

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Kasdi Merbah Ouargla  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière  
Département des Mathématiques



## MÉMOIRE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de MASTER**

**En : Mathématiques**

**Spécialité : Probabilités et Statistique**

**Présenté Par :**

Rima DJIDEL

**Sujet**

---

**Sur l'estimation du paramètre de Hurst de drap  
Brownien fractionnaire**

---

Soutenue publiquement, le 06/07/2023, devant le jury composé de :

M. Mohamed KOUIDRI	Maître de Conférence A	à l'UKMO	Président
M. Abdelmalik KEDDI	Maître de Conférence B	à l'U.TAM	Encadreur
M. Brahim MANSOUL	Maître Assistant A	à l'UKMO	Examineur

---

## *Dédicace*

---

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mon père et ma mère que Dieu les protège, pour leur amour, leur soutien et leur encouragements.*

*À mon frères et ma sœurs.*

*À toute ma famille, chacun en son nom petit et grand.*

*À tous les amis et mes collègues.*

*Rima*

---

## *Remerciements*

---

On dit souvent que le voyage est aussi important que la destination. Ces cinq années d'études nous ont permis de bien comprendre le sens de cette phrase toute simple.

En effet, ce parcours ne s'est pas fait sans défis et sans soulever de nombreuses questions dont les réponses demandent de nombreuses heures de travail.

Tout d'abord, je remercie Dieu qui m'a donné la volonté de réaliser cette humble mémoire. C'est aussi tout naturellement que nous adressons nos premiers remerciements à Monsieur Abdelmalik Keddi, qui a supervisé mon mémoire. Nous le remercions vivement pour tout ce qu'il m'a apporté au cours de ce travail.

Je remercie également les membres du jury qui nous honorent d'avoir accepté le verdict sur cet humble travail.

Nous exprimons notre gratitude à tous les membres du Département de mathématiques à l'université Kasdi Merbah, Ouargla et particulièrement aux enseignants qui ont contribué à notre formation.

Enfin, je remercie ma famille, qui m'a toujours encouragée et soutenue inconditionnellement et qui a toujours cru en ma volonté de réussir.

Merci tout le monde.

---

## *Table des matières*

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>3</b>
1.1 Processus stochastique . . . . .	3
1.1.1 Filtration . . . . .	6
1.1.2 Processus progressivement mesurable . . . . .	6
1.1.3 Processus adapté . . . . .	7
1.1.4 Temps d'arrêt . . . . .	7
1.1.5 Martingales à temps continu . . . . .	7
1.1.6 Régularité des trajectoires . . . . .	7
1.1.7 Auto-similarité . . . . .	8
1.1.8 Processus Gaussien . . . . .	9
1.2 Mouvement Brownien . . . . .	10
1.2.1 Variation quadratique du mouvement Brownien . . . . .	10
1.2.2 Propriétés des trajectoires du Mouvement Brownien . . . . .	10
1.2.3 Le mouvement Brownien comme Martingale . . . . .	11
1.2.4 Pont Brownien . . . . .	11
1.2.5 Propriété de Markov . . . . .	12
1.3 Processus stochastique à deux paramètres . . . . .	12
1.3.1 Accroissement rectangulaire . . . . .	13
1.3.2 Filtration à deux paramètres . . . . .	14
1.3.3 Martingale à deux paramètres . . . . .	15

## TABLE DES MATIÈRES

---

1.4	Drap Brownien . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Mouvement Brownien fractionnaire et drap Brownien fractionnaire</b>	<b>18</b>
2.1	Mouvement Brownien fractionnaire . . . . .	19
2.1.1	Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire . . . . .	20
2.1.2	La propriété de Hölder et la différentiabilité . . . . .	20
2.1.3	La dépendance à long et à court terme . . . . .	21
2.1.4	La représentation du mouvement Brownien fractionnaire . . . . .	22
2.1.5	Identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette . . . . .	24
2.2	Drap Brownien fractionnaire . . . . .	27
2.2.1	La stationnarité des accroissement du drap Brownien fractionnaire . . . . .	29
2.2.2	L'auto-similarité . . . . .	30
2.2.3	Régularité des trajectoires . . . . .	31
2.2.4	Représentations intégrales du dBf . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Estimation de l'exposant de Hurst de drap Brownien fractionnaire</b>	<b>32</b>
3.1	Coefficients d'ondelettes hyperboliques pour le drap Brownien fractionnaire . . . . .	32
3.2	L'estimation de l'exposant de Hurst de drap Brownienne fractionnaire	37
3.3	Le biais et la variance de $\log_2 S(j)$ . . . . .	37
	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

---

## *Introduction*

---

Le mouvement Brownien fractionnaire est une généralisation du mouvement brownien standard. Alors que le mouvement brownien standard est caractérisé par des trajectoires continues et régulières, le mouvement brownien fractionnaire présente des trajectoires plus rugueuses et irrégulières. Dans le mouvement brownien fractionnaire, la propriété de la dépendance à court terme est étendue pour inclure une dépendance à long terme. Cela signifie que les accroissements du processus sont corrélés non seulement aux étapes précédentes, mais aussi aux étapes antérieures plus éloignées. Cette dépendance à long terme est souvent quantifiée par l'indice de Hurst, qui mesure la rugosité de la trajectoire.

Le mouvement brownien fractionnaire trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que la finance, la physique, la biologie (Peng et al. (1994)) et l'hydrologie (Millen and Beard (2003)). En finance (Mignon (1998)), il est utilisé pour modéliser les variations de prix d'actifs financiers à long terme. En physique, il peut être utilisé pour décrire des phénomènes tels que la diffusion anormale dans les milieux poreux. En biologie, il peut être utilisé pour étudier les mouvements des animaux ou les variations génétiques.

Récemment, les processus stochastiques à deux paramètres (indices) ont été utilisés pour modéliser des phénomènes naturels deux dimensionnels. Par exemple l'analyse d'images médicales telles que les radiographies d'os : voir par exemple les travaux de (Bonami and Estrade (2003)). Dans ces applications, la texture de l'image est modélisée par un processus stochastique à deux paramètres, comme par exemple le drap Brownien fractionnaire (Ayache et al. (2002)) dont les trajectoires sont auto-similaires. En générale le drap Brownien fractionnaire est utilisé pour modéliser des phénomènes spatiaux où la dépendance à long terme est importante

avec représentation à une auto-similarité en temps et en échelle.

Le drap Brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $(H_1, H_2) \in (0, 1)^2$  est un processus à deux paramètres Gaussien centrée issu de zéro avec fonction de covariance :

$$R_{H_1, H_2} = \frac{1}{4} \left( s_1^{2H_1} + t_1^{2H_1} - |t_1 - s_1|^{2H_1} \right) \left( s_2^{2H_2} + t_2^{2H_2} - |t_2 - s_2|^{2H_2} \right).$$

Il devient alors intéressant d'estimer l'indice d'auto-similarité donné par deux paramètres de Hurst. Depuis les années 1950, l'estimation de l'exposant de Hurst est devenue un domaine de recherche majeur. L'hydrologue ([Hurst \(1951\)](#)) na été le précurseur de l'introduction de la méthode d'analyse des étendues normalisées ( $R/S$ ) pour modéliser l'évolution temporelle du niveau du Nil. Par la suite, plusieurs autres techniques ont été proposées par divers auteurs et peuvent être classées en trois catégories :

- Méthodes spectrales.
- Méthodes temporelles.
- Méthodes basées sur les ondelettes.

L'estimation du l'exposant de Hurst par les ondelettes est une méthode largement utilisée dans l'analyse fractale et la série chronologique. Cette méthode a été introduite par ([Abry and Veitch \(1998\)](#)), qui est repose sur la décomposition en ondelettes discrètes du mouvement Brownien fractionnaire, plus Précisément sur la régression linéaire de la variance des coefficients d'ondelettes du mouvement Brownien fractionnaire, avec le choix de l'ondelette de Daubechie. ([Abry and Veitch \(1998\)](#)) ont prouvé que cet estimateur est asymptotiquement sans biais avec une variance minimale.

Cette mémoire est organisée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques propriétés élémentaires des processus stochastiques et de mouvement Brownien.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à deux processus qui sont des extensions du mouvement Brownien (reps. drap Brownien); le mouvement Brownien fractionnaire (resp. drap Brownien fractionnaire), on étudie leurs propriétés, et nous introduisons également quelques notions d'identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par d'ondelettes.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'estimation du paramètre du Hust basé sur les ondelette.

# CHAPITRE 1

## Généralités

### 1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. La vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples de ce genre de phénomène, où en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon. La météo; la population d'une ville; le nombre de personnes dans une file d'attente et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques. Ce dernier fut étudié pour la première fois par le botaniste Robert Brown en 1827 et reçu le nom de mouvement Brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution gaussienne dans la théorie des probabilités. En 1920, N. Wiener donne une définition mathématique du mouvement brownien. Il étudie en particulier ses trajectoires qui sont continues mais nulle part différentiables (à aucun moment la vitesse ne peut être définie car les changements de direction sont trop rapides).

**Définition 1.1 (Processus stochastique).** Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ .

L'ensemble des observations disponibles  $X(t)$ , constitue une réalisation du processus. Un processus stochastique dépend donc à la fois du temps et du hasard, c'est donc une application :



$$\begin{aligned} X : \mathbb{T} \times \Omega &\longmapsto E \\ (t, \omega) &\longmapsto X(t, \omega). \end{aligned} \tag{1.1}$$

On peut alors se représenter le processus stochastique de deux façons,

- Pour  $t$  fixé,  $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$  est une **variable aléatoire** sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
- Pour  $\omega \in \Omega$  fixé,  $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto X_t(\omega)$  est une fonction à valeurs réelles, appelée **trajectoire du processus**.

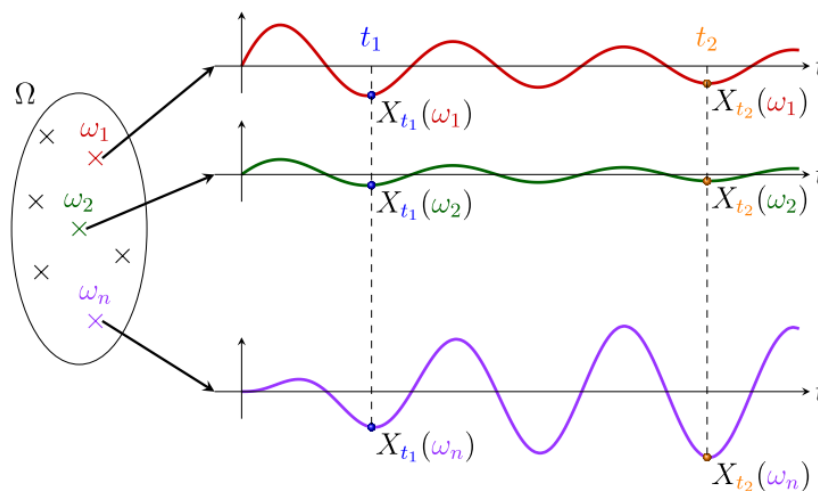


FIGURE 1.1: Illustration d'un processus stochastique

**Remarque 1.1.**

1. Si  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , on dit que  $X$  est une suite aléatoire.
2. Si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ , on dit que  $X$  est une fonction aléatoire.
3. Si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^d$ , on dit que  $X$  est un champ aléatoire (drap quand  $d = 2$ ).
4. Si  $\mathbb{T}$  est fini,  $X$  est simplement un vecteur aléatoire.

**Exemple 1.1.** Considérons l'expérience qui consiste à choisir un amplificateur opérationnel dans un stock d'amplificateurs ayant le même numéro de série. Tous les amplis constituent un résultat possible de cette expérience. Pour chacun d'entre eux on mesure la tension de bruit  $X(t)$  observée en sortie en fonction du temps. La sélection d'un ampli donne lieu à la réalisation d'une courbe de tension particulière  $x(t)$  (La notation majuscule désigne le processus ou la fonction aléatoire et les minuscules désignent les réalisations particulières du processus). Pour un instant  $t_1$ ,  $x(t_1)$  représente une v.a continue.

**Définitions 1.1.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  un processus stochastique.

1. Pour  $0 \leq s \leq t$ , les variables aléatoires  $X_t - X_s$  sont appelées des **accroissements du processus**  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .
2. Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est à **accroissements indépendants** si pour toute suite  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , les variables aléatoires  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.
3. Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est à **accroissements stationnaires** si la distribution de la variable  $X_{t+s} - X_t$  ne dépend pas de  $t$ . En d'autres termes pour tout  $t \geq 0, h \geq 0$  la loi de  $X_{t+h} - X_t$  est égale à la loi de  $X_h - X_0$ .

**Définition 1.2.** Soient  $X = (X_t)_{t \geq 0}, Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  deux processus stochastiques.

