de contrôle stochastique détendu avec des fonctionnelles de performance avec risque sensitive, où l'ensemble des contrôles n'est pas nécessairement convexe, et le système est gouvernéi par des équations différentielles stochastiques EDS-EDSR. Plus précisément, nous établissons des conditions nécessaires ainsi que suffisantes d'optimalité.

Bibliographie

[1] F. Antonelli, : Backward-forward stochastic differential equations. Ann. Appl. Probab. 3, 777-793 (1993).

[2] **K**. Bahlali, **G**. Boulekhrass and **B**. Mezerdi, **E**xistence of optimal controls for systems driven by FBSDEs. **S**ystems and **C**ontrol **L**etters, 60,344—349 (2011).

[3] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] **A**. Chala, **D**. Hafayed and **R**. Khallout, The use of Girsanov's theorem to describe the risk-sensitive problem and application to optimal control, in **S**tochastic **D**ifferantiel **E**quation-basics and **A**pplications, **N**ova **S**cience **P**ublishers, New York, 111—142.(2018).

[5] **A**. **C**hala, **T**he relaxed optimal control problem of forward-backward stochastic doubly systems with Poisson jumps and its application to **LQ** problem. **R**andom **O**per. **S**toch. **E**qu 20, 255—282 (2012).

[6] **N**. El Karoui, Huu Nguyen, N. Jeanblanc,M. Piqué, Compactification methods in the control of degenerate diffusions. Stochastics 20, 169—219 (1987).

[7] **R**. **K**hallout, **A** Chala, **A** risk-sensitive stochastic maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic differential equations with applications. **A**sian **J**ournal of **C**ontrol, vol 22(3), 1360-1391 (2020).

[8] O Lévêque - 2005 Cours de probabilités et calcul stochastique .

[9] B Mansoul,k Digheche and A Chala, Necessary and su¢ cient optimality conditions for relaxed control problem with risk sensitive performance, Journal of applied probability and statistics, vol18(1), 001-018 (2023).

[10] J. Ma, P. Protter and J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly four step scheme, Probab. Theory Related Fields 98, 339–359, (1994).

[11] Monique Jeanblanc, Septembre. (2006). Cours de calcul stochastique Master 2IF EVRY

[12] **B**. **O**ksendal, **S**tochastic **D**ifferential **E**quations, An Introduction with **A**pplications **F**ifth **E**dition, **C**orrected **P**rinting **S**pringer-**V**erlag **H**eidel-berg New York (2000).

[13] Pardoux and S. Peng,(1990) Adapted solution of a backward stochastic equation,Systems Control Lett. 14 , no. 1, 55–61.

[14] Shige Peng, Yufeng Shi Infnite horizon forward–backward stochastic dierential equations.

[15] **J**. **Y**ong, **O**ptimality variational principle for controlled forward-backward stochastic differential equations with mixed initial-terminal conditions, SIAM Journal on Control and Optimization 48(6), 4119-4156 (2010).

[16] X.Y. Zhou, Sufficient conditions of optimality for stochastic systems with controllable diffusions. **IEEE** Trans. on **A**utomatic **C**ontrol, 41,pp1176-1179, (1996).

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Lemme 3.5.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit f une fonction intégrable et négative $t \geq 0$ et vérifiant*

$$f(t) \leq \beta + c\int_0^t f(s)ds,$$

où c une constante positive. Alors on a : $f(t) \leq \beta \int_0^t \exp(cs)ds.$

Lemme 3.5.2 ***(Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG)***

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq \mathbb{T}}\left|\int_0^t \sigma(s,X_S)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma(s,X_S)\right|^2 ds\right], \tag{3.26}$$

où C est une constante positive.

Théor■me 3.5.2 ***(Théorème du point fixe)*** *: Soient (F,d) un éspace métrique complet et $\Psi : F \to F$ une application contractante, c'est à dire, Lipschitziènne de rapport $k < 1$. Alors : Ψ admet unique point fixe $b \in F$ tel que $\Psi(b) = b$.*

Théor■me 3.5.3 ***(Inégalité de Young)*** *: Soient* $a, b \geq 0$ *et* $1 < p, q < +\infty$ *deux exposants conjugués i.e,*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théor■me 3.5.4 ***(Inégalité de Hölder)*** *: Soient* $a, b \geq 0$ *et* $p, q \in [1, \infty]$ *deux exposants conjugués i.e,*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*si* f, g *sont des applications mesurables, alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Proposition 3.5.1 ***(Cauchy-Schwartz)*** *En cas particulier , l'inégalité de Hölder (dans le cas* $p = 2$*) donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz, i e.*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 . \tag{3.27}$$

Théor■me 3.5.5 ***(Théorème de Fibuni)*** *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$, (F, B, η) *deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient* $\sigma - finies$ *et soit* $(E \times F, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \otimes \eta)$ *l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si*

$$f : E \times F \to [0, \infty] ,$$

et est un application $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$*-mesurable, alors les applications :*

$$x \mapsto \int_E f(x, y)\, d\eta(y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_F f(x, y)\, d\mu(x) ,$$

sont respectivement $\mathcal{A}-$*et* $\mathcal{B}-$*mesurables et*

$$\int_{E\times F} f(x, y)\, d(\mu \otimes \eta)(x \times y) = \int_F \left(\int_E f(x, y)\, d\eta(y) \right) d\mu(x) = \int_E \left(\int_F f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\eta(y) . \tag{3.28}$$

Théor■me 3.5.6 ***(Théorème de représentation des martingales)*** *Soient* (dW_t) *un MB sur un espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, \mathbb{P}\right)$ *et* M_t *une martingale* $(\mathcal{F}_t)-$*adapté. Alors il existe unique processus adapté* (Z_t) *telle que :*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t Z(r)\ dW_r.$$

Résumé

Dans ce travaille nous établissons des conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes sous la forme d'un principe maximum stochastique, où le système est régi par une équation différentielle stochastique -équation différentielle stochastique rétrograde (abrégée en SDE-EDSR) dans le modèle relaxé avec une performance sensible au risque

Mots-clés : mouvement Brownien, intégrale d' Itô, Equations différentielles stochastiques, contrôle relaxé , processus adjoint, conditions d'optimalité , performance avec risque sensitive.

Abstract

In this work we studied a relaxed stochastic control problem with risk-sensitive performance functionals where the set of control domain is not naces- sarily convex, and the system is governed by forward and backward stochastic di¤erential equations. More precisely, we establish neces- sary as well su¢ cient conditions of optimality for the relaxed stochastic maximum principle with risk-sensitive control problem

Key Words: Brownian motion, Ito integral, Stochastic differential equations, relaxed control, adjoint process,optimality conditions, risk-sensitive performance

الملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة مشكلة التحكم العشوائي الأمثل في إطار الأداء الحساس للمخاطر ، حيث لا يكون بالضرورة مجال التحكم محدبًا حيث يتم تعريف النظام بمعادلة تفاضلية عشوائية و معادلة تفاضلية عشوائية تراجعية نقوم بتحديد الشروط الضرورية والكافية للأمثلية لمبدأ التحكم العشوائي المرن بمشكلة التحكم الحساسة للمخاطر

الكلمات المفتاحية : حركة براونية، تكامل إيتو،معدلات تفاضلية عشوائية، التحكم المرن ، سيرورة مساعدة ، شروط الأمثلية، الأداء الحساس للمخاطر .