1. On dit que  $Y$  est une **modification** de  $X$  si :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \text{ p.s.}$$

2. On dit que les processus  $X$  et  $Y$  sont **indistinguables** si :

$$\mathbb{P}(\forall t \geq 0, X_t = Y_t) = 1 \text{ p.s.}$$

**Proposition 1.1.** Soient  $X = (X_t)_{t \geq 0}, Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  deux processus stochastiques,

1.  $X$  et  $Y$  sont indistinguables  $\implies X$  est une modification de  $Y$ .
2. Si  $X$  et  $Y$  sont continues alors :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indistinguables} \iff X \text{ est une modification de } Y.$$

Dans la suite, quand nous écrirons  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$  égalité en loi de deux processus nous signifierons l'égalité de toutes les lois fini-dimensionnelles de  $X$  et de  $Y$ ,

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}); \quad \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}.$$

**Définition 1.3.** On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à variation finie sur  $[0, T]$  si :

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| < \infty;$$

et à variation quadratique finie sur  $[0, T]$  si :

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 < \infty.$$

La borne supérieure est prise sur la famille de subdivisions  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  de  $[0, T]$ .

### 1.1.1 Filtration

**Définition 1.4 (Filtration).** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{F}$ . C'est-à-dire que,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  pour tous  $0 \leq s \leq t$ .

**Remarques 1.1.**

1. Le tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information dont on dispose à l'instant  $t$ .
2. Le quadruplet  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  est appelé espace de probabilité filtré.
3. L'exemple canonique de filtration est le suivant : si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de  $(X_t)_{t \geq 0}$  est :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), t \geq 0,$$

le plus petits tribu par rapport à laquelle  $X_s$  est mesurable pour tous  $0 \leq s \leq t$ .

4. Par convention, on pose  $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$  la plus petit tribu contenant toutes les  $\mathcal{F}_t$ .
5. Si  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une filtration alors on définit la filtration suivante :  $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ .
6. On dit que la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est continue à droite si :  $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$  **C-à-d**
7. Soit  $\mathcal{N} = \{\text{les ensembles } \mathbb{P}\text{-négligables de } \mathcal{F}\}$ . Si  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ , on dit que la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est complète.

**Définition 1.5.** On dit qu'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.

**Définition 1.6.**  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus définis sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont dit indépendants si les sous tribus  $\mathcal{F}_X = \sigma\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  et  $\mathcal{F}_Y = \sigma\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$  engendrées par les  $X_t$ , respectivement les  $Y_t$ , sont indépendantes relativement à  $\mathbb{P}$ .

### 1.1.2 Processus progressivement mesurable

**Définition 1.7 (Processus mesurable).** On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est dit mesurable si l'application

$$\begin{aligned} X : \mathbb{T} \times \Omega &\longmapsto \mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F} \\ (t, \omega) &\longmapsto X(t, \omega) \end{aligned} \tag{1.2}$$

est mesurable.

**Définition 1.8 (Processus progressivement mesurable).** Un processus  $X$  est progressivement mesurable par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si, pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$  de  $[0, t] \times \Omega$  dans  $\mathcal{X}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ .

### 1.1.3 Processus adapté

**Définition 1.9 (Processus adapté).** On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si pour chaque  $t \geq 0$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Remarque 1.2.** Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

### 1.1.4 Temps d'arrêt

Un temps d'arrêt est une variable aléatoire qui prend des valeurs dans l'ensemble des instants de temps possibles et permet de déterminer le moment auquel un processus stochastique s'arrête. Les temps d'arrêt sont utilisés dans plusieurs contextes, notamment en finance mathématique, en théorie des files d'attente, en théorie du contrôle stochastique, et dans d'autres domaines où la notion de décision aléatoire de s'arrêter est importante.

**Définition 1.10 (Temps d'arrêt).** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  espace probabilisé filtré. une application  $\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{T}$ ; ( $\mathbb{T} = [0, T]$ , ou  $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ) est appelé temps d'arrêt par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{T}, \{\mathcal{T} \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \mathcal{T}(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (1.3)$$

### 1.1.5 Martingales à temps continu

une martingale est un processus stochastique qui représente un modèle d'évolution équitable, où l'espérance conditionnelle future, étant donné l'information passée, est égale à la valeur actuelle. Les martingales sont largement utilisées dans différents domaines pour modéliser et analyser des phénomènes aléatoires équilibrés et étudier les propriétés probabilistes des processus stochastiques.

**Définition 1.11 (Martingale).** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de cet espace. Une famille adaptée  $(M_t)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires intégrables, (c'est-à-dire vérifiant  $\mathbf{E}(|M_t|) < +\infty$  pour tout  $t$ ) est martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ .

**Remarque 1.3.** Une martingale  $(M_t)_{t \geq 0}$  vérifie  $\forall t \geq 0, \mathbf{E}(M_t) = \mathbf{E}(M_0)$ .

### 1.1.6 Régularité des trajectoires

**Définition 1.12 (Processus continu).** On dit que le processus  $X$  est **continu** si  $\forall \omega \in \Omega$  l'application :  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue. i.e : les trajectoires de  $X$  sont continues.

**Définition 1.13.** Un processus stochastique  $X$  est continu à droite (respectivement, continu à gauche) si  $\forall \omega \in \Omega$ , la trajectoire

$$t \rightarrow X_t$$

est continu à droite (respectivement, continu à gauche).

**Définition 1.14.** On rappelle qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  est dite  $\gamma$ -Höldérienne s'il existe  $C < +\infty$  tel que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\gamma$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme ambiante de  $\mathbb{R}^p$  ou de  $\mathbb{R}^d$ .

Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'un processus stochastique ait une modification continue avec des trajectoires Höldériennes.

**Théorème 1.2. (Kolmogorov)** Soient  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , si un processus stochastique  $X$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  satisfait

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq \gamma|t - s|^\beta;$$

alors il existe une version continue  $\tilde{X}$  de  $X$ . En fait, les trajectoires de  $\tilde{X}$  sont Höldériennes pour tout  $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$ .

### 1.1.7 Auto-similarité

**Définition 1.15.** Un processus  $X$  est autosimilaire si pour tout  $\alpha > 0, \exists \lambda > 0$

$$X_{at} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda X_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

au sens de l'égalité des lois fini-dimensionnelles.

**Remarque 1.4.** Pour  $\beta = \alpha^H$ , on dit que  $X$  est autosimilaire d'indice  $0 < H < 1$ , et on écrit :  $\forall \alpha > 0$

$$X_{at} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha X_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$H$  est le coefficient d'auto-similarité.

**Remarque 1.5.** Un processus autosimilaire ne peut pas être en plus stationnaire car on aurait.

$$X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{at} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha^H X_t.$$

On a en particulier  $\mathbb{E}(X_t) = \alpha^H \mathbb{E}(X_t)$ , ce qui donne une contradiction quand on fait tendre  $\alpha^H \mapsto +\infty$ , ( $H > 0$ ).

## 1.1.8 Processus Gaussien

### 1.1.8.1 Vecteur Gaussiens

**Définition 1.16.** Un vecteur gaussien est une variable aléatoire  $(X_1, \dots, X_d)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^d$  telle que pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$  :  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$  est une variable Gaussienne.

#### Remarques 1.2.

1. La matrice  $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  définie par  $\Gamma_{ij} = \text{Cov}(\Gamma_i, \Gamma_j)$  est appelée matrice de covariance du vecteur gaussien. On dit alors que  $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ , où  $m$  est le vecteur des moyennes de  $X_1, \dots, X_d$ . Si  $m = (0, \dots, 0)$ , le vecteur  $X$  est dit centré.
2. La matrice de covariance encode toute l'information contenue dans un vecteur Gaussien.

### 1.1.8.2 Processus Gaussien

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne, d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

**Définition 1.17.** Un espace gaussien est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  formé des variables gaussiennes.

**Exemple 1.2.** Si  $X = (X_1, \dots, X_d)$  est un vecteur gaussien dans  $\mathbb{R}^d$ , alors l'espace vectoriel engendré par  $\{X_1, \dots, X_d\}$  est un espace gaussien.

La proposition suivante indique que l'espace gaussien est un espace fermé.

**Proposition 1.3.** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  un processus gaussien, si  $X_t$  converge en probabilité vers  $X$ , alors  $X$  est aussi une variable aléatoire gaussienne.

**Définition 1.18.** On dit qu'un processus stochastique  $X$  est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses marginales  $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$  suit une loi gaussienne (Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ).

Toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus gaussien sont connues dès qu'on se donne la fonction moyenne  $m = \mathbb{E}(X_t)$  et l'opérateur de covariance  $r = \text{Cov}(X_t, X_s)$ .

**Théorème 1.4.** Soit  $r$  une fonction symétrique de type positif sur  $\mathbb{T}^2$ , il existe alors un processus gaussien dont la fonction de covariance est  $\Sigma$ .

**Proposition 1.5.** Un processus gaussien est stationnaire ssi  $\mathbb{E}(X_t)$  est une constante.

## 1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien est un phénomène stochastique qui décrit le mouvement aléatoire d'une particule dans un fluide. Il tire son nom du botaniste Robert Brown, qui l'a découvert en observant des grains de pollen se déplacer de manière erratique dans de l'eau.

**Définition 1.19.** Un mouvement Brownien standard (ou processus de Wiener)  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un processus gaussien centrée à trajectoires continues avec fonction de covariance :

$$R(t, s) = t \wedge s = \min(t, s). \quad (1.4)$$

**Proposition 1.6.** Un processus aléatoire  $(B_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles est un processus de Wiener ou mouvement Brownien standard réel si :

- i)  $B_0 = 0$  p.s,
- ii)  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un processus à valeurs réelles à accroissements indépendants et stationnaires.
- iii) la variable  $B_t$  suit la loi normale de moyenne nulle et de variance  $t$ , i.e :  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall t \geq 0$ ,
- iv)  $(B_t)$  est à trajectoire continues  $\mathbb{P}$ -p.s.
- v) Le processus  $(-B_t)$  est aussi un mouvement Brownien.
- vi) pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(\lambda^{1/2} B_{\lambda t})$  est un mouvement Brownien.

### 1.2.1 Variation quadratique du mouvement Brownien

**Proposition 1.7.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien, pour  $t \geq 0$ , pour toute suite de subdivision  $\Delta_n$  de  $[0, 1]$ , tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n[0, 1]| = 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left( B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right)^2 = t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

### 1.2.2 Propriétés des trajectoires du Mouvement Brownien

Il est naturel d'étudier les propriétés des trajectoires Browniennes en tant que fonction du temps.

**Théorème 1.8.** Il existe une version de  $B$  telle que, pour tout  $\gamma < \frac{1}{2}$ , les trajectoires sont Höldériennes d'exposant  $\gamma$  sur tout intervalle compact.

**Corollaire 1.9.** Presque sûrement les trajectoires du MB sont Holdériennes dans  $[0, 1/2[$ .

**Proposition 1.10.** Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas différentiables .

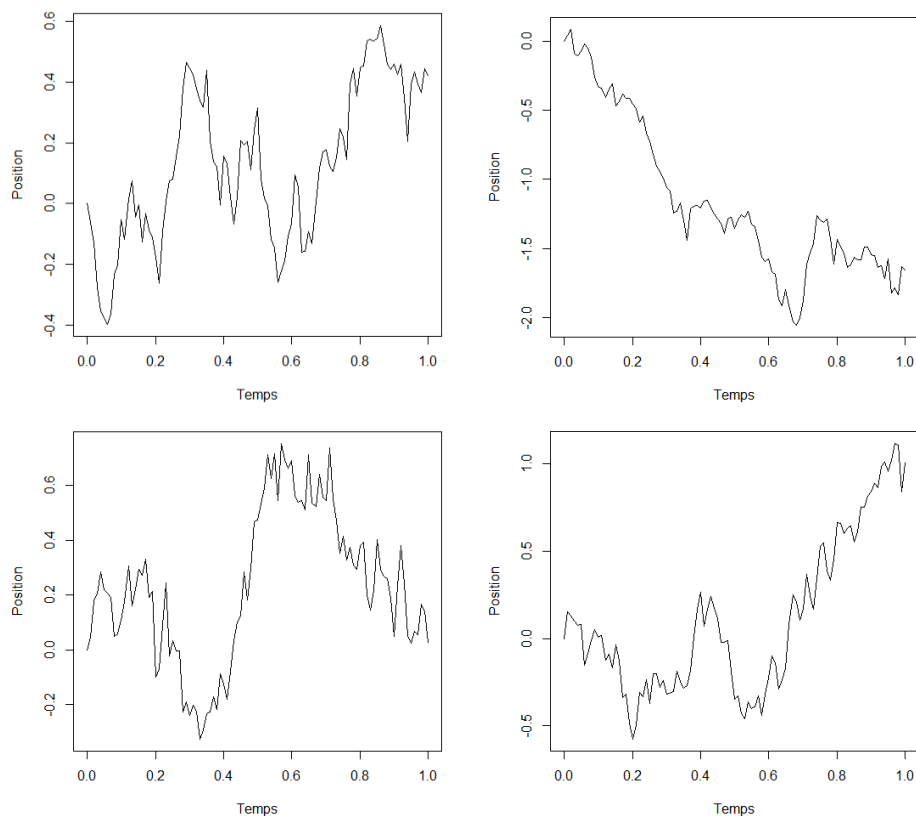


FIGURE 1.2: Simulation du mouvement Brownien

### 1.2.3 Le mouvement Brownien comme Martingale

On considère  $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$  la filtration naturelle du mouvement Brownien.

**Proposition 1.11.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien. Alors les processus suivants sont des  $\mathcal{F}_t^B$ -Martingales

1.  $(B_t)_{t \geq 0}$ .
2.  $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ .
3. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\exp^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t})_{t \geq 0}$ .

### 1.2.4 Pont Brownien

**Définition 1.20.** Le pont Brownien  $(\tilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$  est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance  $K(s, t) = \min(s, t) - st$ .

**Proposition 1.12.** On peut définir directement un pont Brownien  $\tilde{B}$  à partir d'un mouvement Brownien  $B$  par :  $\tilde{B}_t = B_t - tB_1$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Preuve** En effet, d'abord  $(B_t - tB_1)_{t \in [0,1]}$  est Gaussien centré, puis pour  $s, t \in [0, 1]$  on



a :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t - tB_1, B_s - sB_1) &= \text{Cov}(B_t, B_s) - s\text{Cov}(B_1, B_t) - t\text{Cov}(B_s, B_1) + t\text{Cov}(B_1, B_1) \\ &= \min(t, s) - ts - st + st \\ &= \min(t, s) - ts. \end{aligned}$$

Puis le processus  $(B_t - tB_1)_{t \in [0,1]}$  est Gaussien centré avec la bonne covariance, il s'agit d'un pont Brownien.

réciroquement, on peut construire le mouvement brownien  $B$  sur  $T = [0, 1]$  à partir du pont Brownien  $\tilde{B}$  par :  $B_T = \tilde{B}_t + tN$ .

### 1.2.5 Propriété de Markov

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien, pour toute fonction  $f$  borélienne bornée et pour tout on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(B_t) | F_s^B) &= \mathbb{E}(f(B_t) | B_s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{(x-B_s)^2}{2(t-s)}\right) dx \end{aligned}$$

## 1.3 Processus stochastique à deux paramètres

Cette partie contient la théorie élémentaire des processus stochastique à deux paramètres.

Les processus stochastiques à deux paramètres sont utilisés dans de nombreux domaines, notamment la géostatistique, l'analyse de données spatio-temporelles, la modélisation des risques environnementaux, l'épidémiologie, etc. Ils permettent de capturer des relations et des interactions complexes entre des variables aléatoires dans des contextes multidimensionnels.

Un processus stochastique à deux paramètres (indices) est un type de processus stochastique qui dépend de deux variables d'indexation distinctes plutôt que de paramètres. Il s'agit d'une généralisation des processus stochastiques traditionnels qui dépendent d'un seul indice.

L'ensemble d'indices que nous utilisons est  $\mathbb{R}^2$ , avec une importance particulière accordée au  $\mathbb{S} \times \mathbb{T} = [0, S] \times [0, T] \subset \mathbb{R}_+^2$ . La relation d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$  est :

$$(s, t) \leq (s', t') \Leftrightarrow s \leq s', t \leq t',$$

et

$$(s, t) < (s', t') \Leftrightarrow s < s' \quad \text{et} \quad t < t'.$$

Nous posons bien entendu

$$(s, t) \wedge (s', t') = (s \wedge s', t \wedge t'),$$

et de même pour

$$(s, t) \vee (s', t') = (s \vee s', t \vee t').$$

### 1.3.1 Accroissement rectangulaire

**Définition 1.21 (Rectangle).** Les ensembles de la forme  $](s, t), (s', t)[$  sont appelés rectangles, telle que  $](s, t), (s', t)[$  l'ensemble des  $x = (x, x')$  tels que :

$$(s, t) < (x, x') \leq (s', t').$$

**Remarque 1.6.** De même pour les notations  $[(s, t), (s', t)[$  et  $[(s, t), (s', t)]$  se comprennent d'elles mêmes.

**Définition 1.22 (Michta and Świątek (2015)).** On définit l'accroissement du processus  $X$  sur le rectangle  $(s, s'] \times (t, t']$ ,

$$\Delta_{s,t}X(s', t') = X_{s',t'} - X_{s',t} - X_{s,t'} + X_{s,t}.$$

On l'appelle aussi l'accroissement rectangulaire du processus  $X$  sur  $(s, s'] \times (t, t']$ .

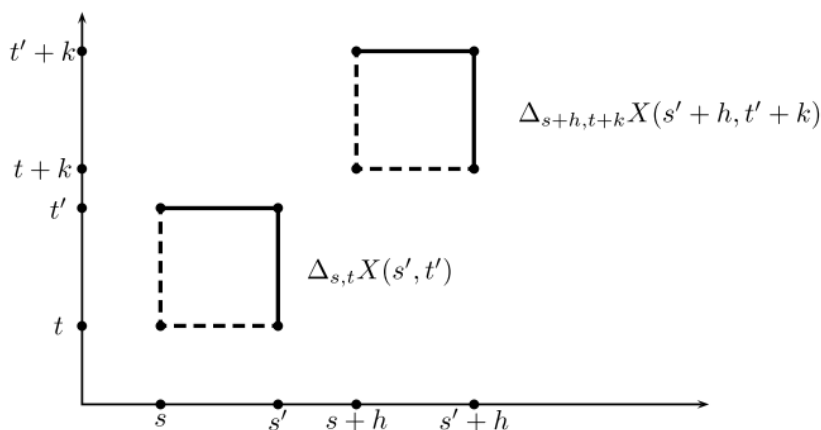


FIGURE 1.3: Accroissement rectangulaire d'une processus  $X$

**Définition 1.23 (Stationnarité).** Un processus gaussien  $X = (X_{s,t}; (s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T})$  est dit stationnaire si,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ , la loi de

$$(X_{s+s_1, t+t_1}, X_{s+s_2, t+t_2}, \dots, X_{s+s_n, t+t_n})$$

ne dépend pas de  $(s, t)$ .

**Définition 1.24 (Auto-similarité).** Un processus stochastique à deux paramètres  $X = (X_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T})$ , est dit auto-similaire d'ordre  $(\alpha, \beta)$  si, pour tout  $h, k > 0$ , le processus  $(\tilde{X}_{s,t})_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$  définie par :

$$\tilde{X}_{s,t} := h^\alpha k^\beta X_{\frac{s}{h}, \frac{t}{k}}$$

a la même loi que le processus  $X$ .

### 1.3.2 Filtration à deux paramètres

**Définition 1.25 (Meyer (1981)).** On considère un espace probabilisé complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sur lequel on se donne deux filtrations satisfaisant aux conditions habituelles  $\{\mathcal{F}_s^1\}_{s \in \mathbb{S}}$  et  $\{\mathcal{F}_t^2\}_{t \in \mathbb{T}}$ . On définit alors pour  $(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$  la filtration  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$  comme suit :

$$\mathcal{F}_{s,t} = \mathcal{F}_s^1 \cap \mathcal{F}_t^2$$

Par convention, on pose :

$$\mathcal{F}_{s,\infty} = \mathcal{F}_s^1 \cap \mathcal{F}_\infty^2 = \mathcal{F}_s^1; \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\infty,t} = \mathcal{F}_\infty^1 \cap \mathcal{F}_t^2 = \mathcal{F}_t^2.$$

**Remarque 1.7.** On vérifie aisément que la famille  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$  est croissante, que chaque  $\mathcal{F}_{s,t}$  contient tous les ensembles  $\mathbb{P}$ -négligeables, et que l'on a la propriété de continuité à droite

$$\mathcal{F}_{s,t} = \mathcal{F}_{s^+, t^+} = \bigcap_{(u,v) > (s,t)} \mathcal{F}_{u,v}$$

en effet, un élément de cette dernière tribu appartient à  $\mathcal{F}_{s,\infty}$  et  $\mathcal{F}_{\infty,t}$ , donc à  $\mathcal{F}_{s,t}$ .

**Propriétés 1.13.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  une espace de probabilité filtré complet où  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$ , est une famille de sous tribu de  $\mathcal{F}$  telle que :

- (i)  $\mathcal{F}_{s,t} \subset \mathcal{F}_{s',t'}$ , pour tout  $(s,t) \leq (s',t')$ ,
- (ii)  $\mathcal{F}_{0,0}$  contient tout les ensembles  $\mathbb{P}$ -négligeable de  $\mathcal{F}$ ,
- (iii)  $\mathcal{F}_{s,t} = \bigcap_{(s,t) < (u,v)} \mathcal{F}_{u,v}$  pour chaque  $(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ ,
- (iv) Pour chaque  $(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ , les sous tribus  $\mathcal{F}_{s,T}$  et  $\mathcal{F}_{S,t}$  sont indépendants conditionnellement par rapport à  $\mathcal{F}_{s,t}$ .

**Définition 1.26 (Cairol and Walsh (1975)).**

Soit  $X = \{X_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}\}$  être  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$ -adapté. On dite que le processus  $X$  est continue à droite si pour tout  $(s,t) \in [0, S), [0, T)$  on a

$$\lim_{\substack{(x',t') \rightarrow (x,t) \\ (x,t) \leq (x',t')}} X_{s',t'} = X_{s,t} \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Le processus  $X$  est dit continue si :  $\lim_{(s',t') \rightarrow (s,t)} X_{s',t'} = X_{s,t}, \quad \mathbb{P} - p.s.$

### 1.3.3 Martingale à deux paramètres

Notons  $\mathbb{L}^{p,d} := \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ ; avec  $p, d \geq 1$ .

Pour  $d = 1$ , on pose  $\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^{p,1}$ , et  $\mathbb{L}_{s,t}^2 := \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{s,t}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$  pour  $(s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ .

**Définition 1.27 (Meyer (1981)).** Un processus  $M = (M_{s,t})_{(s,t) \in [0,S] \times [0,T]}$  est  $\mathbb{L}^2$ -martingale si

1.  $M$  est  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$ -adapté,
2.  $\mathbb{E}|M_{s,t}|^2 < \infty$  pour tous  $(s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ ,
3.  $\mathbb{E}(M_{s',t'} | \mathcal{F}_{s,t}) = M_{s,t}$   $\mathbb{P}$ -p.s, pour tout  $(s, t), (s', t') \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ , avec  $(s, t) \leq (s', t')$ .

**Définition 1.28 (Meyer (1981)).** Un processus  $M = (M_{s,t})_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$  est un  $\mathbb{L}^2$ -martingale faible si

1.  $M$  est  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}}$ -adapté,
2.  $\mathbb{E}|M_{s,t}|^2 < \infty$  pour tous  $(s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ ,
3.  $\mathbb{E}(\Delta_{s,t} X(s', t') | \mathcal{F}_{s,t}) = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s, pour tout  $(s, t), (s', t') \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ , avec  $(s, t) < (s', t')$ .

## 1.4 Drap Brownien

Le Drap Brownien a une grande importance dans de nombreux domaines de recherche. Par exemple, en finance, il est utilisé pour modéliser les fluctuations des prix des actifs financiers. En biologie, il peut être utilisé pour décrire le mouvement des cellules ou des particules subcellulaires. En physique, il peut être appliqué pour étudier la diffusion des particules dans un milieu. De plus, le drap Brownien est un modèle mathématique qui décrit le mouvement aléatoire de particules dans un fluide, et il est utilisé dans de nombreux domaines pour étudier des phénomènes complexes et aléatoires.

**Définition 1.29.** Un drap Brownien  $(W_{s,u}; s, u \geq 0)$  indexé par  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\text{Cov}(W_{s,u}, W_{s',u'}) = K(s, u; s', u') = (s \wedge s')(u \wedge u').$$

**Proposition 1.14.** Soit  $(B_t; t \geq 0)$  un mouvement Brownien et  $(W_{s,u}; s, u \geq 0)$  un drap Brownien. Alors

1. Pour tout  $t \geq 0$  fixé :  $(B_{ut}, u \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (W_{u,t}, u \geq 0)$ .
2. Pour tout  $u \geq 0$  fixé :  $\forall s \leq t$ ,  $W_{u,t} - W_{u,s}$  est indépendant de  $W_{u,s}$ .

**Preuve.** la démonstration de cette proposition découle de la définition.

1. Montrons que pour  $t \geq 0$  fixé :  $(B_{ut}, u \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (W_{u,t}, u \geq 0)$ .

Puisque le drap Brownien est un processus gaussien, il suffit donc de montrer que pour tout  $t \geq 0$  fixe, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(W_{u,t}) = \mathbb{E}(B_{ut}) \\ \text{Cov}(W_{u,t}, W_{u',t}) = \text{Cov}(B_{ut}, B_{u't}) \end{cases}$$

Puisque le mouvement Brownien et drap Brownien sont des processus gaussiens centrés, alors

$$\mathbb{E}(W_{u,t}) = \mathbb{E}(B_{ut}) = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_{u,t}, W_{u',t}) &= (u \wedge u')(t \wedge t) \\ &= (u \wedge u')t \\ &= (ut \wedge u't). \end{aligned}$$

Alors, pour  $t \geq 0$ , on a :

$$\text{Cov}(W_{u,t}, W_{u',t}) = \text{Cov}(B_{ut}, B_{u't}).$$

2. Montrons que pour tout  $u \geq 0$  fixé,  $\forall s \leq t$  on a :  $W_{u,t} - W_{u,s}$  est indépendant de  $W_{u,s}$ . Comme  $(W_{u,t}, u \geq 0)$  est un processus gaussien, la combinaison linéaire suivante :

$$a(W_{u,t} - W_{u,s}) + b(W_{u,s}) = a(W_{u,t}) + (b - a)W_{u,s}$$

est une variable aléatoire gaussienne. Ainsi  $(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s})^t$  est un vecteur aléatoire gaussien. Donc il suffit de montrer que  $\text{cov}(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s}) = 0$ .

Soit  $s \leq t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s}) &= \text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}) - \text{Cov}(W_{u,s}, W_{u,s}) \\ &= u(t \wedge s) - us \\ &= us - us. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s}) = 0. \quad \square$$

**Remarques 1.3.**

1. On peut montrer aussi que pour tout  $u \geq 0$  fixé,  $\forall s' \leq s \leq t$  :  $W_{u,t} - W_{u,s}$  et  $W_{u,s'}$  sont indépendants.

Comme

$$a(W_{u,t} - W_{u,s}) + b(W_{u,s'}) = a(W_{u,t}) - aW_{u,s} + bW_{u,s'}$$

est une variable aléatoire gaussienne. Pour  $s' \leq s \leq t$  nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s'}) &= \text{Cov}(W_{u,t}, W_{u,s'}) - \text{Cov}(W_{u,s}, W_{u,s'}) \\ &= u(t \wedge s') - u(s \wedge s') \\ &= us' - us' = 0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,s'}) = 0.$$

2. Pour  $s \leq t$ ;  $W_{u,t} - W_{u,s}$  est une variable aléatoire Gaussienne puisque c'est une combinaison linéaire des variables d'un processus gaussien. De plus

$$\begin{aligned} \text{Var}(W_{u,t} - W_{u,s}) &= \text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}, W_{u,t} - W_{u,s}) \\ &= \text{Cov}(W_{u,t}, W_{u,t}) - \text{Cov}(W_{u,t} - W_{u,s}) \\ &\quad - \text{Cov}(W_{u,s} - W_{u,t}) + \text{Cov}(W_{u,s} - W_{u,s}) \\ &= ut - us - us + us \\ &= u(t - s). \end{aligned}$$

Donc,

$$W_{u,t} - W_{u,s} \sim \mathcal{N}(0, u(t - s)).$$

---

### *Mouvement Brownien fractionnaire et drap Brownien fractionnaire*

---

Le mouvement brownien fractionnaire est une généralisation du mouvement brownien standard qui permet des déplacements aléatoires avec une distribution de puissance plutôt qu'une distribution normale. Il présente des propriétés d'autosimilarité et est utilisé pour modéliser des phénomènes à longue mémoire dans différents domaines. La théorie des mouvements browniens fractionnaires a été développée par (Mandelbrot and Van Ness (1968)), et depuis lors, elle a suscité beaucoup d'intérêt et de recherche dans de nombreux domaines. Le champ Brownien fractionnaire est une généralisation du mouvement brownien fractionnaire dans un cadre spatial, où l'on considère un champ aléatoire dépendant à la fois du temps et de l'espace, avec une dépendance à longue portée. Il trouve des applications dans divers domaines scientifiques et sa simulation numérique est un sujet de recherche actif.

Le drap Brownien fractionnaire, également connu en anglais sous le nom "**fractional Brownian sheet**", est une généralisation du concept de mouvement brownien fractionnaire à une dimension supplémentaire, créant ainsi une surface aléatoire dans un espace bidimensionnel. Mathématiquement, le drap Brownien fractionnaire est défini comme un champ Brownien fractionnaire dans lequel les valeurs sont interprétées comme des altitudes ou des hauteurs. Autrement dit, il s'agit d'un champ Brownien fractionnaire dont les réalisations sont interprétées comme des surfaces aléatoires.

Le drap Brownien fractionnaire est caractérisé par un indice de Hurst bidimen-

sionnel  $H = (H_1, H_2)$ , qui détermine la dépendance spatiale entre les différentes coordonnées du drap. Un indice de Hurst supérieur à 0,5 indique une corrélation spatiale positive persistante, tandis qu'un indice de Hurst inférieur à 0,5 indique une corrélation spatiale négative persistante. Lorsque l'indice de Hurst est égal à 0,5, le drap se réduit à une surface aléatoire sans corrélation spatiale.

## 2.1 Mouvement Brownien fractionnaire

**Définition 2.1.** Le mouvement Brownien fractionnaire standard de paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$  est un processus Gaussien continu centré noté  $B_t^H$  et est le seul processus vérifiant les propriétés suivantes :

1. Auto-similarité : pour tout  $a > 0$ ,  $B_{at}^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^H B_t^H$ .
2. Accroissements stationnaires :  $\forall h > 0$ ,  $(B_{t+h}^H - B_t^H)_{t \geq 0}$  à la même loi que  $(B_t^H)_{t \geq 0}$ . Autrement dit, pour  $0 < H < 1$ , le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre  $H$ ,  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  est le processus gaussien centré de fonction de covariance :

$$Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

**Remarque 2.1.** Le mouvement Brownien fractionnaire "non-standard" a la fonction de covariance suivante :

$$Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{V^{(H)}}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad (2.1)$$

avec

$$V^{(H)} = \frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}; \quad (2.2)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est La fonction gamma définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

**Remarque 2.2.** Soit  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien fractionnaire, pour  $H = 1/2$  on obtient le mouvement Brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$ .

**Proposition 2.1.**

1. Le mouvement Brownien fractionnaire  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  est un processus Gaussien de variance  $t^{2H}$ .
2. Le mouvement Brownien fractionnaire  $(B_t^H)$  de paramètre de Hurst  $H \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$  n'est pas un processus de Markov.



## 2.1.1 Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire

### 2.1.2 La propriété de Hölder et la différentiabilité

**Proposition 2.2.** *pour  $H \in (0, 1)$ , le mouvement Brownien fractionnaire  $(B^H)$  est  $\gamma$ -Höldérien pour tout  $\gamma < H$ .*

**Preuve.** Soit  $(B^H)$  un mBf, on obtient

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^2) = \mathbb{E}(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|).$$

Par l'application de la linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|) &= \mathbb{E}(|B_t^{2H}|) - 2\mathbb{E}(|B_t^H B_s^H|) + \mathbb{E}(|B_s^{2H}|) \\ &= |t^{2H}| + |s^{2H}| - |t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}| \\ &= |t-s|^{2H}. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t-s|^{2H}. \quad \square$$

On prend  $\alpha = 2$ ,  $d = 1$ , et  $\varepsilon = 2H$ , d'après le théorème du Kolmogorov,  $B_t^H$  a une modification (version)  $\tilde{B}_t^H$ , dont les trajectoires sont Hölder-continue, de paramètre  $\alpha < H$ .

**Proposition 2.3.** *Pour tous  $H \in (0, 1)$ , le mouvement Brownien fractionnaire  $B^H$  n'est pas différentiable  $\mathbb{P}$ -p.s. De plus pour tout  $t_0 \in [0, \infty[$  on a :*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \right| = \infty\right) = 1.$$

**Preuve.**

Désignons que

$$\mathfrak{B}_{t,t_0} = \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0}.$$

Utilisons la propriété d'auto-similarité, on a :

$$\mathfrak{B}_{t,t_0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t - t_0)^{H-1} B_1^H.$$

On définit

$$\mathfrak{U}(t, \omega) = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s^H}{s} \right| > d \right\}.$$

Puis, pour toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui décroît vers 0, on a :

$$\mathfrak{U}(t_{n+1}, \omega) \subseteq \mathfrak{U}(t_n, \omega).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{U}(t_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathfrak{U}(t_n))$$

et

$$\mathbb{P}(\mathfrak{U}(t_n)) \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_s^{t_n}}{s}\right| > d\right) = \mathbb{P}\left(|B_1^H| > t_n^{1-H} d\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \cdot \quad \square$$

**Proposition 2.4.** *Le mouvement Brownien fractionnaire admet les propriétés suivantes :*

1.  $B_0^H = 0$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s ;
2. Pour tous  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}((B_t^H)^2) = t^{2H}$  ;
3. La variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire est équivalente p.s à  $n^{1-2H}$ .

### 2.1.3 La dépendance à long et à court terme

**Définition 2.2.** Un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est dit à long terme si  $\rho(n) = \text{Cov}(X_k, X_{k+n})$  satisfait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-H}} = 1.$$

pour  $H \in (0, 1)$  et  $c$  une constante positive.

Le mouvement Brownien fractionnaire est l'un des processus les plus simples qui présente la dépendance à long terme.

**Remarque 2.3.** Si un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est a dépendance a long terme, la dépendance entre  $X_k$  et  $X_{K+1}$  diminue lentement quand  $n \rightarrow \infty$  et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty.$$

**Proposition 2.5.** *Le mouvement Brownien présente une dépendance à long terme si  $H > \frac{1}{2}$ , et une dépendance à courte terme si  $H < \frac{1}{2}$ .*

**Preuve.** On considère :

$$X_k = B_k^H - B_{k-1}^H, \quad X_{k+n} = B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H;$$

puisque le mouvement Brownien fractionnaire est un processus centré, alors

$$\begin{aligned}
 \rho(n) &= \mathbb{E}\left(\left(B_k^H - B_{k-1}^H\right)\left(B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H\right)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(B_1^H\left(B_{n+1}^H - B_n^H\right)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(B_1^H B_{n+1}^H\right) - \mathbb{E}\left(B_1^H B_n^H\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left[(n+2)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right] \\
 &= \frac{1}{2}n^{2H}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H}\right] \\
 &= \frac{n^{2H}}{2}\left[\left(1 + \frac{2H}{n}\right) + \frac{H(2H-1)}{n^2} - 2 + 1 - \frac{2H}{n} + \frac{H(2H-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
 &= H(2H-1)n^{2H-2} + o\left(n^{2H-2}\right)
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si  $H > \frac{1}{2}$  on a

$$\rho(n) > 0, \quad \text{et} \quad \sum_n \rho(n) = \infty;$$

et pour  $H < \frac{1}{2}$ , on a

$$\rho(n) < 0, \quad \text{et} \quad \sum_n \rho(n) < \infty. \quad \square$$

Pour cela, on dit que le mouvement Brownien fractionnaire a une dépendance à long terme si et seulement si  $H > \frac{1}{2}$  et à court terme s.s.i  $H < \frac{1}{2}$ .

## 2.1.4 La représentation du mouvement Brownien fractionnaire

Soit  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ ,  $H \in (0, 1)$  un mouvement Brownien fractionnaire. Il existe de nombreuses représentations d'un mouvement Brownien fractionnaire.

### 2.1.4.1 Représentation par Moyenne Mobile

Le mouvement Brownien fractionnaire  $B^H$  a eu une représentation dans les travaux de (Mandelbrot and Van Ness (1968)) dans  $\mathbb{R}$ , présentée comme suit

$$B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left( (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_u, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2.3)$$

ou

$$C_1(H) = \left( \int_{\mathbb{R}} \left( (1+s)^{H-\frac{1}{2}} - (s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds + \frac{1}{2H} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

et on note  $x_+ = \max(x; 0)$ .

### 2.1.4.2 Représentation harmonizable

Soit  $0 < H < 1$ . Le mouvement Brownien fractionnaire a la représentation suivante :

$$B_t^H = \frac{1}{CH} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} |x|^{(H-\frac{1}{2})} d\tilde{B}_x, \quad t \in \mathbb{R}$$

où  $\tilde{B}_x$  est un mouvement Brownien à valeur complexe, et

### 2.1.4.3 Représentation de Levy-Hida

Il y a aussi une autre représentation du mouvement Brownien fractionnaire comme une intégrale de Wiener sur un intervalle finie  $[0, T]$  de la forme ci-dessous : On a un processus de Wiener  $B_s$  et le noyau :

$$K_H = (t, s) = d_H(t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{H-\frac{1}{2}} F_1\left(\frac{t}{s}\right);$$

avec  $d_H$  est une constante et

$$F_1 = d_H \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^{z-1} \theta^{H-\frac{2}{3}} (1 - (\theta+1)^{H-\frac{1}{2}}) d\theta.$$

• Si  $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , le noyau  $K_H$  est donné par :

$$K_H(t, s) = b_H \left( \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H - \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}-H}\right) \int_s^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} u^{H-\frac{3}{2}} du \right),$$

où

$$b_H = \left( \frac{2H}{1 - 2H\mathcal{B}\left(1 - 2H, H + \frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec  $\mathcal{B}$  est la fonction Bêta définie comme suit :  $\left(\mathcal{B}(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt\right)$

• si  $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . Le noyau a la simple expression suivante :

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t |u-s|^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \quad t > s,$$

où

$$c_H = \left( \frac{H(2H-1)}{\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

la représentation de *Levy-Hida* du mouvement Brownien fractionnaire est la suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dB_s, \quad 0 < s < t < \infty.$$

## 2.1.5 Identification d'un mouvement Brownien fractionnaire par ondelette

Dans cette partie, Tout d'abord, nous introduisons les notions de base des ondelettes. Ensuite, nous exposons les coefficients d'ondelettes de mouvement Brownien fractionnaire et la méthode d'estimation du paramètre de Hurst. Pour plus de détails voir les références (Daubechies (1992)), (Benmehdi (2016)).

**Définition 2.3.** Une ondelette est une fonction  $\psi$  de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  oscillante de moyenne nulle et a support fini, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0,$$

et doit remplir la condition d'admissibilité.

**Condition d'admissibilité :** la condition d'admissibilité est donnée par :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty,$$

où  $\hat{\psi}$  désigne la transformée de Fourier de  $\psi$ .

**Condition de la régularité :** l'ondelette mère  $\psi$  vérifie la propriété que les moments d'ordre  $N$  sont nuls si est seulement si :

$$\int t^K \psi(t)dt \equiv 0, K = 0, \dots, N - 1.$$

**Exemple 2.1.** L'ondelette mère de Harr est la plus simple, c'est une fonction constante par morceaux, définie par l'expression suivante :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

### 2.1.5.1 La transformation en ondelettes continue

la transformation en ondelette continue de la fonction  $x(t)$  est donnée par la formule suivante :

$$W_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt.$$

La fonction  $\psi_{a,b}(t)$  est obtenue par la translation  $b$  et la dilatation  $a$  de l'ondelette mère  $\psi$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

où  $a \in \mathbb{R}_+$ , et  $b \in \mathbb{R}$ . La transformation en ondelette inverse est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_x(a, b)}{a^2} \psi_{a,b}(t) da db. \quad (2.4)$$

### 2.1.5.2 La transformation en ondelettes discrète

La transformation en ondelettes discrète est une version discrétisée de la transformation en ondelette continue avec une utilisation d'un échantillonnage dyadique, tel que :  $a = 2^{-j}$  et  $b = k2^{-j}$  où  $j, k$  sont des entiers.

### 2.1.5.3 L'analyse de multi-résolution (AMR)

L'analyse multi-résolution est une suite des sous espace  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  fermés et emboîtés de l'espace  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  que vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$
- 2)  $V_j \subset V_{j-1}$
- 3)  $x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2^j t) \in V_0$
- 4) il existe une fonction  $\phi(t)$  de l'espace  $V_0$  qui s'appelle fonction d'échelle ou l'ondelette père, telle que la famille  $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base de Riesz pour  $V_0$

La première propriété assure l'existence de la projection d'un fonction  $f$  de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  sur l'espace  $V_j$ , la deuxième propriété indique qu'il existe un sous espace complémentaire  $W_j$  de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$  i.e :

$$V_{j-1} = W_j \oplus V_j. \quad (2.5)$$

Notons que,  $j$  s'appelle la résolution, c'est le niveau d'analyse d'un fonction  $f$  de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ ,  $V_j$  sont appelés l'espace d'approximation (les basses fréquences),  $W_j$  sont appelés espace détails (les hautes fréquences). Par itérations de l'équation (2.5) on trouve :

$$V_J = V_K \oplus \dots \oplus W_{J+1}, J < K. \quad (2.6)$$

Alors l'espace  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus \left\{ \bigoplus_{j=-\infty}^J W_j \right\}.$$

La troisième propriété de la dilatation et la quatrième propriété permettent d'affirmer que la famille  $\{\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j/2} t - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée de l'espace  $V_j$ .

Ainsi l'opérateur de la sommation directe dans l'équation (2.5) peut montrer l'existence d'un fonction  $\psi$  appelée ondelette mère telle que la famille  $\{\psi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée de  $W_0$ . Par conséquent la famille  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j/2} t - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée de l'espace  $W_j$ .

L'analyse multi-résolution permette de réécrire une fonction  $x$  de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  sous la forme suivante :

$$x(t) = \sum_k a_x(j, k) \phi_{j,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_x(j, k) \psi_{j,k}(t).$$

Les  $a_x(j, k)$ , s'appellent les coefficients d'échelles et  $d_x(j, k)$  s'appellent les coefficients d'ondelettes, ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$a_x(j, k) = \langle x, \phi_{j,k} \rangle \quad \text{et} \quad d_x(j, k) = \langle x, \psi_{j,k} \rangle.$$

Où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ .

#### 2.1.5.4 Décomposition en ondelette d'un drap Brownien fractionnaire

Soit  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base d'ondelettes dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ . La technique de décomposition en ondelettes est basée sur les propriétés des coefficients de la transformée en ondelettes qu'ils sont définis par :

$$d_{BH}(j, k) = \langle B_t^H, \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} B_t^H \psi_{j,k}(t) dt. \quad (2.7)$$

Les coefficients d'ondelettes de mouvement brownien fractionnaire possèdent des propriétés spécifiques liées à la nature fractale du processus de mouvement brownien fractionnaire. Voici quelques-unes de ces propriétés : Certaines propriétés du coefficient d'ondelettes de mBf sont données dans le lemme suivant. La preuve de ce lemme se trouve dans (Abry et al. (2000, 2003))

#### Propriétés 2.6.

1. Pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$ ; le processus  $d_{BH}(j, k)$  est Gaussien centré.
2. Pour  $j \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$d_{BH}(j, k) \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2^{j(H+1/2)} C_H, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

3. Pour  $j \in \mathbb{Z}$ , on obtient

$$d_{BH}(j, k + h) \stackrel{\mathcal{L}}{=} d_{BH}(j, k), \forall k, h \in \mathbb{Z}. \quad (2.9)$$

4. Si  $|j - j'| \rightarrow +\infty$  alors :

$$\mathbb{E} d_{BH}(j, k) d_{BH}(j', k') \approx |2^j k - 2^{j'} k'|^{2H-2N}; \quad (2.10)$$

avec  $N$  est le nombre de moment nuls de l'ondelette mère.

#### 2.1.5.5 L'estimation du paramètre de Hurst de mouvement Brownien fractionnaire

L'estimation du paramètre de Hurst pour un mouvement brownien fractionnaire peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes. L'une des méthodes les plus couramment utilisées est la méthode d'ondelettes. La technique de décomposition en

ondelettes permet d'estimer le paramètre de Hurst  $H$ . En effet, d'après les propriétés des coefficients de la transformée en ondelettes on obtient :

$$\log_2(\mathbb{E}(d_{B^H}^2(j, k))) = j(2H + 1) + \log_2(C_H). \quad (2.11)$$

En estimant le terme  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(d_{B^H}^2(j, k)))$  par le moment empirique d'ordre 2, on obtient :

$$\mu_j = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{B^H}^2(j, k).$$

Donc, l'équation (2.11) devient

$$\log_2(\mu_j) = j(2H + 1) + \log_2(C_H). \quad (2.12)$$

Donc l'estimateur de  $H$  est déduit par la régression linéaire de  $\{\log_2(\mu_j)\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$  sur  $\{j\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$ . Pour plus des détails sur l'estimation de paramètre de Hurst basé sur les ondelette voir les références (Veitch and Abry (1999)), (Scipioni et al. (2007)), (Wu (2020)).

## 2.2 Drap Brownien fractionnaire

Le drap Brownien fractionnaire (mBf à deux paramètres) est utilisé dans divers domaines pour modéliser des phénomènes avec une dépendance à long terme multivariée, tels que la finance, l'économie, la météorologie, la géophysique et bien d'autres. Il permet de capturer la dépendance entre plusieurs variables et de représenter leur comportement statistique à différentes échelles de temps.

**Définition 2.4.** Le drap Brownien fractionnaire standard d'indice de Hurst  $H = (H_1, H_2) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[$  est un champ aléatoire  $\{B_{s,t}^{H_1, H_2} : (s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}\}$  gaussien, centré, continu et de fonction covariance, pour tout  $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} R_{H_1, H_2}(s_1, s_2, t_1, t_2) &:= \mathbb{E}(B_{s_1, t_1}^{H_1, H_2} B_{s_2, t_2}^{H_1, H_2}) \\ &= \frac{1}{4}(s_1^{2H_1} + t_1^{2H_1} - |t_1 - s_1|^{2H_1})(s_2^{2H_2} + t_2^{2H_2} - |t_2 - s_2|^{2H_2}), \end{aligned}$$

ce champ aléatoire est auto-similaire et à stationnaires sur les rectangles qui est une extension du mouvement Brownien fractionnaire.

**Proposition 2.7 (Ayache et al. (2002)).** Définissons le drap Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H = (H_1, H_2)$  par une double intégration fractionnaire du drap brownien  $W_{u,v}$  :

$$B_{s,t}^{H_1, H_2} = \int_{\mathbb{R}^2} [(s-u)_+^{H_1-1/2} - (-u)_+^{H_1-1/2}] [(t-v)_+^{H_2-1/2} - (-v)_+^{H_2-1/2}] dW_{u,v}. \quad (2.13)$$

Alors, si  $(H_1, H_2) \in (0, 1)^2$ , le drap Brownien fractionnaire  $B_{s,t}^{H_1, H_2}$  est bien défini. C'est un champ aléatoire gaussien centrée nul sur les axes.



**Preuve.** Il suffit de montrer que la fonction à intégrer  $\psi_{H_1}(s, \cdot)\psi_{H_2}(t, \cdot)$  appartient à  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ , avec

$$\psi_H(s, u) = (s - u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2}. \quad (2.14)$$

Pour démontrer que  $B_{s,t}^{H_1, H_2}$  nul sur les axes, il faut de remarquer que

$$B^{H_1, H_2}(s, 0) = B^{H_1, H_2}(0, t) = B_{H_1, H_2}(0, 0) = 0. \quad \square$$

Pour plus des détails de cette démonstration, voir (Léger and Pontier (1999); Ayache et al. (2002)), (Ayache et al. (2002)).

**Remarque 2.4.** Le drap Brownien fractionnaire "non-standard" a la fonction de covariance suivante :

$$\begin{aligned} Cov(B_{s_2, t_2}^{H_1, H_2} B_{s_1, t_1}^{H_1, H_2}) &= \frac{C_{H_1}}{2} (|s_2|^{2H_1} + |s_1|^{2H_1} - |s_2 - s_1|^{2H_1}) \\ &\quad \times \frac{C_{H_2}}{2} (|t_2|^{2H_2} + |t_1|^{2H_2} - |t_2 - t_1|^{2H_2}); \end{aligned}$$

où

$$C_{H_1} = \int_{\mathbb{R}} \psi_{H_1}(1, u) du, \quad \text{et} \quad C_{H_2} = \int_{\mathbb{R}} \psi_{H_2}(1, v) dv.$$

**Propriétés 2.8 (Léger and Pontier (1999)).** Le drap Brownien fractionnaire a aussi ces immédiates propriétés :

1. Le processus est une champ aléatoire Gaussien centré et sa variance est :

$$Var(B_{s,t}^{H_1, H_2}) = C_{H_1} s^{2H_1} C_{H_2} t^{2H_2}. \quad (2.15)$$

Donc

$$B_{s,t}^{H_1, H_2} \sim \mathcal{N}(0, C_{H_1} s^{2H_1} C_{H_2} t^{2H_2}). \quad (2.16)$$

2. L'accroissement standard de  $B_{s,t}^{H_1, H_2}$  vérifié la propriété suivante :

$$\begin{aligned} 2 \| B^{H_1, H_2}(s, t) - B_{H_1, H_2}(s_1, t_1) \|_2^2 &= C_{H_1} C_{H_2} (|s|^{2H_1} - |s_1|^{2H_1})(|t|^{2H_2} - |t_1|^{2H_2}) \\ &\quad + (s - s_1)^{2H_1} (t^{2H_2} + t_1^{2H_2}) \\ &\quad + (t - t_1)^{2H_2} (s^{2H_1} + s_1^{2H_1}) \\ &\quad - (s - s_1)^{2H_1} (t - t_1)^{2H_2}. \end{aligned}$$

3. Si  $H_1 = H_2 = 1/2$ , alors le drap Brownien fractionnaire n'est qu'un drap Brownien.
4. Comme dans le cas du mBf, si  $(H_1, H_2) \neq (1/2, 1/2)$ , le drap Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale.
5. Les deux processus  $s \rightarrow B_{s,t}^{H_1, H_2}$  et  $t \rightarrow B_{s,t}^{H_1, H_2}$  sont des mBf d'indices de Hurst, respectivement,  $H_1$  et  $H_2$ , ayant les mêmes lois que  $s \rightarrow s^{H_1} B^{H_1}$  et  $t \rightarrow t^{H_2} B^{H_2}$ , respectivement, où pour  $H = (H_1, H_2)$ ,  $B^H := B_1^H$ .

## 2.2.1 La stationnarité des accroissement du drap Brownien fractionnaire

Dans cette section, nous présentons deux propriétés très importantes du dBf.

**Définition 2.5 (Stationnarité de dBf).** Un processus gaussien  $B^{H_1, H_2} = (B_{s,t}^{H_1, H_2}, (s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T})$  est dit stationnaire si,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall (s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ , la loi de

$$(B_{s+s_1, t+t_1}^{H_1, H_2}, B_{s+s_2, t+t_2}^{H_1, H_2}, \dots, B_{s+s_n, t+t_n}^{H_1, H_2})$$

ne dépend pas de  $(s, t)$ .

**Proposition 2.9 (Ayache et al. (2002)).** On définit les accroissements rectangulaires du processus  $B^{H_1, H_2}$  par :

$$\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2} = B_{s+h, t+k}^{H_1, H_2} - B_{s+h, t}^{H_1, H_2} - B_{s, t+k}^{H_1, H_2} + B_{s, t}^{H_1, H_2}.$$

Alors le processus  $B^{H_1, H_2}$  est à accroissements stationnaires. c'est-à-dire :

$$(\Delta_{s,t} B_{h_1, k_1}^{H_1, H_2}, \Delta_{s,t} B_{h_2, k_2}^{H_1, H_2}, \dots, \Delta_{s,t} B_{h_n, k_n}^{H_1, H_2}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\Delta_{0,0} B_{h_1, k_1}^{H_1, H_2}, \Delta_{0,0} B_{h_2, k_2}^{H_1, H_2}, \dots, \Delta_{0,0} B_{h_n, k_n}^{H_1, H_2}).$$

**Preuve.** Il faut montrer que, pour tout  $(s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ , les lois de dimension finie du processus accroissements  $(h, k) \rightarrow \Delta_{s,t} B^{H_1, H_2}$  ne dépendent pas de  $(s, t)$ , c'est à dire que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall (h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots, (h_n, k_n) \in \mathbb{R}_+^2$ , on a

$$(\Delta_{s,t} B_{h_1, k_1}^{H_1, H_2}, \Delta_{s,t} B_{h_2, k_2}^{H_1, H_2}, \dots, \Delta_{s,t} B_{h_n, k_n}^{H_1, H_2}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\Delta_{0,0} B_{h_1, k_1}^{H_1, H_2}, \Delta_{0,0} B_{h_2, k_2}^{H_1, H_2}, \dots, \Delta_{0,0} B_{h_n, k_n}^{H_1, H_2}).$$

Comme le processus  $(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{H_1, H_2})$  est Gaussien, il suffit de montrer que pour tout  $(h_i, k_i); (h_j, k_j) \in \mathbb{R}_+^2$  :

$$\mathbb{E}(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{H_1, H_2}), \quad \text{Var}(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{H_1, H_2}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{H_1, H_2} \Delta_{s,t} B_{h_j, k_j}^{H_1, H_2})$$

ne dépendent pas de  $s$  et  $t$ .

Pour cela, nous allons commencer par expliciter  $\Delta_{s,t} B_{h_j, k_j}^{H_1, H_2}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2} &= B_{s+h, t+k}^{H_1, H_2} - B_{s+h, t}^{H_1, H_2} - B_{s, t+k}^{H_1, H_2} + B_{s, t}^{H_1, H_2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [\psi_{H_1}(s+h, u) \psi_{H_2}(t+k, v) - \psi_{H_1}(s, u) \psi_{H_2}(t+k, v) \\ &\quad - \psi_{H_1}(s+h, u) \psi_{H_2}(t, v) + \psi_{H_1}(s, u) \psi_{H_2}(t, v)] dW_{u,v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [\psi_{H_1}(s+h, u) - \psi_{H_1}(s, u)] [\psi_{H_2}(t+k, v) - \psi_{H_2}(t, v)] dW_{u,v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[ (s+h-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} - (s-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} \right] \left[ (t+k-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} - (t-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} \right] dW_{u,v}. \end{aligned}$$

- \*  $\mathbb{E}(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2}) = 0$  par la définition de l'intégrale par rapport au drap bruit blanc.
- \* Calculons maintenant  $Var(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2})$  :

$$Var(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2}) = \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ (s+h-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} - (s-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} \right]^2 du \right) \times \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ (t+k-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} - (t-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} \right]^2 dv \right).$$

On fait le changement de variable :  $hx = u - s$  et  $ky = v - t$ , et l'on obtient :

$$Var(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2}) = C_{H_1} h^{2H_1} C_{H_2} k^{2H_2}.$$

Donc,  $Var(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2})$  ne dépend pas de  $s$  et  $t$ .

- \* Calculons la fonction de covariance  $Cov(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2}; \Delta_{s,t} B_{h',k'}^{H_1, H_2})$ .

Pour tout  $h, h', k, k' \in \mathbb{R}^+$  ; et pour  $(s, t) \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}$  on a :

$$Cov(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2}; \Delta_{s,t} B_{h',k'}^{H_1, H_2}) = \int_{\mathbb{R}} \left[ (s+h-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} - (s-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} \right] \left[ (s+h'-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} - (s-u)_+^{H_1 - \frac{1}{2}} \right] du \times \int_{\mathbb{R}} \left[ (t+k-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} - (t-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} \right] \left[ (t+k'-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} - (t-v)_+^{H_2 - \frac{1}{2}} \right] dv.$$

On obtient le produit de deux covariances d'accroissements de deux **mBf** de paramètres respectifs  $H_1$  et  $H_2$ , c-à-d :

$$Cov(\Delta_{s,t} B_{h,k}^{H_1, H_2}; \Delta_{s,t} B_{h',k'}^{H_1, H_2}) = \frac{C_{H_1} C_{H_2}}{4} (|h|^{2H_1} + |h'|^{2H_1} - 2|h-h'|^{2H_1}) (|k|^{2H_2} - |k'|^{2H_2} - 2|k-k'|^{2H_2}); \quad \square$$

et la covariance ne dépend ni de  $s$  ni de  $t$ .

**Corollaire 2.10.** *Le processus accroissement  $\Delta B^{H_1, H_2}$  est un champ aléatoire gaussien centré de fonction de covariance*

$$\frac{1}{4} C_{H_1} C_{H_2} (|h|^{2H_1} + |h'|^{2H_1} - 2|h-h'|^{2H_1}) (|k|^{2H_2} - |k'|^{2H_2} - 2|k-k'|^{2H_2}).$$

## 2.2.2 L'auto-similarité

**Proposition 2.11.** *Le drap brownien fractionnaire  $B^{H_1, H_2}$  est un processus auto-similaire dans le sens où : si  $\forall h, k \in \mathbb{R}_*^+$ , le processus  $\tilde{B}^{H_1, H_2}$  défini par*

$$\tilde{B}_{s,t}^{H_1, H_2} = h^{H_1} k^{H_2} B_{\frac{s}{h}, \frac{t}{k}}^{H_1, H_2}$$

*est de même loi que  $B^{H_1, H_2}$ .*

**Preuve.** Il est évident que  $\tilde{B}_{s,t}^{H_1, H_2}$  est un champ gaussien. Donc, pour montrer que les deux champs aléatoires ont la même loi, il suffit de montrer qu'ils ont la même moyenne et la même fonction de covariance. Pour cela, il suffit d'appliquer les deux propriétés de base du drap Brownien fractionnaire.

### 2.2.3 Régularité des trajectoires

Comme dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire, le drap Brownien fractionnaire admet des trajectoires continues pour tout  $H_1, H_2 \in (0, 1)$ .

**Proposition 2.12 (Ayache et al. (2002)).** *Si  $H_1, H_2 \in (0, 1)$ ,  $B^{H_1, H_2}$  admet une modification  $\tilde{B}^{H_1, H_2}$  dont les trajectoires sont continues sur  $\mathbb{R}_+^2$ . De plus, les trajectoires de  $\tilde{B}^{H_1, H_2}$  sont Hölderiennes d'exposants  $(H'_1, H'_2)$ ,  $\forall H'_1 \in (0, H_1), H'_2 \in (0, H_2)$ .*

**Preuve.** D'après le corollaire 2.10,  $\Delta B^{H_1, H_2}$  suit une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, c_{H_1} c_{H_2} h^{2H_1} k^{2H_2})$ . Or les moments des lois gaussiennes sont liés par la relation :

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \|X\|_2^r$$

pour tout  $r > 0$  ( $r$  paire). Donc ,

$$\mathbb{E}(|\Delta B^{H_1, H_2}(h, k)|^r)^{\frac{1}{r}} = \left( \frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{r}} \sqrt{c_{H_1} c_{H_2}} h^{H_1} k^{H_2} = c_{H_1, H_2, r} h^{H_1} k^{H_2},$$

où

$$c_{H_1, H_2, r} = \sqrt{c_{H_1} c_{H_2}} \left( \frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad \square$$

En choisissant  $r > \sup(1/H_1, 1/H_2)$ , puisque  $H_1, H_2 \in (0, 1)$ , on a montré la proposition.

### 2.2.4 Représentations intégrales du dBf

Rappelons que le **mBf**  $B^{H_1}$  d'indice de Hurst  $H_1$  admet une représentation intégrale sous la forme suivante :

$$B_t^{H_1} = \int_0^t K_{H_1}(t, s) dB_s$$

où  $B$  est un mouvement Brownien standard et le noyau  $K_H$  est donné par :

$$K_H(t, s) = \left[ d_H (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + d_H \left( \frac{1}{2} - H \right) \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} \left( 1 - \left( \frac{s}{u} \right)^{\frac{1}{2}-H} \right) du \right] \mathbf{1}_{[0, t]}(s)$$

avec  $d_H$  est la constante de normalisation suivante :

$$d_H = \left( \frac{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En tenant compte de l'expression précédente au cas du mBf, on peut définir le drap Brownien fractionnaire comme suit :

$$B_{t,s}^{H_1, H_2} = \int_0^t \int_0^s K_{H_1}(t, u) K_{H_2}(s, v) dW_{u,v}.$$

---

### *Estimation de l'exposant de Hurst de drap Brownien fractionnaire*

---

Le drap Brownien fractionnaire joue un rôle très important dans la modélisation des champs gaussiens anisotropes avec auto-similarité et dépendance à longue portée. (voir par exemple, les références (Doukhan et al. (2002)), (Atto et al. (2013)) et (Pesquet-Popescu and Véhel (2002))).

Cette chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la Section 3.1, nous introduisons les propriétés de dBf, et montrons la stationnarité et l'invariance d'échelle des coefficients d'ondelettes hyperboliques de dBf (voir la proposition 3.1). Sur la base de ces propriétés, l'estimateur basé sur les ondelettes  $\hat{H}$  pour les paramètres de Hurst  $H = (H_1, H_2)$  de dBf est proposé comme estimateur proposé par (Abry and Veitch (1998); Abry et al. (2000, 2003)) dans le cas unidimensionnel. (Voir la Section 3.2).

### **3.1 Coefficients d'ondelettes hyperboliques pour le drap Brownien fractionnaire**

La transformée hyperbolique deux dimensionnelle en ondelettes est construite comme produit tensoriel d'une base d'ondelette, issue d'une analyse multi-résolution unidimensionnelle avec elle-même (Voir, (Mallat (1999))).

Soit  $\psi(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  une ondelette orthonormée à support compact et  $N \geq 1$ . On dit

l'ondelette mère  $\psi$  vérifie la propriété que les moments d'ordre  $N$  sont nuls si et seulement si :

$$\int t^K \psi(t) dt \equiv 0, K = 0, 1, \dots, N-1; \text{ et } \int t^N \psi(t) dt \neq 0.$$

Ses dilatations et translations

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

représentant la base d'ondelettes obtenue à partir de l'ondelette mère  $\psi(t)$ , issue d'une analyse multi-résolution.  $\psi_{j,k}(t)$  construite la base orthonormée des ondelettes dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ . Les facteurs  $2^j$  et  $j$  sont appelés l'échelle et le résolution (l'octave), respectivement. Le facteur  $k$  est appelé "translation".

D'après les travaux (Daubechies (1992)), (Dietrich and Newsam (1997)), la base orthonormée des ondelettes pour  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$  peut être obtenue en prenant simplement les fonctions de produits tensoriels engendrées par deux bases unidimensionnelles.

$$\psi_{j,k}(t_1, t_2) = \psi_{j_1, k_1}(t_1) \psi_{j_2, k_2}(t_2); \quad (3.2)$$

où

$$j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, t = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Les coefficients d'ondelettes pour le drap Brownien fractionnaire  $B^{H_1, H_2}$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont :

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t_1, t_2) B^{H_1, H_2}(t) dt_1 dt_2. \quad (3.3)$$

Avant d'introduire  $\tilde{H} = (\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$  l'estimateur pour le paramètre du Hurst  $H = (H_1, H_2)$ , nous présentons quelques propriétés du coefficient d'ondelettes de  $B^{H_1, H_2}$ .

**Proposition 3.1.** Soit  $\psi(t_1, t_2) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$  une ondelette à support compact et soit  $N \geq 1$  moments nuls. Les coefficients d'ondelettes de drap Brownien fractionnaire  $B^{H_1, H_2}$  définis dans (3.3) ont les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}^2$  : le processus  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)$  est gaussien centré.
2. Pour  $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$  fixe, on a

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left[ 2^{j_1(H_1+1/2)+j_2(H_2+1/2)} \right] d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, k), \forall k \in \mathbb{Z}^2; \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ .

3. Pour  $j \in \mathbb{Z}^2$  fixe, on obtient :

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k+h) \stackrel{\mathcal{L}}{=} d_{B^{H_1, H_2}}(j, k), \forall k, h \in \mathbb{Z}^2. \quad (3.5)$$

4. Soient  $j = (j_1, j_2)$ ,  $j' = (j'_1, j'_2) \in \mathbb{Z}^2$  sont fixes, et pour  $k = (k_1, k_2)$ ,  $k' = (k'_1, k'_2) \in \mathbb{Z}^2$ .  
Si  $\min_{1 \leq i \leq 2} |2^{j_i} k_i - 2^{j'_i} k'_i| \rightarrow +\infty$ , alors

$$\mathbb{E}[d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) d_{B^{H_1, H_2}}(j', k')] \approx \left( |2^{j_1} k_1 - 2^{j'_1} k'_1|^{2H_1 - 2N} \right) \left( |2^{j_2} k_2 - 2^{j'_2} k'_2|^{2H_2 - 2N} \right). \quad (3.6)$$

**Preuve.**

1. Nous avons :

$$\mathbb{E}[d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[B^{H_1, H_2}(t) \psi_{j, k}(t)] dt$$

$\mathbb{E}[B^{H_1, H_2}(t)]$  est une constante, et  $\int \psi_{j, k}(t) dt = 0$ , donc  $\mathbb{E}[d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)] = 0$ .

La gaussiennité de  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)$  du fait que le coefficient d'ondelettes du processus gaussien est gaussien.

2. Cette propriété découle de l'auto-similarité de  $B^H$ .

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) = 2^{-1/2(j_1 + j_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(2^{-j_1} t_1 - k_1) \psi(2^{-j_2} t_2 - k_2) \cdot B^{H_1, H_2}(t) dt;$$

par le changement de variable :  $t'_i = 2^{-j_i} t_i$ , donc  $t_i = 2^{j_i} t'_i$  et  $dt_i = 2^{j_i} dt'_i$ , on obtient :

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) = 2^{1/2(j_1 + j_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t'_1 - k_1) \psi(t'_2 - k_2) \cdot B^{H_1, H_2}(2^{j_1} t'_1, 2^{j_2} t'_2) dt. \quad (3.7)$$

Par l'auto-similarité de drap Brownien fractionnaire  $B^{H_1, H_2}$ , on a

$$B^{H_1, H_2}(2^{j_1} t'_1, 2^{j_2} t'_2) = 2^{j_1 H_1} 2^{j_2 H_2} B^{H_1, H_2}(t'_1, t'_2) = 2^{(j_1 H_1 + j_2 H_2)} B^{H_1, H_2}(t'_1, t'_2).$$

Donc,

$$\begin{aligned} d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) &= 2^{1/2(j_1 + j_2)} 2^{(j_1 H_1 + j_2 H_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t'_1 - k_1) \psi(t'_2 - k_2) B^{H_1, H_2}(t'_1, t'_2) dt; \\ &= 2^{j_1(H_1 + 1/2) + j_2(H_2 + 1/2)} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t'_1 - k_1) \psi(t'_2 - k_2) B^{H_1, H_2}(t'_1, t'_2) dt; \end{aligned}$$

et comme

$$d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, k) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t'_1 - k_1) \psi(t'_2 - k_2) B^{H_1, H_2}(t'_1, t'_2) dt.$$

Donc :

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left[ 2^{j_1(H_1 + 1/2) + j_2(H_2 + 1/2)} \right] d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, k).$$

3. Soit  $d(j, k) = d(j, k_1, k_2), h = (h_1, h_2)$ . Sans perte de généralité, prenons  $j = \mathbf{0}$ . Nous vérifions d'abord la formule ci-dessous :

$$d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}; k_1 + h_1, k_2 + h_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}; k_1, k_2 + h_2). \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}; k_1 + h_1, k_2 + h_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t_1 - k_1 - h_1) \psi(t_2 - k_2 - h_2) B^H(t_1, t_2) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \psi(t'_1 - k_1) B^H(t'_1 + h_1, t_2) dt'_1 \right] \psi(t_2 - k_2 - h_2) dt_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Comme  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t'_1 - k_1) dt'_1 = 0$  et le processus  $B^{H_1, H_2}$  a des accroissements stationnaires par rapport à chaque variable, c'est-à-dire

$$B^{H_1, H_2}(t'_1 + h_1, t_2) - B^{H_1, H_2}(h_1, t_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B^{H_1, H_2}(t'_1, t_2) - B^{H_1, H_2}(0, t_2).$$

On peut voir

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t'_1 - k_1) B^{H_1, H_2}(t'_1 + h_1, t_2) dt'_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi(t'_1 - k_1) B^{H_1, H_2}(t'_1, t_2) dt'_1. \quad (3.10)$$

Alors, d'après l'équation (3.9), On obtient

$$d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, k + h) \stackrel{\mathcal{L}}{=} d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, k_1, k_2 + h_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, k).$$

4. Selon la fonction de covariance de  $B^{H_1, H_2}$ , on peut constater que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) d_{B^{H_1, H_2}}(j', k')] &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} [\psi_{j_1, k_1}(t_1) \psi_{j_2, k_2}(t_2) \psi_{j'_1, k'_1}(s_1) \psi_{j'_2, k'_2}(s_2)] \\ &\quad \times \mathbb{E}(B^{H_1, H_2}(t_1, t_2) B^H(s_1, s_2)) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} [\psi_{j_1, k_1}(t_1) \psi_{j_2, k_2}(t_2) \psi_{j'_1, k'_1}(s_1) \psi_{j'_2, k'_2}(s_2) \\ &\quad \times \frac{1}{2} (|s_1|^{2H_1} + |t_1|^{2H_1} - |s_1 - t_1|^{2H_1}) \\ &\quad \times \frac{1}{2} (|s_2|^{2H_2} + |t_2|^{2H_2} - |s_2 - t_2|^{2H_2})] ds dt \\ &= R_{H_1}(s_1, t_1) R_{H_2}(s_2, t_2); \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec,

$$R_{H_1}(s_1, t_1) = \int_{\mathbb{R}^2} [\psi_{j_1, k_1}(t_1) \psi_{j'_1, k'_1}(s_1) \frac{1}{2} (|s_1|^{2H_1} + |t_1|^{2H_1} - |s_1 - t_1|^{2H_1})] ds_1 dt_1,$$

et

$$R_{H_2}(s_2, t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} [\psi_{j_2, k_2}(t_2) \psi_{j'_2, k'_2}(s_2) \frac{1}{2} (|s_2|^{2H_2} + |t_2|^{2H_2} - |s_2 - t_2|^{2H_2})] ds_2 dt_2.$$



Finalement, on obtient

$$\mathbb{E}[d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)d_{B^{H_1, H_2}}(j', k')] = \mathbb{E}[d_{B^{H_1}}(j_1, k_1)d_{B^{H_1}}(j'_1, k'_1)]\mathbb{E}[d_{B^{H_2}}(j_2, k_2)d_{B^{H_2}}(j'_2, k'_2)] \quad (3.12)$$

où  $B^{H_1}$  et  $B^{H_2}$  sont deux mouvement Brownien fractionnaire avec les exposant de Hurst  $H_1$  et  $H_2$  respectivement.

(Tewfik and Kim (1992)) et (Dijkerman and Mazumdar (1994)) ont traité les corrélations entre les coefficients d'ondelettes de le mouvement brownien fractionnaire, et ont été montré que ces corrélations satisfait :

Si  $|2^{j_1}k_1 - 2^{j'_1}k'_1| \rightarrow \infty$ , alors :

$$\mathbb{E}[d_{B^H}(j_1, k_1)d_{B^H}(j'_1, k'_1)] \approx |2^{j_1}k_1 - 2^{j'_1}k'_1|^{2H-2N};$$

ici  $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$ , et  $B^H$  est mBf avec l'exposant de Hurst  $H$ , et l'ondelette nous utilisé a un support compact. Finalement, on a

$$\mathbb{E}(d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)d_{B^{H_1, H_2}}(j', k')) \approx (|2^{j_1}k_1 - 2^{j'_1}k'_1|^{2H_1-2N})(|2^{j_2}k_2 - 2^{j'_2}k'_2|^{2H_2-2N}). \quad \square$$

**Remarque 3.1.** Au vu de l'équation (3.6), pour éviter la dépendance à long terme au processus  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)$ , c'est-à-dire pour s'assurer que

$$\sum_{j, k \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{E}|d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)d_{B^{H_1, H_2}}(\mathbf{0}, \mathbf{0})| < \infty,$$

il faut choisir

$$N > \max_{1 \leq i \leq 2} H_i + \frac{1}{2}, \text{ c'est à dire } \max_{1 \leq i \leq 2} (2H_i - 2N) < -1. \quad (3.13)$$

Sous cette condition, la corrélation de  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)$  tend rapidement vers 0 avec de grands retards. En d'autres termes, cette condition peut garantir que les coefficients d'ondelettes sont un processus à mémoire courte.

**Calcul des coefficients d'ondelettes hyperboliques :** Au vu de l'équation (3.3), la les coefficients d'ondelettes hyperboliques de drap brownien fractionnaire peuvent être obtenus en calculant séquentiellement les coefficients d'ondelettes unidimensionnel de chaque direction en utilisant l'algorithme pyramidal rapide. Cette méthode a été introduite par (Roux et al. (2013)) dans le cas bidimensionnel.

$$d_{B^{H_1, H_2}}(j, k) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{j_2, k_2}(t_2) \int_{\mathbb{R}} \psi_{j_1, k_1}(t_1) B^{H_1, H_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

### 3.2 L'estimation de l'exposant de Hurst de drap Brownienne fractionnaire

Dans cette section, nous introduisons un estimateur du paramètre de Hurst de drap Brownien fractionnaire.

Soit  $\psi(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  une ondelette à support compact et vérifie la propriété que les moments d'ordre  $N \geq 1$  sont nuls. D'après les équations (3.4) et (3.5), les coefficients d'ondelettes de dBf satisfait l'équation :

$$\mathbb{E}\left[d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)\right] = C_{B^{H_1, H_2}} 2^{j_1(2H_1+1)+j_2(2H_2+1)}; \quad (3.14)$$

où  $B^{H_1, H_2}$  est une dBf avec paramètre de Hurst  $H = (H_1, H_2)$ ,  $C_{B^{H_1, H_2}} = \mathbb{E}\left[d_{B^{H_1, H_2}}^2(\mathbf{0}, \mathbf{0})\right]$  ne dépend que de  $B^{H_1, H_2}$ ,  $j = (j_1, j_2)$ , et  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

Prendre le logarithme-2 dans (3.14), on obtient :

$$\log_2\left[\mathbb{E}\left(d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)\right)\right] = j_1(2H_1 + 1) + j_2(2H_2 + 1) + \log_2[C_{B^{H_1, H_2}}]. \quad (3.15)$$

Ainsi l'estimation de  $H$  peut être réalisée avec une régression linéaire dans la partie gauche en fonction du diagramme  $j$ . La variance empirique  $S(j)$  des coefficients d'ondelette  $\mathbb{E}\left[d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)\right]$  à l'échelle  $j$  est donné par :

$$S(j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} d_{B^{H_1, H_2}}^2(j; k_1, k_2); \quad (3.16)$$

où  $n_j$  le nombre des coefficients  $d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)$  à l'échelle  $j$  et  $N$  le nombre d'observation.

Nous avons indiqué que  $\log_2 S(j)$  est la variable dépendante de la régression linéaire souhaitée. Noter que

$$\mathbb{E} \log_2 S(j) \neq \log_2 \mathbb{E} S(j) = \log_2 \mathbb{E} d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k). \quad (3.17)$$

Cela conduit au biais de notre estimateur. Les différentes variances de  $\log_2 S(j)$  à différents  $j$  rendent les moindres carrés ordinaires inadaptés à ce modèle de régression. Donc nous utilisons les moindres carrés pondérés pour estimer le paramètre de Hurst. Le poids pour cette régression est l'inverse de la variance de  $\log_2 S(j)$ . Ensuite, nous allons corriger le biais de  $\log_2 S(j)$  et calculer le poids par la variance de  $\log_2 S(j)$ .

### 3.3 Le biais et la variance de $\log_2 S(j)$

Rappelons la propriété de  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, k)$ , les processus  $\{d_{B^{H_1, H_2}}(j, k), j, k \in \mathbb{Z}^2\}$  sont gaussiens et pour  $j$  fixe les  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, \cdot)$  sont identiquement distribués. D'après la

remarque 3.1, soit le nombre de moments nuls  $N \geq 2$ . Il est raisonnable d'imposer les hypothèses d'indépendance suivantes comme celles imposées par (Abry et al. (2000)) dans le cas unidimensionnelle.

**Hypothèses :**

(H1). Pour  $j$  fixe, les  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, \cdot)$  sont indépendants.

(H2). Les champs  $d_{B^{H_1, H_2}}(j, \cdot)$  et  $d_{B^{H_1, H_2}}(j', \cdot)$ ,  $j \neq j'$ , sont indépendants.

Soit  $X_v$  une variable aléatoire suit la loi du Khi-deux carré à  $v$  degrés de liberté, c'est-à-dire  $X_v \sim \chi^2(v)$ .

D'après l'hypothèse (H1) et la proposition (3.1), on a

$$S(j) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\mathbb{E}[d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)]}{n_j} \cdot X_{n_j}. \quad (3.18)$$

Évidemment,

$$\mathbb{E}(S(j)) = \frac{\mathbb{E}(d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k))}{n_j} \cdot \mathbb{E}(X_{n_j}) = \mathbb{E}(d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)). \quad (3.19)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \log_2(S(j)) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \log_2[\mathbb{E}d_{B^{H_1, H_2}}^2(j, k)] + \log_2(X_{n_j}) - \log_2(2n_j) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} j_1(2H_1 + 1) + j_2(2H_2 + 1) + \log_2(C_{B^{H_1, H_2}}) + \log_2(X_{n_j}) - \log_2(n_j) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[\log_2(S(j))] = j_1(2H_1 + 1) + j_2(2H_2 + 1) + \log_2(C_{B^{H_1, H_2}}) + g(j) \quad (3.21)$$

$$Var(\log_2 S(j)) = Var(\log_2(X_{n_j})) \quad (3.22)$$

où

$$g(j) = \mathbb{E}(\log_2(X_{n_j})) - \log_2(n_j). \quad (3.23)$$

Sous l'hypothèse (H1), puisque  $X_v \sim \chi^2(v)$ , on va calculer les valeurs exacte de  $g(j)$  et  $Var[\log_2(S(j))]$ , (voir (Abry et al. (2000, 2003))). Donc

$$g(j) = \frac{\Gamma'(\frac{n_j}{2})}{\Gamma(\frac{n_j}{2}) \ln 2} - \log_2\left(\frac{n_j}{2}\right), \quad (3.24)$$

et

$$Var[\log_2(S(j))] = \frac{\zeta\left(2, \frac{n_j}{2}\right)}{\ln^2(2)}; \quad (3.25)$$

où

$$\zeta(2, z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(z+x)^2}$$

est la fonction Zeta de Riemann généralisée,  $\Gamma$  est fonction Gamma, et  $\Gamma'$  est sa dérivée.

Définissons les variables  $y(j)$  comme suite :

$$y(j) = \log_2 S(j) - g(j).$$

Donc

$$y(j) = j_1(2H_1 + 1) + j_2(2H_2 + 1) + \log_2(C_{B^{H_1, H_2}}) + \log_2(X_{n_j}) - \mathbb{E}(\log_2(X_{n_j}))$$

Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, nous avons

$$\mathbb{E}(y(j)) = j_1(2H_1 + 1) + j_2(2H_2 + 1) + \log_2(C_{B^{H_1, H_2}}); \quad (3.26)$$

$$Var(y(j)) = Var(\log_2 S(j)); \quad (3.27)$$

et

$$Cov(y(j), y(j')) = 0. \quad \text{pour } j \neq j'. \quad (3.28)$$

Il satisfait aux exigences d'une régression linéaire pondérée.

Mettre le poids

$$p(j) = \frac{1}{Var(y(j))}.$$

Selon la régression linéaire pondérée, on peut obtenir l'estimateur de  $H$ , noté  $\hat{H} = (\hat{H}_1, \hat{H}_2)'$ .

Plus en détail, notons  $j_l = (j_{1l}, j_{2l})$  les bornes inférieures de  $j$ , et  $j_u = (j_{1u}, j_{2u})$  désignent les bornes supérieures de  $j$ , c'est-à-dire que les valeurs de  $j$  sont choisies  $j_{il} \leq j_i \leq j_{iu}$  pour toutes les directions  $i$ . Donc le nombre total des valeurs de  $j$  est :

$$m = (j_{1u} - j_{1l} + 1)(j_{2u} - j_{2l} + 1).$$

Soit

$$Y = (y(j))_{m \times 1}, \quad X = (j, 1)_{m \times 3}, \quad \alpha = (2H_1 + 1, 2H_2 + 1, \log_2(C_{B^{H_1, H_2}}))',$$

$$g = (g(j))_{m \times 1}, \quad \mathbf{P} = \text{diag}(p(j))_{m \times m};$$

avec

$$Y = X\alpha + g$$

c'est à dire, le paramètre de Hurst  $H = (H_1, H_2)$  est estimé par la régression linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} y(j_1) \\ \vdots \\ y(j_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ j_{m1} & j_{m2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2H_1 + 1 \\ 2H_2 + 1 \\ \log_2(C_{B^{H_1, H_2}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(j_1) \\ \vdots \\ g(j_m) \end{pmatrix}$$

l'estimation de la régression pondérée peut être obtenue par minimiser :

$$\|Y - X\alpha\|_{\mathbf{P}}^2 = (Y - X\alpha)' \mathbf{P} (Y - X\alpha).$$

Alors, l'estimation des moindres carrés donne l'estimateur

$$\hat{\alpha} = (X' \mathbf{P} X)^{-1} X' \mathbf{P} Y \tag{3.29}$$

$$\hat{H} = 1/2(\hat{\alpha} - 1). \tag{3.30}$$

où

$$\hat{H} = \left( \hat{H}_1, \hat{H}_2, \log_2 \widehat{(C_{B^{H_1, H_2}}})/2 - 1/2 \right)';$$

avec  $\hat{H}_1$  et  $\hat{H}_2$  sont les estimateurs d'ondelettes de  $H_1$   $H_2$  respectivement.

**Remarque 3.2.** Dans le cas unidimensionnelle, l'estimateur décrit ci-dessus dégénère en l'estimateur basé sur les ondelettes pour les processus auto-similaire ou spécialement le mouvement brownien fractionnaire proposé par (Abry and Veitch (1998); Abry et al. (2000, 2003)), (Millen and Beard (2003)).

---

## *Conclusion*

---

Dans ce mémoire, nous nous sommes attachés à montrer l'intérêt de l'utilisation du drap Brownien fractionnaire et l'estimation de paramètre de Hurst basé sur les coefficients d'ondelettes.

En premier lieu, nous avons rappelé quelques notions du processus stochastique et résultats utiles du mouvement brownien et du drap brownien.

Ensuite, nous avons présenté une extension du mouvement Brownien fractionnaire ordinaire, à savoir le drap Brownien fractionnaire. Cet outil constitue le coeur mathématique de ce mémoire. Nous avons cité ses différentes propriétés, parmi lesquelles nous nous concentrons sur l'auto-similarité et la stationnarité des accroissements qui sont considéré comme des points faibles de ce processus.

Finalement, nous avons proposés un estimateur  $\tilde{H}$  pour les paramètres de Hurst  $H = (H_1, H_2)$  du drap brownien fractionnaire, qui joue un rôle important dans la modélisation des champs gaussiens anisotropes auto-similaires. L'estimateur proposé est basé sur la stationnarité et l'invariance d'échelle des coefficients d'ondelettes hyperboliques de drap brownien fractionnaire et les moindres carrés pondérés.

---

## Bibliographie

---

- P. Abry and D. Veitch. Wavelet analysis of long-range-dependent traffic. *IEEE transactions on information theory*, 44(1) :2–15, 1998.
- P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch. Wavelets for the analysis, estimation, and synthesis of scaling data. *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, pages 39–88, 2000.
- P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, D. Veitch, et al. Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens. *Theory and applications of long-range dependence*, 1 :527–556, 2003.
- A. M. Atto, Y. Berthoumieu, and P. Bolon. 2-d wavelet packet spectrum for texture analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(6) :2495–2500, 2013.
- A. Ayache, S. Leger, and M. Pontier. Drap brownien fractionnaire. *Potential analysis*, 17 :31–43, 2002.
- S. Benmehdi. *Estimation bayésienne de l'exposant de Hurst*. PhD thesis, Université de M'sila, 2016.
- A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic analysis of some gaussian models. *Journal of Fourier analysis and applications*, 9 :215–236, 2003.
- R. Cairoli and J. B. Walsh. *Stochastic integrals in the plane*. 1975.
- I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.

- C. R. Dietrich and G. N. Newsam. Fast and exact simulation of stationary gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(4) :1088–1107, 1997.
- R. W. Dijkerman and R. R. Mazumdar. On the correlation structure of the wavelet coefficients of frational brownian motion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(5) :1609–1612, 1994.
- P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. Taqqu. *Theory and applications of long-range dependence*. Springer Science & Business Media, 2002.
- H. E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American society of civil engineers*, 116(1) :770–799, 1951.
- S. Léger and M. Pontier. Drap brownien fractionnaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 329(10) :893–898, 1999.
- S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 1999.
- B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, 10(4) :422–437, 1968.
- P. Meyer. Théorie élémentaire des processus à deux indices. In *Processus Aléatoires à Deux Indices : Colloque ENST-CNET, Paris 1980*, pages 1–39. Springer, 1981.
- M. Michta and K. Ł. Świątek. Set-valued stochastic integrals and equations with respect to two-parameter martingales. *Stochastic Analysis and Applications*, 33(1) : 40–66, 2015.
- V. Mignon. Méthodes d'estimation de l'exposant de hurst. application aux rentabilités boursières. *Économie & prévision*, 132(1) :193–214, 1998.
- S. Millen and R. Beard. Estimation of the hurst exponent for the burdekin river using the hurst-mandelbrot rescaled range statistic. 2003.
- C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical review e*, 49(2) :1685, 1994.
- B. Pesquet-Popescu and J. L. Véhel. Stochastic fractal models for image processing. *IEEE signal processing magazine*, 19(5) :48–62, 2002.
- S. G. Roux, M. Clausel, B. Vedel, S. Jaffard, and P. Abry. Self-similar anisotropic texture analysis : The hyperbolic wavelet transform contribution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(11) :4353–4363, 2013.



- A. Scipioni, P. Rischette, and G. Bonhomme. Mouvement brownien fractionnaire : choix de l'ondelette dans l'estimation de l'exposant de hurst. In *21st GRETSI Symposium on Signal and Image Processing*, pages 11–14, 2007.
- A. H. Tewfik and M. Kim. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional brownian motion. *IEEE transactions on information theory*, 38(2) : 904–909, 1992.
- D. Veitch and P. Abry. A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(3) :878–897, 1999.
- L. Wu. A note on wavelet-based estimator of the hurst parameter. *Entropy*, 22(3) : 349, 2020.

## ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو تقديم الخصائص الأساسية للورقة البراونية الكسرية، و تقدير معامل هيرست. حيث يعتمد هذا التقدير على بعض خصائص معاملات الموجة الزائدية للورقة البراونية الكسرية، وإستعمال طريقة المربعات الصغرى الموزونة للانحدار الخطي المتعدد.

**الكلمات المفتاحية:** ورقة براونية كسرية، معامل هيرست، تحويلات موجية، المربعات الصغرى الموزونة

## Abstract

The main objective of this work is to present the fractional Brownian sheet citing its properties, and to study the problem of estimating the Hurst parameter  $H = (H_1, H_2)$  of the Brownian sheet fractional based on stationarity and scale invariance of fractional Brownian sheet hyperbolic wavelet coefficients and the weighted least squares method of multiple linear regression.

**Keywords:** fractional Brownian sheet, Hurst parameter, wavelet transform, weighted least square.

## Résumé

L'objectif principale de ce mémoire est de présenter le drap Brownien fractionnaire en citant ses propriétés, et d'étudier le problème d'estimation du paramètre de Hurst  $H = (H_1, H_2)$  du drap brownien fractionnaire basé sur la stationnarité et l'invariance d'échelle des coefficients d'ondelettes hyperboliques de drap brownien fractionnaire et la méthode des moindres carrés pondérés de la régression linéaire multiple.

**Mots Clé :** Drap Brownien fractionnaire, paramètre de Hurst, transformée en ondelettes, moindre carrée pondéré.

